

1 Probabilidades na física estatística

Algumas noções e exemplos simples da teoria das probabilidades são suficientes para a construção da física estatística.

Em primeiro lugar, é preciso saber jogar dados, não viciados, ou baralhos, bem embaralhados. Jogano um único dado, a probabilidade de obter a face numa jogada é $1/6$. É claro que qualquer outra face teria exatamente a mesma probabilidade. Sabemos que há 6 eventos possíveis, que correspondem ao “conjunto de microestados acessíveis ao sistema”, e que apenas um deles é o evento escolhido. Por outro lado, estamos supondo de antemão, “a priori” como se costuma dizer, que todos os “microestados” são igualmente prováveis. Portanto, a probabilidade de obter qualquer uma das faces é exatamente $1/6$.

Numa jogada com dois dados distintos, qual a probabilidade de obter duas faces iguais a 4? O problema agora é mais difícil. Há $36 = 6 \times 6$ configurações (estados microscópicos) distintos do sistema de dois dados, mas apenas uma dessas configurações corresponde a uma situação com duas faces do tipo 4. Portanto, a probabilidade de obter duas faces do tipo 4 é $1/36$. Vamos modificar a questão, perguntado qual a probabilidade de encontrar um total de 4 pontos numa jogada com dois dados. Não é difícil perceber que a probabilidade agora é $3/36 = 1/12$, pois há 3 configurações distintas correspondendo a um total de 4 pontos (quais são essas configurações?).

Em situações de equiprobabilidade, ou seja, de configurações com estados microscópicos igualmente prováveis, a probabilidade de ocorrência de determinado conjunto de eventos é dada pela razão entre o número de configurações correspondentes a este evento particular e o número total de configurações. Essa é a idéia probabilística fundamental que vai conduzir à construção da física estatística.

1.1 Valor médio e desvio quadrático

Vamos supor que x seja uma variável aleatória (discreta), isto é, que assume o valor x_i com probabilidade P_i (onde $i = 1, 2, \dots, M$, e $0 \leq P_i \leq 1$ para qualquer i).

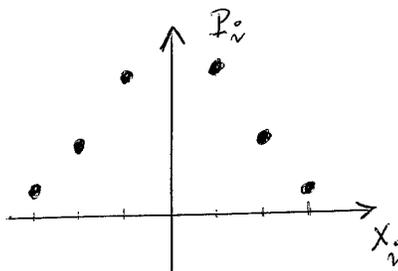


Figure 1: Gráfico de P_i contra x_i .

O valor médio da variável x é definido pela relação

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^M x_i P_i}{\sum_{i=1}^M P_i}, \quad (1)$$

que corresponde à ideia intuitiva de “média ponderada”. Usualmente as probabilidades são normalizadas, isto é,

$$\sum_{i=1}^M P_i = 1. \quad (2)$$

Na figura acima, esboçamos um gráfico de P_i contra x_i . Se dispusermos de um conjunto grande de valores de x_i , suficientemente próximos, podemos considerar uma variável aleatória contínua x , substituindo as somas por integrais e a probabilidade P_i por uma densidade de probabilidades $p(x)$. Neste caso, com uma distribuição de probabilidades devidamente normalizada, a expressão $p(x) dx$ deve ser interpretada como a probabilidade de encontrar a variável aleatória contínua x no intervalo entre x e $x + dx$.

O conhecimento do valor médio fornece pouca informação sobre a forma do gráfico de P_i contra x_i , no caso discreto, ou da função de distribuição $p(x)$ contra x , no caso contínuo. Conhecendo somente $\langle x \rangle$ nunca sabemos se $p(x)$ é muito larga (espalhada) ou muito fina (bem definida, com uma espécie

de pico) na vizinhança do valor médio $\langle x \rangle$. Poderíamos definir o desvio em relação à média, $\Delta x = x - \langle x \rangle$, e calcular o valor médio desse desvio, $\langle \Delta x \rangle$. É fácil mostrar que

$$\langle \Delta x \rangle = \langle (x - \langle x \rangle) \rangle = \langle x \rangle - \langle x \rangle = 0, \quad (3)$$

que acaba não conduzindo a nenhuma informação. Vamos então introduzir o valor médio dos desvios quadráticos em relação à média,

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \geq 0, \quad (4)$$

que também é conhecido como “desvio quadrático” (a raiz do desvio quadrático é conhecida como variância ou dispersão da distribuição de probabilidades). Note a propriedade importante, $\langle (\Delta x)^2 \rangle \geq 0$. A razão entre a variância $\sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle}$ e o valor médio $\langle x \rangle$ dá uma idéia da “largura” da distribuição. Para valores muito pequenos dessa razão, a função de distribuição de probabilidades tem um pico muito fino, centrado nas imediatas vizinhanças do valor médio. Essa é a principal característica das distribuições de interesse físico.

Exercícios

1- Prove as propriedades elementares

$$(i) \quad \langle af(x) + bg(x) \rangle = a \langle f(x) \rangle + b \langle g(x) \rangle,$$

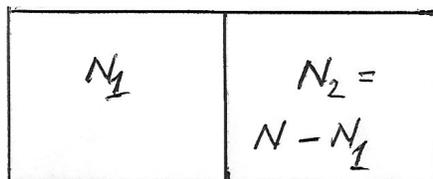
$$(ii) \quad \langle cf(x) \rangle = c \langle f(x) \rangle,$$

em que $f(x)$ e $g(x)$ são variáveis aleatórias e a , b e c são constantes.

2- Mostre que $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \geq 0$.

1.2 Exemplo: expansão livre de um gás

A física estatística tradicionalmente se baseia na proposta e no estudo de modelos simplificados do mundo real. Adotando esta prática antiga de modelagem, que vai se tornando cada vez mais relevante em toda a ciência contemporânea, vamos considerar um modelo, muito simplificado, para a expansão livre de um gás de N partículas. O modelo é suficientemente simples para permitir que se façam alguns cálculos (com um pouquinho de trabalho algébrico), fornecendo resultados muito típicos na física estatística.



Vamos supor que inicialmente as partículas do gás estejam numa das metades de uma caixa, de volume total V , e a outra metade da caixa esteja vazia (ver a figura abaixo). Portanto, no instante inicial, o lado esquerdo da caixa contém $N_1 = N$ partículas e o lado direito contém $N_2 = N - N_1 = 0$ partículas.

Inicialmente há uma partição impermeável separando os dois lados da caixa. Num determinado momento a partição é retirada (ou se torna permeável) e as partículas podem se espalhar pela caixa toda. Após um intervalo de tempo suficientemente longo, isto é, atingido o equilíbrio, qual seria o número de partículas em cada uma das metades da caixa? Sob um ponto de vista intuitivo, há uma expectativa de que as partículas acabem se distribuindo igualmente nas duas metades da caixa (no equilíbrio, é natural antecipar que $N_1 = N_2 = N/2$, sem prejuízo de pequenas flutuações).

Vamos agora apresentar uma discussão estatística desse problema.

No nível de descrição em que estamos trabalhando, um estado microscópico do sistema ficará caracterizado quando soubermos quais as partículas que estão no lado esquerdo da caixa e quais as partículas que estão no lado direito. Note que estamos considerando partículas clássicas, perfeitamente distinguíveis. Cada partícula pode estar no lado direito ou no lado esquerdo. Portanto, temos 2^N configurações microscópicas possíveis no nosso sistema (por exemplo, com $N = 3$, é fácil identificar as $2^3 = 8$ configurações possíveis). Vamos adotar a hipótese estatística básica de que essas configurações microscópicas sejam igualmente prováveis (como num baralho bem embaralhado).

Podemos agora perguntar qual é a probabilidade $P(N_1; N_2 = N - N_1)$ de encontrar uma situação (macroscópica) com N_1 partículas no lado esquerdo e $N_2 = N - N_1$ partículas no lado direito. Formalmente, escrevemos

$$P(N_1; N_2 = N - N_1) = P_N(N_1) = \frac{1}{2^N} \Omega(N_1; N_2 = N - N_1), \quad (5)$$

em que $\Omega(N_1; N_2 = N - N_1)$ é o número de configurações (estados microscópi-

cos) com N_1 partículas à esquerda e $N_2 = N - N_1$ partículas à direita (e 2^N é o número total de microestados do sistema). Usando noções básicas de análise combinatória, é fácil perceber que

$$\Omega(N_1; N_2 = N - N_1) = \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!}, \quad (6)$$

com o fatorial $N! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times N$. Se for difícil entender a origem dessa expressão, vale a pena obter explicitamente Ω para alguns valores pequenos de N (por exemplo, para $N = 3, 4$ ou 5). Na realidade, nós estamos obtendo os estados microscópicos pela permutação de N objetos (partículas) de todas as formas possíveis; este resultado, correspondente a $N!$, deve ser dividido por $N_1!$ e $N_2!$, pois não adianta permutar entre si as partículas que já estão nas metades esquerda ou direita da caixa. Para o bom estudante de análise combinatória, Ω é o número de arranjos distintos de N objetos em grupos distintos, de N_1 e de $N_2 = N - N_1$ objetos. Portanto, temos

$$P_N(N_1) = \frac{1}{2^N} \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!}. \quad (7)$$

Vamos agora fazer algumas manipulações matemáticas, um tanto engenhosas mas absolutamente simples. O objetivo consiste em mostrar que a distribuição $P_N(N_1)$ é normalizada, calcular o valor médio $\langle N_1 \rangle$ e o desvio quadrático, $\langle (\Delta N_1)^2 \rangle$. Para facilitar os cálculos, vamos introduzir duas novas variáveis, p e q , tal que a distribuição seja escrita na forma

$$P_N(N_1) = \frac{1}{2^N} \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!} p^{N_1} q^{(N - N_1)}. \quad (8)$$

As novas variáveis p e q vão ser muito úteis para as nossas manipulações algébricas. Além disso, fazendo $p = q = 1$ no final dos cálculos, recuperamos imediatamente as propriedades da distribuição original.

A prova da normalização utiliza apenas a expressão do binômio de Newton,

$$\sum_{N_1=0}^N P_N(N_1) = \frac{1}{2^N} \sum_{N_1=0}^N \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!} p^{N_1} q^{(N - N_1)} = \frac{1}{2^N} (p + q)^N \rightarrow 1, \quad (9)$$

pois no final fazemos $p = q = 1$.

O cálculo do valor médio de N_1 é ligeiramente mais envolvido, envolvendo a utilização de um operadorzinho, $p\partial(\dots)/\partial p$,

$$\begin{aligned}
\langle N_1 \rangle &= \sum_{N_1=0}^N N_1 P_N(N_1) = \frac{1}{2^N} \sum_{N_1=0}^N N_1 \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} p^{N_1} q^{(N-N_1)} = \\
&= \frac{1}{2^N} \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) \sum_{N_1=0}^N \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} p^{N_1} q^{(N-N_1)} = \frac{1}{2^N} \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) (p+q)^N = \\
&= \frac{1}{2^N} p N (p+q)^{N-1} \rightarrow \frac{N}{2}, \tag{10}
\end{aligned}$$

onde fazemos $p = q = 1$ na última etapa. O resultado final, $\langle N_1 \rangle = N/2 = \langle N_2 \rangle$, quando $p = q = 1$, já foi antecipado. De fato, com a hipótese de probabilidades iguais, devemos em média encontrar configurações com a metade das partículas em cada lado da caixa.

Para calcular o desvio quadrático, utilizamos duas vezes o truque do operador $p\partial(\dots)/\partial p$. Assim temos

$$\begin{aligned}
\langle N_1^2 \rangle &= \sum_{N_1=0}^N N_1^2 P_N(N_1) = \frac{1}{2^N} \sum_{N_1=0}^N N_1^2 \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} p^{N_1} q^{(N-N_1)} = \\
&= \frac{1}{2^N} \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) \sum_{N_1=0}^N \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} p^{N_1} q^{(N-N_1)} = \\
&= \frac{1}{2^N} \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) (p+q)^N = \\
&= \frac{1}{2^N} N p (q + pN) (p+q)^{(N-2)} \rightarrow \frac{N(N+1)}{4}. \tag{11}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle (\Delta N_1)^2 \rangle = \langle N_1^2 \rangle - \langle N_1 \rangle^2 = \frac{1}{4} N, \tag{12}$$

ou seja,

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta N_1)^2 \rangle}}{\langle N_1 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}}, \tag{13}$$

indicando que a distribuição se torna muito fina, localizada em torno do seu valor médio, quando N for um número suficientemente grande. Escrevemos então

$$\frac{\sqrt{\langle(\Delta N_1)^2\rangle}}{\langle N_1\rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}} \rightarrow 0, \quad (14)$$

no limite $N \rightarrow \infty$.

Encontramos um resultado intuitivamente óbvio e que seria esperado: com um número suficientemente grande de partículas, a probabilidade de encontrar N_1 partículas no lado esquerdo é quase sempre praticamente nula, exceto nas imediatas vizinhanças de $N_1 = N/2$.

Certamente existem flutuações (estatísticas) em torno do valor médio $\langle N_1 \rangle = N/2$. Por exemplo, podemos calcular a probabilidade de todas as partículas voltarem para o lado esquerdo da caixa, que é dada por

$$P_N(N_1 = N) = \frac{1}{2^N} \frac{N!}{0!N!} = \frac{1}{2^N}. \quad (15)$$

Com N da ordem de grandeza do número de Avogadro, temos

$$\ln P_N(N) \sim -10^{23}. \quad (16)$$

Esta probabilidade não é estritamente nula, mas seria um número decimal, escrito como $P_N(N) = 0,000\dots0001\dots$, com 10^{23} dígitos nulos depois da vírgula! Supondo que se leve um décimo de segundo para escrever cada zero, seriam necessários 10^{22} segundos, cerca de 10^{15} anos, para escrever este número (valor que pode ser comparado com a idade do universo, estimada em apenas 10^{10} anos!). É claro que o gás pode retornar à sua situação original, na metade esquerda da caixa, mas a probabilidade desse acontecimento é ridiculamente pequena (como também é ridiculamente pequena a probabilidade de violações da segunda lei da termodinâmica!!).

Considerações estatísticas dessa mesma natureza justificam a famosa conclusão de Gibbs, mais tarde citada por Boltzmann, sobre a impossibilidade da diminuição da entropia de um sistema isolado:

“the impossibility of an uncompensated decrease seems reduced to improbability”.

Vamos agora calcular o valor máximo (ou mais provável) da distribuição $P_N(N_1)$. Trata-se de um exercício matemático típico da física estatística, cujo resultado, para valores grandes de N , também é intuitivo: vamos mostrar que a probabilidade $P_N(N_1)$ é máxima quando N_1 for igual ao valor médio $\langle N_1 \rangle$.

Lembrado que as probabilidades são sempre positivas, podemos escrever o logaritmo natural da distribuição,

$$\ln P_N(N_1) = \ln N! - \ln N_1! - \ln(N - N_1)! - N \ln 2. \quad (17)$$

Se estivermos trabalhando com números grandes, as probabilidades somente serão significativamente diferentes de zero quando N_1 e $N - N_1$ também forem muito grandes, da ordem de $N/2$. Então, nessas circunstâncias, faz sentido lançar mão da série de Stirling,

$$\ln N! = N \ln N - N + O(\ln N), \quad (18)$$

em que $O(\dots)$ indica a ordem de grandeza dos termos desprezados. Esta é uma série assintótica, de vastíssima utilização em física estatística, conhecida desde o século XIX, cujos primeiros termos já fornecem ótimos resultados à medida que o número N aumenta (utilize uma calculadora para verificar o que acontece para valores pequenos de N ; por exemplo, obtenha resultados numéricos para $N = 5, 10$ e 15). Lançando mão da série de Stirling, temos

$$\ln P_N(N_1) = N \ln N - N_1 \ln N_1 - (N - N_1) \ln(N - N_1) - N \ln 2 + \dots, \quad (19)$$

onde estamos desprezando os termos de ordem $\ln N$. Como a função logaritmo é monotonicamente crescente, para calcular o máximo da probabilidade $P_N(N_1)$ como função de N_1 basta calcular o máximo de $\ln P_N(N_1)$. Vamos então, heurísticamente, supor que a variável N_1 seja contínua e igualar a zero a primeira derivada,

$$\frac{\partial}{\partial N_1} \ln P_N(N_1) = -\ln N_1 + \ln(N - N_1) = 0. \quad (20)$$

A solução desta equação mostra que o máximo da distribuição, $\tilde{N}_1 = N/2$, corresponde exatamente ao valor esperado, $\langle N_1 \rangle = N/2$, como não poderia deixar de ter acontecido!

Exercícios

1- Considere uma função de distribuição gaussiana,

$$p(x) = A \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (21)$$

em que A , x_0 e σ são constantes, e a variável aleatória x pode assumir valores em todo o eixo real.

No contexto da teoria cinética de Maxwell, já mostramos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2}, \quad (22)$$

para $\alpha > 0$ (embora os físicos de teoria de campos também utilizem essa integral com a coragem de fazer $\alpha < 0$). Há muitas histórias sobre integrais gaussianas desse tipo. Dizem que Liouville costumava perguntar o resultado dessa integral aos seus alunos, e que só aceitava para trabalhar os alunos que acertassem o resultado!

Utilize esse resultado para mostrar que $A = (2\pi\sigma^2)^{-1/2}$ quando a função $p(x)$ for normalizada, isto é, quando

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1. \quad (23)$$

Supondo que a distribuição esteja devidamente normalizada, mostre que

$$\langle x \rangle = x_0; \quad \langle (x - x_0)^2 \rangle = \sigma^2. \quad (24)$$

Note que, tomando $x_0 = \langle N_1 \rangle = N/2$ e $\sigma = \sqrt{\langle (\Delta N_1)^2 \rangle} = N^2/4$, temos uma excelente representação gaussiana para a distribuição $P_N(N_1)$. Com um pouco de paciência e habilidade num microcomputador, é possível comparar os gráficos de $P_N(N_1)$ e da gaussiana correspondente (tente construir gráficos para $N = 5$ e $N = 10$, por exemplo). O “teorema do limite central” da teoria das probabilidades garante que, em quase todos os casos de interesse físico, as distribuições de probabilidades tendem para a gaussiana associada quando o número de eventos for suficientemente grande.

2- A expansão assintótica de Stirling,

$$\ln N! = N \ln N - N + O(\ln N), \quad (25)$$

que funciona muito bem para N grande, é um recurso de enorme utilidade em mecânica estatística (em conexão com o “limite termodinâmico”).

Utilizando o método da indução finita e uma integração por partes, mostre que

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n! \quad (26)$$

para qualquer inteiro $n = 0, 1, 2, \dots$ (por definição, $0! = 1$). Admitindo uma continuação analítica, para n qualquer, essa integral dá origem à definição da “função gama”.

O valor assintótico dessa integral (no limite de n muito grande) pode ser obtido através do “método de Laplace”. Introduzindo uma mudança de variáveis, temos

$$n! = \int_0^{\infty} x^n \exp(-x) dx = n^{n+1} \int_0^{\infty} \exp[n(\ln y - y)] dy. \quad (27)$$

O problema então fica reduzido ao cálculo de uma integral da forma

$$I(n) = \int_0^{\infty} \exp[nf(y)] dy, \quad (28)$$

em que

$$f(y) = \ln y - y. \quad (29)$$

Note que a função $f(y)$ tem um máximo para $y = y_0 = 1$. Note também que as contribuições para a integral de uma função do tipo $\exp[nf(y)]$, quando $n \rightarrow \infty$, provêm essencialmente das vizinhanças desse máximo. Podemos então escrever um desenvolvimento em série de Taylor de $f(y)$ nas vizinhanças do máximo,

$$f(y) = -1 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \dots, \quad (30)$$

descartar os termos de ordem superior, e fazer a integração sobre todo o eixo real. Assim temos

$$I(n) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-n - \frac{n}{2}(y-1)^2\right] dy = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{1/2} \exp(-n), \quad (31)$$

de onde é possível obter a forma de Stirling.

Os alunos com (excelente) formação matemática talvez consigam provar - com todo o rigor matemático, é claro - que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left\{ \int_a^b \exp [nf(x)] dx \right\} = f(x_0), \quad (32)$$

onde x_0 é o ponto de máximo de uma função contínua $f(x)$, com $a < x_0 < b$.

3- Caminho aleatório em uma dimensão.

Considere o problema de um bêbado em uma dimensão, dando N passos de mesmo comprimento a partir de determinada origem. Em cada passo, o bêbado pode ir para a direita, com probabilidade p , ou para a esquerda, com probabilidade $q = 1 - p$.

(a) Para $N = 6$ e $p = 2/3$, desenhe um gráfico de $P_N(N_1)$ contra N_1/N , em que N_1 é o número de passos para a direita. Obtenha $\langle N_1 \rangle$ e $\langle N_1^2 \rangle$, e use esses valores para escrever a "distribuição gaussiana correspondente", $p_G(N_1)$, isto é, a distribuição gaussiana com os mesmos valores do primeiro e do segundo momentos (ou seja, do valor médio e do valor quadrático médio). Desenhe um gráfico de $p_G(N_1)$ contra N_1/N e compare com o resultado para a distribuição binomial correspondente.

(b) Faça de novo os cálculos do item anterior para $N = 12$ e $N = 48$. Os novos gráficos são muito diferentes? Por que?

4*-** O “modelo da urna” de Ehrenfest proporciona uma ilustração excelente da presença de flutuações estatísticas, do papel dos grandes números, e da “seta do tempo” (enfim, do significado estatístico da segunda lei da termodinâmica). Veja, por exemplo, o artigo de Ambegaokar e Clerk, “Entropy and time”, *Am. J. Phys.* **67**, 1068-1073 (1999). A “equação estocástica” associada ao modelo da urna é linear (e exatamente solúvel). Há muitos trabalhos sobre esse modelo e suas variantes, com destaque para a solução pioneira de Mark Kac de 1947 (ver um trabalho recente de M. Baldovin, L. Caprini e A. Vulpiani, “Irreversibility and typicality: A simple analytical result for the Ehrenfest model”, *Physica A***524**, 422, 2019).

Na versão original do modelo da urna nós consideramos duas caixas, N bolas numeradas, e um gerador de N números aleatórios. Inicialmente, há N_1 bolas na urna 1, e $N_2 = N - N_1$ bolas na urna 2. Em cada intervalo de tempo, nós sorteamos um número aleatório entre 1 e N , e mudamos a posição (localização nas urnas) da bola correspondente.

(i) Faça simulações numéricas, com um bom gerador de números aleatórios, para desenhar gráficos de N_1 (número de bolas na urna 1) em função do

tempo t (devidamente discretizado em intervalos iguais Δt). Faça as simulações para uma situação inicial em que $N_1 = N$ (todas as bolas estão na urna 1). Considere dois valores do número total de bolas: (a) $N = 10$ e (b) $N = 100$. O que você pode dizer a respeito das flutuações do valor de N_1 ? O que acontece no limite $t \rightarrow \infty$?

(ii) Mostre que a evolução temporal de $P(N_1, t)$, probabilidade de encontrar N_1 bolas na urna 1 no tempo t , é dada pela “equação de diferenças”

$$P(N_1, t + \Delta t) = P(N_1 - 1, t) W_1 + P(N_1 + 1, t) W_2,$$

em que W_1 e W_2 são “taxas de transição”. Adotando a hipótese de equiprobabilidade das configurações de bolas, quais são as expressões de W_1 e W_2 ? Verifique que a distribuição binomial é uma solução dessa equação “no equilíbrio” (isto é, para $t \rightarrow \infty$).

(iii) Utilize essa equação estocástica para obter uma expressão para a evolução temporal do valor esperado (valor médio) de N_1 ,

$$\langle N_1 \rangle_t = \sum_{N_1} N_1 P(N_1, t).$$

Compare a forma de $\langle N_1 \rangle_t$ com os gráficos de N_1 contra t obtidos no item (i).

Há um texto recente, que ainda pode ser encontrado nas estantes de "auto-ajuda", que é uma excelente introdução às ideias da teoria das probabilidades: O Andar do Bêbado, de Leonard Mlodinow, editora Zahar, 2009.

revisto em 24/08/2022