MAP 0313 - 2022 2° Semestre - IME USP
Lista sobre exemplos “simples"

Resumo

O objetivo desta lista é apresentar pontos interessantes relacionados à disciplina. Mais do que propor questões que devem ser resolvidas para nota.

A questão 1 apresenta uma equação de diferenças que não é linear obtida de um modo meio diferente, a partir da demonstração de um teorema.

A questão 2 é um alerta sobre os perigos que você se acreditar de forma “cega"em “inocentes" cálculos feitos por computadores.

A questão 3 é a que justifica o título da lista!

As questões 4 e 5 apresentam problemas e assuntos que serão discutidos e vistos durante o semestre, são uma espécie de pequenas introduções a pontos que serão estudados.

Além disso na questão 4 é mostrado (de duas formas diferentes) como calcular o *determinante de Vandermonde*, uma fómula muitas vezes citada, poucas vezes demonstrada!

$$\mathcal{DIVIRTA}-\mathcal{SE}$$

Questão 1 Como Euclides demonstrou em sua famosa prova que há infinitos números primos, é verdade que

Se $n_1, \ldots, n_k$ são naturais maiores ou iguais a 2, dois a dois primos entre si, então $n_{k+1} = 1 + \prod_{j=1}^{k} n_j$ é relativamente primo com $n_j,\ \forall j \in \{1, \ldots, k\}$.

Portanto, uma maneira de gerar uma sequência infinita (a_n) de naturais maiores ou iguais a 2, tal que m.d.c.$(a_p, a_q) = 1$, se $1 \leq p < q$, é tomar $a \in \mathbb{N},\ a \geq 2$ e definir

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_k = 1 + \prod_{j=1}^{k-1} a_j,\ k \geq 2. \end{cases}$$

Prove que se (a_k) é construída assim e $x_k = a_k - \frac{1}{2},\ k \in \mathbb{N}^*$, então (x_k) satisfaz o problema de valor inicial para equação de diferenças

$$\begin{cases} x_1 = a - \frac{1}{2} \\ \\ x_{k+1} = x_k^2 + \frac{1}{4}, k \geq 1. \end{cases}$$

Os perigos desta vida... Uma boa alma pode ser tentada a achar que, se o termo inicial de (a_k), o tal $a \geq 2$, for primo então a sequência (a_k) será formada por números primos... **Não** é isso que foi afirmado! Apenas foi dito que os termos de (a_k) são primos entre si, ou seja, se $p \neq q$, então a_p e a_q são *primos entre si*. De fato, ao considerar $a_1 = 2$ e construir a sequência (a_k) a partir daí, vai-se descobrir que seria um exagero dizer que os a_k são todos primos... (certo?)

Questão 2 Os perigos desta vida... Mamãe avisou...

Para $k \in \mathbb{N}$ considere $u_k = \int\limits_0^1 t^k e^{t-1} dt$ e prove que:

(i) $0 < u_{k+1} < u_k, \ \forall k \in \mathbb{N}$ e $u_k \to 0$.

(ii) $u_1 = \frac{1}{e}$ e $u_{k+1} = 1 - (k+1)u_k, \ \forall k \in \mathbb{N}$ (sugestão: integre por partes)

(iii) Use que, com 10 casas decimais, $\frac{1}{e} \approx .3678794412$, aplique a recorrência obtida em (ii) e, com um computador, calcule $u_{12}, \ u_{13}, u_{14}$ e u_{15}, compare os valores obtidos com os resultados de (i) (e responda **Computador "erra"?**).

Questão 3 Um vírus tem, em instate t_0 uma capacidade de contaminação q_0 (isto é, a probabilidade de uma pessoa ser contaminada ao ser exposta ao víus no instante t_0 é q_0). A cada duas horas o vírus perde 10% de sua capacidade.

Determine após quanto tempo o vírus fica com sua capacidade de contaminação reduzida à metade da que tinha em t_0.

Suponha que o tempo será medido em horas, se $t_k = t_0 + 2k$ horas, $k \in \mathbb{N}$, e se c_k é a capacidade de contaminação do vírus em t_k, então é claro que:

$$\begin{cases} c_0 = q_0, \\ c_k = \frac{9}{10} c_{k-1}, \ \forall k \geq 1. \end{cases}$$

Uma indução simples em k mostra que $c_k = \frac{9}{10} q_0^k$, assim quer-se determinar k tal que $\frac{9}{10} q_0^k \leq \frac{q_0}{2}$, ou seja, $q_0^{k-1} \leq \frac{5}{9}$.

Portanto, $k - 1 \geq \frac{\log(\frac{5}{9})}{\log(q_0)} = \frac{\log 5 - \log 9}{\log(q_0)}$, como $k \in \mathbb{N}$, isso ocorre se

$$k \geq \left\lfloor \frac{\log 5 - \log 9}{\log(q_0)} \right\rfloor + 1.$$

Por exemplo, se $q_0 = 0,8$ então $k \geq 3$ e a resposta seria, após 6 horas.

Questão 4 **Uma matriz assanhada e deu determinante!** Polinômios vão aparecer muito por aqui nesta disciplina, e este exercício apresenta uma propriedade "famosa"de polinômios, além de mostrar uma matriz bem assanhadinha que gosta muito de aparecer sem ser chamada, por exemplo em regressão polinomial, a tal "Matriz de Vandermonde". Em MAP0313 ela aparece de "modo natural"em, pelo menos duas situações:

Sejam núneros complexos $z_1, \ldots, z_m$ (o fato de considerar-se o caso de números complexos logo ficará claro) e considere $\mathcal{V}(z_1, \ldots, z_m)_n = [v_{kj}]$ a matriz $n \times m$, definida por $v_{kj} = z_j^{k-1},\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq j \leq m$.

Essa matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_m \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & \cdots & z_m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & z_3^{n-1} & \cdots & z_m^{n-1} \end{bmatrix},$$

ou a sua transposta, chama–se *Matriz de Vandermonde*.

No caso em que $n = m$, essa distinta cidadã é uma matriz quadrada e seu determinante é chamado *determinante de Vandermonde* (como para toda matriz quadrada A, tem–se $\det A = \det A^t$, é indiferente se a matriz considerada é $\mathcal{V}(z_1, \ldots, z_m)_m$ ou sua transposta).

Antes de perturbar com o cálculo desse determinante, vai-se mostrar uma das situações supramencionadas em que essa matriz vai "dar as caras"por aqui.

> Considere $m \in \mathbb{N}^*$ e a equação de diferenças linear de ordem m
>
> $$u_{k+m} = a_0 u_k + a_1 u_{k+1} + \cdots + a_{m-1} u_{k+m-1},\ \forall k \geq 0, \qquad (1)$$
>
> em que $a_0,\ a_1, \ldots, a_{m-1}$ são reais dados, com $a_0 \neq 0$, com as condições iniciais:

Hora de começar a trabalhar (será um trabalho leve...)

(i) Prove que a progressão geométrica $u_k = q^k$, é solução da equação (1), e só se, q é raiz de $p(\lambda) = \lambda^m - \sum\limits_{j=0}^{m-1} a_j \lambda^j$.

O polinômio mônico de grau m, $p_\lambda = \lambda^m - \sum\limits_{j=0}^{m-1} a_j \lambda^j$ é chamado *polinômio característico* da equação (†).

E aí está a razão de admitir a possibilidade dos z_j não serem números reais, todos os dados são reais, $p(\lambda)$ é um polinômio de coeficientes reais, mas... $\mathbb{C}$ insistiu em aparecer na festa, as raízes de um polinômio de coeficientes reais podem pertencer a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Alguns exercícios a mais...

(ii) Se as sequências de números complexos (u_k) e (w_k) são soluções de (1) então a sequência $(\alpha u_k + \beta w_k)$ tamém é solução dessa equação, quaisquer que sejam α e β em $\mathbb{C}$.

(iii) Para todo $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$, a sequência $v_k = \lambda_1 z_1^k + \lambda_2 z_2^k + \cdots + \lambda_m z_m^k,\ k \in \mathbb{N}$ é solução de (1).

(iv) Se $\beta_0,\ \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$ são números complexos dados existe uma, e apenas uma sequência (u_k) em $\mathbb{C}$ que resolve (1) e satisfaz as condições iniciais

$$u_0 = \beta_0,\ u_1 = \beta_1, \ldots, u_{m-1} = \beta_{m-1}.$$

Além disso, se todos os $\beta_j,\ 0 \le j \le m-1$ são reais, a sequência (u_k) acima é formada apenas por números reais (lembre que os a_j são reais).

O vai ser feito agora é estudar o problema de valor inicial mencionado em (iv) no caso mais simples, em que é feita a hipótese de $p(\lambda)$ *ter* m *raízes distintas* $z_1, \ldots, z_m$ *(em* $\mathbb{C}$*)*.

O que se pretende é provar que:

Fato: *Se o polinômio caracterítico de* (1) *tem* m *raízes distintas* $z_1, \ldots, z_m$ *(não necessariamente reais) e* $\beta_0,\ \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$ *são números* ***reais*** *então existe um, e só um,* $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$ *tal que a sequência*

$$v_k = \lambda_1 z_1^k + \lambda_2 z_2^k + \cdots + \lambda_m z_m^k,\ k \in \mathbb{N} \tag{‡}$$

resolve (1) *e satisfaz as condições iniciais* $v_k = \beta_k$*, para todo* $k \in \{0, 1, \ldots m-1\}$.

Note que, como todos os dados do problema, os coeficientes da equação de diferenças e as condições iniciais serem reais, o exercício (iv) mostra que a solução do problema de valor inicial considerado será uma sequência de números reais, ou seja $v_k \in \mathbb{R}$, para todo k, mas não se afirma que os $\lambda_k,\ 1 \le k \le m$ sejam reais, isso pode ser falso no caso em que as raízes do polinômio caracterítico serem complexas (por exemplo considere o problema $u_{k+2} = -u_k,\ u_0 = 0,\ u_1 = 1,$

nesse caso $z_1 = i,\ z_2 = -i$ e vais-se obter $\lambda_1 = -\frac{i}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{i}{2}$, a sequência que resolve o problema dado é...).

A demonstração do fato supramencionado é "quase"toda simples, você vai ser convidado a fazer essa parte "quase"toda!

(v) Sejam $z_1, \ldots, z_m$ as raízes do polinômio característico de (1) e considere reais $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$.
Mostre que, se $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$ for solução do sistema linear $m \times m$

$$\lambda_1 z_1^k + \lambda_2 z_2^k + \cdots + \lambda_m z_m^k = \beta_k,\ \forall k \in \{0, 1, \ldots, m-1\},$$

então $v_k = \lambda_1 z_1^k + \lambda_2 z_2^k + \cdots + \lambda_m z_m^k,\ k \in \mathbb{N}$ resolve (1) e satisfaz $v_k = \beta_k$, para todo $k \in \{0, 1, \ldots m-1\}$.

Você pode estar com a seguinte dúvida, *para resolver esse exercício é preciso fazer algo além de dizer é consequência imediata de tudo o que foi feito antes?*

A resposta é **não**, se você teve essa dúvida, então já resolveu (v).

Então... para provar o fato enunciado no quadrinho destacado, basta demonstrar que o sistema dado em (v) tem solução única, para toda m-upla de condições iniciais $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$.

E como é mais do que conhecido, osso acontece se, e apenas se, a matriz desse sistema linear tiver determinante diferente de zero.

Agora, a grande pergunta, para a qual, por certo, você já sabe a resposta...

Claro, abram alas e saúdem a *matriz de Vandermende* $\mathcal{V}(z_1, \ldots, z_m)_m$.

Ou seja, se o determinante dessa intrometida for diferente de zero, o fato supraenunciado estará demonstrado!

Aqui será feito um pouco mais, vai–se provar que

$$\det \mathcal{V}(z_1, \ldots, z_m)_m = \prod_{1 \le k < j \le m} (z_k - z_j) \tag{2}$$

o que mostra o Fato enunciado, uma vez que foi feita a hipóse das raízes de $p(\lambda)$ serem distintas.

Vão ser indicadas duas demonstrações de (2), a primeira, muito elegante e simples, usa um pouco de álgebra linear, a segunda, mais "elementar", usa apenas as propriedades básicas de determinantes.

- (Se você conhece álgebra linear divirta-se) Caso você só tenha visto espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{R}$ pode supor que os z_j são reais e use $\mathbb{R}^m$ em vez de $\mathbb{C}^m$, todos os resultados usados são válidos (com demonstrações iguais) nas duas situações.

Considere V_m o espaço vetorial dos polinômios de grau estritamente menor do que m.

Como, se $p_j(z) = z^j,\ 0 \leq j \leq m-1$ então $\mathcal{B} = \{p_j(z),\ 0 \leq j \leq m-1\}$ é uma base de V_m, tem–se $\dim V_m = m$.

Considere agora a transformação linear $T : V \longrightarrow \mathbb{C}^m$ definida por $T(p) = (p(z_1), p(z_2), \ldots, p(z_m))$.

A matriz de T em relação a $\mathcal{B}$ e à base canônica de $\mathbb{C}^m$ é $\mathcal{V}(z_1, \ldots, z_m)_m$ (mostre isso como exercício).

Agora note que, se $2 \leq j \leq m$ $q_{j-1}(z) = \prod_{k=1}^{j-1}(z - z_k)$, então o grau de $q_{j-1}(z)$ é $j-1$. Portanto, $\mathcal{N} = \{p_0(z), q_1(z), \ldots, q_{m-1}(z)\}$ também é uma base de V_m.

É imediato que a matriz de T em relação a $\mathcal{N}$ e à base canônica de $\mathbb{C}^m$ é

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z_2 - z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z_3 - z_1 & (z_3 - z_1)(z_3 - z_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_m - z_1 & (z_m - z_1)(z_m - z_2) & \cdots & \prod_{j=1}^{m-1}(z_m - z_j) \end{bmatrix},$$

cujo determinante, por esta ser uma matriz triangular, é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal, ou seja

$$\det T_1 = \prod_{1 \leq k < j \leq m}(z_k - z_j).$$

Assim, como *o determinante das matrizes de uma transformação linear* ***não depende*** *das bases em relação às quais a matriz é calculada*, segue-se

$$\det \mathcal{V}(z_1, \ldots, z_m)_m = \det T_1 = \prod_{1 \leq k < j \leq m}(z_k - z_j)$$

- Caso algo da demonstração anterior tenha usado um "conhecimento desconhecido", pode-se concluir esta propriedade de um modo mais pedestre (e chato)... A coisa aqui vai por indução em m, para $m \geq 2$.

  O caso inicial, $m = 2$, é trivial.

Suponha, por hipótese de indução, o resultado vale para matrizes de Vandermonde de ordem $\ell = m-1 \geq 2$ e considere uma matriz de Vandermonde $\mathcal{V}(z_1, \ldots, z_m)_m$

$$\begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{m-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^{m-1} \\ 1 & z_3 & z_3^2 & \cdots & z_3^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_m & z_m^2 & \cdots & z_m^{m-1} \end{bmatrix}.$$

Subtraia da última coluna desta matriz (isto é, coluna m) a penútima coluna (a $m-1$) multiplicada por z_1, operação elementar que não altera o determinante da matriz. A matriz encontrada só difere da original na última coluna e é

$$\begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{m-2} & 0 \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^{m-2} & z_2^{m-2}(z_2 - z_1) \\ 1 & z_3 & z_3^2 & \cdots & z_3^{m-2} & z_3^{m-2}(z_3 - z_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_m & z_m^2 & \cdots & z_m^{m-2} & z_m^{m-2}(z_m - z_1) \end{bmatrix},$$

Agora, de forma sucessiva, para $j = m-1, m-2, \ldots, 2$, subtraia da coluna j a coluna $j-1$ multiplicada por z_1, essas operações não alteram o determinante e no final desse processo vai-se encontrar a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z_2 - z_1 & z_2(z_2 - z_1) & z_2^2(z_2 - z_1) & \cdots & z_2^{m-2}(z_2 - z_1) \\ 1 & z_3 - z_1 & z_3(z_3 - z_1) & z_3^2(z_3 - z_1) & \cdots & z_3^{m-2}(z_3 - z_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_m - z_1 & z_m(z_m - z_1) & z_m^2(z_2 - z_1) & \cdots & z_m^{m-2}(z_m - z_1) \end{bmatrix},$$

Pessoal, chamem o Laplace, peçam licença a esse cavalheiro para usarem a sua regra, e calculem o determinante dessa matriz, que é igual ao *determinante de Vandermonde*, pela primeira linha, para concluir que este cidadão é o determinante de

$$\begin{bmatrix} z_2 - z_1 & z_2(z_2 - z_1) & z_2^2(z_2 - z_1) & \cdots & z_2^{m-2}(z_2 - z_1) \\ z_3 - z_1 & z_3(z_3 - z_1) & z_3^2(z_3 - z_1) & \cdots & z_3^{m-2}(z_3 - z_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_m - z_1 & z_m(z_m - z_1) & z_m^2(z_m - z_1) & \cdots & z_m^{m-2}(z_m - z_1) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Hora de por em evidência que você sabe por em evidência o que precisa ser posto em evidência, e mostrar que você sabe o que acontece com o determinante de uma matriz ao por em evidência um fator λ em uma linha...

Em palavras compreensíveis, use propriedades elementares e prove que o determinante de (3) é igual a

$$\prod_{j=2}^{m}(z_j - z_1)\det\begin{bmatrix} 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^{m-2} \\ 1 & z_3 & z_3^2 & \cdots & z_3^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_m & z_m^2 & \cdots & z_m^{m-2} \end{bmatrix} =$$
$$\prod_{j=2}^{m}(z_j - z_1)\det\mathcal{V}(z_2,\ldots,z_m)_{m-1} \quad (*)$$

E pronto! Agora basta usar a hipótese de indução em $(*)$ e obter o resultado desejado.

Questão 5 Os números de Bernoulli, acredite, eles servem para algo!

Diz a lenda que os Bernoulli eram uns caras mal humorados, do tipo que briga com o mundo sem saber porque... (desde quando precisa haver motivo para isso?)

Isso são fofocas, esta questão é coisa séria! Fala-se no nome Bernoulli, nada de piadas, ao trabalho.

(i) Mostre que a função definida por $f(0) = 1$ e $f(t) = \frac{t}{e^t - 1}$, para $t \neq 0$ é infinitamente derivável.

Pronto, já se podem definir os números de Bernoulli.

Se $k \in \mathbb{N}$ o k-ésimo número de Bernoulli B_k é por definição $B_k = f^{(k)}(0)$.

Pela definição de $f(t)$ claro 1=que $f(0) = B_0 = 1$, agora trabalhe um pouco mais... (mas não demais)

(ii) Mostre que $f'(1) = B_1 = -\frac{1}{2}$.

(iii) Mostre que $g(t) = f(t) + \frac{t}{2}$ é uma função par.
Sugestão: Matemática é uma questão de fé, acredite que tudo vai acabar bem...

(iv) Use os itens anteriores e prove que, se $k \in \mathbb{N}^*$ então $B_{2k+1} = 0$.

Outra sugestão que poderia ser oferecida para provar (iii) é...

(v) Mostre que $f(t) + \frac{t}{2} = \frac{t}{2}\left(\frac{e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}}\right)$

Claro que, se $n \in \mathbb{N}$, o polinômio de Taylor de ordem n de $f(t)$ em zero é $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} t^K$, mas para $f(t)$ vale algo um pouco mais forte.

Será visto nesta disciplina (caso você já saiba, ótimo) que a série de Taylor de $f(t)$ converge para $f(t)$ em $(-2\pi, 2\pi)$, ou seja

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k, \ \forall t \in (-2\pi, 2\pi). \tag{4}$$

O que fará a seguir é típico desta disciplina, uma manipulação de expansões em séries para obter relações de recorrência.

Uma razão para fazer esse tipo de manipulação é a seguinte, embora seja "simples"mostrar que $f(t)$tem derivadas de qualquer ordem inclusive em zero, não tão simples calcular essas derivadas, as recorrências encontradas muitas vezes fornecem uma maneira mais comoda de determinar essas derivadas.

Em virtude de (iii), (iv) e (4) tem-se que, para $t \in (-\pi, \pi)$, tem–se

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k} \tag{5}$$

Use a bem conhecida expansão em série de potências da função exponencial $e^t = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j$ para obter

$$\begin{cases} (e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2s}(2s+1)!} t^{2s+1} = t \sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2s}(2s+1)!} t^{2s} \\ (e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{2}{2^{2j}(2j)!} t^{2j} = 2 \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}(2j)!} t^{2j} \end{cases} \tag{6}$$

Agora escreva (v) como $(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}) g(t) = \frac{t}{2}(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}})$, substitua (5) e (6) nessa igualdade e veja que:

$$\begin{cases} t \sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2s}(2s+1)!} t^{2s} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k} = t \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}(2j)!} t^{2j} \\ \therefore \sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2s}(2s+1)!} t^{2s} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}(2j)!} t^{2j}. \end{cases} \tag{7}$$

Como as séries em (7) convergem, faça o produto das séries no primeiro membro dessa igualdade e iguale os coeficientes dos termos de mesmo expoente para concluir que os números de Bernoulli B_{2j} satisfazem $B_0 = 1$ e, para $j \geq 1$, vale a seguinte recorrência linear.

$$\sum_{n=0}^{j} \frac{2^n}{2(j-n)+1} \binom{2j}{2j-2n} B_{2n} = 1. \tag{8}$$

Note que (8) é uma recorrência "normal", no sentido que, uma vez conhecidos $B_0,\ B_2, \ldots, B_{2j-2}$, essa expressão permite calcular de modo direto B_{2j}.

Uma vez que é sabido que $B_0 = 1$, usar (8) é, de fato, uma forma mais simples de determinar B_{2j} do que, por exemplo, calcular as derivadas $f^{(2j)}(0)$.

O leitor fica convidado a verificar a veracidade, ou não, desta frase ao calcular B_{2j}, para $1 \leq j \leq 5$.

Isto permite determinar todos os números de Bernoulli, uma vez que, como já se viu, $B_1 = -\frac{1}{2}$ e $B_{2j+1} = 0$, se $j \geq 1$.

Porque são úteis esses tais *números de Bernoulli?*

Os perigos desta vida... Cuidado com as perguntas feitas, alguém pode responder!

Você conhece a Fórmula de Faulhaber? Já vai conhecer...

Fórmula de Faulhaber:
Se n e p são naturais estritamente positivos então

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \tag{9}$$

A demonstração desta fórmula fica para você fazer, ou procurar pelos "Botecos da Vida", ou na internet, se você preferir... Apenas uma advertência, não desligue o senso crítico ao olhar páginas da internet, às vezes elas "não são perfeitas".

Por exemplo, em

https://proofwiki.org/wiki/Faulhaber%27s_Formula

há uma demonstração de (9) à qual o professor de MAP0313 de 2022 não atribuiria nota 10.0, apenas... 7.0 (isso em um dia em que estivesse de bom humor).

Você fica desde já desafiado a descobrir porque… (Claro, a resposta *porque o professor é um chato cricri* está correta, corretíssima, mas não vai ser aceita nesta disciplina).

Em vez de apresentar aqui uma demonstração da fórmula de Faulhaber, vão fazer-se algumas brincadeiras para apresentar esse fómula numa forma um pouco diferente.

Como $B_1 = -\frac{1}{2}$, $\binom{p+1}{1} = p+1$ e $B_{2j+1} = 0$, se $j \geq 1$, a fómula de Faulhaber pode ser escrita como:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}B_j n^{p+1-j} = -\frac{1}{2}n^p + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}\binom{p+1}{2j}B_{2j}n^{p+1-2j}$$

Com essa forma é muito raro (9) aparecer, mas a partir daí pode-se ver que

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = n^p + \sum_{k=1}^{n-1} k^p = \tfrac{1}{2}n^p + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}\tbinom{p+1}{2j}B_{2j}n^{p+1-2j} =$$
$$-B_1 n^p + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}\tbinom{p+1}{2j}B_{2j}n^{p+1-2j} \overset{(*)}{=} \tfrac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\tbinom{p+1}{j}B_j n^{p+1-j}.$$

Em que, na última igualdade fez-se uso apenas que $\binom{p+1}{1} = p{+}1$ e $B_{2j+1} = 0$, se $j \geq 1$. E, com essa última “cara", a fórmula do senhor Faulhaber aparece tamém muitas vezes, tantas que ela merece um quadrinho similar a (9), aqui está ele:

Fórmula de Faulhaber (cara nova):
Se n e p são naturais estritamente positivos então

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{p+1}{j}B_j n^{p+1-j} \tag{10}$$