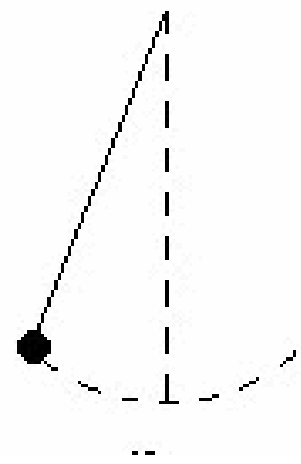
Física II (4302112)
Turma T2 - noturno

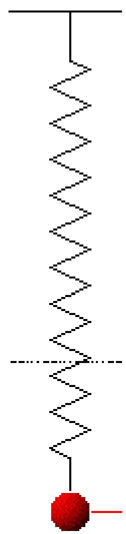
2º sem/2022
Movimento Harmônico Simples
Profa. Luciana V. Rizzo

Movimento oscilatório
Introdução

Movimento oscilatório

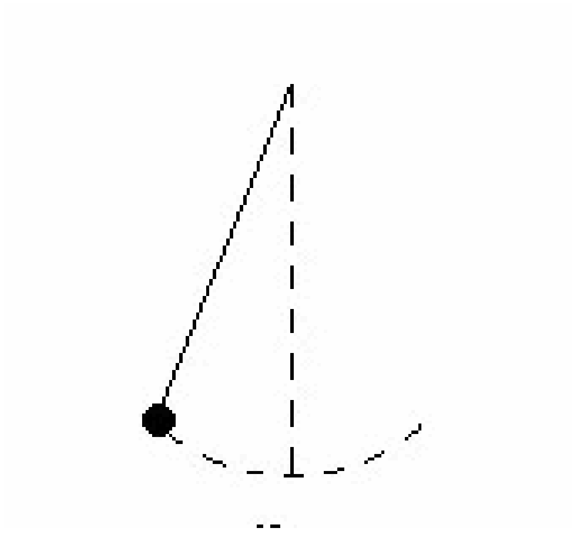
- Exemplos
  - Pêndulo
  - Sistema massa-mola
  - Corda de um violão
  - Ondas no mar e na atmosfera
  - Átomos em uma rede cristalina
  - Corrente elétrica alternada

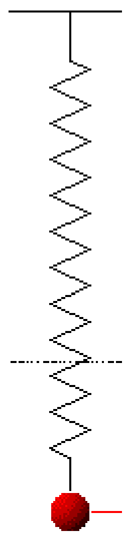




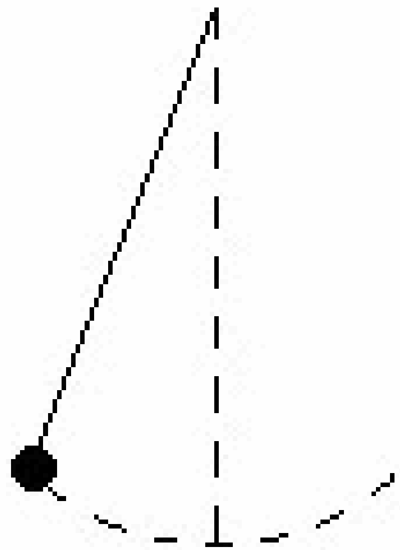
Movimento oscilatório

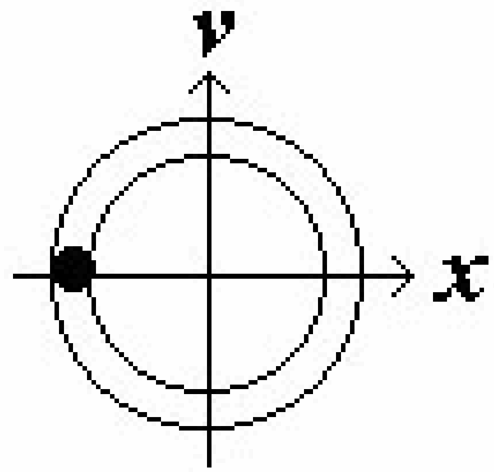
- Ação de forças restauradoras
  - Pêndulo: componente da força peso
  - Massa-mola: força elástica





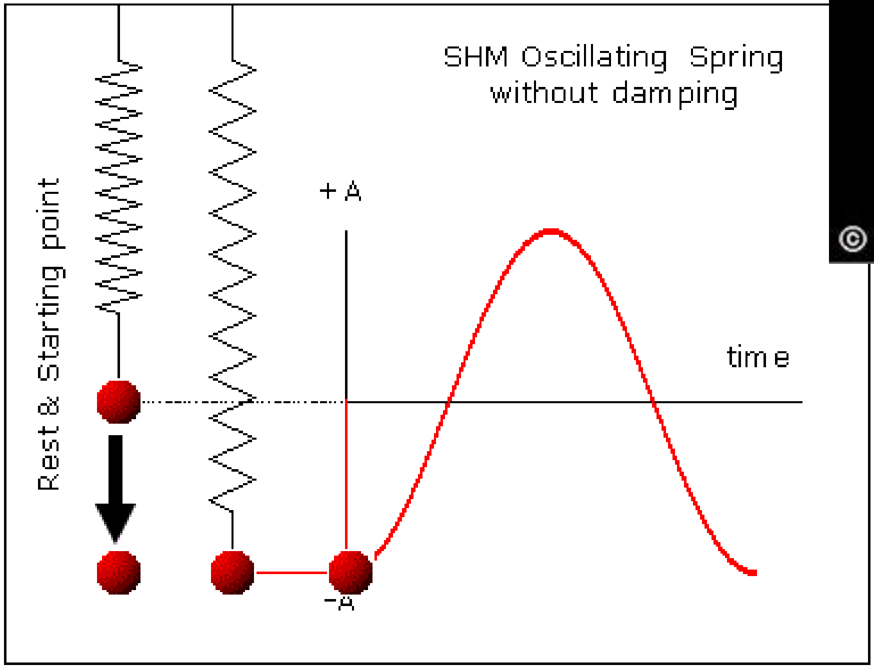
Relação entre o movimento de oscilação e o ciclo trigonométrico

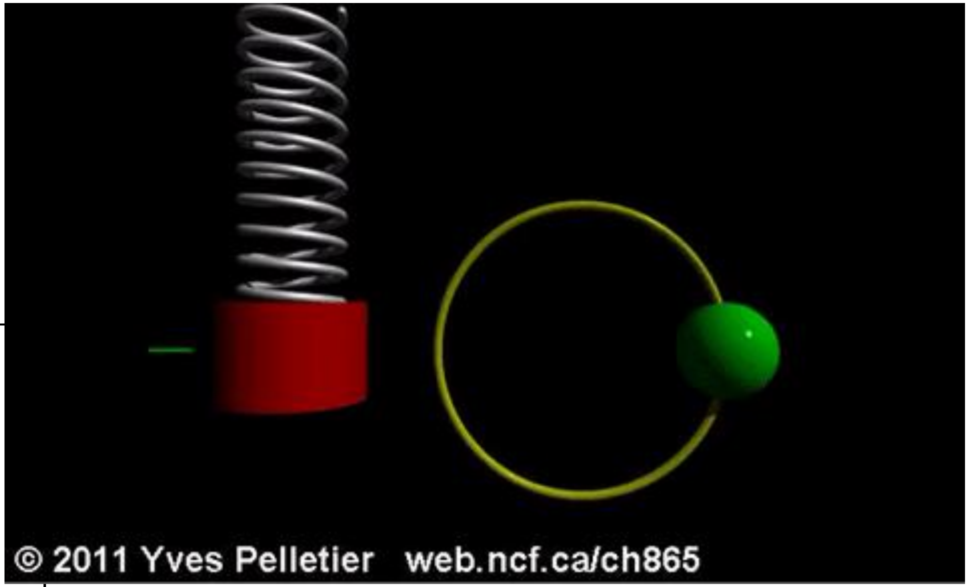




Deslocamento linear X angular

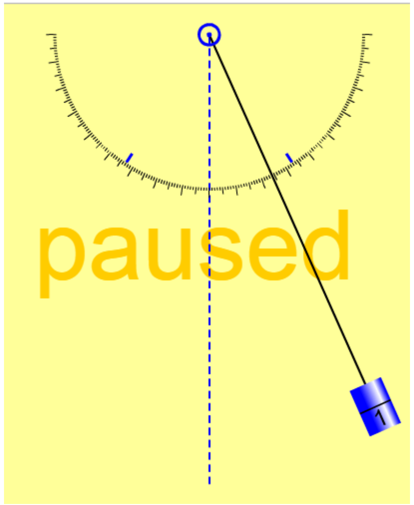
Relação entre o movimento de oscilação e o ciclo trigonométrico

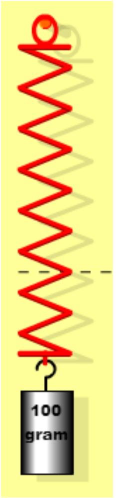


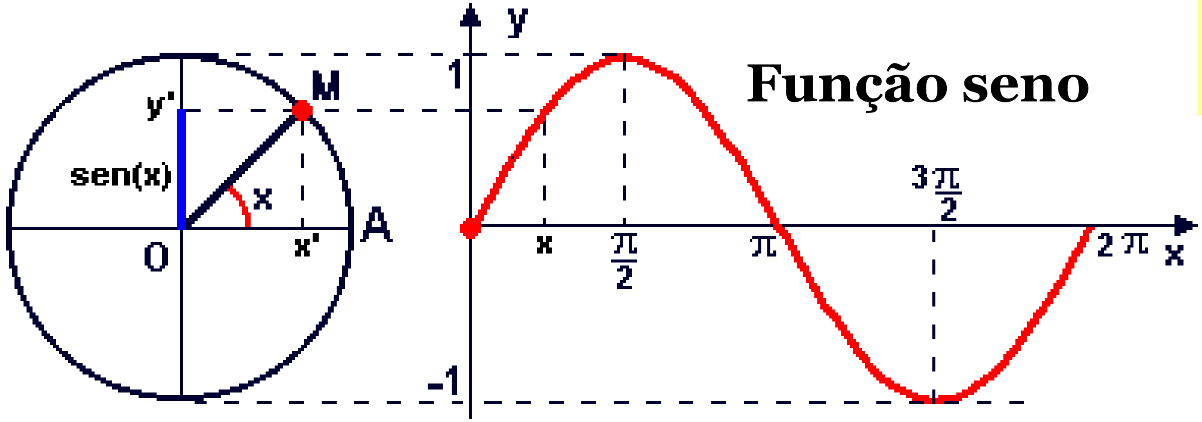


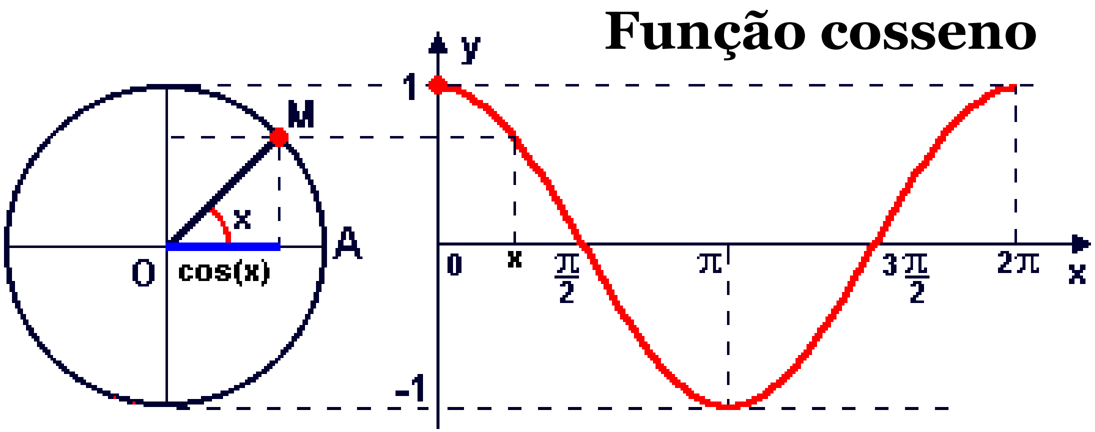
Movimento oscilatório

É representado matematicamente por combinações de funções periódicas, como senos e cossenos

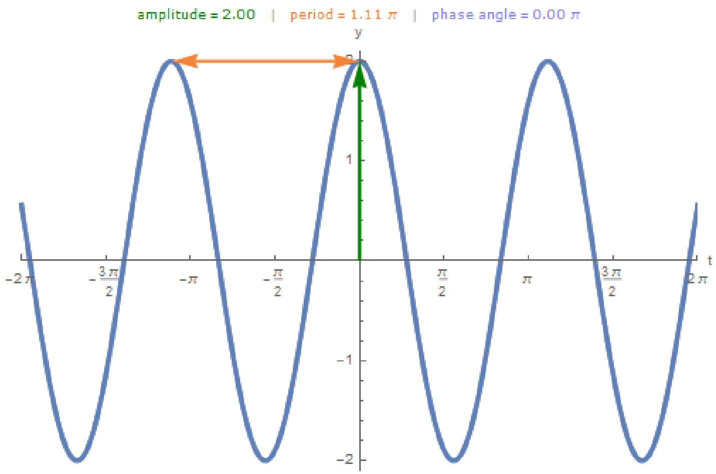






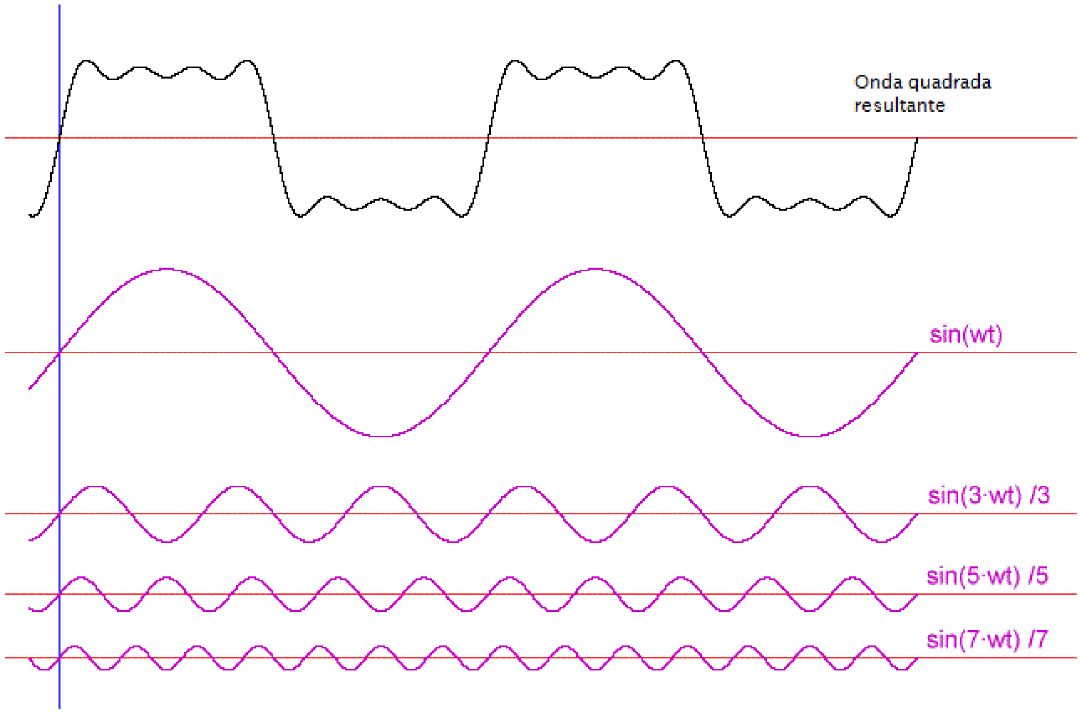


Movimento oscilatório



Movimento harmônico simples

Combinações de funções periódicas

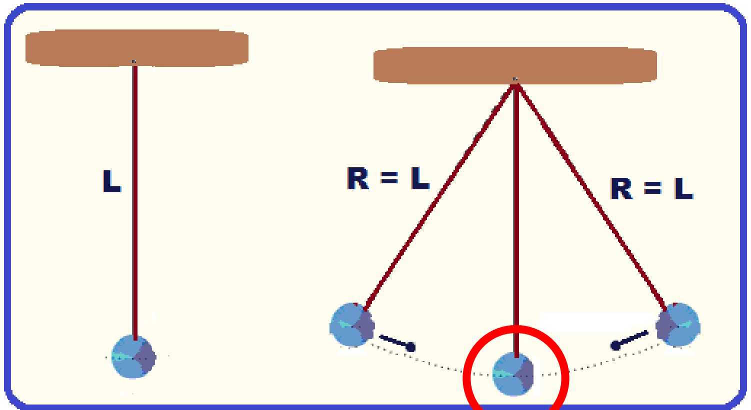


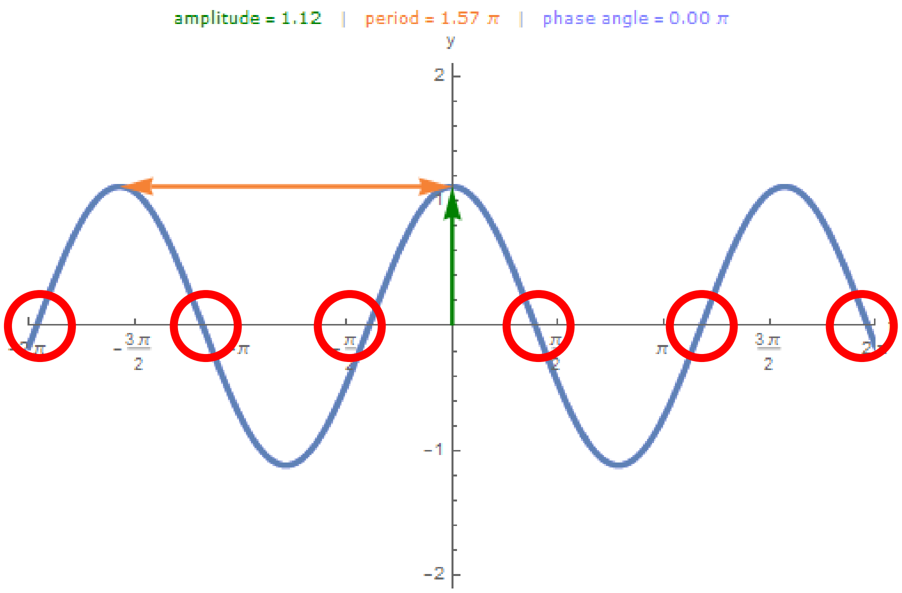
Parâmetros das oscilações

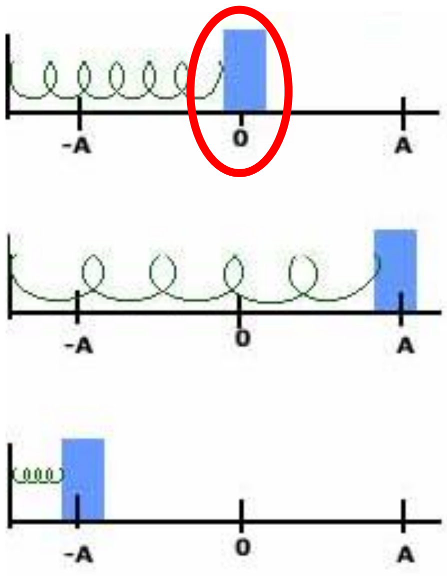
- Posição de equilíbrio: posição onde a força resultante sobre a partícula oscilante é nula
- Período: tempo necessário para completar um ciclo (no SI, em segundos)
- Frequência: número de ciclos realizados por intervalo de tempo (no SI, em Hertz ou em rad/s)
- Amplitude: distância (linear ou angular) da posição de equilíbrio
- Constante de fase: relacionada à amplitude no instante inicial

Parâmetros das oscilações

- Posição de equilíbrio: posição onde a força resultante sobre a partícula oscilante é nula

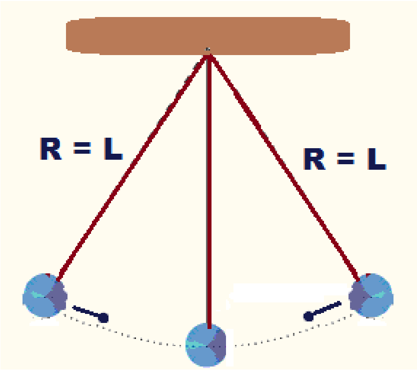






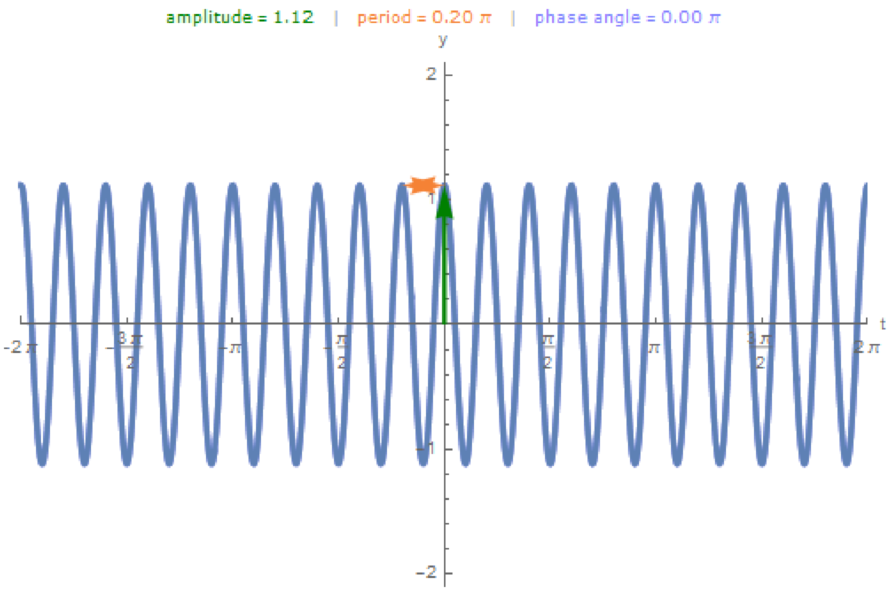
http://demonstrations.wolfram.com/HarmonicOscillation/

Parâmetros das oscilações

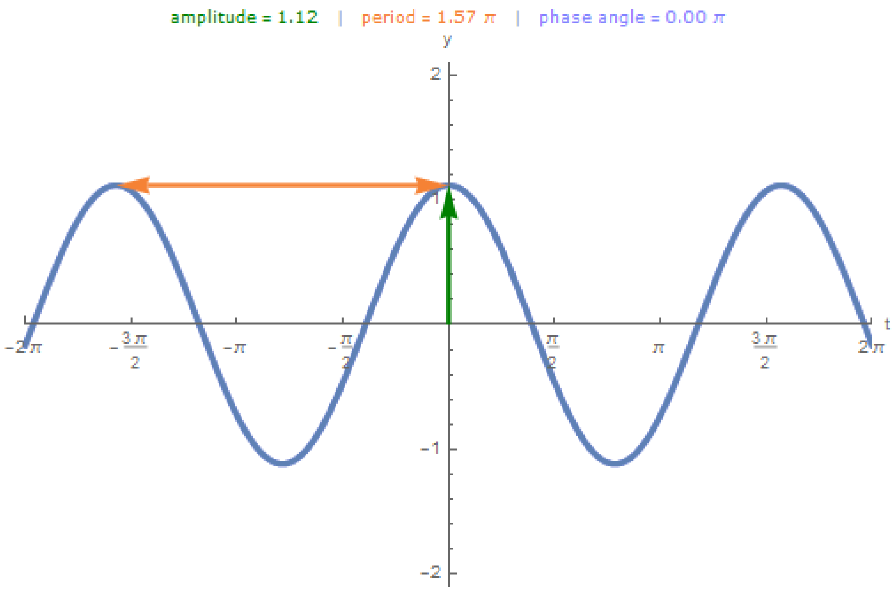


- Período (T): tempo necessário para completar um ciclo (no SI, em segundos)

Período pequeno

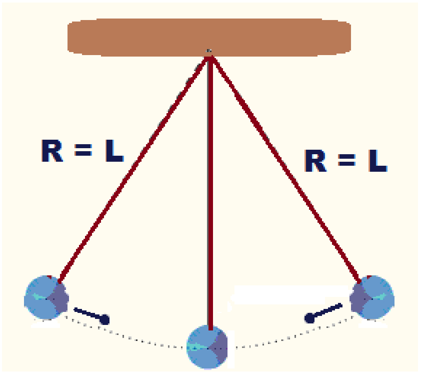


Período grande



http://demonstrations.wolfram.com/HarmonicOscillation/

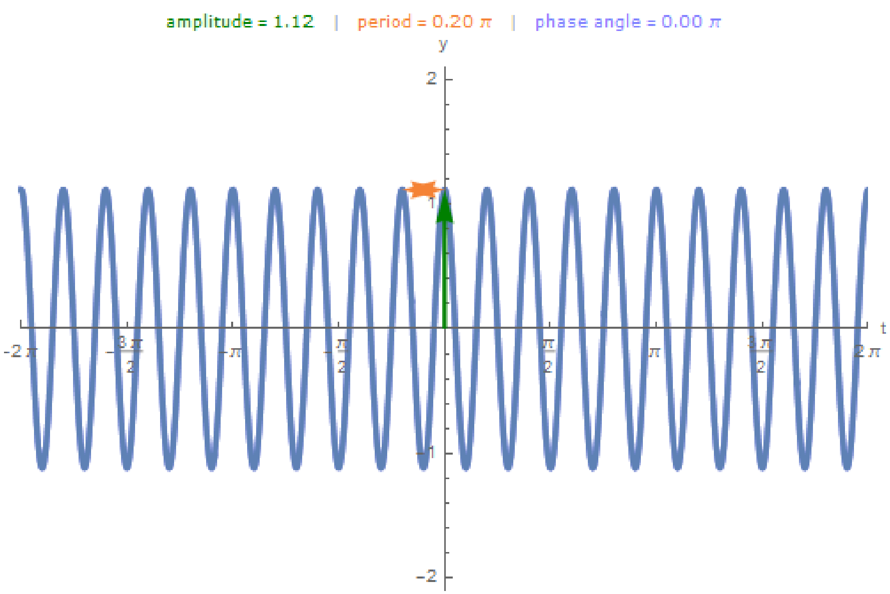
Parâmetros das oscilações



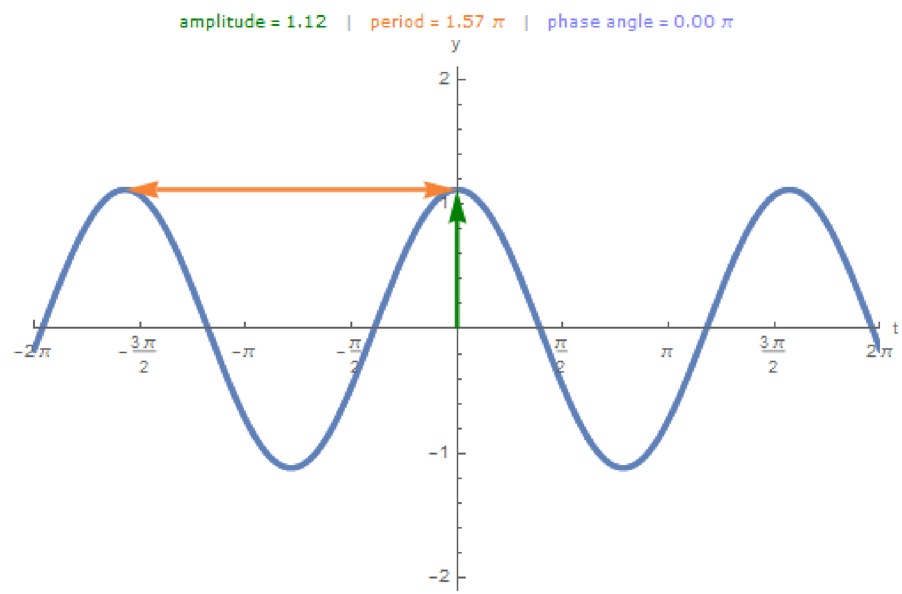
- Frequência (f ou ν): número de ciclos realizados por intervalo de tempo (no SI, em Hertz ou em 1/s)

$$f = \frac{1}{T}$$

Frequência grande

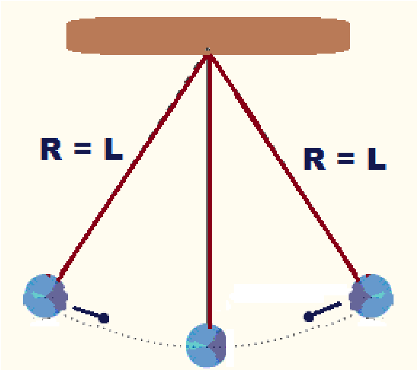


Frequência pequena



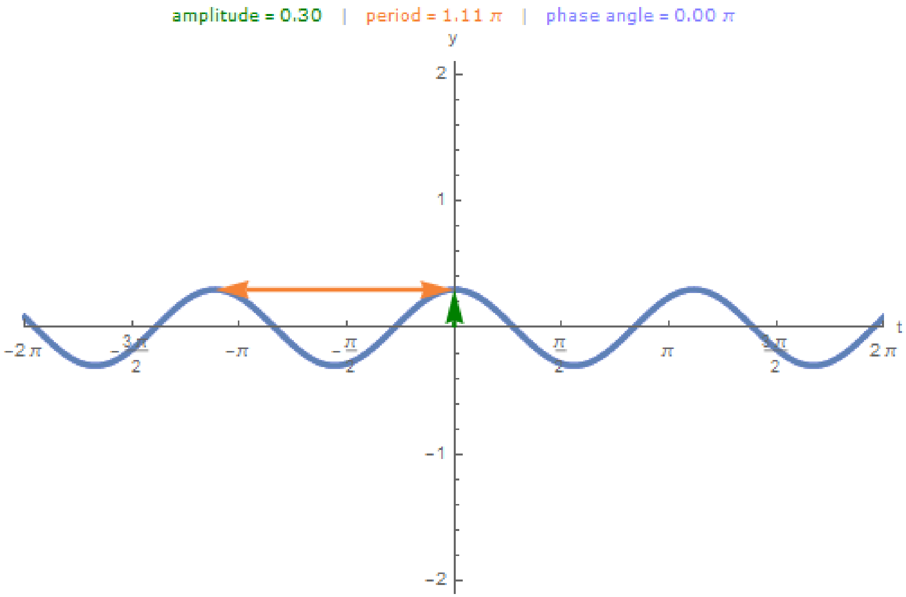
http://demonstrations.wolfram.com/HarmonicOscillation/

Parâmetros das oscilações

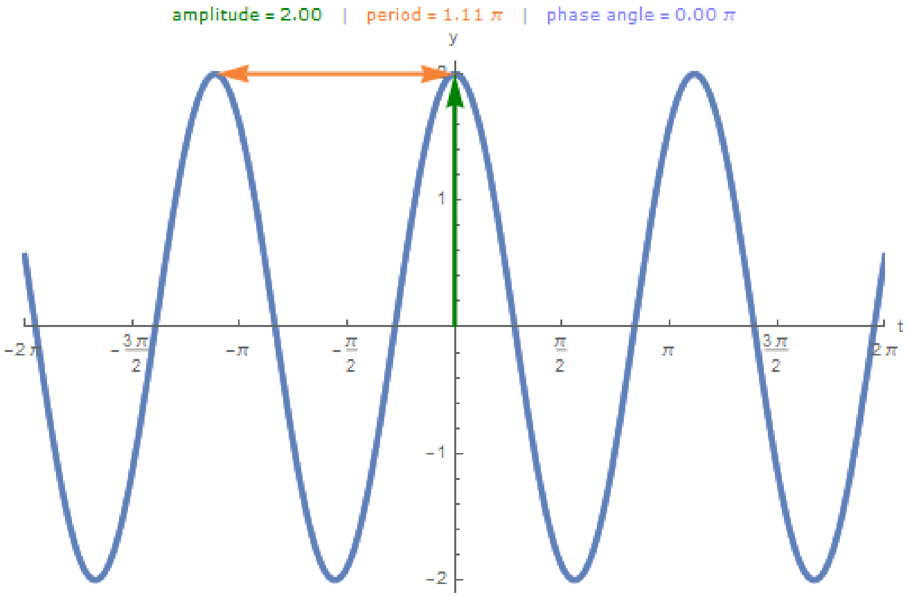


- Amplitude (A): distância (linear ou angular) da posição de equilíbrio

Amplitude pequena

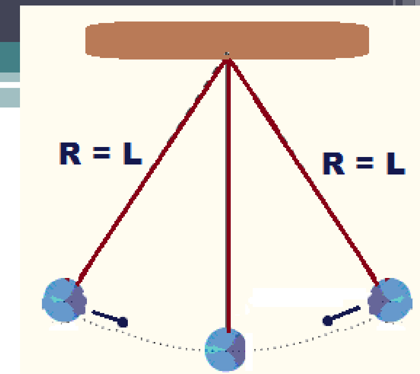


Amplitude grande

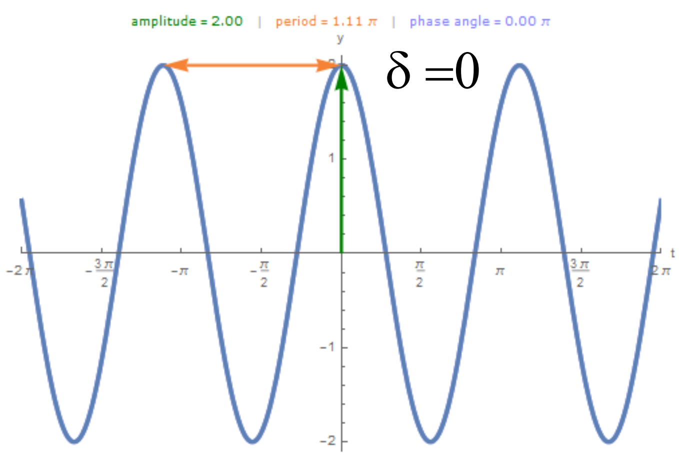


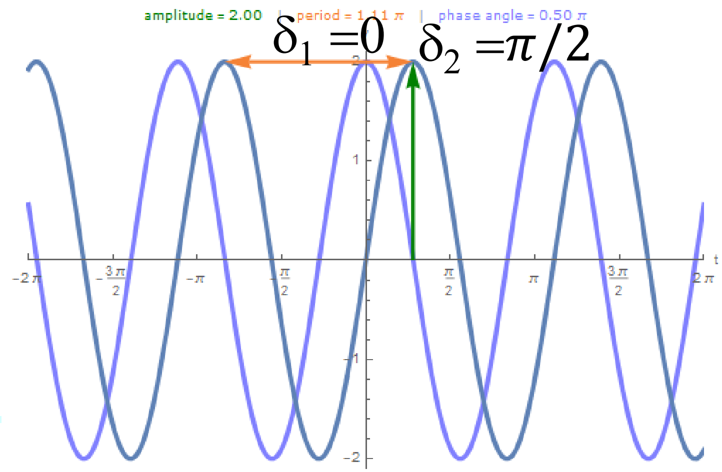
http://demonstrations.wolfram.com/HarmonicOscillation/

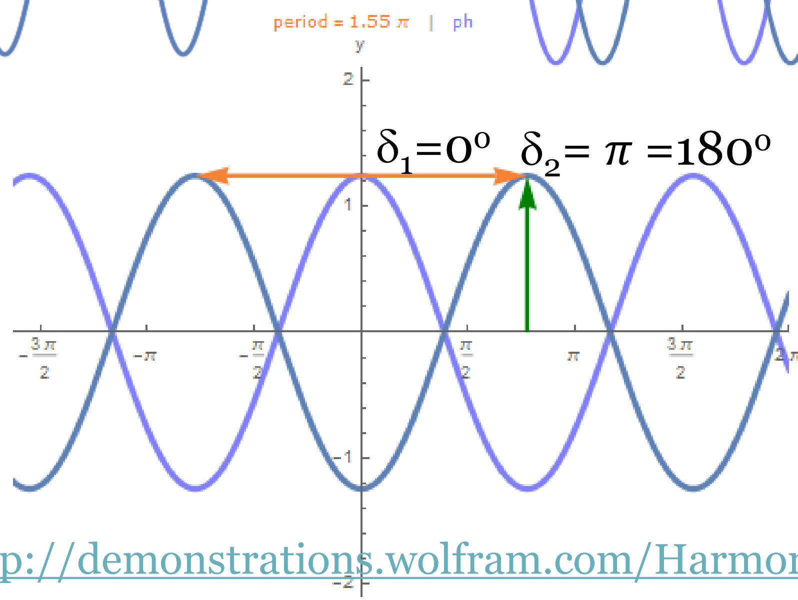
Parâmetros das oscilações



- Constante de fase (φ ou δ): relacionada à posição no instante inicial



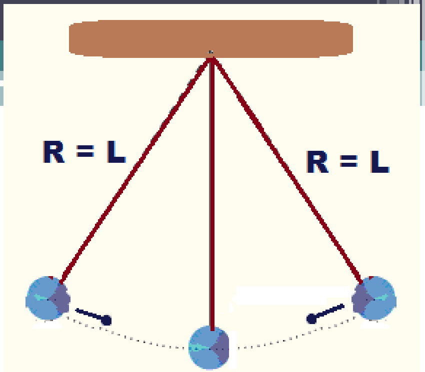




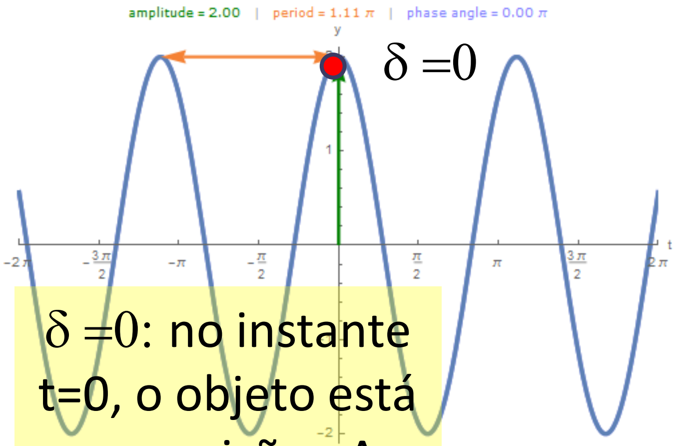
Fase é importante quando queremos comparar dois movimentos

http://demonstrations.wolfram.com/HarmonicOscillation/

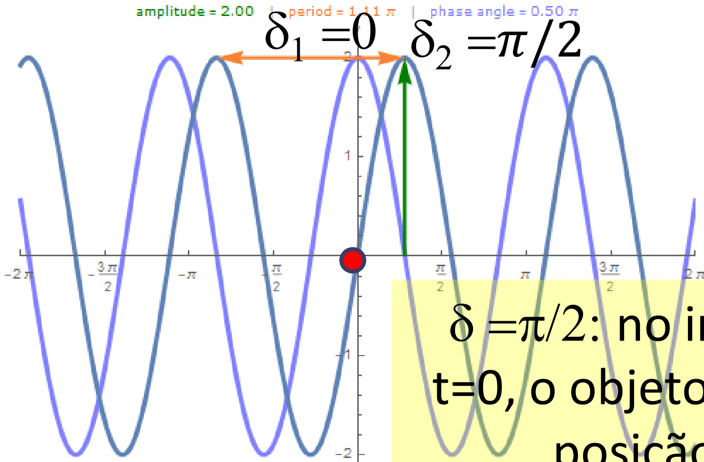
Parâmetros das oscilações



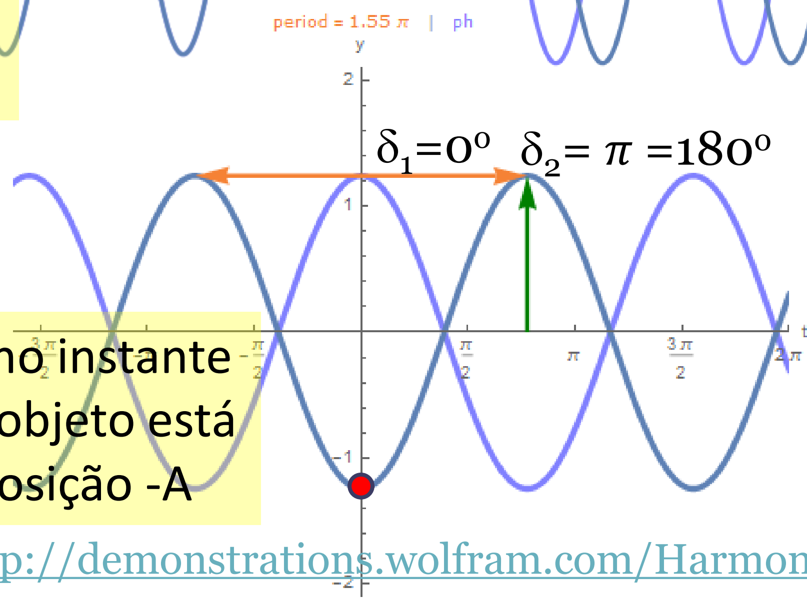
- Constante de fase (φ ou δ): relacionada à posição no instante inicial



$\delta = 0$: no instante t=0, o objeto está na posição +A



$\delta = \pi/2$: no instante t=0, o objeto está na posição 0



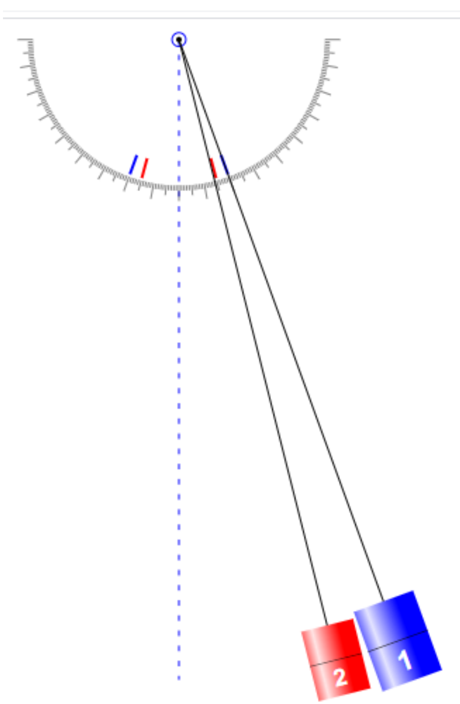
$\delta = \pi$: no instante t=0, o objeto está na posição -A

Fase é importante quando queremos comparar dois movimentos

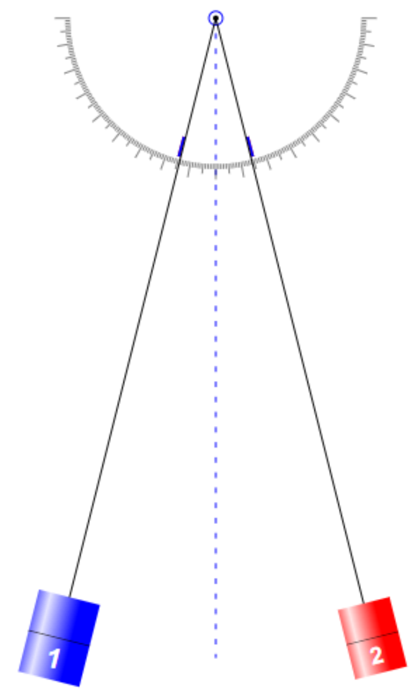
http://demonstrations.wolfram.com/HarmonicOscillation/

Exemplo: pêndulos em fase e fora de fase

Pêndulos em fase (ou seja, diferença de fase igual a zero): caminham juntos, atingindo simultaneamente os pontos extremos de suas trajetórias.

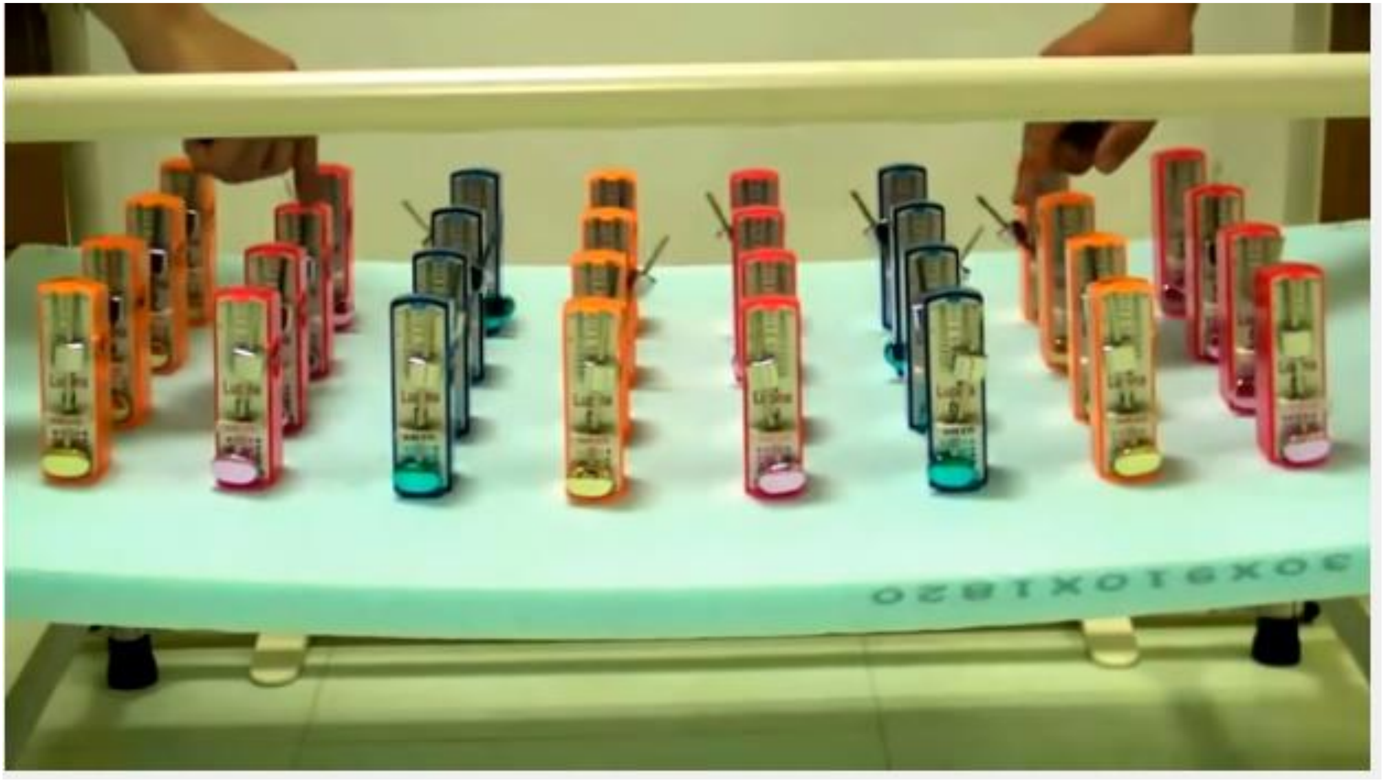


Pêndulos com fase oposta (ou seja, diferença de fase igual a π): quando um pêndulo atinge uma extremidade da trajetória, o outro pêndulo atinge a extremidade oposta.



https://phet.colorado.edu/en/simulation/pendulum-lab

Exemplo: pêndulos oscilando fora de fase, e depois em fase



https://truesingularity.wordpress.com/2012/10/17/tente-ficar-acordado/

- Alguns tipos de movimento oscilatório:
  - Movimento harmônico simples (MHS)
  - Oscilações amortecidas
  - Oscilações forçadas

Movimento Harmônico Simples (MHS)

Movimento Harmônico Simples (MHS)

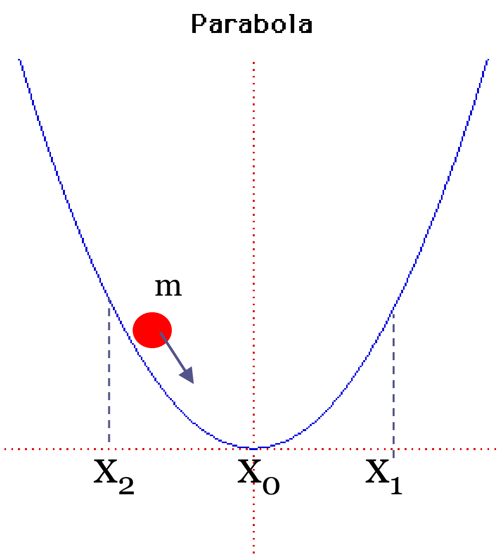
- Caso ideal: sem atrito

- Definição: é um movimento no qual a energia potencial é uma função quadrática da posição:

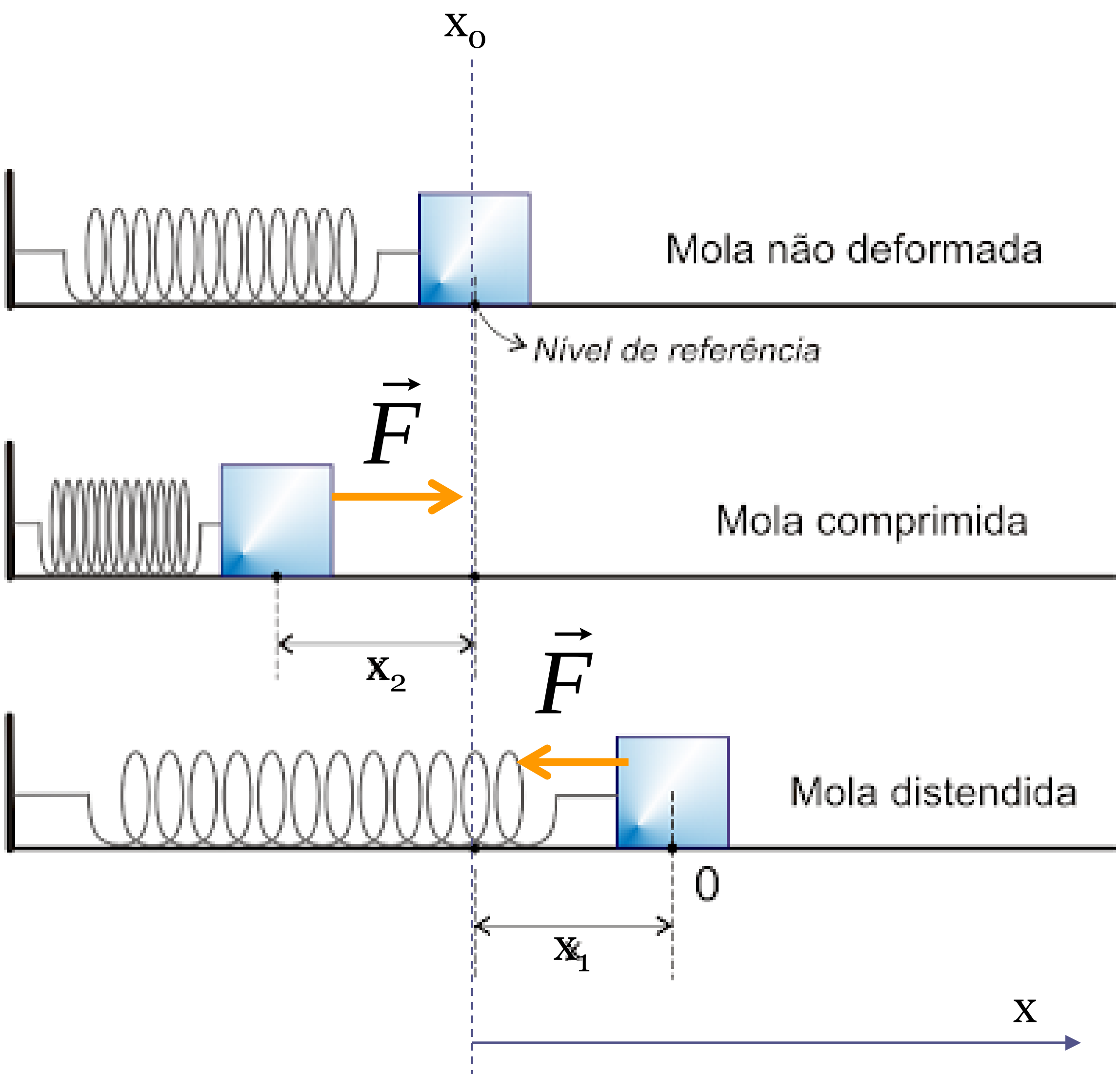
$$U(x) = Cx^2$$

- No ponto de equilíbrio, $\frac{dU}{dx} = 0$

- Limites de oscilação simétricos em relação ao ponto de equilíbrio



Exemplo de MHS:
sistema massa-mola sem atrito



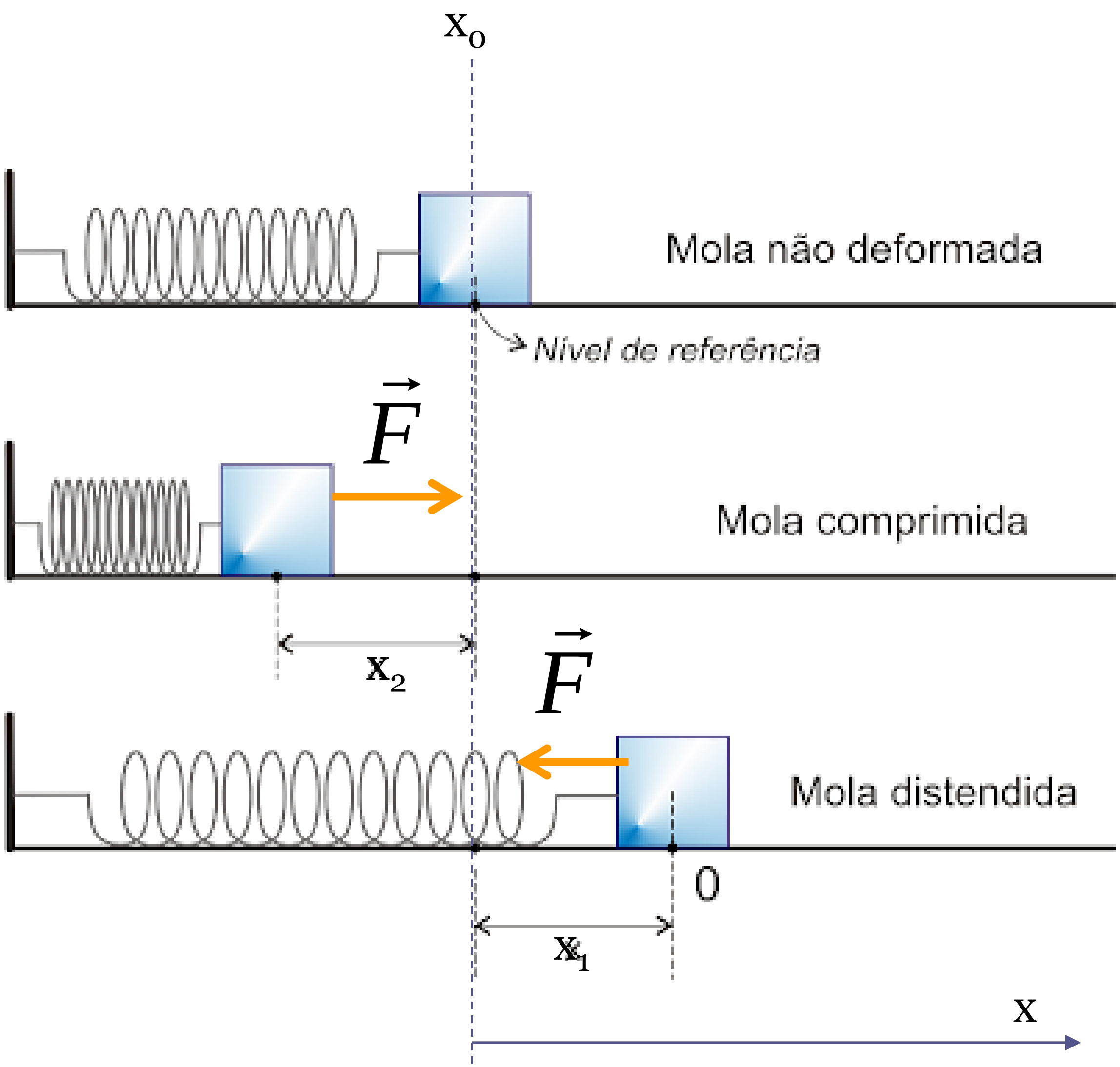
$$U(x) = \frac{K}{2}x^2$$

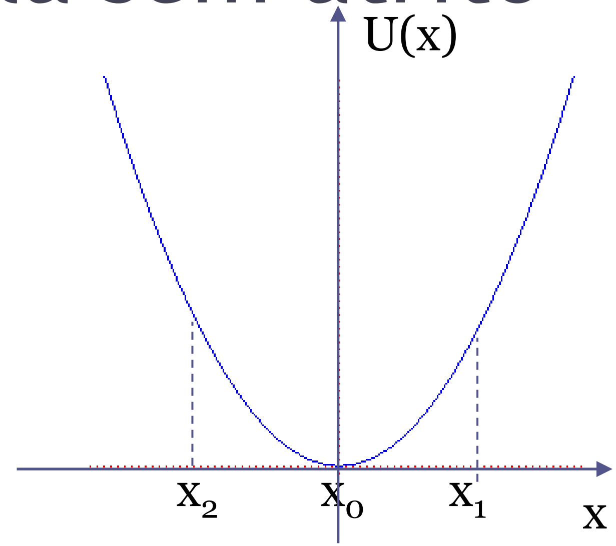
$$F = -\frac{dU}{dx} = -Kx$$

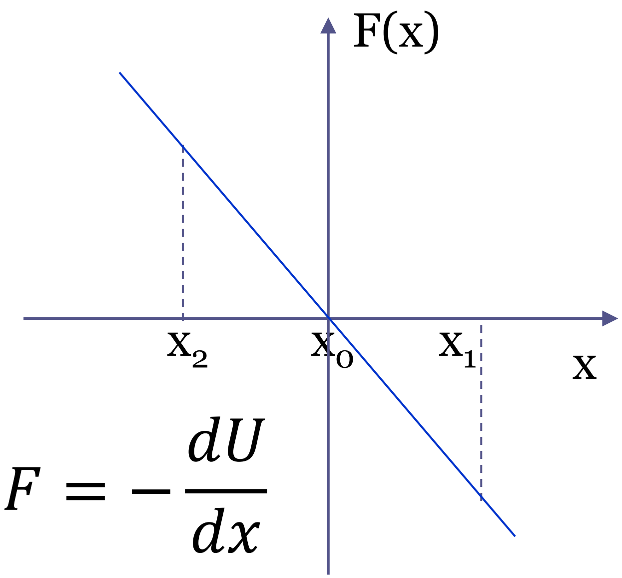
K (maiúsculo) = constante da mola

Em geral, sistemas que estão sujeitos à ação de uma força restauradora sem atrito se movem como um MHS.

Exemplo: sistema massa-mola sem atrito







$$F = -\frac{dU}{dx}$$

MHS - Equação de movimento

MHS - Equação de movimento

$$F = ma$$

$$-Kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0} \quad \text{(I)}$$

Equação diferencial ordinária linear de 2ª ordem

Obs: em um sistema massa-mola, K é a constante elástica. Em outros sistemas oscilantes, K pode estar relacionada a outras propriedades físicas do sistema.

MHS - Equação de movimento

Reformulando a equação (I):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{K}{m}\right)x$$

Qual é a função x(t) cuja 2ª derivada dá ela mesma, a menos de uma constante?

MHS - Equação de movimento

Reformulando a equação (I):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{K}{m}\right)x$$

Qual é a função x(t) cuja 2ª derivada dá ela mesma, a menos de uma constante?

Candidatos para x(t):

$$x(t) = \cos \mathrm{ct} \quad ; \quad x(t) = \mathrm{sen\ ct} \quad ; \quad x(t) = e^{ct}$$

Como o MHS é um movimento periódico e limitado, as funções seno e cosseno são as mais indicadas.

MHS - Equação de movimento

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{K}{m}\right)x$$

Candidatos para x(t):

$$x_1(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta) \quad ; \quad x_2(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \delta)$$

(No MHS, A, ω_0 e δ são constantes)

Verificar que as funções x_1 e x_2 satisfazem a equação diferencial.
Determinar o valor da constante ω_0 em função de K e m.

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

Princípio da Superposição

Se $\cos(\omega_0 t)$ e $\mathrm{sen}(\omega_0 t)$ são soluções, então uma combinação linear também é solução:

$$x(t) = a.\cos(\omega_0 t) + b.\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$$

Exercício: mostrar que a função $x(t)$ é solução da equação diferencial.

Qual é a relação entre as constantes a e b?

$$\mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \delta) = a.\cos(\omega_0 t) + b.\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$$

$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \mathrm{sen}(a) \cdot \mathrm{sen}(b)$

$$\mathrm{A}\cos(\omega_0 t)\cos(\delta) - \mathrm{A}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)\,\mathrm{sen}(\delta) = a.\cos(\omega_0 t) + b.\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$$

$$a = \mathrm{A}\cos(\delta)$$

$$b = -\mathrm{A}\,\mathrm{sen}(\delta)$$

$$\boxed{\tan(\delta) = -\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{A = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Equação de movimento do MHS

$$x(t) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \delta)$$

x depende só de *t*.
x(t) determina a posição em qualquer instante de tempo.

(A, ω_0 e δ são constantes)

Equação de movimento do MHS

$$x(t) = \underbrace{\mathrm{A}}_{\text{Amplitude}}\cos(\underbrace{\omega_0}_{\text{Frequência angular}} t + \underbrace{\delta}_{\text{Fase}})$$

Equação de movimento do MHS

$$x(t) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \delta)$$

São arbitrárias. Ou seja, o agente que provoca a oscilação pode escolher como quiser.

Amplitude

Fase

Frequência angular

Equação de movimento do MHS

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta)$$

Amplitude

Frequência angular

Fase

São arbitrárias. Ou seja, o agente que provoca a oscilação pode escolher como quiser.

Não é arbitrária, depende de caraterísticas físicas do sistema que está oscilando
(ex: massa, constante da mola, comprimento do fio, etc)

Significado físico de constantes do MHS

- ω_0: frequência angular (rad/s)

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

ω_0 depende de características do sistema.
É a frequência natural de oscilação, sem influência de forças de atrito ou forças externas.

- T: período (s)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Aumentando o tempo t de $2\pi/\omega_0$, a função *x(t)* fica:

$$x\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) = \mathrm{Acos}\left[\omega_0\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) + \delta\right] = \mathrm{Acos}[\omega_0 t + 2\pi + \delta]$$

$$= \mathrm{Acos}[\omega_0 t + \delta]$$

Ou seja, o valor de *x(t)* se repete após o intervalo de tempo T= $2\pi/\omega_0$.

Significado físico das constantes

- ω_0: frequência angular (rad/s) $$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

ω_0 depende de características do sistema.
É a frequência natural de oscilação, sem influência de forças de atrito ou forças externas.

- T: período (s) $$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- ν ou f: frequência (Hz) $$\nu = f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Significado físico das constantes

- A: amplitude do movimento
- δ: constante de fase, que indica o valor do deslocamento em t=0:

A e δ determinados pela posição e velocidade inicial da partícula

$$\mathrm{x(t)} = \mathrm{Acos}(\omega_0 t + \delta) \xrightarrow{t=0} \mathrm{x(0)} = \mathrm{Acos}(\delta)$$

Formulação da frequência angular (ω_0)

- Depende de características do sistema
- Sistema massa-mola:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

K (maiúsculo) = constante da mola

massa

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

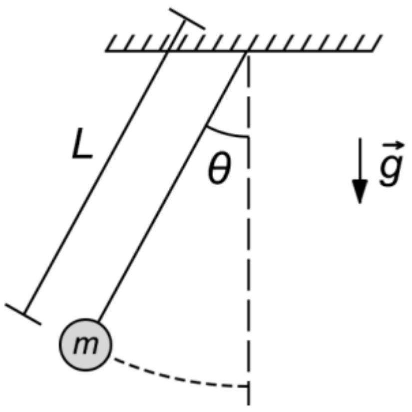
- Pêndulo simples (pequenas oscilações):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Aceleração da gravidade

Comprimento do pêndulo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



Exercício 1

Um objeto descreve um movimento harmônico simples descrito pela função:

$$x(t) = 35cos\left(\frac{2\pi}{0,5}t\right)$$

onde *x* é dado em cm e *t* em seg. Determine e informe as unidades de medida:

a) A amplitude do movimento
b) A frequência angular do movimento
c) O período do movimento
d) A frequência do movimento
e) A constante de fase do movimento
f) A posição do objeto em t=0; t=0,125; t=0,25 e t=0,5 s

Exercício 1 - Respostas

Um objeto descreve um movimento harmônico simples descrito pela função:

$$x(t) = 35cos\left(\frac{2\pi}{0,5}t\right)$$

onde *x* é dado em cm e *t* em seg. Determine:

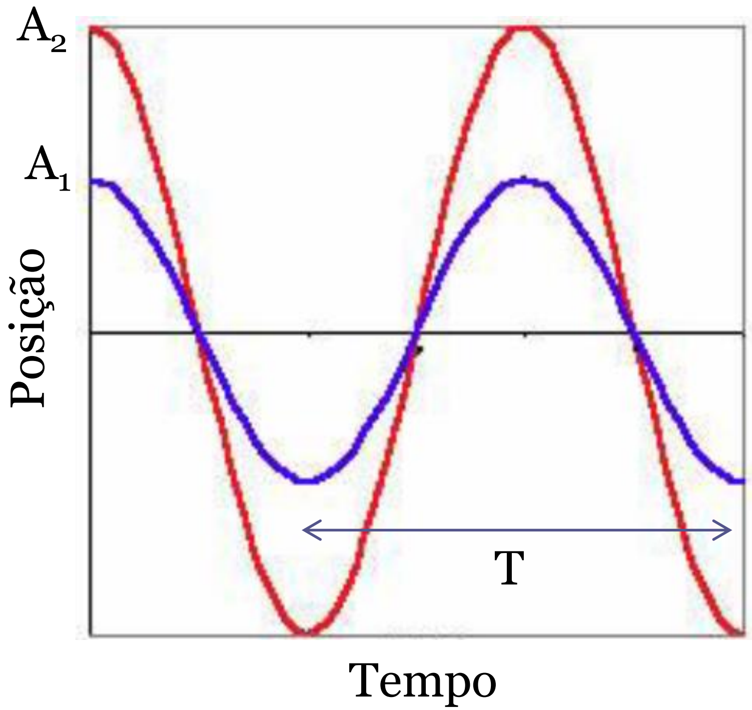
a) A amplitude do movimento 35 cm
b) A frequência angular do movimento 4π rad/s
c) O período do movimento 0,5 s
d) A frequência do movimento 2 Hz
e) A constante de fase do movimento 0 rad
f) A posição do objeto em t=0; t=0,125; t=0,25 e t=0,5 s

35; 0; -35; 35 cm

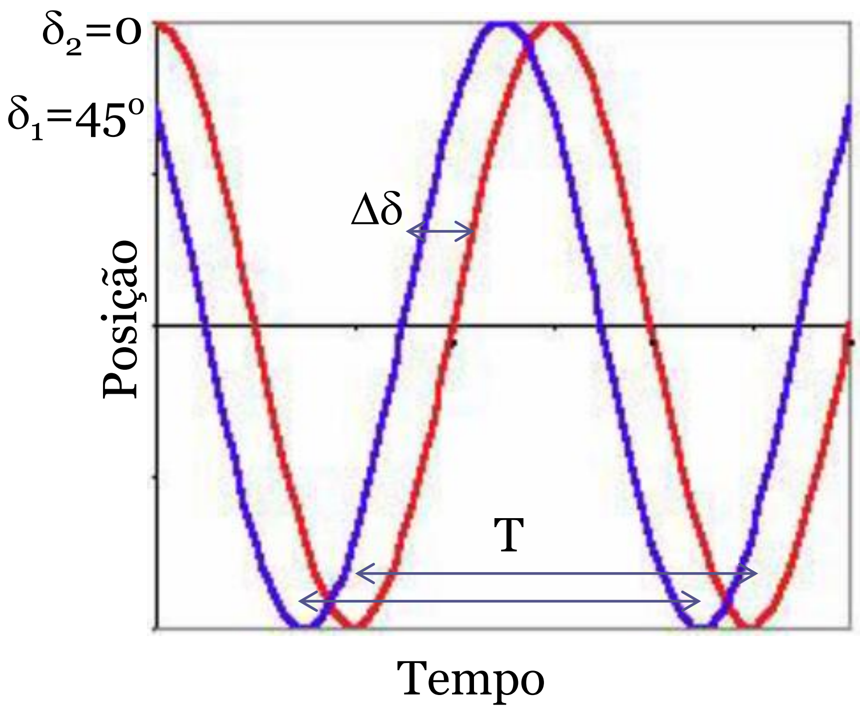
Exemplos de movimentos distintos com o mesmo período T:

$$\boxed{x(t) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \delta)}$$

Mesmo período e fase, mas com amplitudes diferentes

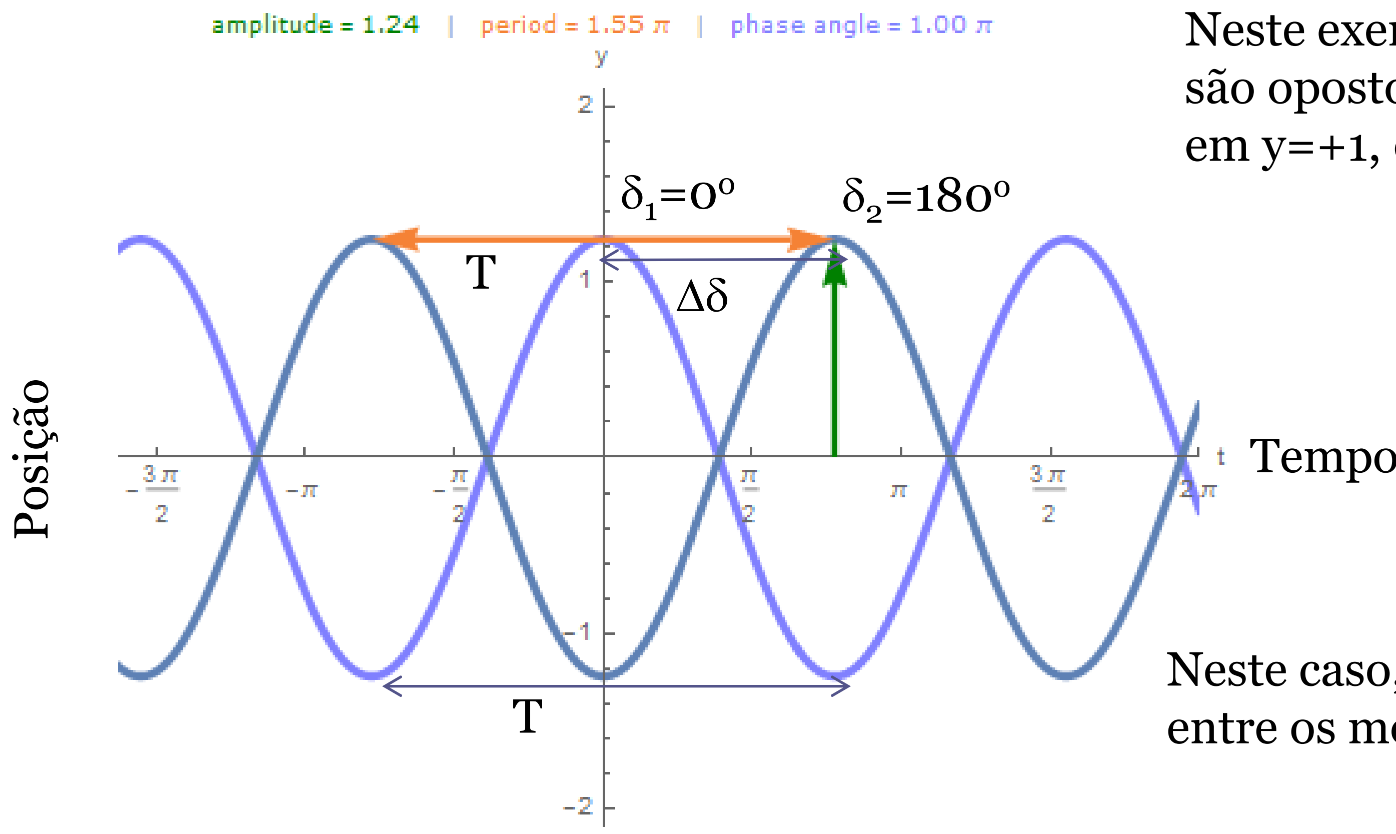


Mesmo período e amplitude, mas com fases diferentes



Outro exemplo de diferença de fase entre movimentos

Duas oscilações com mesmo período e amplitude, mas com fases diferentes.



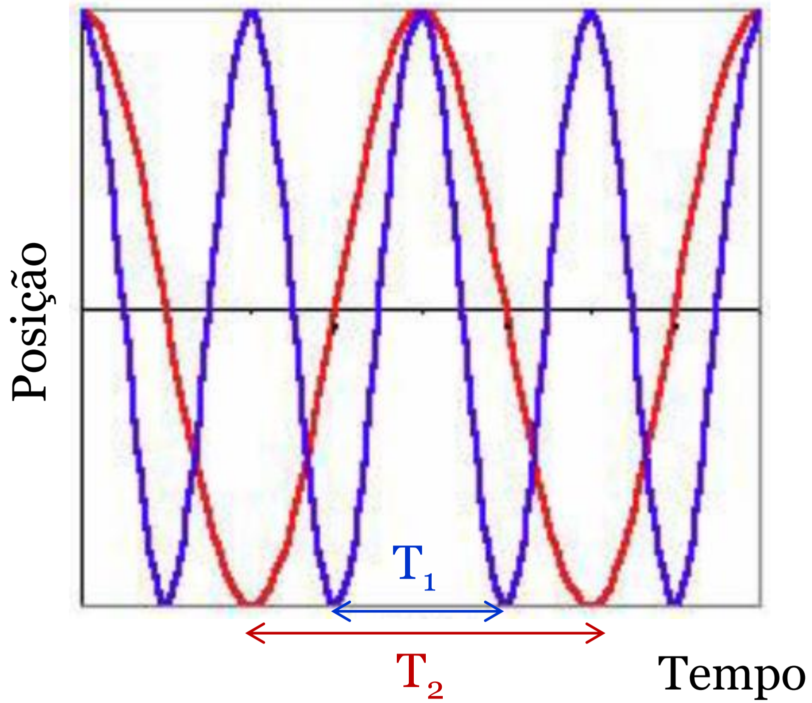
Neste exemplo, os movimentos são opostos: quanto um está em y=+1, o outro está em y=-1.

Neste caso, a diferença de fase entre os movimentos é de 180º.

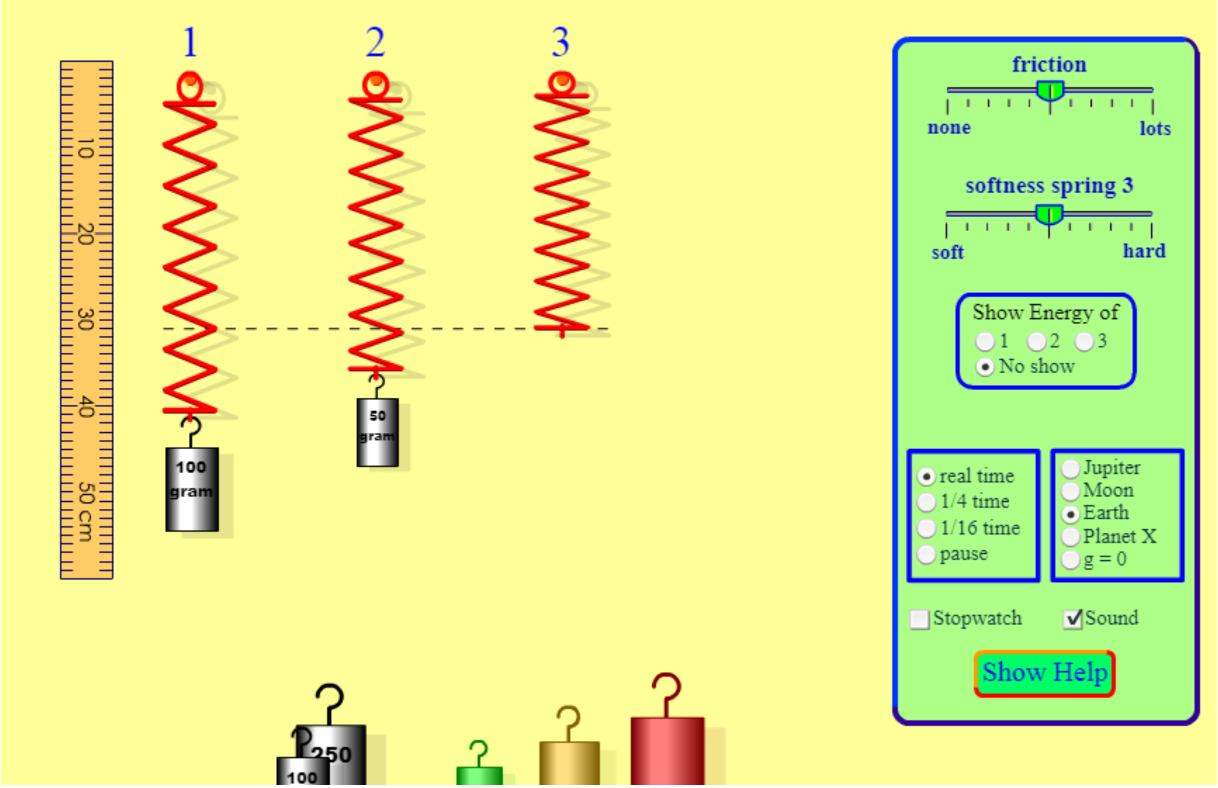
Exemplo de movimentos distintos com períodos diferentes:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta)}$$

Mesma amplitude e fase, mas com períodos diferentes

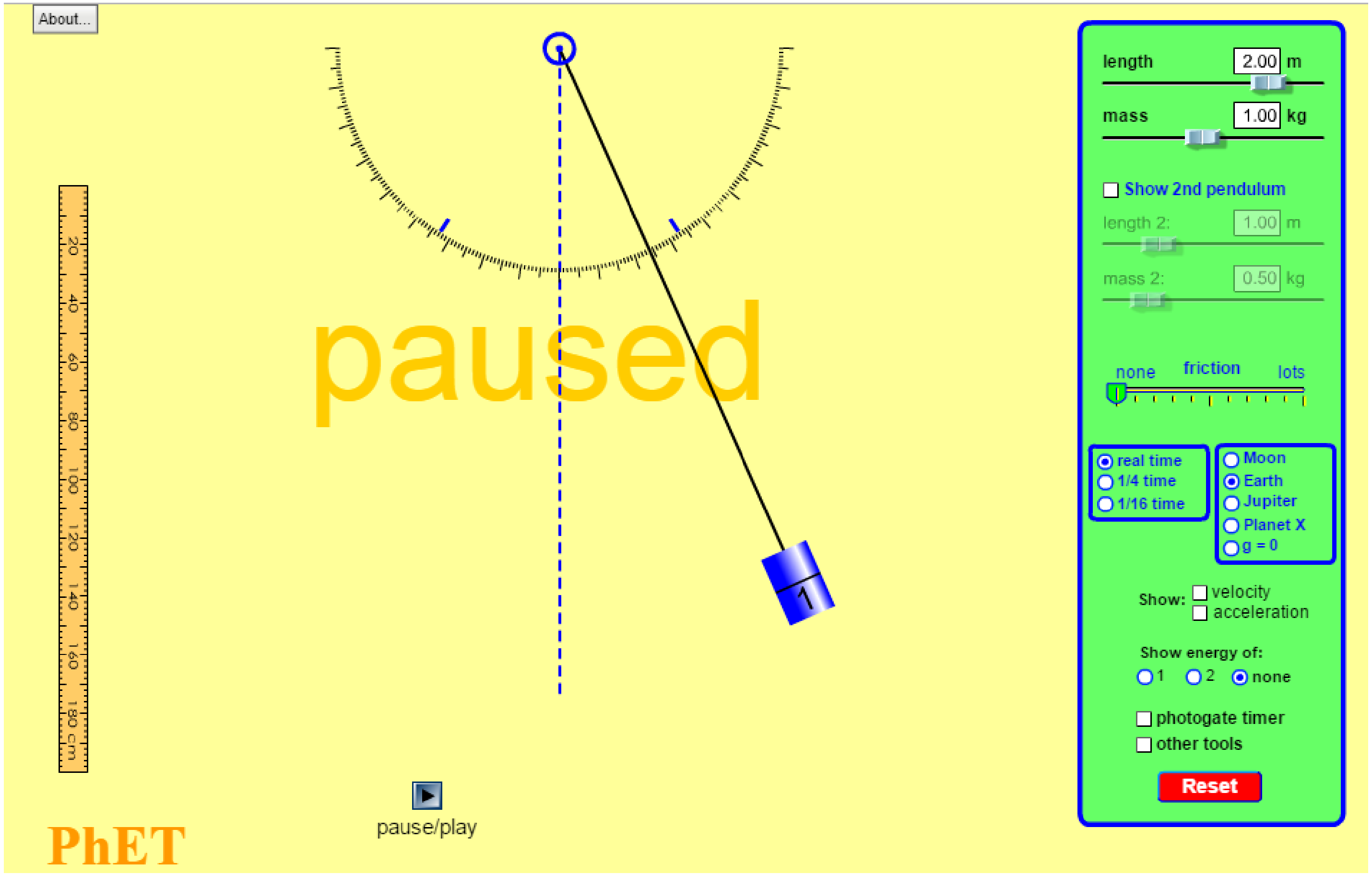


Simulação: sistema massa-mola



https://phet.colorado.edu/en/simulation/mass-spring-lab

Simulação: pêndulo



https://phet.colorado.edu/en/simulation/pendulum-lab

Deslocamento, velocidade e aceleração no MHS

$$x(t)$$

$$\int v(t)dt = x(t) + C \qquad \frac{dx}{dt} = x'(t) = v(t)$$

$$v(t)$$

$$\int a(t)dt = v(t) + C \qquad \frac{dv}{dt} = v'(t) = a(t)$$

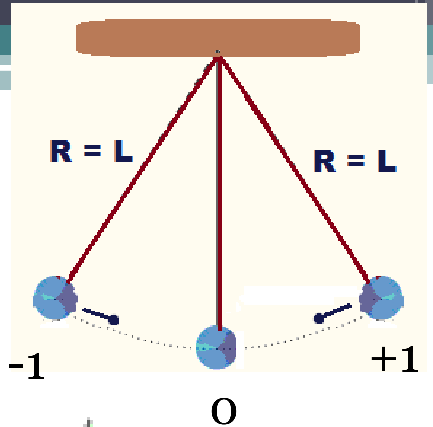
$$a(t)$$

$$x(t) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \delta)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\mathrm{A}\omega_0 \mathrm{sen}(\omega_0 t + \delta)$$

$$\mathrm{a}(t) = \frac{dv}{dt} = -\mathrm{A}\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \delta)$$

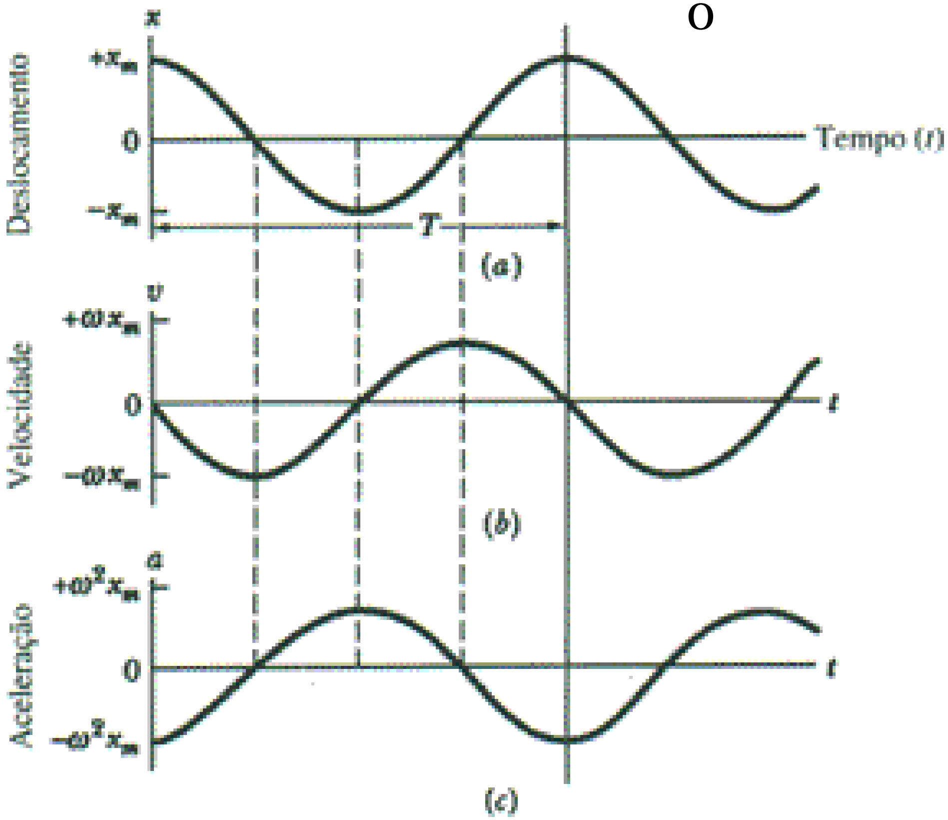
Deslocamento, velocidade e aceleração no MHS



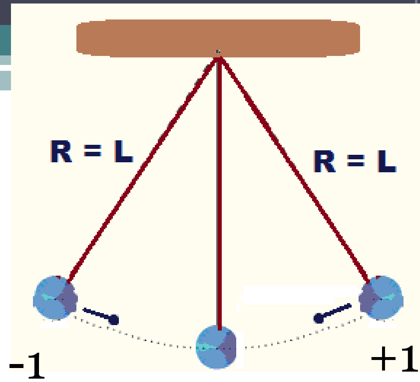
$$x(t) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \delta)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\mathrm{A}\omega_0 \mathrm{sen}(\omega_0 t + \delta)$$

$$\mathrm{a}(t) = \frac{dv}{dt} = -\mathrm{A}\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \delta)$$



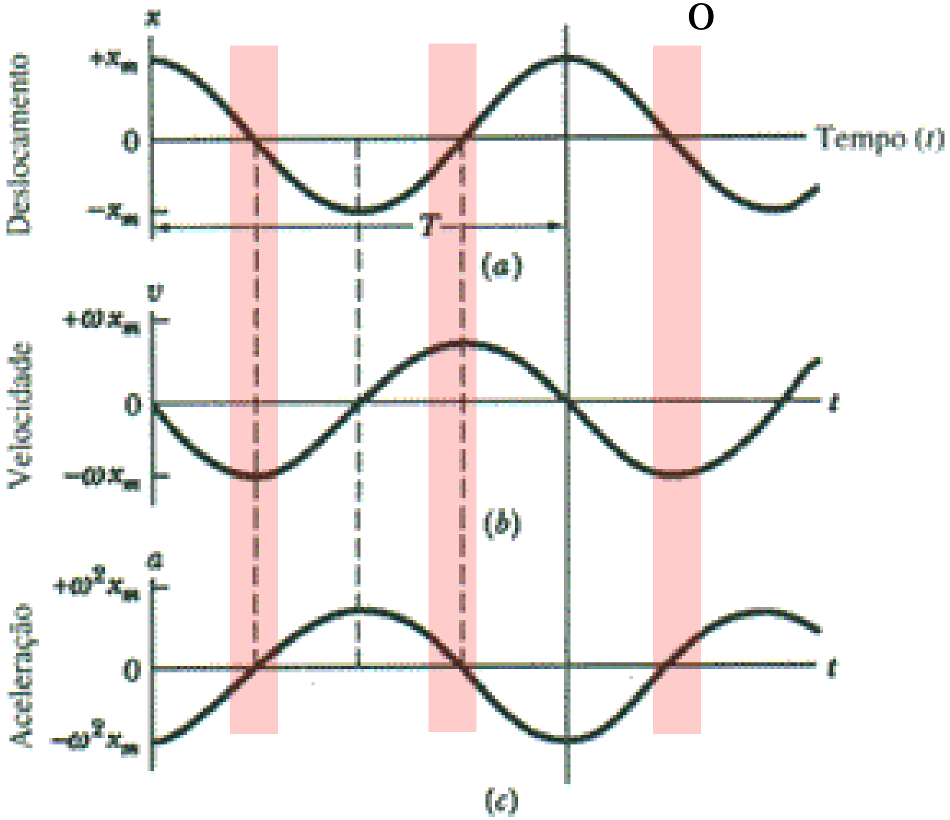
Deslocamento, velocidade e aceleração no MHS



$$x(t) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \delta)$$

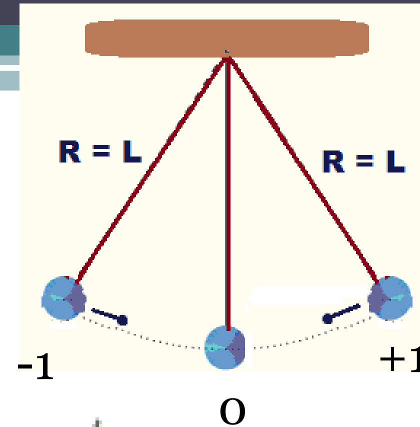
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\mathrm{A}\omega_0 \mathrm{sen}(\omega_0 t + \delta)$$

$$\mathrm{a}(t) = \frac{dv}{dt} = -\mathrm{A}\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \delta)$$



No ponto de equilíbrio: x=0, a=0 e o módulo da velocidade é máximo.

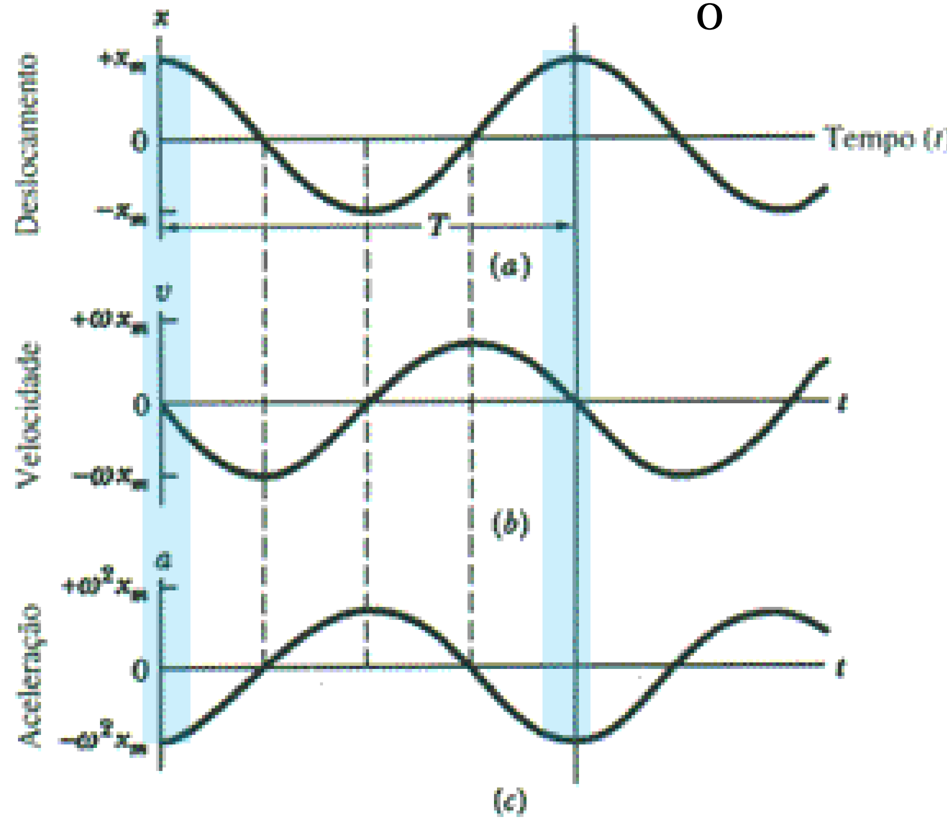
Deslocamento, velocidade e aceleração no MHS



$$x(t) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \delta)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\mathrm{A}\omega_0 \mathrm{sen}(\omega_0 t + \delta)$$

$$\mathrm{a}(t) = \frac{dv}{dt} = -\mathrm{A}\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \delta)$$



Na posição inicial (δ=0): x=A, v=0 e o módulo da aceleração é máximo.

Exercício 2

Um objeto descreve um movimento harmônico simples descrito pela função:

$$x(t) = 35cos(4\pi t)$$

onde x é dado em cm e t em seg. Determine:

a) A velocidade $v(t)$

b) A aceleração $a(t)$

c) A posição, velocidade e a aceleração em t=0; t=0,125 e t=0,25

Exercício 2

Um objeto descreve um movimento harmônico simples descrito pela função:

$$x(t) = 35cos(4\pi t)$$

onde x é dado em cm e t em seg. Determine:

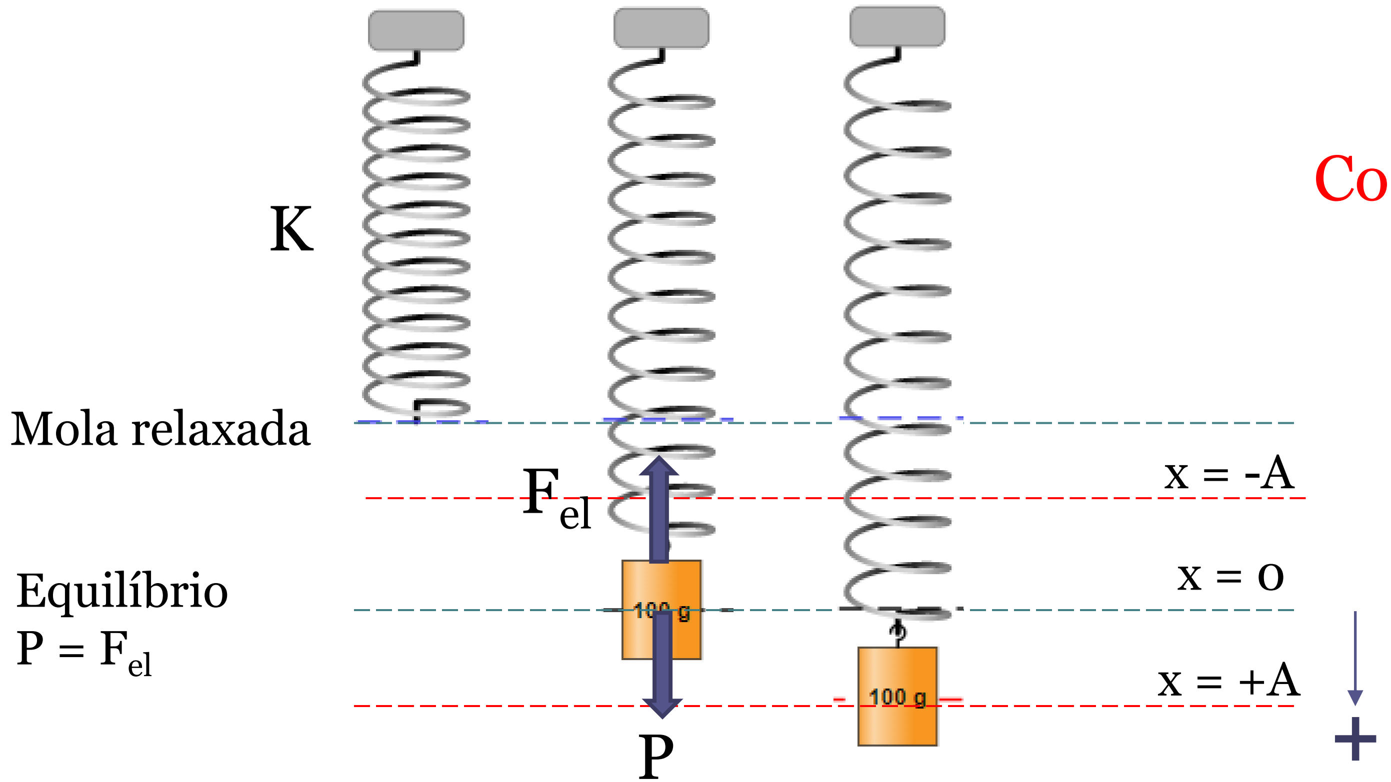
a) A velocidade $v(t)$ $v(t) = -140\pi.\mathrm{sen}(4\pi t)$

b) A aceleração $a(t)$ $a(t) = -560\pi^2.\cos(4\pi t)$

c) A posição, velocidade e a aceleração em t=0; t=0,125 e t=0,25

t, s	v(t), cm/s	a(t), cm/s²
0	0	-5527
0,125	-440	0
0,25	0	5527

Exemplo: sistema massa-mola na vertical



Condição inicial

$$x(0) = A$$
$$v(0) = 0$$

Suponha que um sistema massa-mola na vertical inicie seu movimento a partir da posição x=+A com velocidade zero. Vamos considerar a origem do sistema de coordenadas como o ponto de equilíbrio entre a força peso e a força elástica, com sentido positivo apontando para baixo.

Exemplo: sistema massa-mola na vertical

2ª Lei de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - Kx$$

Equação Diferencial Ordinária de 2ª ordem, linear, não homogênea

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + K\left(x - \frac{mg}{K}\right) = 0$$

Mudança de variável:

$$y = x - \frac{mg}{K}$$
$$y' = x'$$
$$y'' = x''$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + Ky = 0$$

Semelhante à EDO que já resolvemos anteriormente.

$$\boxed{y(t) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \delta)}$$

Onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$, a amplitude A é conhecida e a constante de fase δ depende das condições iniciais.

Impondo a condição inicial $y(0) = A$ para obter a constante de fase δ:

$$y(0) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 . 0 + \delta) = A \quad \rightarrow \delta = 0$$

Esta função horária descreve uma oscilação harmônica em torno do ponto de equilíbrio entre a força peso e a força elástica.

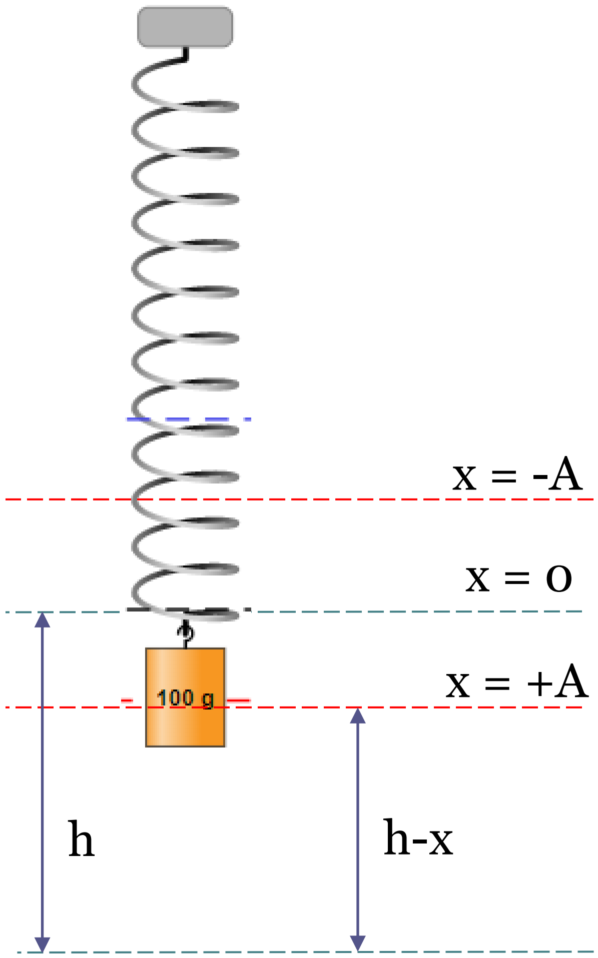
Exemplo: sistema massa-mola na vertical

Escrevendo a função horária em termos de x, lembrando que $y = x - \frac{mg}{K}$

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta) + \frac{mg}{K}}$$

Energia mecânica:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2 + mg(h - x)$$



Energia no MHS

Energia no MHS

$$x(t) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \delta)$$

- Energia potencial

$$U = \frac{K}{2}x^2 = \frac{K}{2}A^2cos^2(\omega_0 t + \delta) \xrightarrow{\omega_0^2 = \frac{K}{m}}$$

$$= \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}sen^2(\omega_0 t + \delta)$$

- Energia cinética

$$\Gamma = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}sen^2(\omega_0 t + \delta)$$

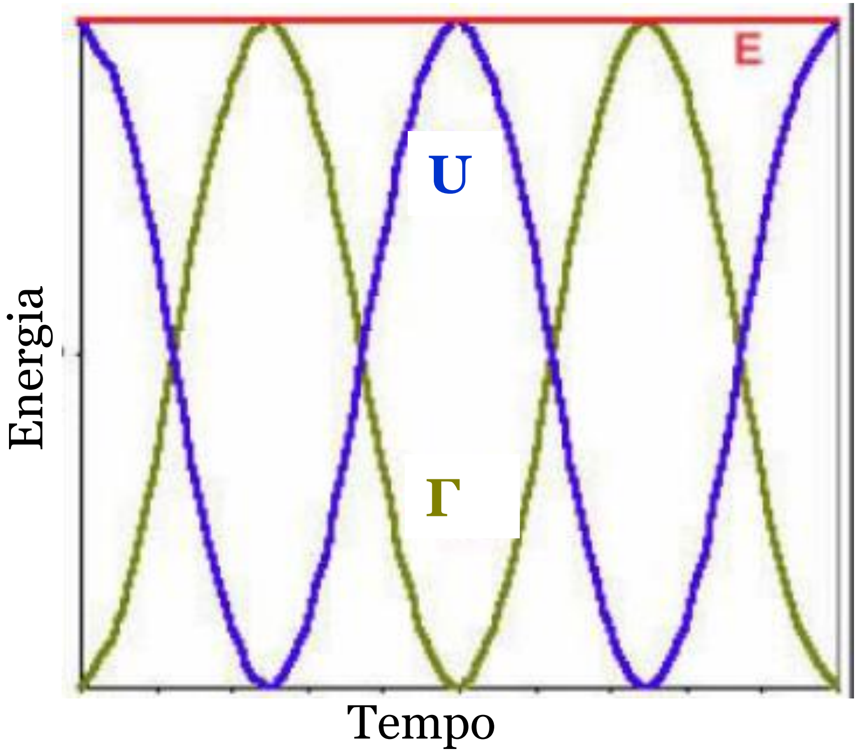
Energia no MHS

- Energia potencial

$$\boxed{U = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} cos^2(\omega_0 t + \delta)}$$

- Energia cinética

$$\boxed{\Gamma = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} sen^2(\omega_0 t + \delta)}$$



Quando U é máxima, Γ é mínima, e vice-versa.

Energia no MHS

- Energia total

$$E = U + \Gamma$$

$$= \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} cos^2(\omega_0 t + \delta) + \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} sen^2(\omega_0 t + \delta)$$

$$= \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} [cos^2(\omega_0 t + \delta) + sen^2(\omega_0 t + \delta)]$$

K: constante de mola

$$\boxed{E = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}} \xrightarrow{\omega_0^2 = \frac{K}{m}} \boxed{E = \frac{KA^2}{2}}$$

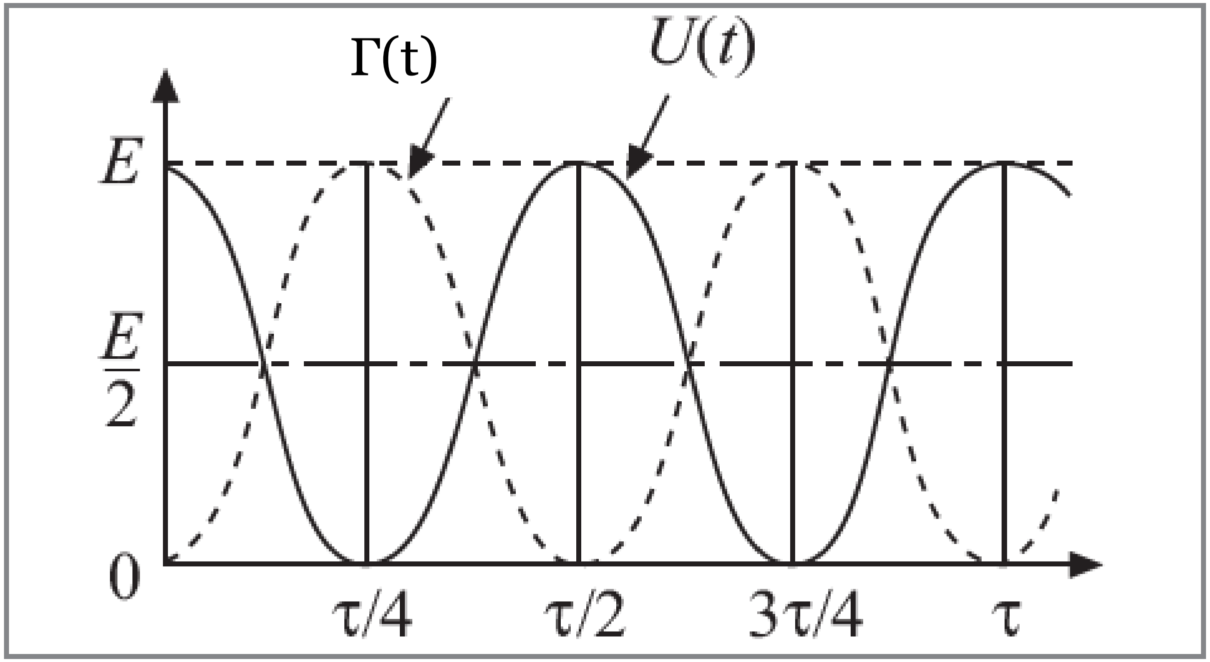
A energia mecânica não varia no tempo, e é proporcional ao quadrado da amplitude da oscilação.

Energia média no MHS

Valor médio de uma função:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

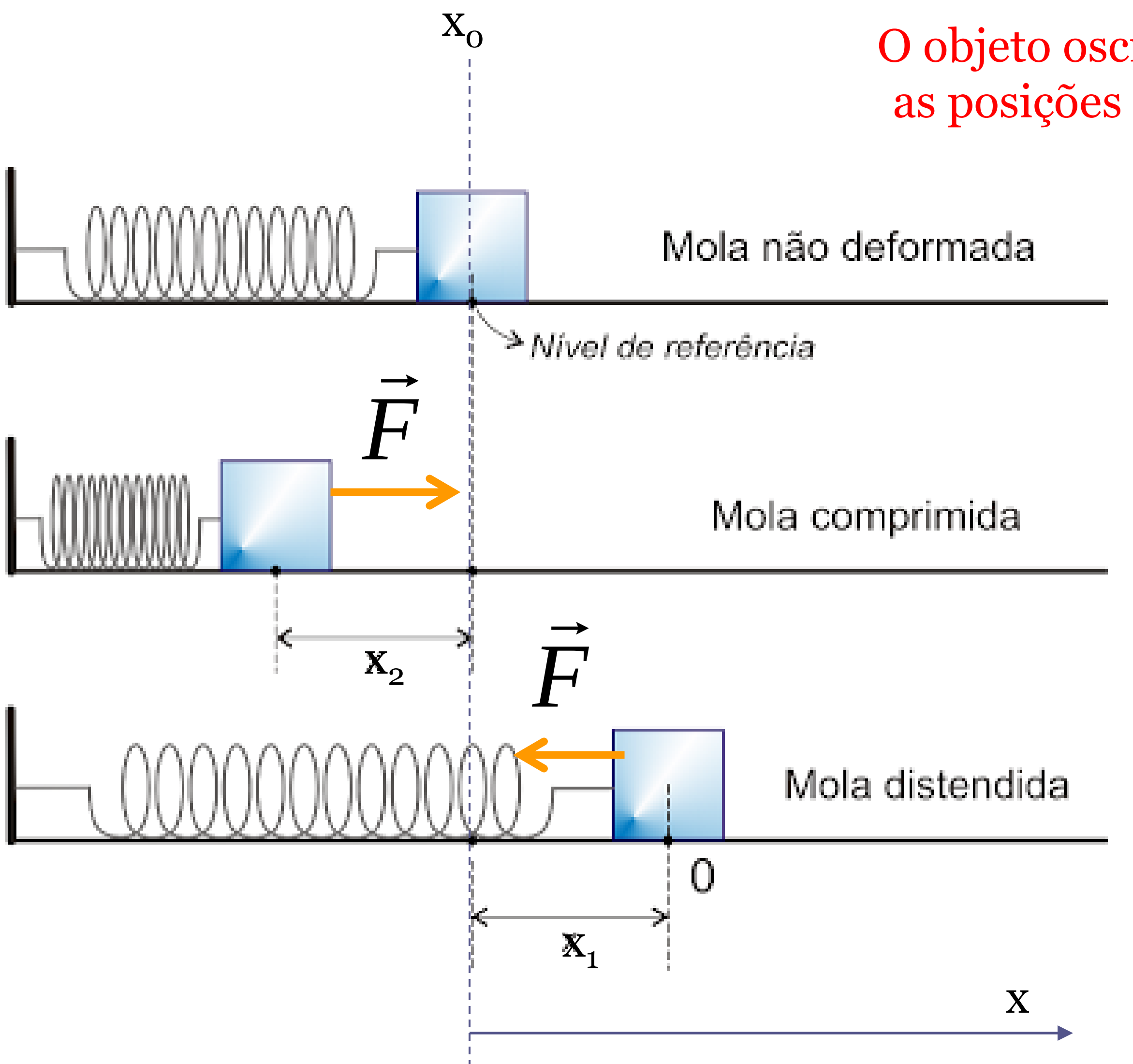
- Energia potencial média: $\overline{U} = \dfrac{m\omega_0^2 A^2}{4} = \dfrac{E}{2}$
- Energia cinética média: $\overline{\Gamma} = \dfrac{m\omega_0^2 A^2}{4} = \dfrac{E}{2}$

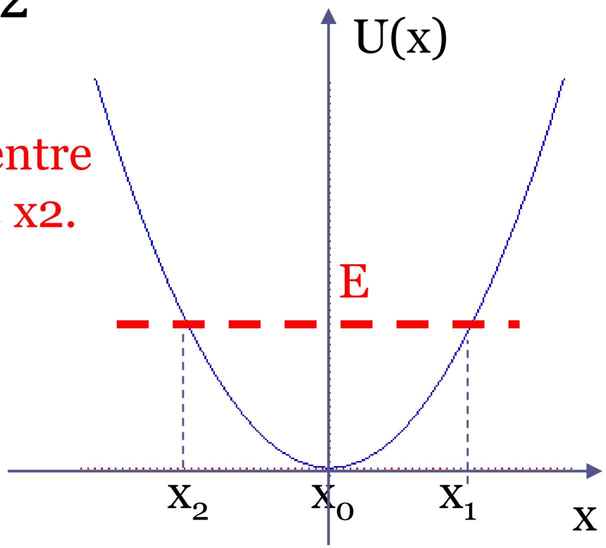


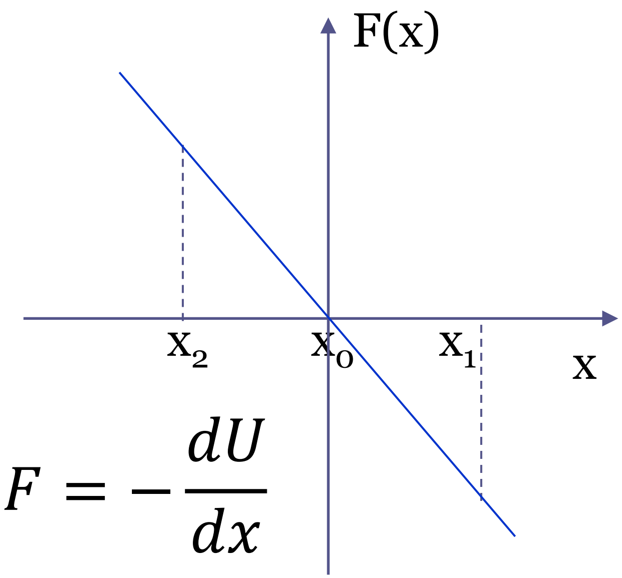
Energia no MHS

$$U(x) = Cx^2$$

O objeto oscila entre as posições x1 e x2.



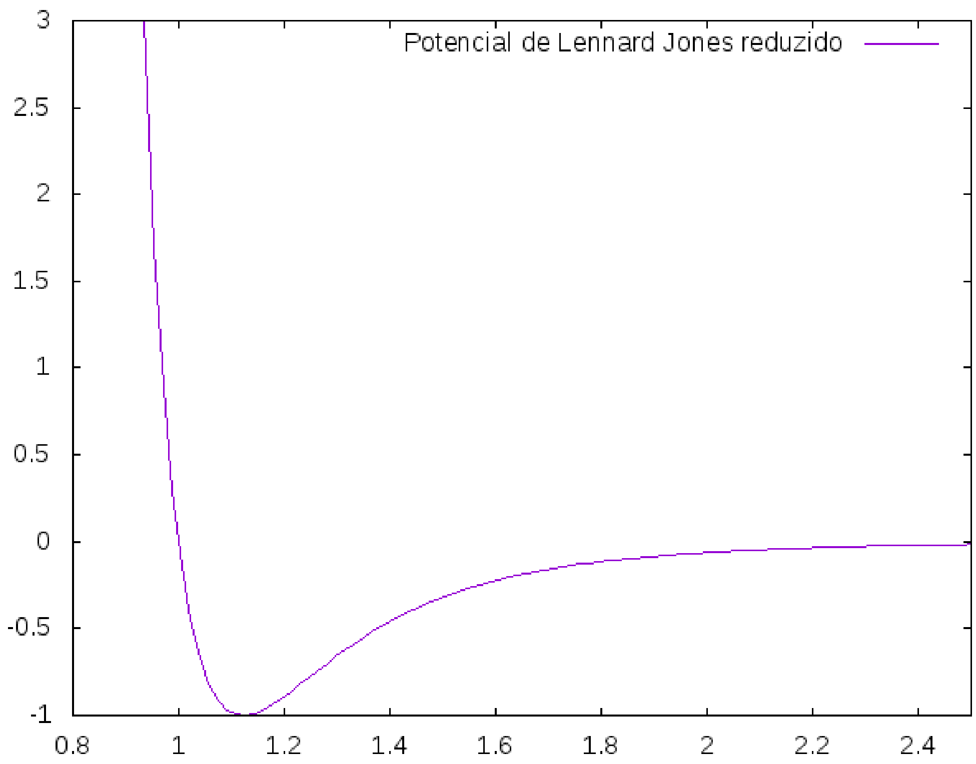




$$F = -\frac{dU}{dx}$$

E se U(x) não for uma parábola?

Exemplo: potencial de Lennard Jones
(interação entre um par de átomos neutros)



$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

E se U(x) não for uma parábola?

Expansão de U(x) em série de Taylor nas proximidades da posição de equilíbrio $x=x_o$:

$$U(x \approx x_0) \cong U(x_0) + \cancel{U'(x_0)}.(x - x_0) + \frac{1}{2!}U''(x_0).(x - x_0)^2 + \cdots$$

=0 na posição de equilíbrio

É uma constante positiva em um ponto de equilíbrio estável (concavidade para cima)

$$U(x \approx x_0) \cong \boxed{U(x_0) + \frac{1}{2}c(x - x_0)^2}$$

É uma função quadrática

Na vizinhança da posição de equilíbrio, qualquer sistema físico se comporta como um oscilador harmônico!

Exercício

Um sistema massa-mola sem atrito descreve um MHS com período de 0,5 segundos, sendo que a constante da mola é K=16 N/cm. Considere que o movimento tem fase zero (isto é, em t=0 a massa inicia o movimento com velocidade inicial zero em uma das extremidades).

a) Determine a energia mecânica total do sistema se o movimento tiver amplitude de 35 cm
b) Determine a energia mecânica total do sistema se o movimento tiver amplitude de 70 cm
c) Conhecendo o período do movimento, determine em quais instantes de tempo a energia potencial é máxima
d) Conhecendo o período do movimento, determine em quais instante de tempo a energia cinética é máxima

Exercício

Um sistema massa-mola sem atrito descreve um MHS com período de 0,5 segundos, sendo que a constante da mola é K=16 N/cm. Considere que o movimento tem fase zero (isto é, em t=0 a massa inicia o movimento com velocidade inicial zero em uma das extremidades).

a) Determine a energia mecânica total do sistema se o movimento tiver amplitude de 35 cm $98\ J$

b) Determine a energia mecânica total do sistema se o movimento tiver amplitude de 70 cm $392\ J$

c) Conhecendo o período do movimento, determine em quais a energia potencial é máxima

$$t = \frac{T}{2}n \qquad (n = 0,1,2,\dots)$$

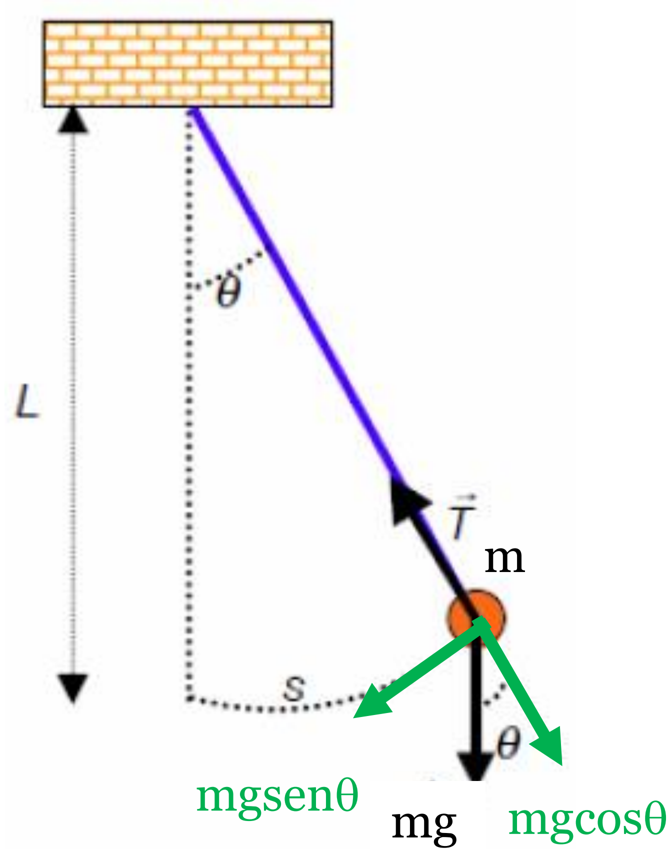
d) Conhecendo o período do movimento, determine em quais instantes de tempo a energia cinética é máxima

$$t = \frac{T}{4}n \qquad (n = 1,3,5,\dots)$$

Pêndulos

Pêndulo simples

- Massa puntiforme suspensa por um fio inextensível e de massa desprezível
- Propriedades físicas do sistema: massa m e comprimento do fio L



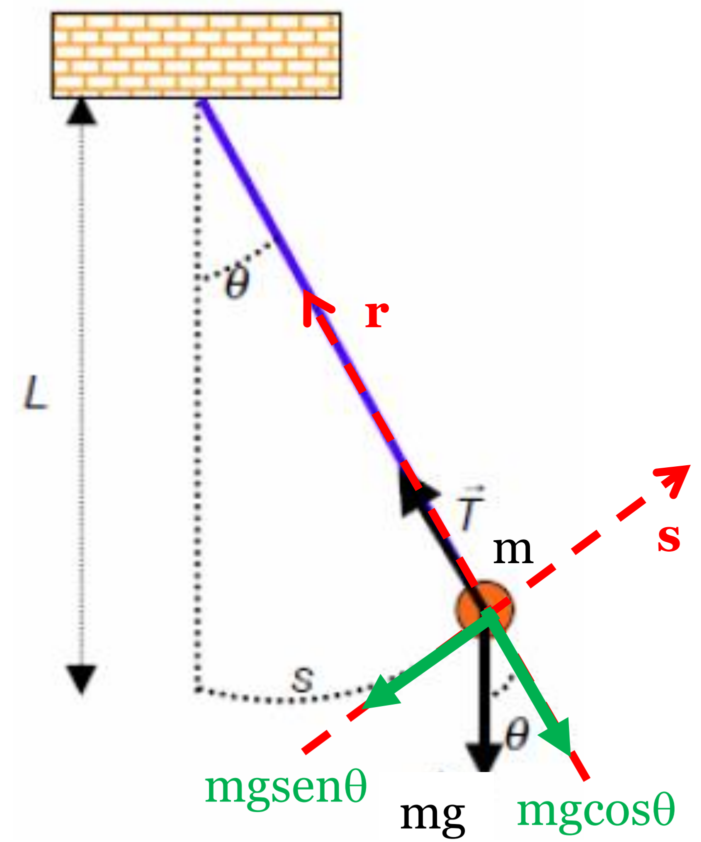
Pêndulo simples

- Determinar o período do pêndulo simples:
  - Escolher sistema de coordenadas
  - Determinar as forças que atuam em cada direção
  - Direção radial

$$T = mgcos\theta$$

  - Direção tangencial

$$F_R = -mgsen\theta$$



Note que F não é proporcional ao deslocamento θ, e portanto isto não é um MHS! (já que F≠-kx)

Pêndulo simples: aproximação para pequenas oscilações

- Força restauradora na direção x:

$$F = -mgsen\theta$$

- Para pequenas oscilações:

$$sen\theta \approx \theta$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

- Neste caso,

$$\boxed{F = -mg\theta}$$

- Em termos de deslocamento linear:

$$\boxed{F = -\frac{mg}{L}x}$$

Força do tipo F=-kx, logo, é um MHS (pequenas oscilações)

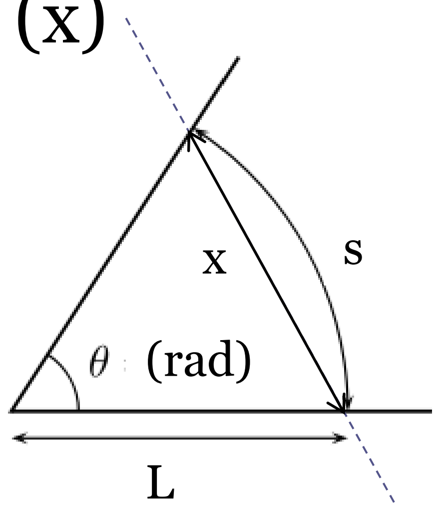
- Parênteses 1: aproximação $sen\theta \approx \theta$ para $\theta \rightarrow 0$
  - Esta aproximação pode ser comprovada utilizando a série de Taylor de senθ

θ (rad)	θ (graus)	senθ	Dif%
0,0000	0	0,0000	0
0,0349	2	0,0349	0,00
0,0873	5	0,0872	0,11
0,1745	10	0,1736	0,51

- Parênteses 2: convertendo deslocamento angular (θ) em linear (x)

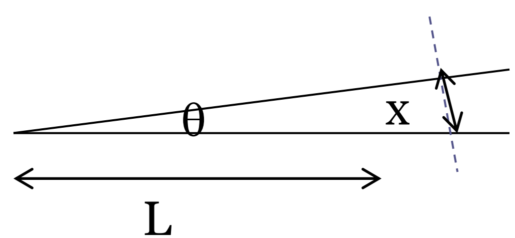
$$\theta(rad) = \frac{s}{L}$$

x<s



Para $\theta \rightarrow 0$

$$x \cong s \;\Rightarrow \theta(rad) = \frac{x}{L}$$



Pêndulo simples: aproximação para pequenas oscilações

- Equação de movimento: $$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

- Função horária da posição angular:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$$

- A frequência angular ω_0 pode ser obtida substituindo $\theta(t)$ na EDO acima

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

Pêndulo simples: aproximação para pequenas oscilações

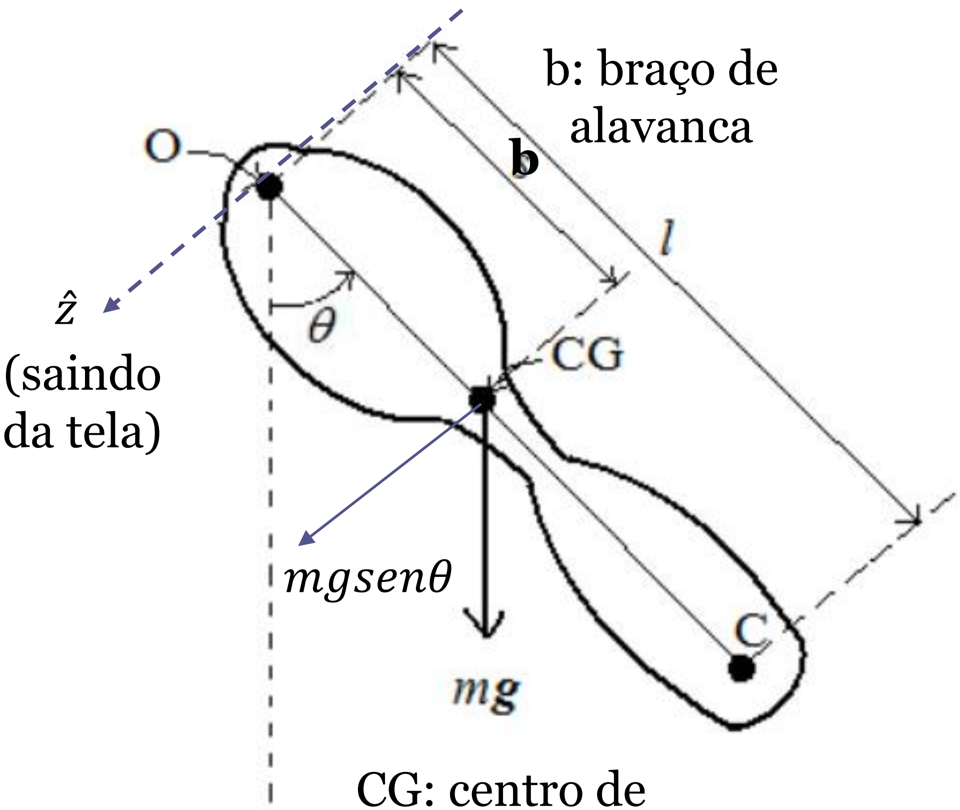
- Frequência angular: $$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

- Período: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

O período de um pêndulo simples é independente da massa e da amplitude (no caso de pequenas oscilações)

Pêndulo físico

Corpo rígido que oscila livremente em torno de um eixo que passa por O.



CG: centro de gravidade

Torque:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = |\vec{r}||\vec{F}| \operatorname{sen}\theta$$

$$\vec{\tau} = -b.mg \operatorname{sen}\theta \;\; \hat{z}$$

Pêndulo físico

2ª Lei de Newton – movimento de rotação:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -b.mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Para pequenas oscilações, $\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgb}{I}\theta$$

$\mathrm{I = mr^2}$ → Raio de giração

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t + \delta)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgb}{I}} = \sqrt{\frac{mgb}{mr^2}} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{gb}{r^2}}$$

A frequência angular não depende da massa.

$$L = \frac{r^2}{b}$$

O pêndulo simples é um caso particular do pêndulo físico, em que a massa fica concentrada num ponto à distância b=r=L do ponto de suspensão.

Pêndulo físico em forma de barra

Barra homogênea suspensa por uma de suas extremidades, a uma distância L/2 do seu centro de massa.

Torque:

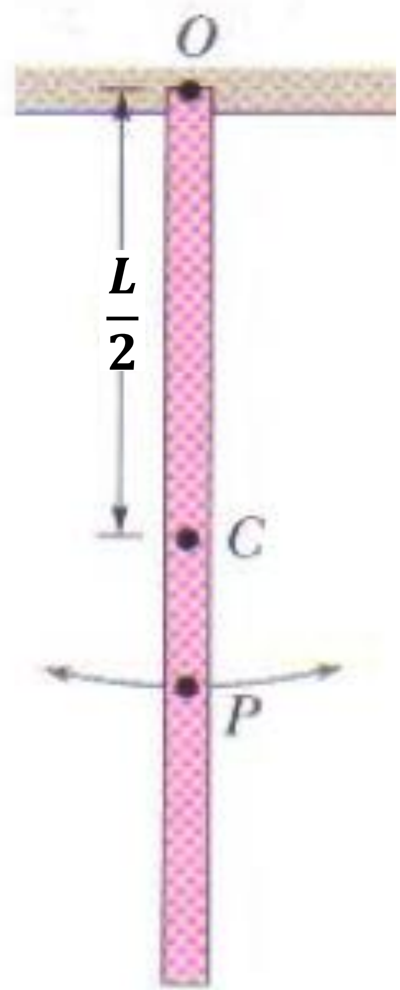
$$\tau = -mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta \cong -mg\frac{L}{2}\theta$$ (pequenas oscilações)

Momento de inércia de uma barra em relação a um eixo perpendicular que passa pelo seu centro de massa:

$$I_{CM} = \frac{mL^2}{12}$$

Teorema dos eixos paralelos:

$$I = I_{CM} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{3}$$



Pêndulo físico em forma de barra

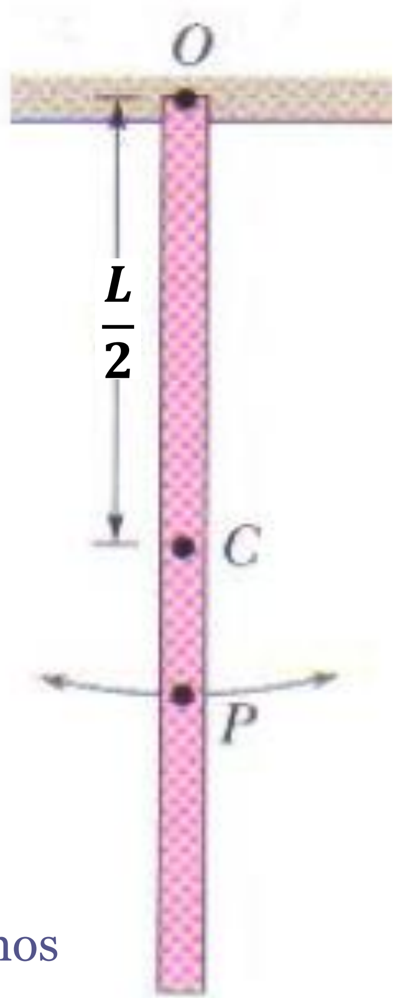
Equação de movimento:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau$$

$$\frac{mL^2}{3}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\frac{L}{2}\theta$$ (pequenas oscilações)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2L}\theta$$

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t + \delta) \qquad \omega_0^2 = \frac{3g}{2L}$$



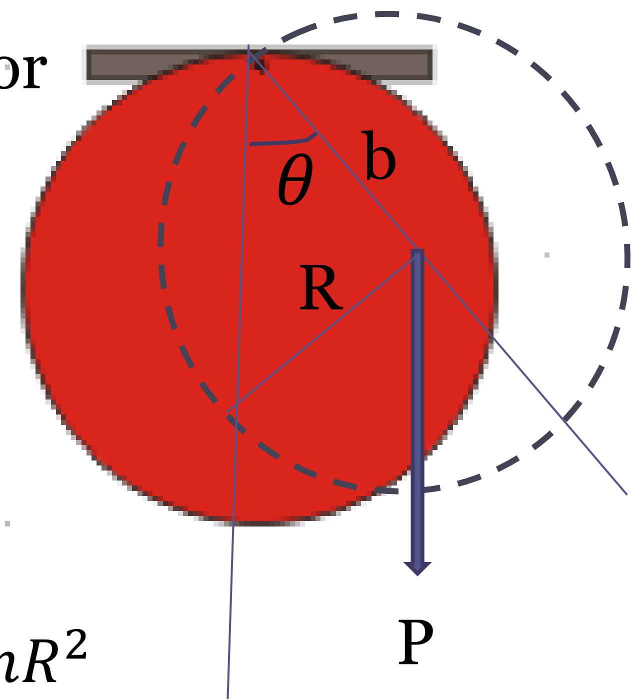
Obs: comparando com o $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$ do pêndulo simples, concluímos que um pêndulo em barra com comprimento L corresponde a um pêndulo simples de comprimento 2L/3.

Pêndulo físico em forma de disco

Disco homogêneo de raio R suspenso por um ponto de sua extremidade.

Torque:

$$\tau = -mgR\,\mathrm{sen}\,\theta \cong -mgR\theta$$ (pequenas oscilações)



$$b = R\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Momento de inércia de um disco em relação a um eixo perpendicular que passa pelo seu centro de massa:

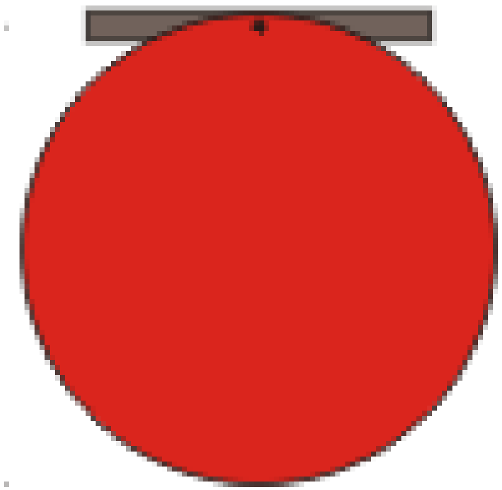
$$I_{CM} = \frac{mR^2}{2}$$

Teorema dos eixos paralelos:

$$I = I_{CM} + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}$$

Pêndulo físico em forma de disco

Equação de movimento:



$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau$$

$$\frac{3mR^2}{2}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgR\theta$$ (pequenas oscilações)

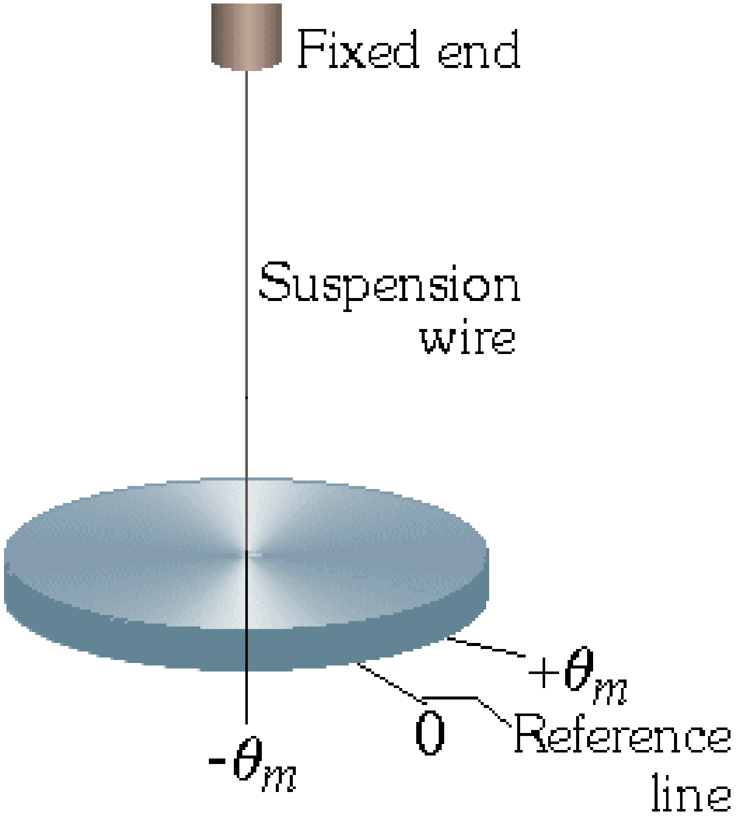
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{2g}{3R}\theta$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \delta) \qquad \omega_0^2 = \frac{3g}{2L}$$

Obs: comparando com o $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$ do pêndulo simples, concluímos que um pêndulo em disco com raio R corresponde a um pêndulo simples de comprimento 3R/2.

Pêndulo de torção

Considere um disco que gira em um plano horizontal em decorrência da torção de um fio que o sustenta pelo seu centro.



Lei de Hooke para a torção: torque restaurador proporcional ao ângulo de torção:

Módulo de torção

$$\tau = -K\theta$$

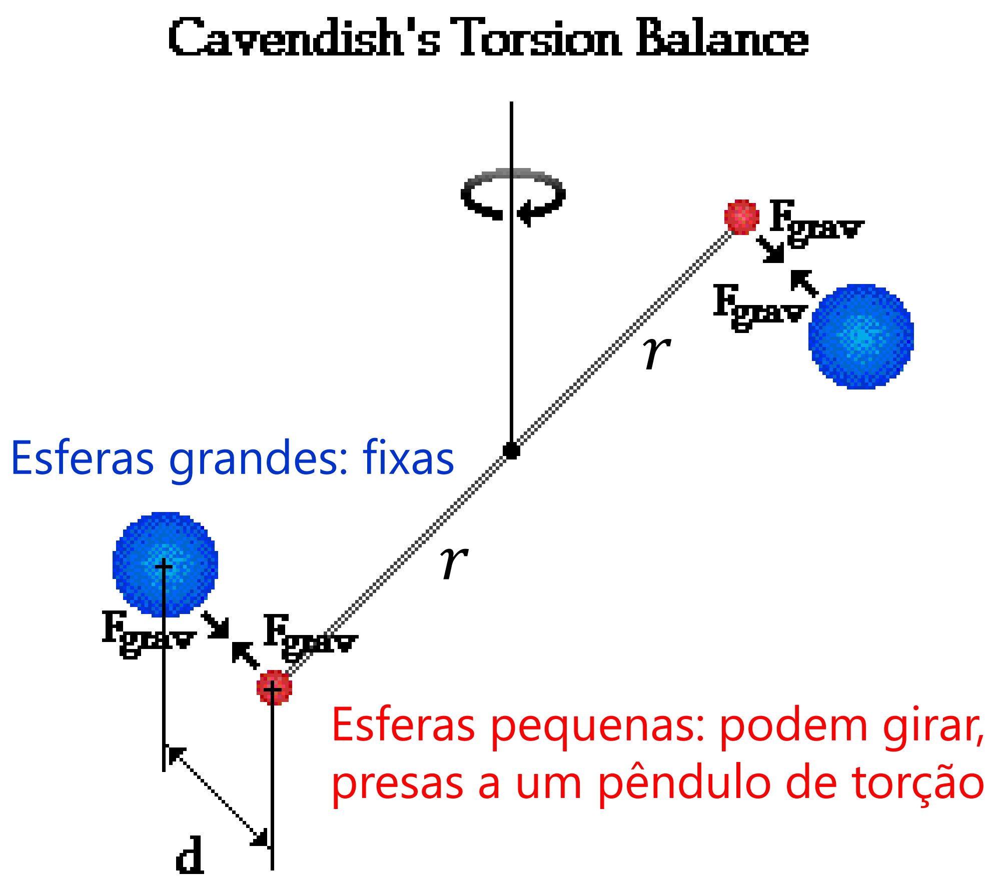
$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -K\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{K}{I}\theta$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

Obs: a balança de Cavendish



Determinação da constante gravitacional G por Cavendish e Michell, em 1798

$$F_g = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$\tau = F_g . r . \mathrm{sen}\theta$$

$$G = \frac{\tau}{r . \mathrm{sen}\,\theta}\frac{d^2}{Mm}$$

G = 6.67259 x 10^{-11} N m^2/kg^2

https://youtu.be/gbXiy7SFY2k?t=130

Oscilações de 2 partículas

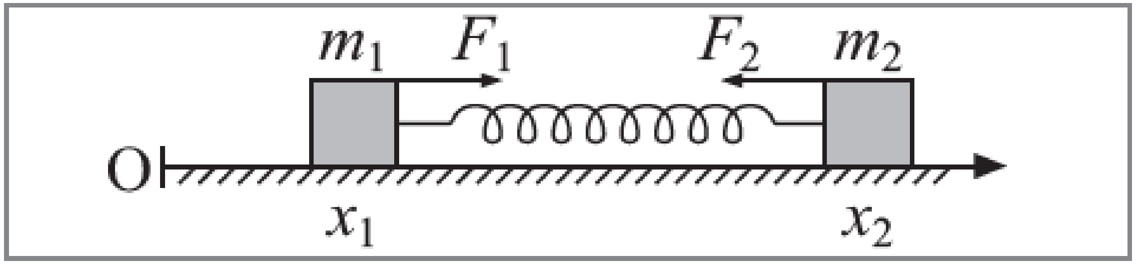
Oscilações de 2 partículas

L: comprimento de equilíbrio da mola

Deformação da mola: $x = (x_2 - x_1) - L$

Forças restauradoras:
$$F_1 = Kx$$
$$F_2 = -Kx$$

Equações de movimento: $\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = Kx \\ m_2\ddot{x}_2 = -Kx \end{cases}$



Oscilações de 2 partículas

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = Kx & \times m_2 \\ m_2\ddot{x}_2 = -Kx & \times m_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m_1 m_2\ddot{x}_1 = m_2 Kx \\ m_1 m_2\ddot{x}_2 = -m_1 Kx \end{cases}$$

Subtraindo as equações:

$$m_1 m_2(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = (m_1 + m_2)Kx$$

$$\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = Kx$$

$= \mu$ (massa reduzida)

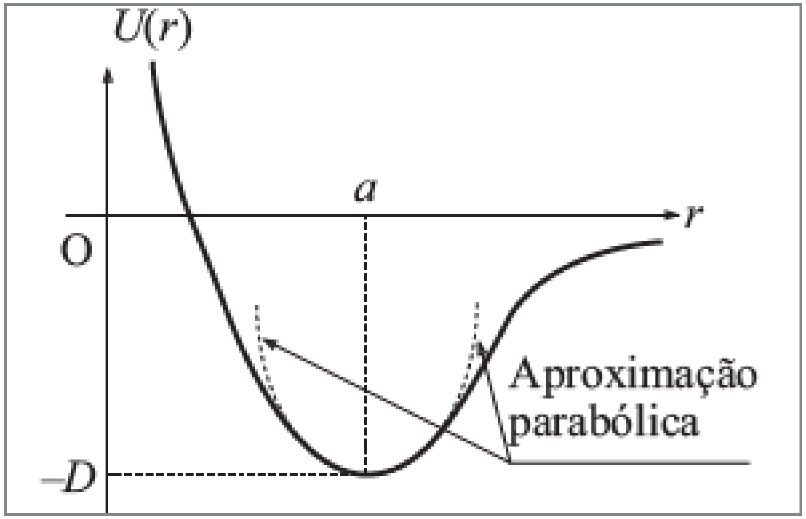
Como $x = (x_2 - x_1) - L$ temos:

$$\ddot{x} = (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)$$

$$\boxed{\mu\ddot{x} = -Kx}$$

A coordenada relativa $x = x_2 - x_1$ se comporta como a coordenada de uma única partícula com massa μ. O centro de massa fica em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

Exemplo: molécula diatômica (pág 76 do Moysés)



Potencial de Lennard-Jones:

$$U(r) = D\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{r}\right)^{6}\right]$$

r: distância entre os átomos da molécula diatômica
a: distância de equilíbrio, correspondente ao mínimo de U(r)
D = – U(a) é a energia de dissociação da molécula

Pequenas oscilações em torno do equilíbrio:

$$r \approx a \qquad\qquad x = r - a \approx 0$$

Exemplo: molécula diatômica

Expansão de U(r) em série de Taylor nas proximidades da posição de equilíbrio $r \approx a$:

$$U(r \approx a) \cong U(a) + U'(a).(r-a) + \frac{1}{2!}U''(a).(r-a)^2 + \cdots$$

=0 na posição de equilíbrio

$$U(r) = D\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{r}\right)^{6}\right] \longrightarrow U(a) = -D$$

$$U'(r) = D\left[-\frac{12a^{12}}{r^{13}} + \frac{12a^{6}}{r^{7}}\right]$$

$$U''(r) = 12D\left[\frac{13a^{12}}{r^{14}} - \frac{7a^{6}}{r^{8}}\right] \longrightarrow U''^{(a)} = 12D\left[\frac{13a^{12}}{a^{14}} - \frac{7a^{6}}{a^{8}}\right] = \frac{72D}{a^2}$$

$$U(r \approx a) \cong -D + \frac{72D}{2a^2}.\overbrace{(r-a)}^{x}{}^2 = -D + \frac{72D}{2a^2}x^2$$

Exemplo: molécula diatômica

Conhecendo U(x) para pequenas oscilações, podemos determinar F:

$$U(x) = -D + \frac{72D}{2a^2}x^2$$

$$F = -\frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{dt}}$$

$$F = -\boxed{\frac{72D}{2a^2}}x$$

Mesmo formato da força elástica $-Kx$. Os átomos oscilam como um MHS nas proximidades do ponto de equilíbrio.

$$K = \frac{72D}{2a^2}$$

Frequência de oscilação:

Massa reduzida:

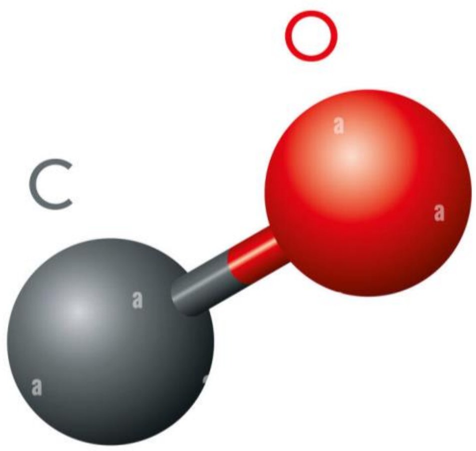
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{\mu}} = \sqrt{\frac{72D}{2\mu a^2}}$$

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Exemplo: molécula diatômica

Considerando a molécula de CO



$$\left.\begin{array}{r} m\left(\mathrm{C}^{12}\right) = 12 \text{ u.m.a} \approx 2\times10^{-26}\,\mathrm{kg} \\ m\left(\mathrm{O}^{16}\right) = 16 \text{ u.m.a} \approx 2{,}7\times10^{-26}\,\mathrm{kg} \end{array}\right\} \mu \approx 1{,}16\times10^{-26}\,\mathrm{kg}$$

$$a = 1{,}1.10^{-10} m$$

$$D = 10eV = 1{,}6.10^{-18} J$$

$$K = \frac{72D}{2a^2} = 9{,}5.10^3 \text{ N/m}$$

Frequência de oscilação:

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{\mu}} \cong 1{,}4.10^{14} Hz$$

Radiação infravermelha
(ordem de grandeza correta)