

# PGF5312 – 2 FUNDAMENTOS DE PROCESSAMENTO DIGITAL DE IMAGENS MÉDICAS

## Aula 3– Imagens médicas: Domínio de frequências\_parte 1

**Paulo R. Costa**

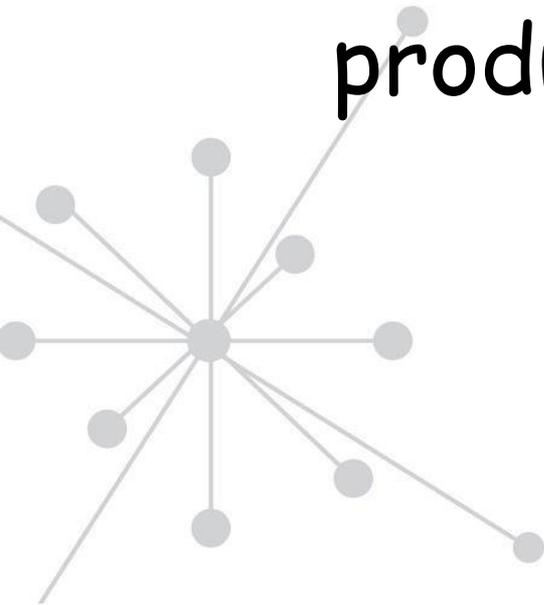
Grupo de Dosimetria das Radiações  
e Física Médica

Instituto de Física - USP

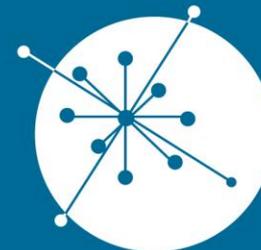
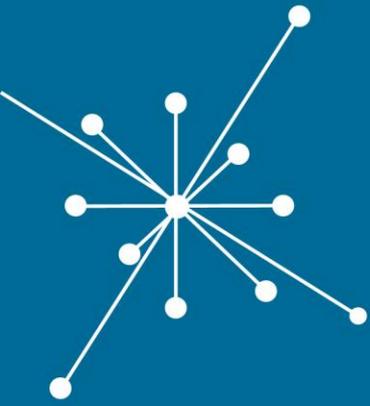
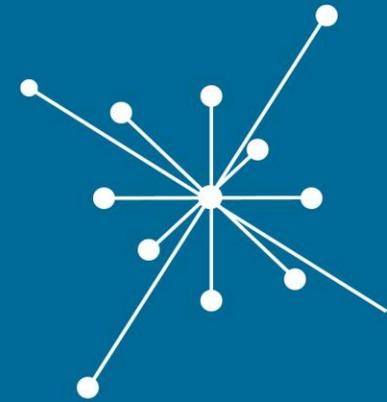


# O que veremos hoje

- Domínios espacial e de frequência
- Frequência espacial
- Transformada cosseno e de Hartley
- Transformada de Fourier e o produto de convolução



# Domínios espacial e de frequência



GRUPO DE  
**DOSIMETRIA  
DAS RADIAÇÕES**  
e FÍSICA MÉDICA

---

IFUSP - Instituto de Física da USP

- **O domínio espacial**

- Correspondência com o “mundo real”

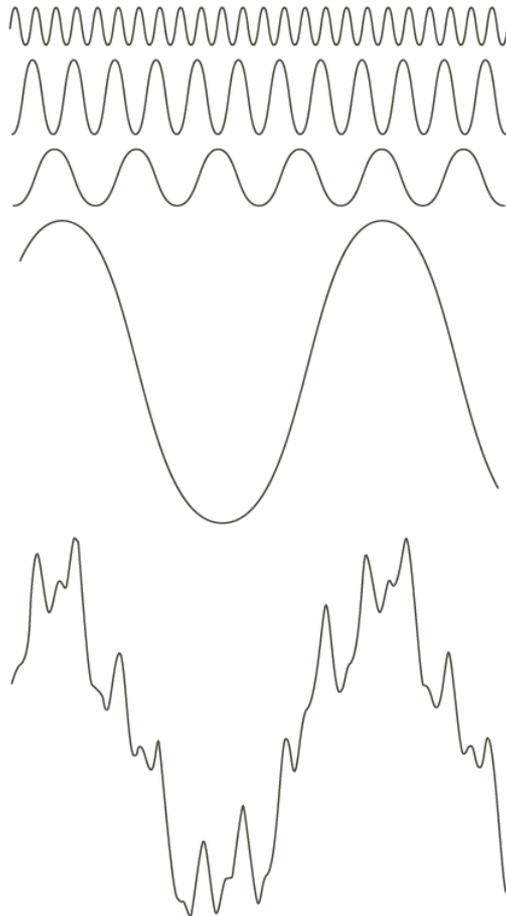
- Manipulações de imagens que normalmente fazemos de forma doméstica “não profissional”. Exemplos?

- **Qual a primeira coisa que você pensa quando ouve o termo “frequência”?**

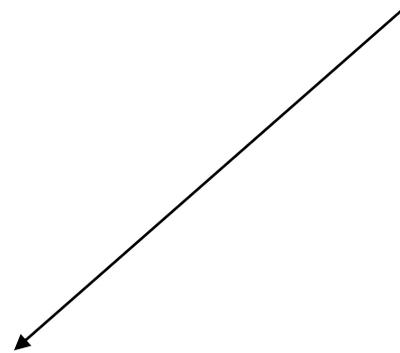
- Senso comum: domínio temporal

- Percepção de notas musicais



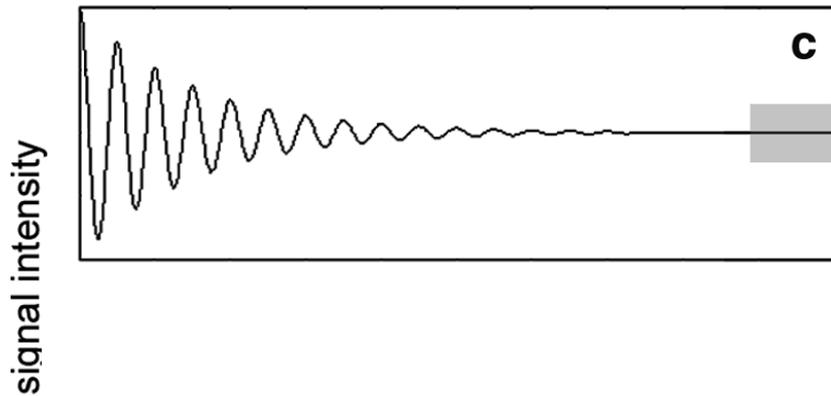


Essa função é a soma  
das quatro funções acima.



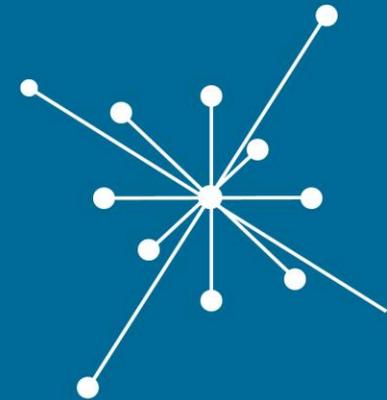
**FIGURE 4.1** The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.

# Imagens nos domínios espacial e de frequências

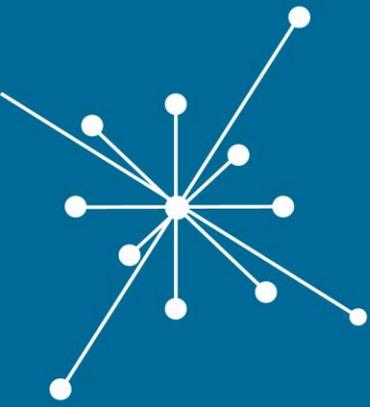


time

frequency



# Frequência espacial

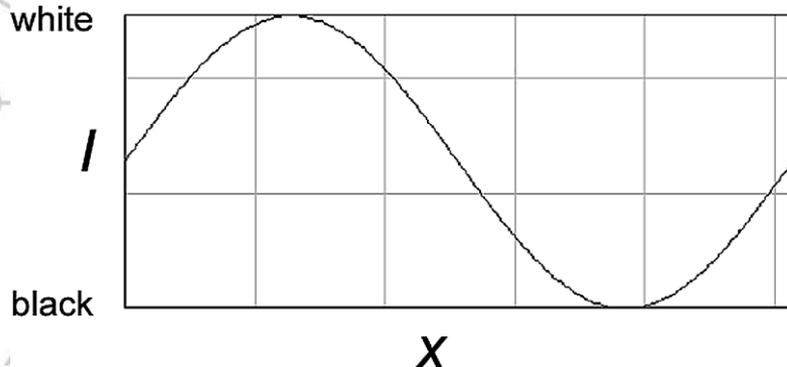
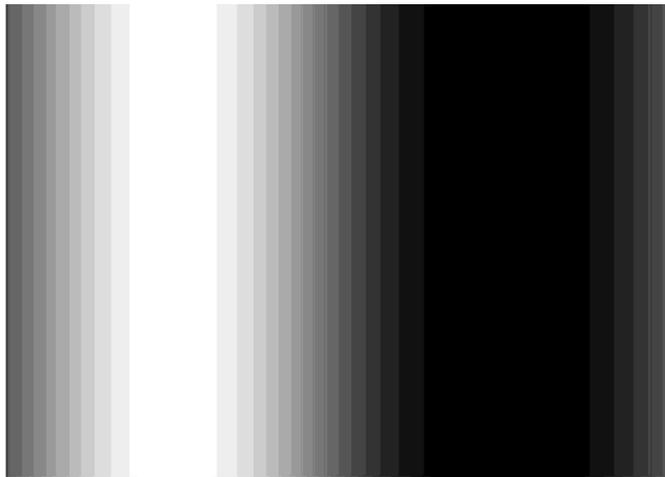


GRUPO DE  
**DOSIMETRIA**  
**DAS RADIAÇÕES**  
e FÍSICA MÉDICA

---

IFUSP - Instituto de Física da USP

- **O conceito de frequência espacial**  
→ Origem da ideia: processamento de sinais analógicos e digitais



$$I = \sin(\omega x)$$

Supondo uma imagem de 8 bits:

$2^8 = 256$  tons de cinza

0 – preto

255 - branco

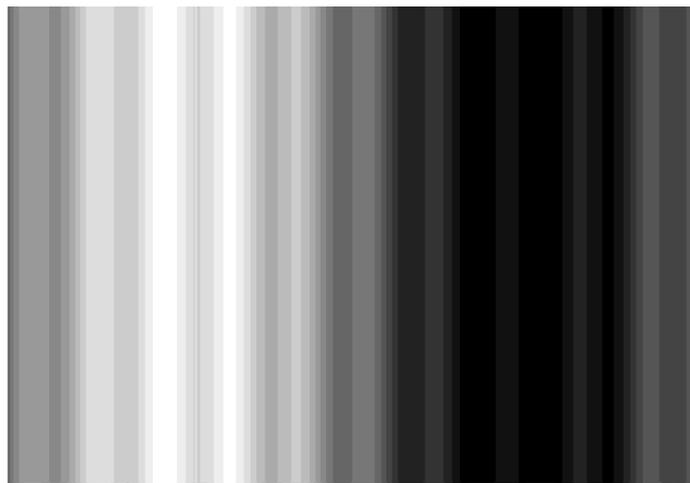
$$I = 127.5 \times \sin\left(2\pi\omega\frac{x}{m}\right) + 127.5$$

m – l  
2π –  
para

**Não precisamos  
por enquanto**

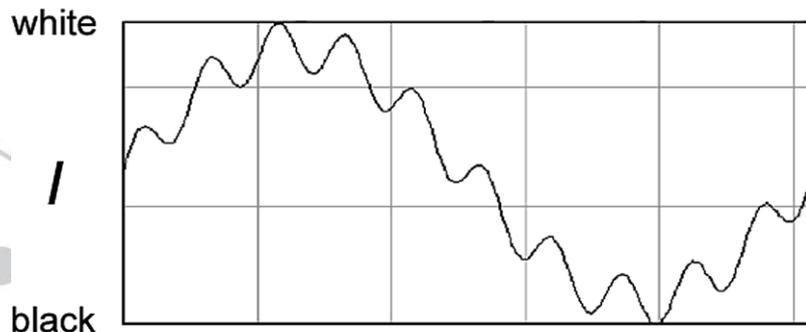
els  
em  
imagem

- **O conceito de frequência espacial**

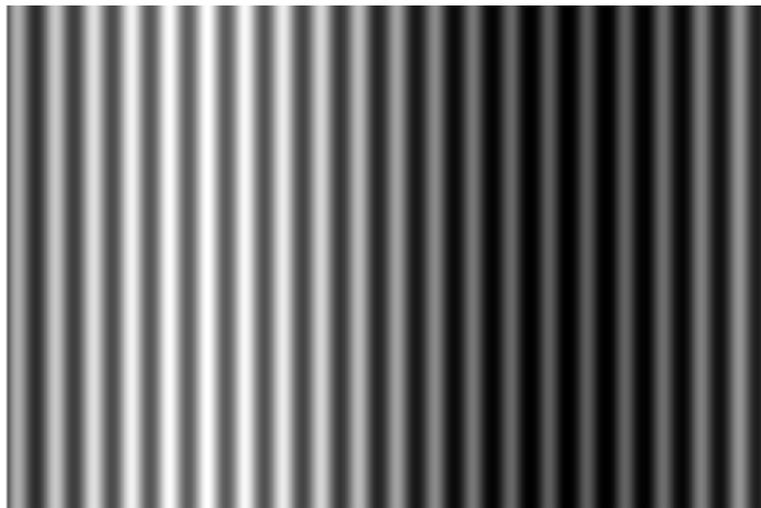


$$I = \sin(\omega_1 x) + \frac{1}{5} \sin(\omega_2 x)$$
$$\omega_2 = 10\omega_1 = 10 \frac{\text{ciclos}}{\text{larg. da imagem}}$$

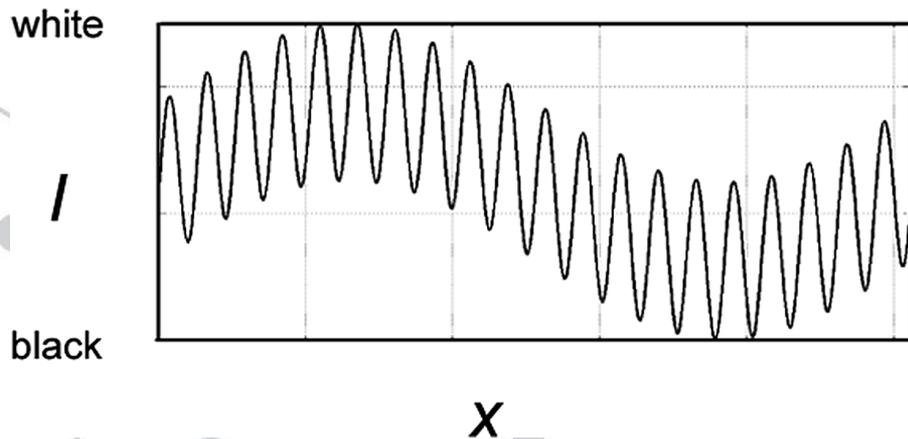
$$\omega_1 = \frac{1}{m} \text{ciclos/pixel}$$



- O conceito de frequência espacial



$$I = \sin(\omega x) + \sin(20\omega x)$$



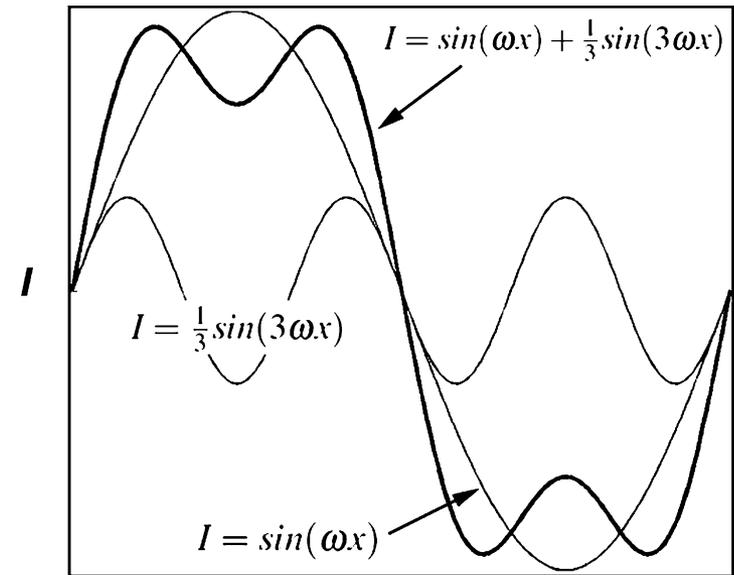
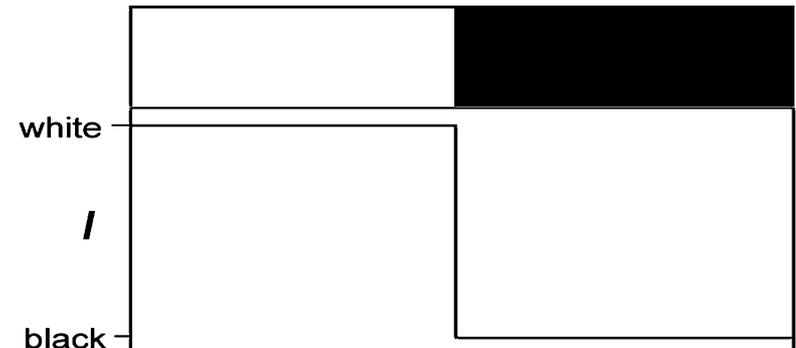
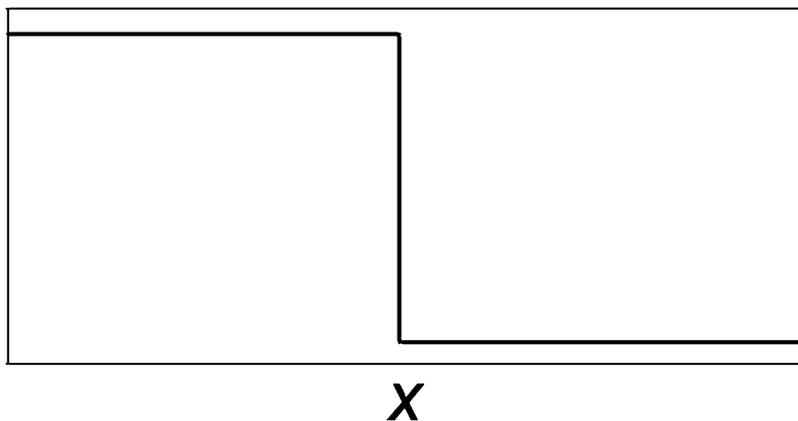
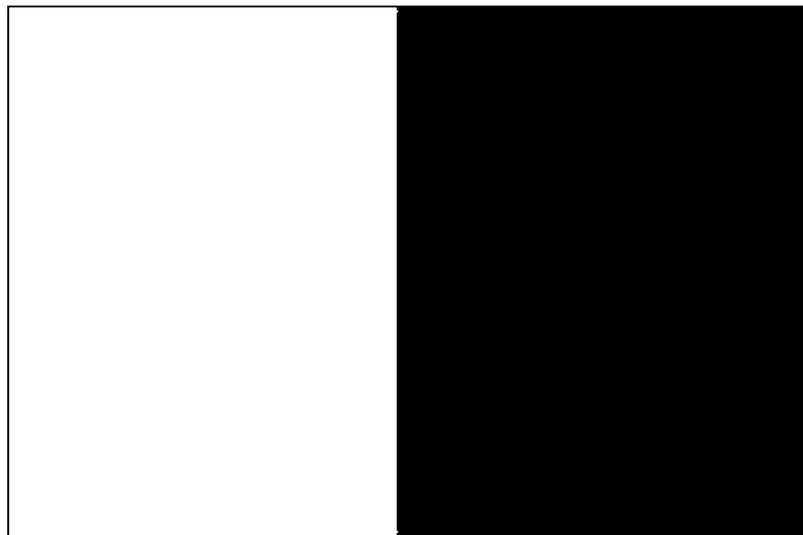
- **O conceito de frequência espacial**

## Princípio importante

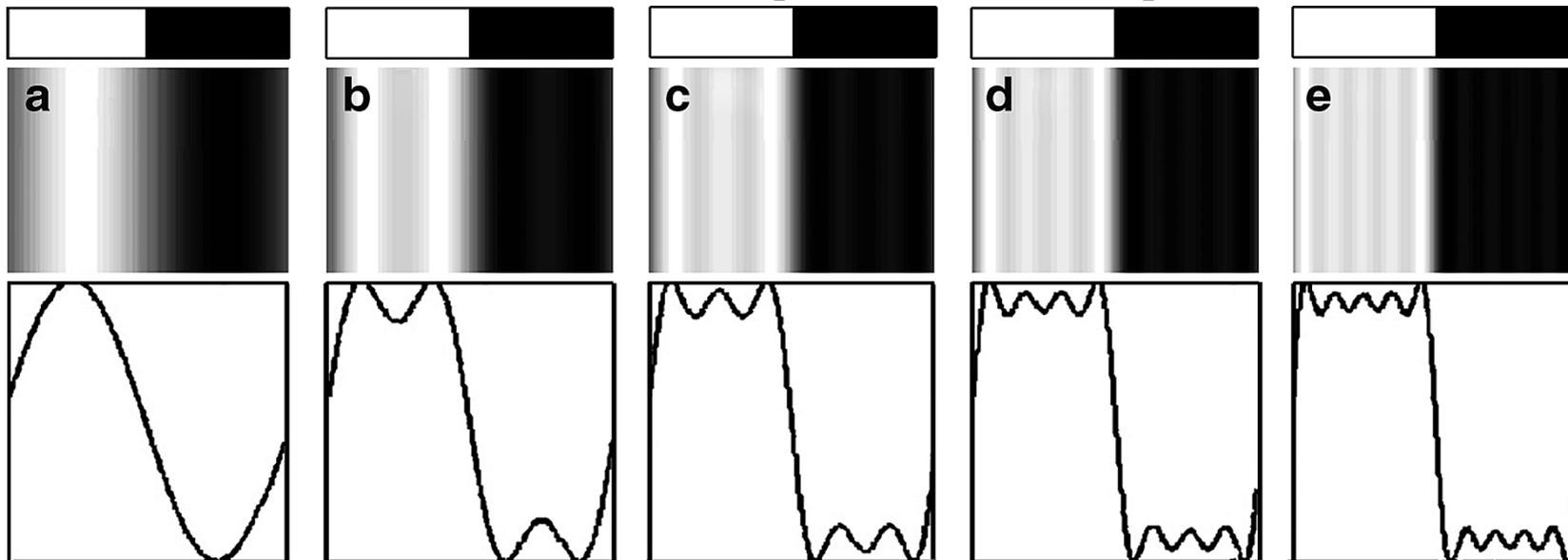
### do processamento de imagens:

Independentemente da complexidade do perfil de intensidades de uma imagem ela sempre pode ser decomposta por uma coleção de ondas senoidais e/ou cossenoidais de diferentes amplitudes e frequências

- O conceito de frequência espacial



- O conceito de frequência espacial



Caso especial de  
combinação de  
harmônicas ímpares

a  $I = \sin(\omega x)$

b  $I = \sin(\omega x) + \frac{1}{3}\sin(3\omega x)$

c  $I = \sin(\omega x) + \frac{1}{3}\sin(3\omega x) + \frac{1}{5}\sin(5\omega x)$

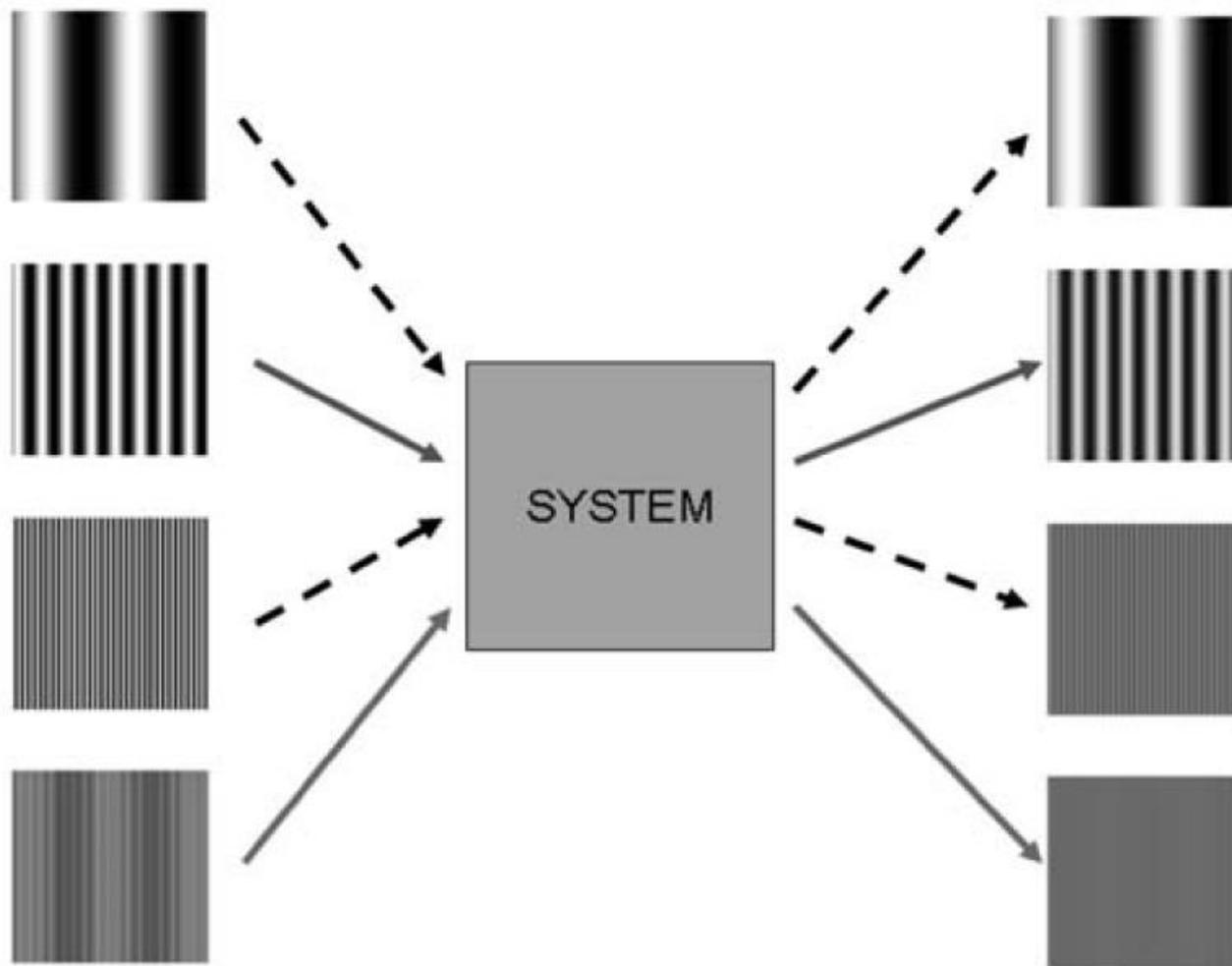
d  $I = \sin(\omega x) + \frac{1}{3}\sin(3\omega x) + \frac{1}{5}\sin(5\omega x) + \frac{1}{7}\sin(7\omega x)$

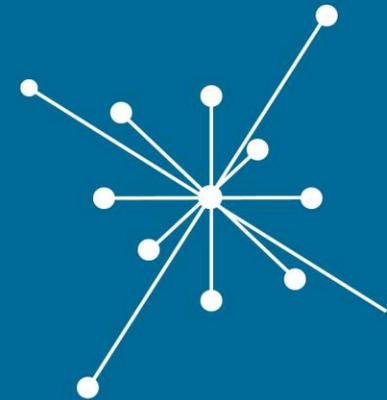
e  $I = \sin(\omega x) + \frac{1}{3}\sin(3\omega x) + \frac{1}{5}\sin(5\omega x) + \frac{1}{7}\sin(7\omega x) + \frac{1}{9}\sin(9\omega x)$

# Teoria de sistemas lineares

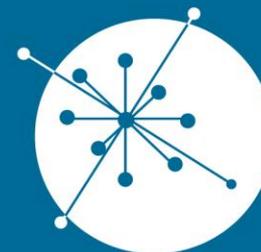
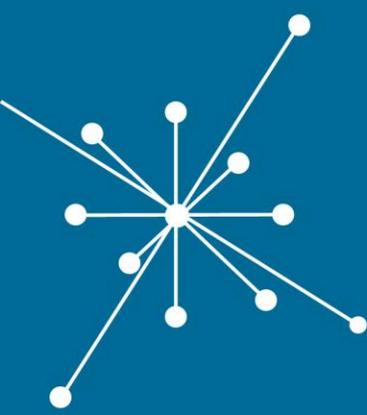
INPUT HARMONICS

OUTPUT HARMONICS





# Transformadas cosseno e de Hartley



GRUPO DE  
**DOSIMETRIA**  
**DAS RADIAÇÕES**  
e FÍSICA MÉDICA

---

IFUSP - Instituto de Física da USP

- **Transformadas cosseno e Hartley**

→ Transformada cosseno

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot c_{\omega} \cos \left( \pi \frac{\omega(2x+1)}{2N} \right)$$

Descrição precisa do perfil na linha ou coluna  $x$  somando-se  $N$  diferentes frequências espaciais

$N$  → número de pixels na imagem

Usada em métodos de compressão de imagens JPEG

Hartley

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \left[ \cos \left( \frac{2\pi n \omega}{N} \right) + \sin \left( \frac{2\pi n \omega}{N} \right) \right]$$

- **Transformada de Fourier**
- → Transformada de Fourier 1D

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos(2\pi\omega x) - i\sin(2\pi\omega x)) dx$$

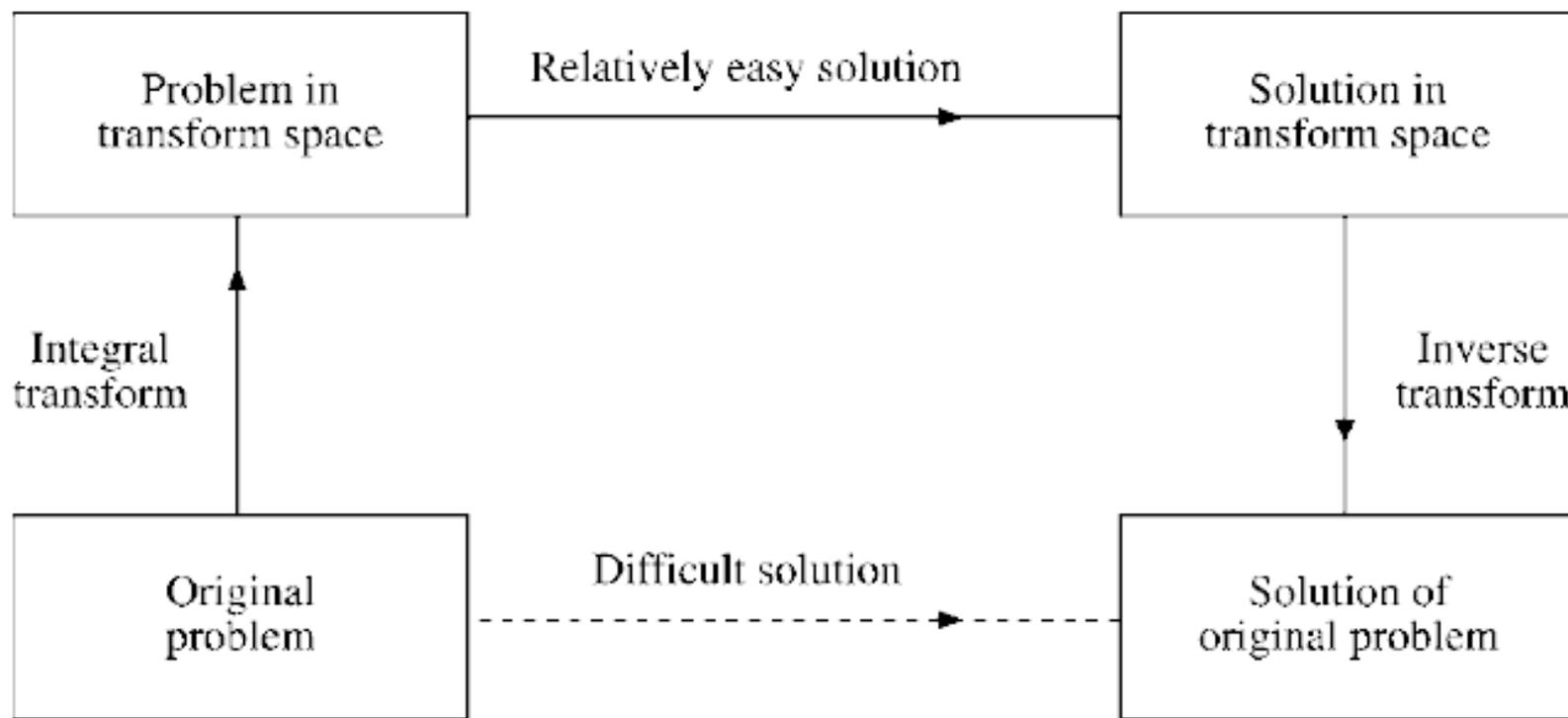
**inversa**

$$F(x) = \frac{1}{N} \sum_{\omega=0}^{N-1} f(\omega) \left( \cos\left(\frac{2\pi\omega x}{N}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi\omega x}{N}\right) \right)$$

**discreta**

$$F(\omega) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \left( \cos\left(\frac{2\pi\omega x}{N}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi\omega x}{N}\right) \right)$$

# Transformações integrais



# A TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNÇÕES CONTÍNUAS DE UMA VARIÁVEL

A transformada de Fourier de uma função contínua  $f(t)$ , é definida pela equação

$$F(\mu) = \mathfrak{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\mu t} dt$$

onde  $\mu$  é também uma variável contínua.

Dada  $F(\mu)$ , podemos obter  $f(t)$  usando a transformada inversa de Fourier

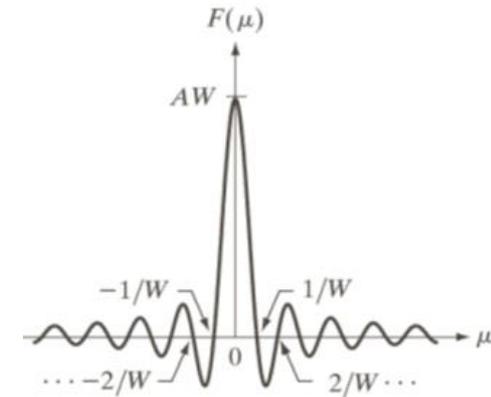
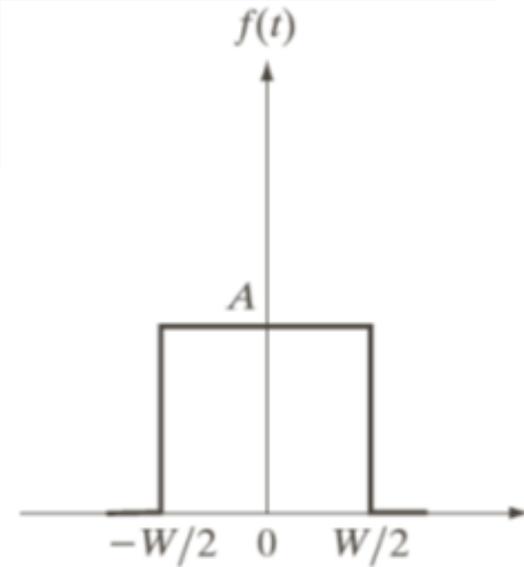
$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(\mu)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)e^{i2\pi\mu t} d\mu$$

Usando a fórmula de Euler podemos expressar

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos(2\pi\mu t) - i \sin(2\pi\mu t)] dt$$

Transformada de Fourier da função ao lado

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\mu t} dt = \int_{-W/2}^{W/2} A e^{-i2\pi\mu t} dt$$

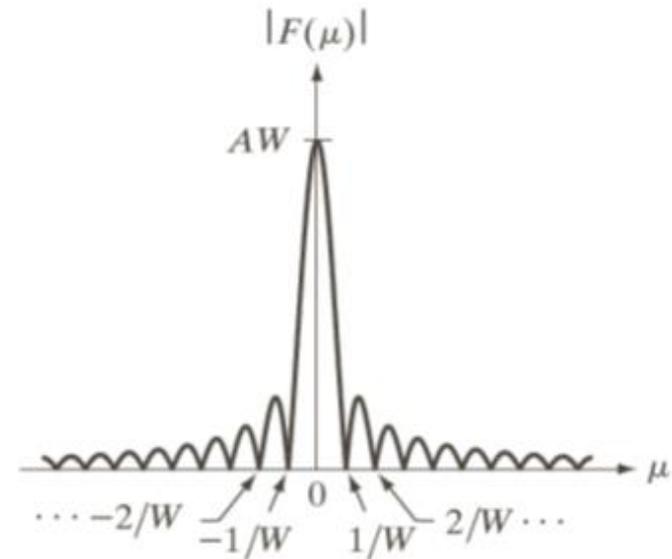


onde a identidade  $\sin \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) / 2i$  foi usada

E o resultado é uma função sinc:  $\text{sinc}(m) = \frac{\sin(\pi m)}{(\pi m)}$

# Espectro de Fourier ou espectro de frequência

$$|F(\mu)| = AW \left| \frac{\sin(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)} \right|$$



É importante observar que:

- as posições de zeros em ambas as figuras são inversamente proporcionais a largura  $W$ , da função.
- a altura dos picos decrescem com a distância da origem.
- a função estende a infinito positivo e negativo.

A convolução de duas funções contínuas  $f(t)$  e  $h(t)$ , é definida por

$$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

onde  $t$  é o deslocamento necessário para deslizar uma função sobre a outra.

A transformada de Fourier da equação acima seria obtida por

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau \right] e^{-i2\pi\mu t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)e^{-i2\pi\mu t} dt \right] d\tau$$

# CONVOLUÇÃO

O termo interno aos colchetes é a transformada de Fourier de  $h(t-\tau)$ .  
É possível demonstrar que  $\mathfrak{F}\{h(t-\tau)\} = H(\mu)e^{-i2\pi\mu\tau}$

onde  $H(\mu)$  é a transformada de Fourier de  $h(t)$ . Usando esse fato

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) [H(\mu)e^{-i2\pi\mu\tau}] d\tau \\ &= H(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) [e^{-i2\pi\mu\tau}] d\tau \\ &= H(\mu)F(\mu)\end{aligned}$$

**OPERAÇÃO BÁSICA DOS  
PROCESSOS DE FILTRAGEM  
E RESTAURAÇÃO DE  
IMAGENS**

O resultado é a primeira metade do teorema da convolução

$$f(t) * h(t) \Leftrightarrow H(\mu)F(\mu)$$

A outra metade é dada por

$$f(t)h(t) \Leftrightarrow H(\mu) * F(\mu)$$

# CONVOLUÇÃO

DEMONSTRAÇÃO 1D



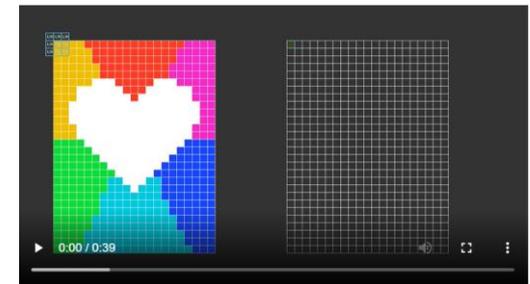
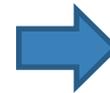
<https://lpsa.swarthmore.edu/Convolution/CI.html>

DEMONSTRAÇÃO 1D

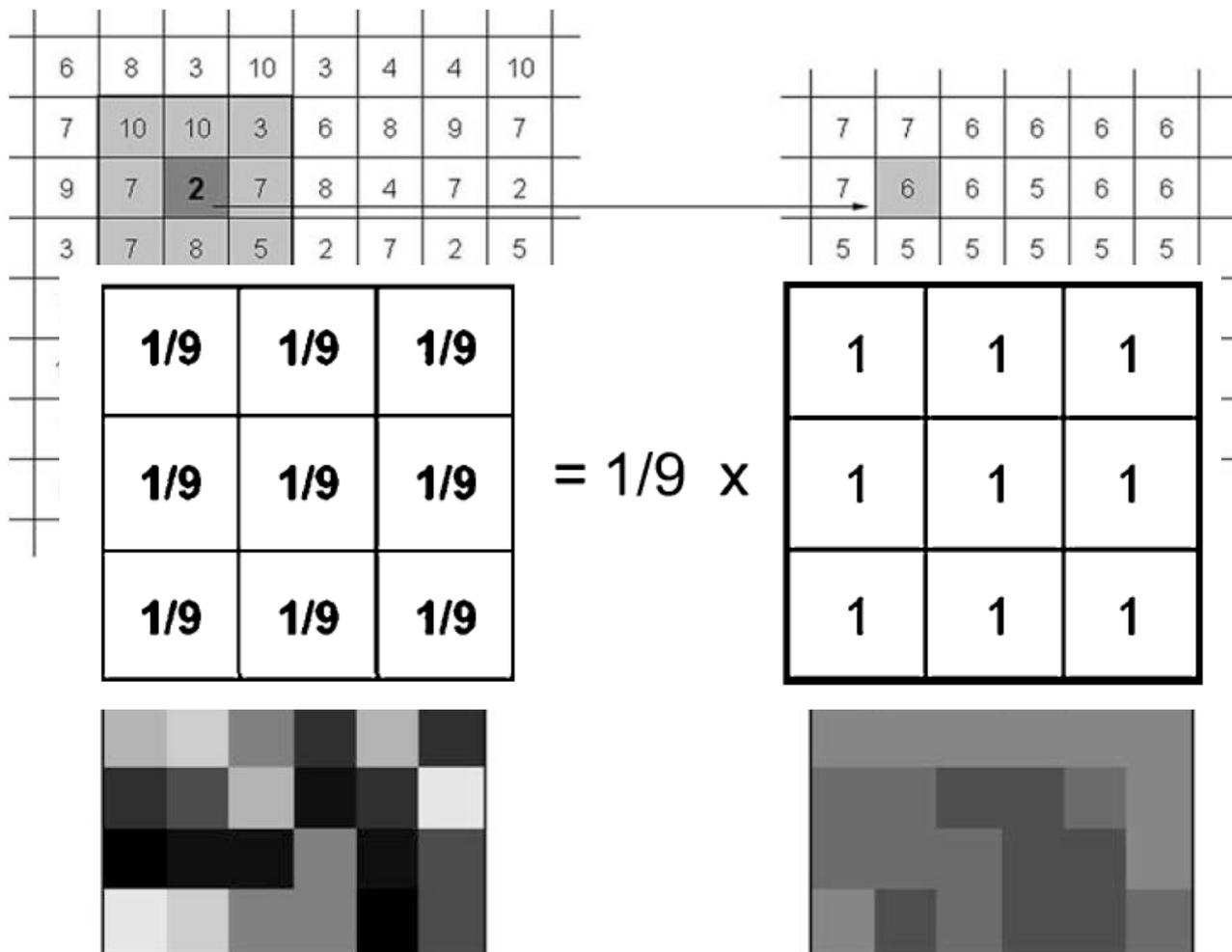


<https://youtu.be/N-zd-T17uiE>

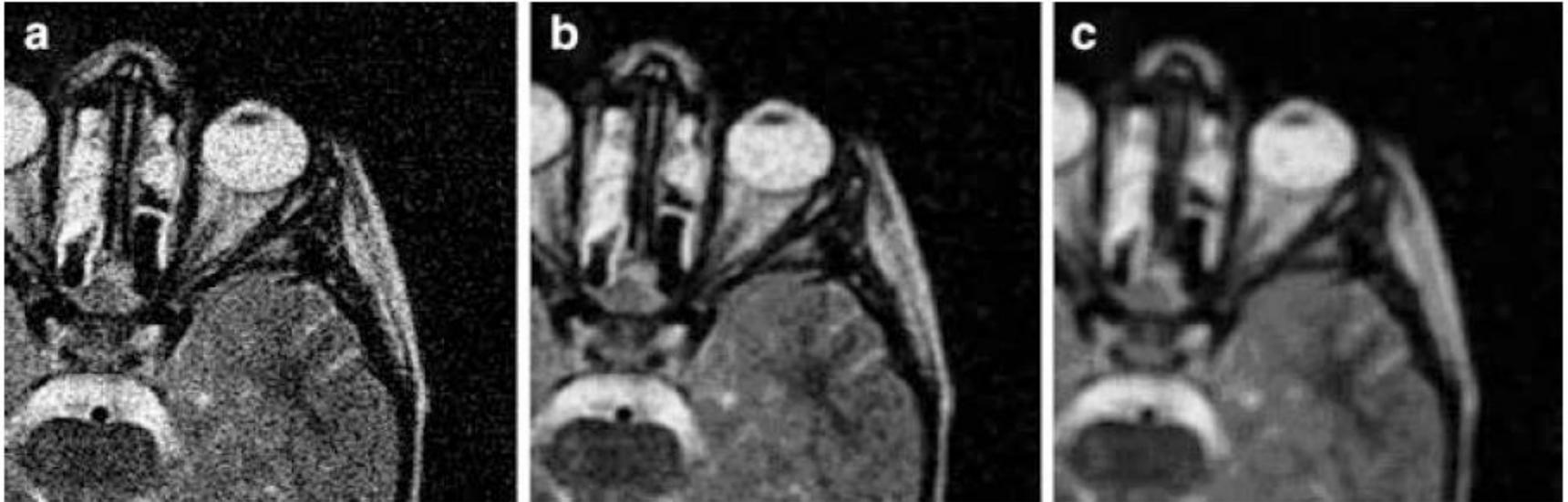
DEMONSTRAÇÃO 2D



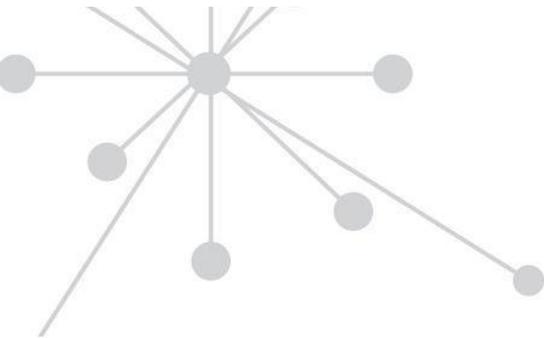
# CONVOLUÇÃO



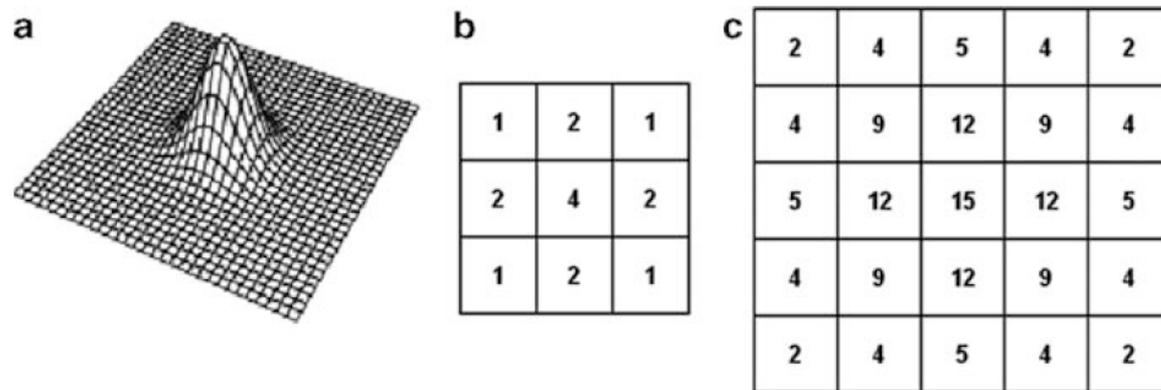
# CONVOLUÇÃO



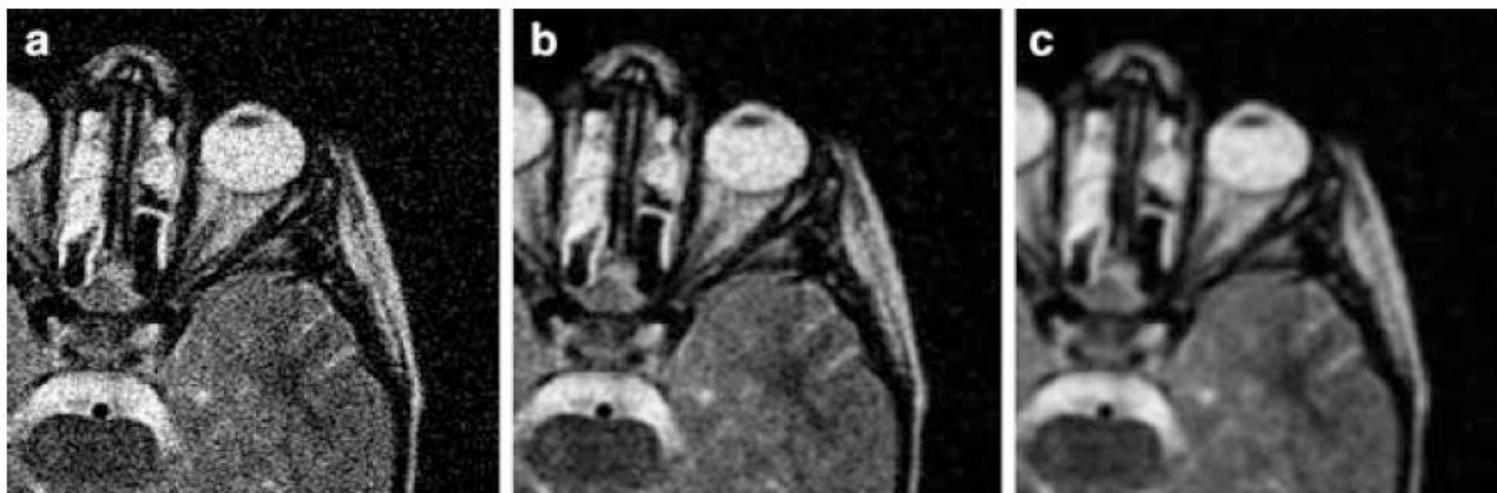
**Fig. 7.21** Illustration of the effect of simple averaging on image noise. (a) Noisy image. (b) Effect of  $3 \times 3$  averaging kernel. (c) Effect of  $5 \times 5$  averaging kernel. Although the noise is reduced there is significant blurring



# CONVOLUÇÃO



**Fig. 7.23** Gaussian convolution kernels are *discrete* approximations to a 2D Gaussian profile. (a) Perspective view of a 2D Gaussian profile. (b)  $3 \times 3$  approximation to a. (c)  $5 \times 5$  approximation to a. The effects of convolution with these two kernels are illustrated in Fig. 7.24



# Algumas propriedades da TF

TF de  $f(t)$   $g(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt.$

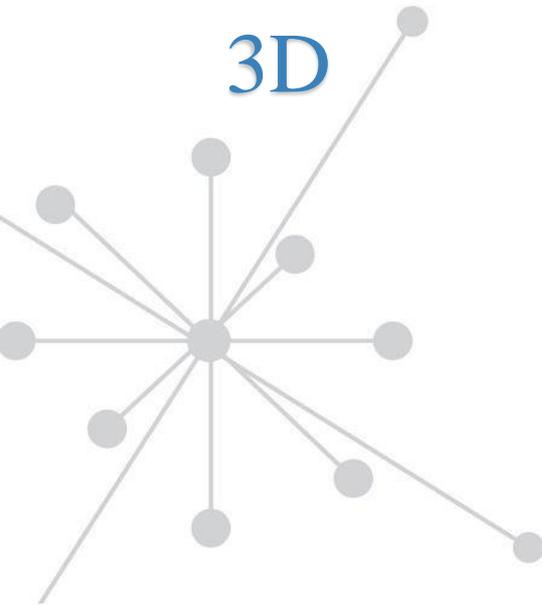
TF inversa  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t} d\omega.$

Quase simétricas

TF e inversa  
3D

$$g(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r,$$

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int g(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k.$$



# Algumas propriedades da TF

## Teorema da convolução

$$f * g \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(x-y) dy$$

$G(t) F(t)$   
↕   ↕

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(x-y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-it(x-y)} dt dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ity} dy \right] e^{-itx} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) G(t) e^{-itx} dt,$$

TF inversa de  
 $F(t)G(t)$

# Algumas propriedades do produto de convolução

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\}$$

$$\mathcal{F}\{f \cdot g\} = \mathcal{F}\{f\} * \mathcal{F}\{g\}$$

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\}\}$$

**Table 2.2:** Properties of the convolution integral

---

Commutative:

$$f(x) * h(x) = h(x) * f(x)$$

Distributive over Addition:

$$f(x) * [h_1(x) + h_2(x)] = f(x) * h_1(x) + f(x) * h_2(x)$$

Associative:

$$f(x) * h_1(x) * h_2(x) = f(x) * [h_1(x) * h_2(x)]$$

Multiplication with a constant:

$$a[f(x) * h(x)] = af(x) * h(x) = f(x) * ah(x)$$

Addition with a constant:

$$a + [f(x) * h(x)] = [a + f(x)] * h(x) = f(x) * [a + h(x)]$$

Convolution with an impulse:

$$f(x) * \delta(x - x_0) = f(x - x_0)$$

---

# Algumas propriedades da TF

## Relação de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t) dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(x)e^{ixt} dx dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} G^*(x)\delta(x - \omega) dx d\omega$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega) d\omega,$$

$\delta(t - x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-x)} d\omega$

# TEMAS GERAIS PARA MONOGRAFIAS

- IMAGENS ESPECTRAIS/DUPLA ENERGIA EM CT
- APLICAÇÕES DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL EM IMAGENS
- TECNICAS DE RECONSTRUÇÃO ITERATIVA
- INOVAÇÕES EM TECNICAS DE PROCESSAMENTO E/OU RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS EM MAMOGRAFIA/TOMOSINTESE
- INOVAÇÕES EM TECNICAS DE PROCESSAMENTO E/OU RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS EM PET/CT
- INOVAÇÕES EM TECNICAS DE PROCESSAMENTO E/OU RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS EM SPECT
- INOVAÇÕES EM TECNICAS DE PROCESSAMENTO E/OU RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS EM MRI
- INOVAÇÕES EM TECNICAS DE PROCESSAMENTO E/OU RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS EM US
- INOVAÇÕES EM TECNICAS DE PROCESSAMENTO E/OU RECONSTRUÇÃO RADIOLOGIA INTERVENCIONISTA
- NOVAS MÉTRICAS DE QUALIDADE DE IMAGENS
- INOVAÇÕES EM MATERIAIS E OBJETOS SIMULADORE PARA AVALIAÇÃO DA QUALIDADE DE IMAGENS

# O que veremos nas próximas aulas

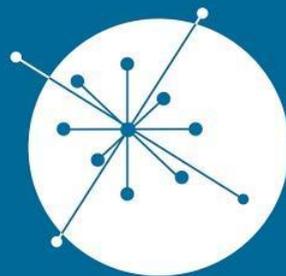
QUINTA:

PRÁTICA - INTRODUÇÃO AO IMAGE-J

TERÇA (13/09):

AMOSTRAGEM E TRANSFORMADA DE  
FOURIER DA FUNÇÃO AMOSTRADA





GRUPO DE  
**DOSIMETRIA  
DAS RADIAÇÕES**  
e FÍSICA MÉDICA

---

IFUSP - Instituto de Física da USP