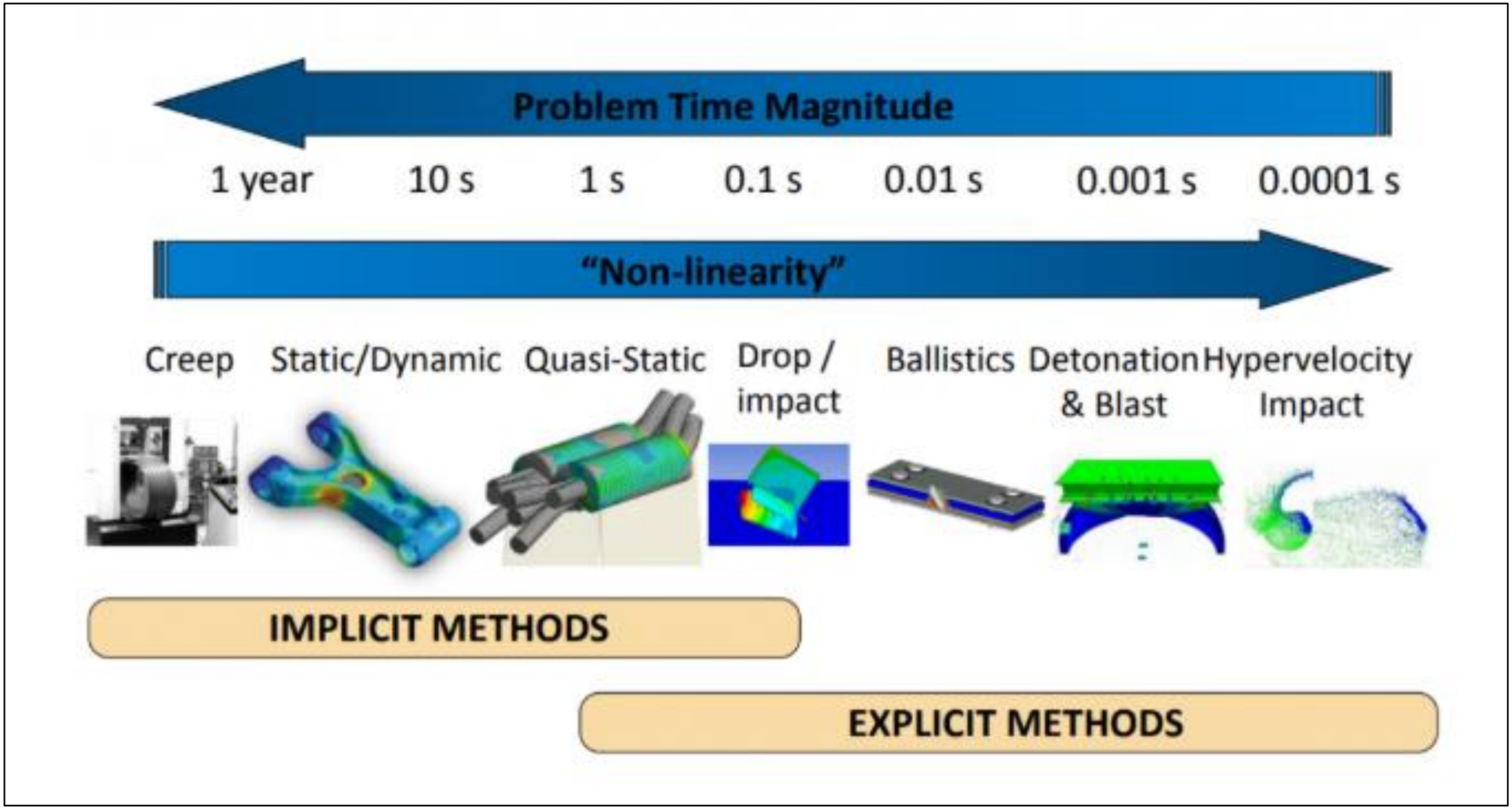
PME 3543
Estruturas Mecânicas e de Veículos
Notas de Aula
Prof. Leandro V. da S. Macedo

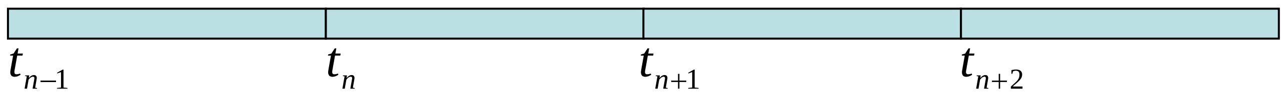
13
Análise dinâmica de estruturas
Método Implícito
vs.
Método Explícito

Método Implícito e Método Explícito se referem a dois tipos de procedimentos de integração numérica para se realizarem análises dinâmicas por integração direta no tempo.



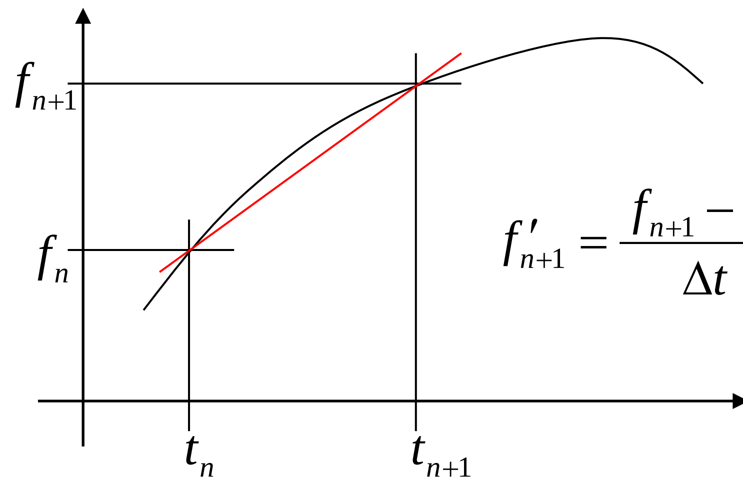
Método Implícito

$$m\ddot{x} + kx = F$$



Conhecidos: $em \;\; t = t_n \;\; \begin{cases} x_n \\ \dot{x}_n \end{cases}$

Desejado: $em \;\; t = t_{n+1} \;\; \{x_{n+1}$



$$f'_{n+1} = \frac{f_{n+1} - f_n}{\Delta t}$$

$$m\ddot{x}_{n+1} + kx_{n+1} = F_{n+1}$$

$$\dot{x}_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}$$

$$\ddot{x}_{n+1} = \frac{\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n}{\Delta t} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t^2} - \frac{\dot{x}_n}{\Delta t}$$

$$\dot{x}_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} \qquad \ddot{x}_{n+1} = \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2}$$

Método Implícito

$$m\ddot{x}_{n+1} + kx_{n+1} = F_{n+1} \qquad \ddot{x}_{n+1} = \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2}$$

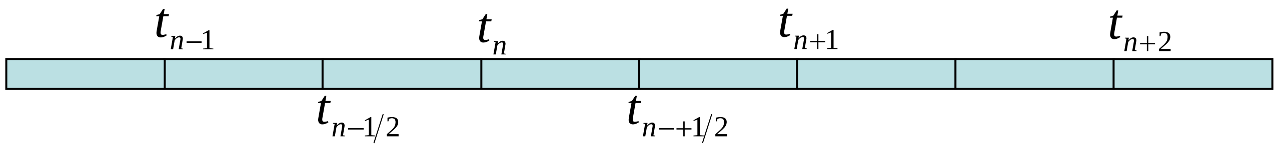
$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + k\right)x_{n+1} = F_{n+1} - \frac{m}{\Delta t^2}\left(-2x_n + x_{n-1}\right)$$

$$\boxed{x_{n+1} = \left(\frac{m}{\Delta t^2} + k\right)^{-1} \cdot \left(F_{n+1} + \frac{m}{\Delta t^2}\left(2x_n - x_{n-1}\right)\right)} \qquad \dot{x}_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} \qquad \ddot{x}_{n+1} = \frac{\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n}{\Delta t}$$

Para casos gerais, com vários graus de liberdade, é necessária inversão de matrizes a cada incremento de tempo de integração.
A matriz de massa pode ser diagonal ➔ ok
A matriz de rigidez praticamente nunca é diagonal
➔ custoso em termos computacionais
➔ trabalha-se com incrementos de tempo grandes ➔ então requer iterações e verificação de critérios de convergência dentro de cada incremento de tempo.

Método Explícito

$$m\ddot{x} + kx = F$$



Conhecidos: $em \;\; t = t_n \;\; \{x_n \qquad em \;\; t = t_{n-1/2} \;\; \{\dot{x}_{n-1/2}$

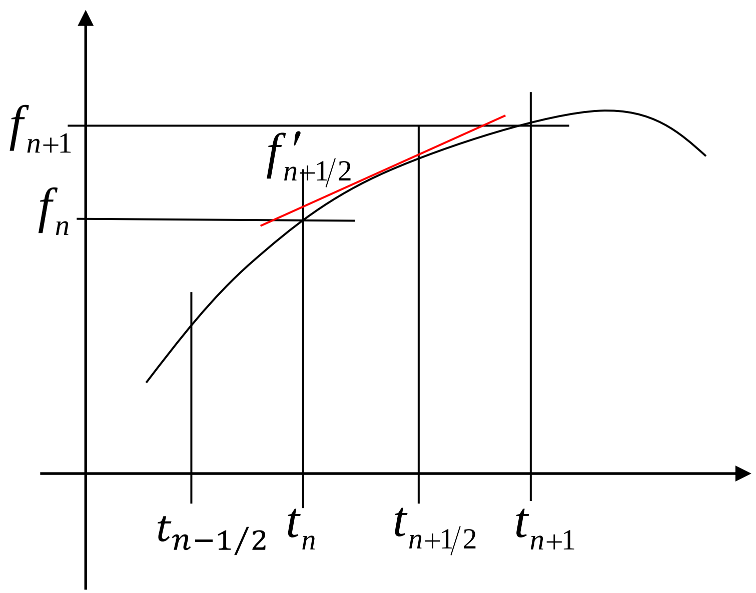
Desejado: $em \;\; t = t_{n+1} \;\; \{x_{n+1}$

$$m\ddot{x}_n + kx_n = F_n$$

$$\boxed{\ddot{x}_n = m^{-1}\left(F_n - kx_n\right)}$$

$$\dot{x}_{n+1/2} = \dot{x}_{n-1/2} + \Delta t\, \ddot{x}_n$$

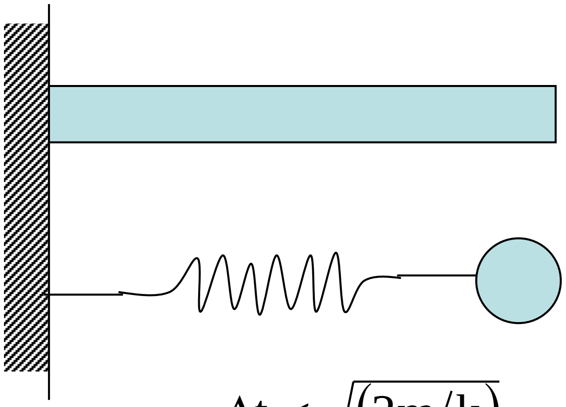
$$\boxed{x_{n+1} = x_n + \Delta t\, \dot{x}_{n+1/2}}$$



Requisito de estabilidade da solução numérica: $\Delta t < \sqrt{\left(2m/k\right)}$

Método Explícito

Requisito de estabilidade da solução numérica:



$$\Delta t < \sqrt{(2m/k)} = \sqrt{(2(1/2\ (\rho AL))/(EA/L))} = L\sqrt{(\rho/E)} = L/c$$

Onde "c" é a velocidade do som no material. Para aço: $c = 6000\ m/s$

A duração típica de um evento de "crash" está em torno de 150 ms. Assim, desejando-se trabalhar com um incremento de tempo de integração de 1 microsegundo (o que já resulta em 150 mil incrementos de tempo!!) o tamanho mínimo de aresta de um elemento finito não poderá ultrapassar 6 mm:

$$\Delta t \sim 1\mu s \quad \Rightarrow \quad L > 6\ mm$$

Método Explícito

Requisito de estabilidade da solução numérica:

Caso o incremento de tempo correto necessário para acompanhar a onda de choque seja <u>menor</u> do que o adotado, um pulso de força maior do que o original irá se transmitir pela malha, produzindo uma solução ilimitada divergente.

➔ Problema quando a malha está muito refinada!

➔ É necessário respeitar o critério de tamanho mínimo de elemento.

Caso o incremento de tempo correto necessário para acompanhar a onda de choque seja <u>maior</u> do que o adotado, a velocidade de propagação do pico do pulso de força será a correta mas haverá uma onda atenuada transmitindo-se a uma velocidade superior.

Não se obtém a solução exata, todavia ainda consegue-se obter soluções aproximadas de boa qualidade.

Método Implícito vs. Método Explícito

Método Implícito

Resolve a equação de equilíbrio dinâmico para o deslocamento em (n+1) em função dos deslocamentos conhecidos em (n) e em (n-1).
Na equação de equilíbrio, a aceleração e a velocidade em (n+1) são substituídos pelas derivadas segunda e primeira, respectivamente, do deslocamento entre (n) e (n+1).
Na substituição acima, a velocidade é resolvida supondo variação linear do deslocamento entre (n) e (n+1)!
Do mesmo modo para a aceleração, esta é resolvida supondo variação linear da velocidade entre (n) e (n+1)!

Resolve-se então para x(n+1).
Em seguida deriva-se numericamente ➔ xp(n+1)
Derivando numericamente novamente ➔ xpp(n+1)

Método Explícito

Resolve a equação de equilíbrio dinâmico para a aceleração em (n) em função dos deslocamentos conhecidos em (n).
Conhecida a aceleração em (n), esta é suposta constante entre (n-1/2) e (n+1/2).
Integra-se e obtém-se a velocidade em (n+1/2).
Supondo constante a velocidade entre (n+1/2) e (n+1), integra-se e obtém-se o deslocamento em (n+1).

Método Implícito vs. Método Explícito

Método Implícito

Fenômeno: casos estáticos ou transientes dinâmicos de duração mais demorada e frequências não exageradamente altas.

Lógica complicada, inversão de grandes matrizes.

Há iterações para verificação de convergência.

Incremento de tempo maiores.

“Softwares” muito exigentes em termos de memória e IO.

Duração da simulação: dezenas de minutos em ambiente “singlecore”.

Método Explícito

Fenômeno: choques, transientes dinâmicos muitos rápidos, em altíssimas frequências, fortemente impulsivo, com comportamento fortemente não linear.

Lógica simples, sistema de equações de fácil solução para matriz de massa diagonal.

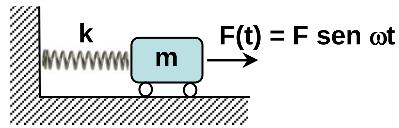
Não há iterações para verificação de convergência.

Incremento de tempo pequeno.

“Softwares” pouco exigentes em termos de memória e IO.

Duração da simulação: <u>horas</u> em ambiente “multicore” (64 cores e.g.).

k	2000	[N/m]
m	10	[kg]
f	2.250791	[Hz]
T	0.44	[s]



F (amplitude)	500	[N]
f	1	[Hz]
w	6.2831853	[rad/s]
período	1	[s]