ESCOLA DE ENGENHARIA DE LORENA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS BÁSICAS E AMBIENTAIS

Lista de Exercícios 2: Relatividade Especial e Mecânica Quântica

1. Obtenha as transformações de Lorentz entre as coordenadas (t, x, y, z) de um 4-vetor no referencial S e as coordenadas (t', x', y', z') correspondentes no referencial S', considerando as seguintes premissas:
   (a) A transformação deve ser linear.
   (b) As coordenadas espaciais ortogonais à direção do movimento permanecem inalteradas.
   (c) Se o referencial S' está se movendo com velocidade v em relação ao referencial S, então $x = vt$ no referencial S se transforma em $x' = 0$ no referencial S'.
   (d) A velocidade da luz c é a mesma tanto para S como para S', tal que $x = ct$ no referencial S se transforma em $x' = ct'$ no referencial S'.
   (e) Se um observador em S pensa que S' está se movendo com velocidade v, então outro observador em S' deve pensar que S está se movendo com velocidade $-v$ (condição de isotropia espacial).

2. Demonstre que duas transformações de Lorentz sucessivas na mesma direção, com parâmetros $\beta_1 = v_1/c$ e $\beta_2 = v_2/c$, equivalem a uma transformação de Lorentz única, e calcule o parâmetro β correspondente.

3. (a) Escreva as equações da transformação de Lorentz em termos das coordenadas $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Note que elas adquirem uma forma mais simétrica.
   (b) Usando a notação da parte (a), mostre que a equação de onda
   $$\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0\,, \tag{1}$$
   é invariante por uma transformação de Lorentz.
   (c) Mostre que a mesma equação (1) não é invariante por uma transformação de Galileu.

4. Uma régua em repouso num referencial (S') possui um comprimento próprio L_0 e faz um ângulo θ_0 com a direção de movimento desse referencial, que se desloca em relação a (S) com velocidade v. Qual é o valor θ desse ângulo em (S) e qual é o comprimento da régua medido pelo observador estacionário?

5. Demonstre que o tempo próprio $\Delta\tau = \sqrt{-\Delta s^2}$, é uma quantidade invariante por uma transformação de Lorentz.

6. Sejam a^m e b^m dois 4-vetores. Mostre que o produto escalar $a_m b^m = -a^t b^t + a^x b^x + a^y b^y + a^z b^z$ é invariante sob uma transformação de Lorentz.

7. Mostre que a soma de dois 4-vetores tipo espaço ortogonais é também tipo espaço.

8. Deduza a transformação da componente x da aceleração relativística:
   $$a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3(1 - uv/c^2)^3}\,, \tag{2}$$
   onde $a_x = du/dt$ e $a'_x = du'/dt'$.

9. Usando a mecânica newtoniana calcule a velocidade de escape a partir da superfície de uma esfera de massa M, cujo raio é o raio de Schwarzschild. Comente sua resposta.

10. Se as funções de onda $\Psi_1(x,t)$, $\Psi_2(x,t)$ e $\Psi_3(x,t)$ são três soluções da equação de Schrödinger para um potencial particular $V(x,t)$, mostre que a combinação linear arbitrária $\Psi(x,t) = c_1\Psi_1(x,t) + c_2\Psi_2(x,t) + c_3\Psi_3(x,t)$ também é solução desta equação.

11. Considere uma partícula de massa m que pode se mover livremente ao longo do eixo x no intervalo de $x = -a/2$ até $x = +a/2$, mas está proibido o movimento dela fora desta "caixa unidimensional". A função de onda associada ao estado mais baixo de energia é dada por:

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-iEt/\hbar} & -a/2 < x < +a/2 \\ 0 & x \leq -a/2 \ \text{ ou } \ x \geq +a/2 \end{cases} \tag{3}$$

onde E é a energia total da partícula. Calcule a probabilidade de que a partícula associada com esta função de onda possa ser achada em uma medição dentro de uma distância de $a/3$ do extremo direito da caixa de comprimento a.

12. Considere o primeiro estado excitado do sistema do exercício anterior, cuja função de onda é dada por:

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} A \,\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{a}\right) e^{-iEt/\hbar} & -a/2 < x < +a/2 \\ 0 & x \leq -a/2 \ \text{ ou } \ x \geq +a/2 \end{cases} \tag{4}$$

   (a) Mostre que esta função de onda é solução da equação de Schrödinger na região $-a/2 < x < +a/2$ para uma partícula que se move livremente nesta região mas está estritamente confinada a ela.

   (b) Determine o valor da energia total E da partícula neste estado.

13. Normalize a função de onda do exercício 12 ajustando o valor da constante A tal que a probabilidade de achar a partícula associada em algúm lugar da região de comprimento a seja igual a 1.

14. Calcule os valores esperados de x e x^2 para a partícula associada com a função de onda do exercício 12.

15. Calcule os valores esperados de p e p^2 para a partícula associada com a função de onda do exercício 12.

16. Definindo $\sqrt{< x^2 >} = \Delta x$ e $\sqrt{< p^2 >} = \Delta p$, calcule o produto das incertezas na posição e no momento da partícula do exercício 12.

17. Considere as autofunções dos estados $n = 1$ e $n = 3$ do poço quadrado infinito limitado por $x = -a/2$ e $x = a/2$:

$$\psi_1(x) = B_1 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right), \quad \psi_3(x) = B_3 \cos\left(\frac{3\pi}{a}x\right), \tag{5}$$

com B_1 e B_3, constantes de normalização. Mostre que estas funções são ortogonais, *i.e.*,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x)\psi_3(x)dx = 0\,. \tag{6}$$

18. O estado fundamental do átomo de hidrogênio está descrito pela autofunção $\psi(r) = Ae^{-Zr}$, com Z uma constante positiva.

   (a) Normalize a função de onda em uma esfera de raio infinito.

   (b) Calcule o valor esperado da coordenada r da partícula associada a esta função de onda.