ESCOLA DE ENGENHARIA DE LORENA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS BÁSICAS E AMBIENTAIS

Lista de Exercícios 1: Eletrostática

1. Uma carga Q é distribuída uniformemente sobre um fio semicircular de raio a, que está no plano xy. Calcule a força $\vec{F}$ com que atua sobre uma carga de sinal oposto $-q$ colocada no centro (veja a Fig.1).

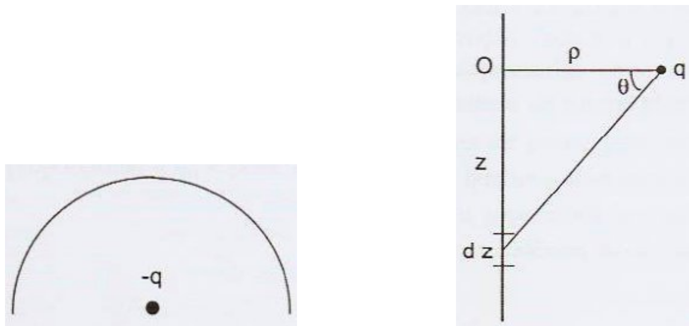


Figure 1: Exercícios 1 e 2

2. Um fio retilíneo muito longo (trate-o como infinito), que descansa sobre o eixo z, está eletrizado com uma densidade linear de carga λ. Calcule a força $\vec{F}$ com que atua sobre uma carga puntiforme q colocada à distância ρ do fio sobre o eixo y (Fig.1).

3. Uma casca hemisférica de raio R possui uma densidade de carga superficial que varia com a coordenada θ de acordo com $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$. Uma carga Q é colocada no centro da hemisfera como mostra a Fig.2. Ache a força $\vec{F}$ que a casca exerce na carga Q.

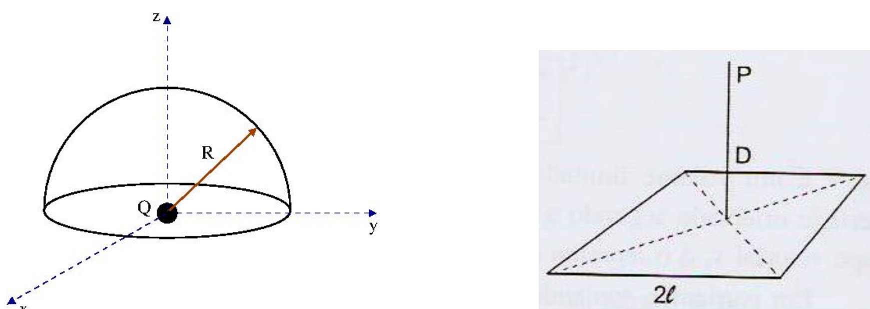
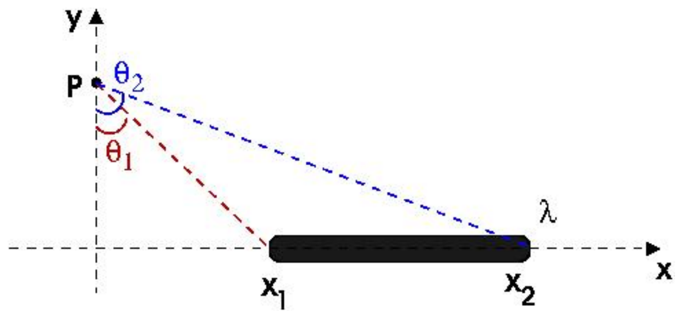


Figure 2: Exercícios 3 e 4

4. Um fio quadrado de lado 2ℓ, descansando sobre o plano xy e centrado na origem, está uniformemente carregado com densidade linear de carga λ. Calcule o campo elétrico num ponto P situado no eixo z, à distância D do centro do quadrado (Fig.2).

5. Uma linha de carga com densidade linear uniforme λ está ao longo do eixo x desde $x = x_1$ até $x = x_2$, como mostra a Fig.3. Calcule o campo elétrico em um ponto P a uma distância genérica da origem sobre o eixo y. Expresse sua resposta em termos dos ângulos θ_1 e θ_2 mostrados na figura.



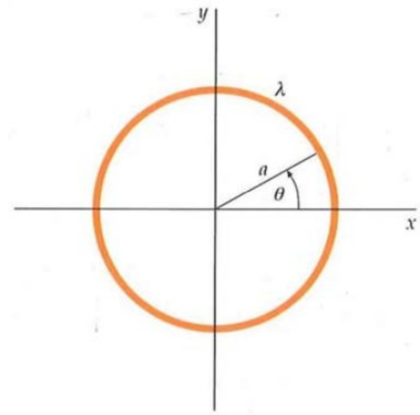


Figure 3: Exercícios 5 e 6

6. Um anel de raio a tem uma distribuição de carga que varia como $\lambda(\theta) = \lambda_0 \cos\theta$, com $\lambda_0 > 0$, como mostra a Fig.3. Calcule o campo elétrico $\vec{E}$ no centro do anel.

7. Uma região do espaço contém uma carga positiva Q que está distribuída uniformemente ao longo de uma esfera de tal modo que a densidade volumétrica de carga $\rho(r)$ é dada por:

$$\rho(r) = \begin{cases} \alpha & \text{para } r \leq R/2 \\ 2\alpha(1 - r/R) & \text{para } R/2 \leq r \leq R \\ 0 & \text{para } r \geq R \end{cases} \tag{1}$$

Nessas relações, α é uma constante positiva com unidades de C/m^3.

(a) Determine α em função de Q e de R.

(b) Aplicando a lei de Gauss, deduza uma expressão para o campo elétrico $\vec{E}$ em função da distância r, para cada uma das três regiões, expressando suas respostas em termos da carga total Q.

(c) Que fração da carga total está contida no interior da região $r \leq R/2$?

(d) Se um elétron com carga $q' = -e$ está oscilando em torno do ponto $r = 0$ (centro da distribuição) com amplitude menor do que $R/2$, mostre que o movimento é harmônico simples e determine o período.

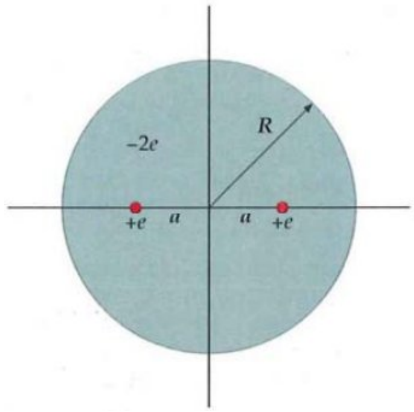
(e) Se a amplitude do movimento descrito na parte (d) é maior do que $R/2$, o movimento resultante é harmônico simples? Por quê?

8. Um tratamento baseado na mecânica quântica para o átomo de hidrogênio mostra que o elétron no átomo pode ser tratado como uma distribuição espalhada de carga negativa da forma $\rho(r) = -\rho_0 e^{-2r/a}$, onde r representa a distância ao centro do núcleo e a é o raio de Bohr. Considere o núcleo do átomo de hidrogênio, um proton, como uma carga puntiforme positiva.

(a) Calcule ρ_0 usando o fato que o átomo é neutro.

(b) Calcule o campo elétrico $\vec{E}$ dentro do átomo a uma distância r do núcleo.

9. Considere o seguinte modelo simples para a molécula de hidrogênio: duas cargas puntiformes positivas, cada uma com carga $+e$, localizadas no interior de uma esfera uniformemente carregada de raio R, que tem uma carga igual a $-2e$. As duas cargas puntiformes estão colocadas simetricamente, equidistantes do centro da esfera (Fig.4). Determine a distância do centro, a, onde a força resultante em cada carga puntiforme é zero.



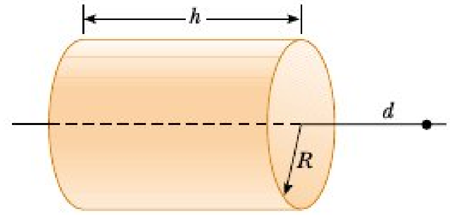


Figure 4: Exercícios 9 e 14

10. Uma distribuição esférica possui uma densidade volumétrica de carga dada por:

$$\rho(r) = \begin{cases} A/r & \text{para } r \leq R \\ 0 & \text{para } r > R \end{cases} \tag{2}$$

    (a) Calcule o campo elétrico em todas as regiões.
    (b) A partir do resultado em (a) calcule o potencial elétrico em todas as regiões.

11. Seja a função vetorial $\vec{\mathcal{C}} = \frac{1}{r^2}\hat{r}$.

    (a) Calcule a divergência desta função, *i.e.*, $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{C}}$.
    (b) Calcule $\oint \vec{\mathcal{C}} \cdot d\vec{a}$ na superfície de uma esfera de raio r centrada na origem de coordenadas.
    (c) Use o teorema da divergência no resultado anterior e explique a origem da aparente contradição entre os resultados (a) e (b).
    (d) Usando a função delta de Dirac, escreva uma expressão correta para $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{C}}$.

12. O campo elétrico produzido por certa configuração esférica finita é dado por

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^a}, \tag{3}$$

    sendo a uma constante positiva diferente de 3. Calcule a densidade volumétrica de carga que produz este campo e o potencial produzido por esta configuração em um ponto r genérico.

13. O potencial elétrico de certa configuração esférica é dado pela expressão

$$V(r) = A\frac{e^{-\lambda r}}{r}, \tag{4}$$

    onde A e λ são constantes. Ache o campo elétrico $\vec{E}(r)$, a densidade de carga $\rho(r)$, e a carga total Q no espaço todo.

14. Uma carcaça cilíndrica uniformemente carregada sem tampa em suas extremidades tem uma carga total Q, raio R e comprimento h. Determine o potencial elétrico em um ponto a uma distância d da extremidade direita do cilindro, como mostra a Fig.4.

15. Um bastão de comprimento L tem uma carga total Q uniformemente distribuída ao longo do seu comprimento. O bastão está ao longo do eixo x com seu centro na origem.

(a) Qual é o potencial elétrico como função da posição ao longo do eixo x para $x > L/2$?

(b) Mostre que, para $x \gg L/2$, seu resultado se reduz ao potencial devido a uma carga puntiforme Q. Explique a razão deste resultado.

16. Um círculo de raio a é removido do centro de un disco fino circular uniformemente carregado de raio b e carga por unidade de área σ, situado no plano YZ.

(a) Determine uma expressão para o potencial no eixo x a uma distância x do centro do disco.

(b) Mostre que, para $x \gg b$, o potencial elétrico no eixo do disco uniformemente carregado com o corte tende ao potencial devido a uma carga puntiforme Q, sendo Q a carga total no disco.

17. Uma casca hemisférica de raio R, mostrada na Fig.5, possui uma densidade de carga superficial uniforme σ.

(a) Ache o vetor campo elétrico no centro C da hemisfera por integração direta.

(b) Ache a diferença de potencial entre o polo norte P e o centro C da hemisfera ($V_P - V_C$), usando o método de integração direta.

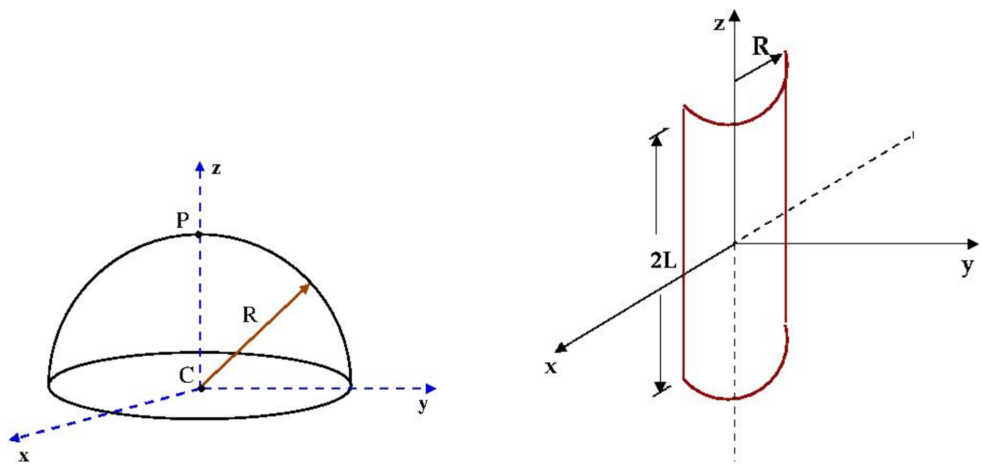


Figure 5: Exercícios 17 e 18

18. Uma casca cilíndrica de raio R e comprimento $2L$ é cortada ao meio ao longo do seu eixo como mostra a figura. A casca possui uma densidade superficial de carga $\sigma = \sigma_0\,(1 + z/L)$, sendo σ_0 uma constante. Calcule o potencial na origem do sistema de coordenadas mostrado na Fig.5.

19. Uma partícula de massa m e carga positiva q está restrita ao movimento ao longo do eixo x. Em $x = -L$ e em $x = L$, estão dois anéis carregados de raio L (Fig.6). Cada anel está centrado no eixo x e está em um plano perpendicular a ele. Cada anel tem uma carga total positiva Q uniformemente distribuída.

(a) Obtenha uma expressão para o potencial $V(x)$ sobre o eixo x na região entre os aneis.

(b) Mostre que $V(x)$ tem um mínimo em $x = 0$.

(c) Mostre que, para $|x| \ll L$, o potencial tende à forma $V(x) = V(0) + \alpha x^2$.

(d) Use o resultado da parte (c) para deduzir uma expressão para a frequência angular de oscilação da massa m se ela for levemente deslocada da origem e liberada.

20. Um capacitor esférico de raio interno a e raio externo b tem o espaço entre as placas totalmente preenchido por duas camadas concêntricas de dielétricos diferentes superpostas, uma de espessura $c - a$ e constante dielétrica κ_1, e outra de espessura $b - c$ e constante dielétrica κ_2. Calcule a capacitância deste capacitor.

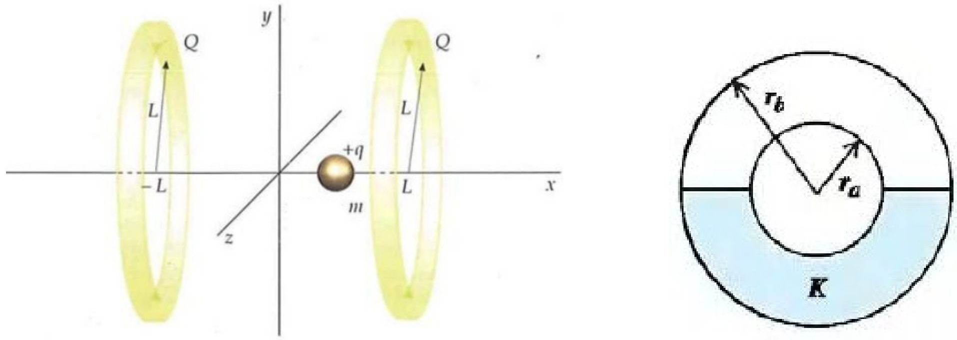


Figure 6: Exercícios 19 e 21

21. Um capacitor esférico isolado possui carga $+Q$ sobre o condutor interno (raio r_a) e carga $-Q$ sobre o condutor externo (raio r_b). A seguir, metade do volume entre os dois condutores é preenchida por um dielétrico líquido com uma constante dielétrica K, conforme indicado na seção reta da Fig.6.

    (a) Determine a capacitância do capacitor preenchido até a metade em termos de K, r_a e r_b.

    (b) Usando a lei de Gauss, calcule o módulo do campo elétrico no volume entre os dois condutores em função da distância r ao centro do capacitor. Forneça respostas para a metade superior e para a metade inferior desse volume, em termos de Q, K e r.

    Dica: Considere em ambos os casos superfícies gaussianas hemisféricas e expresse as cargas livres, em cada caso, em termos da carga total Q.

22. Um capacitor tem placas retangulares de comprimento a e largura b. A placa superior está inclinada por um pequeno ângulo, como mostra a Fig.7. A separação entre as placas varia desde y_0 à esquerda, até $2y_0$ à direita, onde y_0 é muito menor que a e b. Calcule a capacitância deste arranjo.

    Dica: Escolha pequenos capacitores de largura dx e comprimento b, como mostrado na figura, e use a associação de capacitores correspondente para achar a capacitância total.

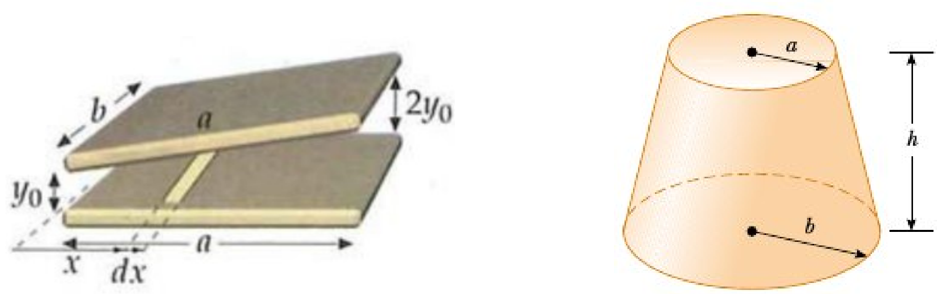
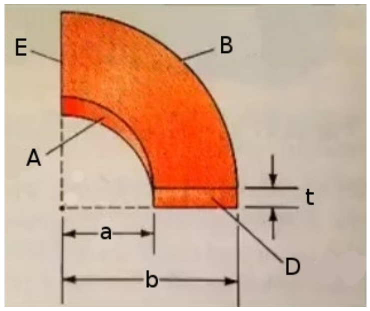


Figure 7: Exercícios 22 e 23

23. Um material de resistividade ρ é transformado em um cone truncado de altura h, como mostra a Fig.7. A extremidade inferior tem raio b e a superior, raio a. Suponha que a corrente seja distribuída uniformemente sobre qualquer seção transversal circular do cone, de modo que a densidade de corrente não dependa da posição radial. (A densidade de corrente varia com a posição ao longo do eixo do cone). Demonstre que a resistência entre as duas extremidades é

$$R = \frac{\rho}{\pi}\left(\frac{h}{ab}\right) . \tag{5}$$

24. As duas extremidades D e E de um quarto de anel, cuja resistividade é ρ, são conectadas a um circuito pelo qual circula uma corrente I (Fig.8). Determine uma expressão para a resistência entre as extremidades D e E do quarto de anel.



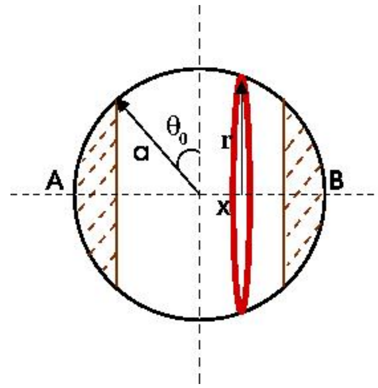


Figure 8: Exercícios 24 e 25

25. Considere um condutor esférico de raio a e condutividade σ. Na Fig.8 A e B são os extremos opostos deste condutor onde são colocados dois eletrodos circulares de raio b. Ache a resistência do material entre os dois eletrodos.