



**PME 3543**  
**Estruturas Mecânicas e de Veículos**  
**Notas de Aula**  
**Prof. Leandro V. da S. Macedo**

**10**  
**Carga limite de Flexão**  
**Formação de Rótula Plástica**  
**&**  
**Estudando a Contribuição de uma Nervura**



# Comportamento Limite das Estruturas

## Carga limite de Flexão Formação de Rótula Plástica



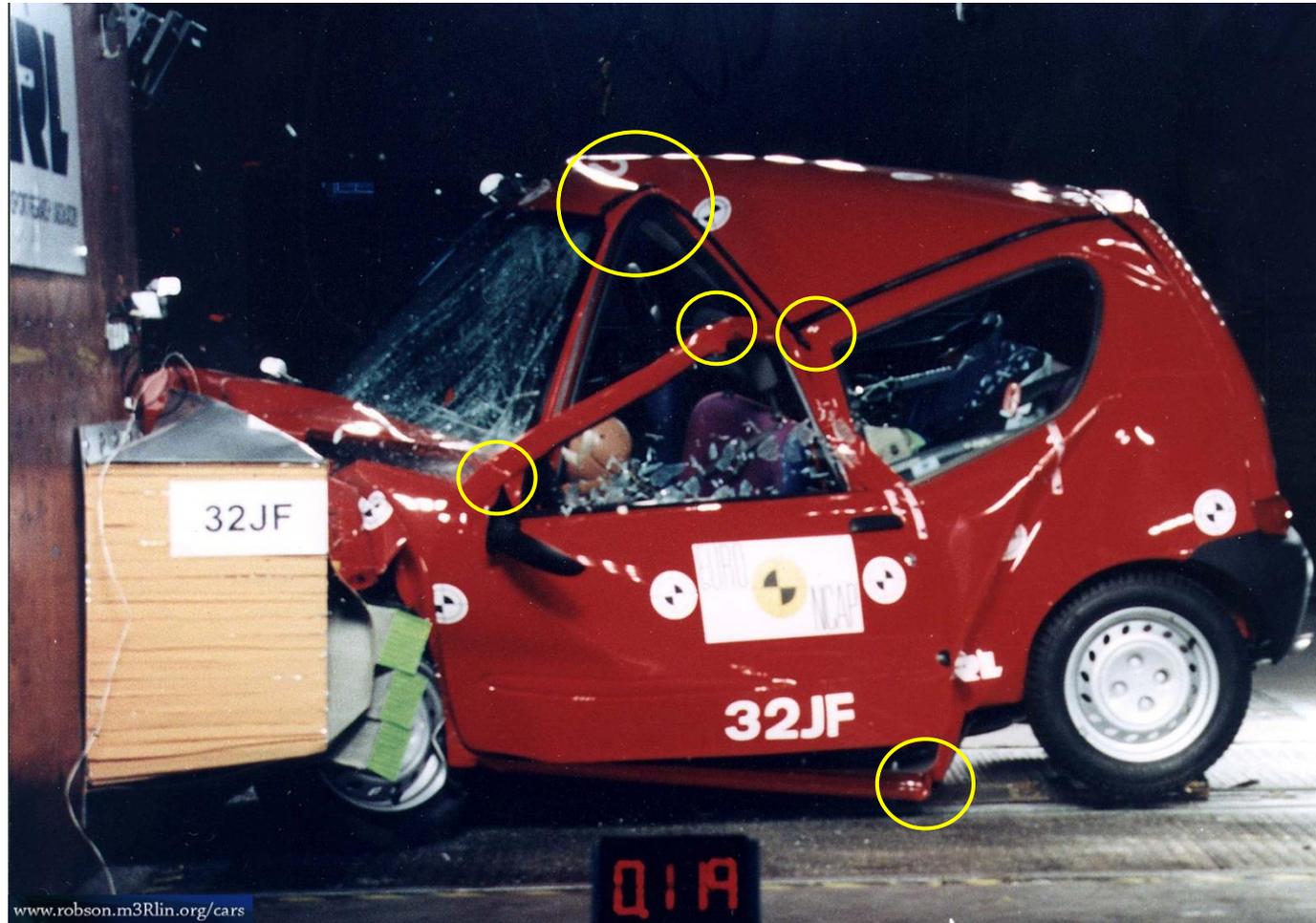
Quando ocorrem grandes deformações, como é típico em situações de crash de um veículo, o regime elástico é ultrapassado. Para ilustrar mostramos a foto de um resultado de crash-test de um veículo qualquer obtido na internet onde podemos observar o grande nível de deformação na coluna A do veículo (outras fotos interessantes podem ser obtidas a partir da palavra chave “euroncap”).

A este tipo de dobra pronunciada que se observa na foto dá-se o nome de **rótula plástica**.

Quando a rótula plástica é formada a estrutura perde a capacidade de resistir a um acréscimo de esforço, os deslocamentos aumentam abruptamente sob carregamento constante e a estrutura entra em colapso.

O nome rótula é dado em analogia ao vínculo cinemático de mesmo nome, onde a rotação entre dois corpos rotulados entre si (ou articulados, no caso de um problema plano) pode-se dar livremente, sem a necessidade de aplicar-se qualquer esforço.

## Rótulas Plásticas





O critério de projeto para as estruturas quando submetidas a carregamentos de serviço, mantém a estrutura no regime elástico linear.

Sendo assim, as tensões máximas na peça são mantidas abaixo do limite de escoamento do material, não havendo a ocorrência de plastificação.

Há situações em que deseja-se conhecer o limite de carga que a estrutura suporta após o regime elástico ser ultrapassado.

Vamos estudar então a carga limite de vigas em flexão.

Isto é interessante para a compreensão conceitual do comportamento limite das estruturas em geral e em particular do desempenho da carroceria de veículos em situação de crash.

Nesta situação há a formação das chamadas rótulas plásticas quando a estrutura perde a capacidade de resistir ao carregamento.

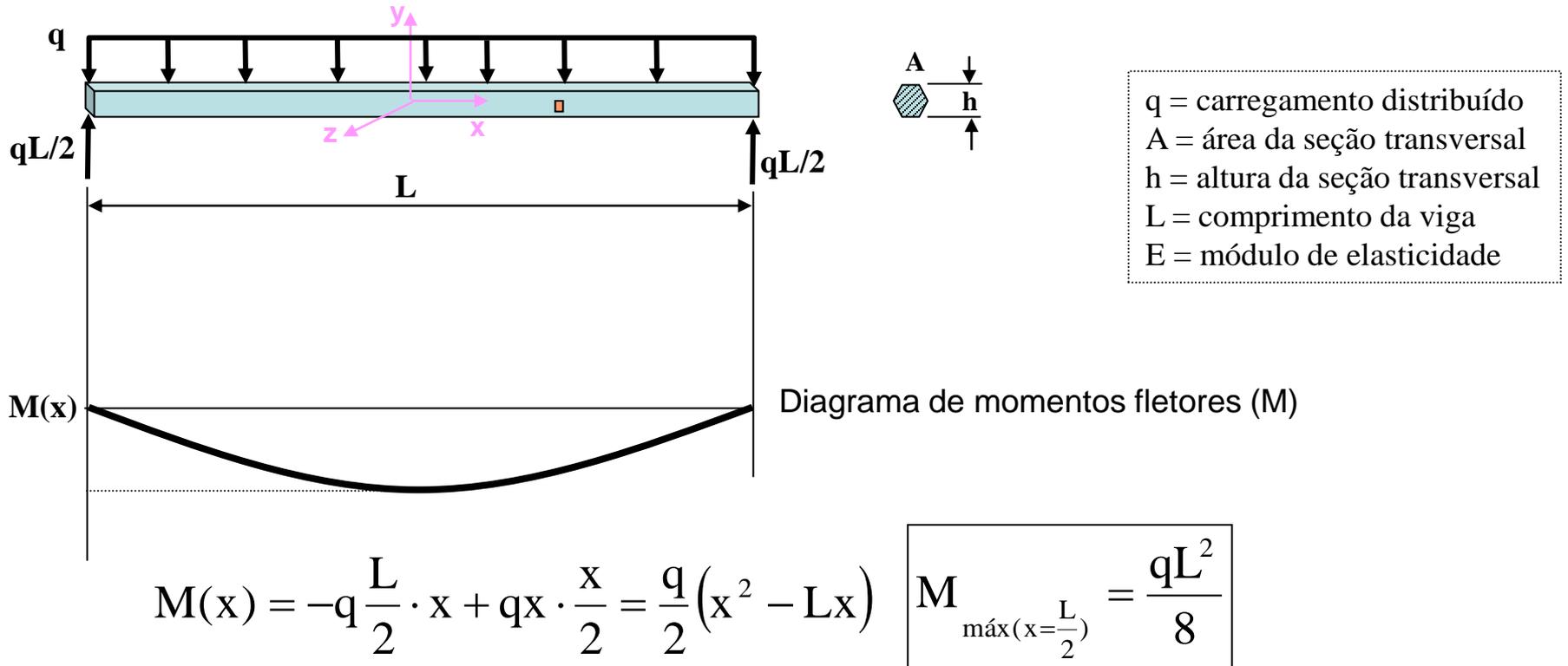


## Carga de flexão em vigas

No regime elástico, as tensões normais de flexão em uma seção transversal da viga equilibram o momento fletor devido ao carregamento externo aplicado.

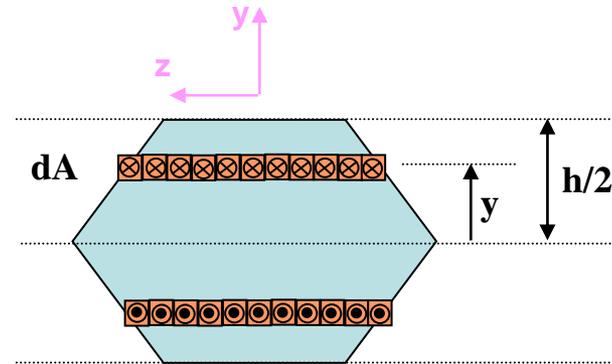
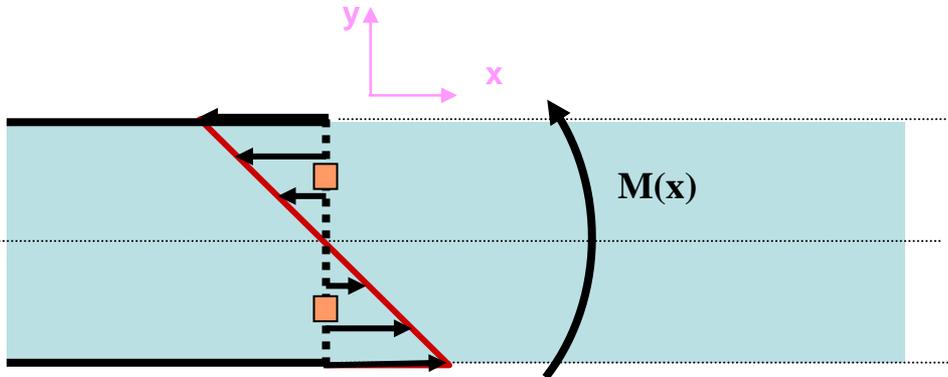
Adota-se a hipótese de variação linear da tensão ao longo da altura da seção transversal, sendo nula a tensão normal na linha neutra e máximas as tensões normais nas fibras mais distantes da linha neutra.

Daí deduz-se a fórmula da tensão normal de flexão, como já demonstrado anteriormente:





# Carga de flexão em vigas – regime elástico



$$M(x) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma(x, y) \cdot y \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{x, \text{máx}} \frac{y}{h/2} \cdot y \cdot dA = \frac{2\sigma_{x, \text{máx}}}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dA$$

$$\sigma_{x, \text{máx}} = \frac{M(x) \frac{h}{2}}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dA}$$

Identifica-se o denominador como sendo o momento de inércia da seção transversal, assim:

$$\sigma_{x, \text{máx}} = \frac{M(x) \frac{h}{2}}{J_z}$$

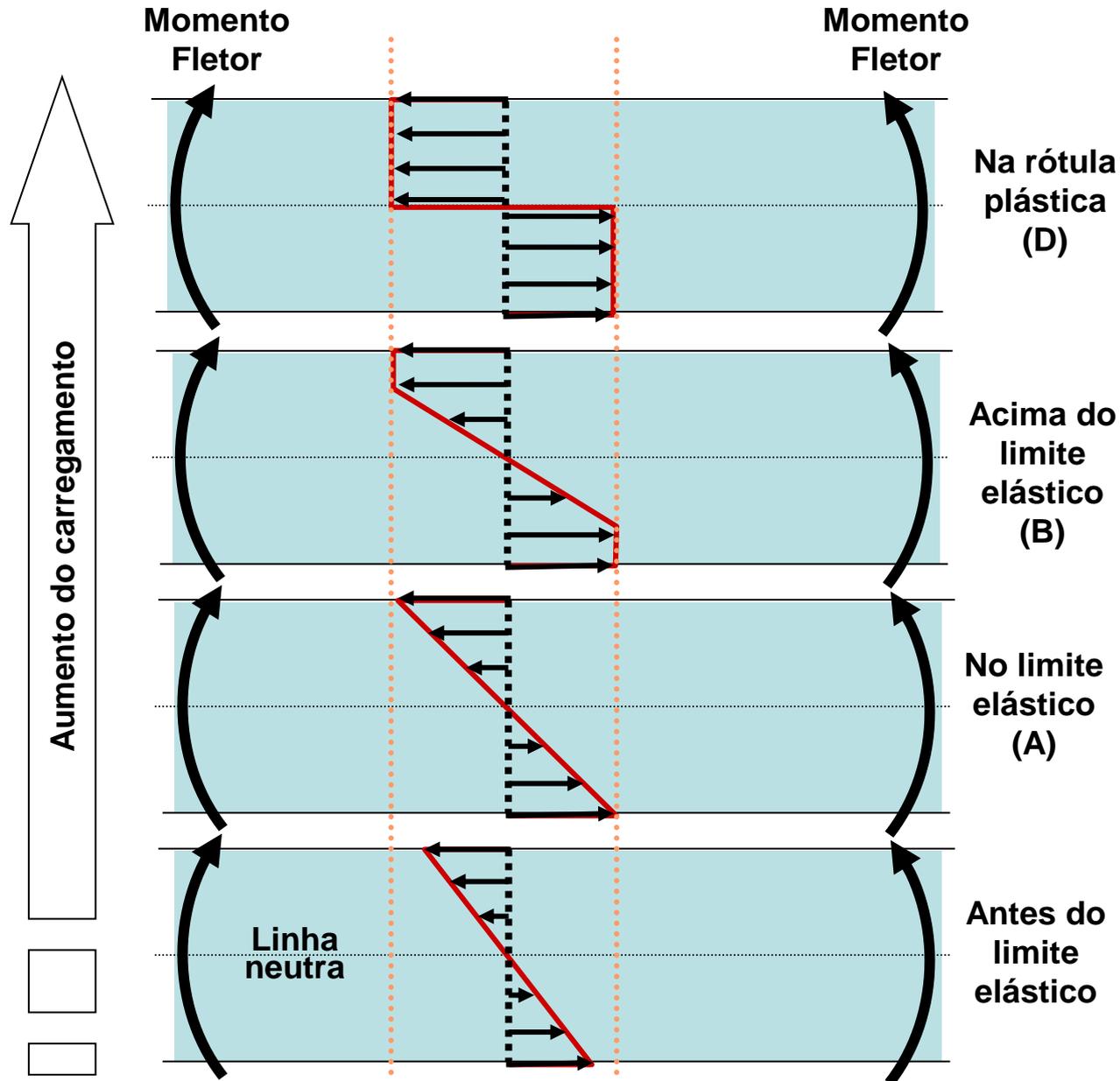
No exemplo, o momento fletor máximo ocorre no meio da viga ( $x=L/2$ ):

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{qL^2 \frac{h}{2}}{8J_z}$$

Para uma seção transversal retangular de base “b” e altura “h”:

$$J_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$q_{\text{máx}} = \frac{3bh^2}{4L^2} \sigma_{\text{esc}}$$





Para o estudo da carga limite adotaremos as seguintes hipóteses:

- comportamento do material elástico/perfeitamente plástico;
- a falha da estrutura irá ocorrer quando houver a formação de uma “rótula plástica”.

Uma **rótula** interna numa estrutura não resiste a momentos.

Analogamente então, define-se a formação da **rótula plástica** quando os deslocamentos passam a aumentar de modo indefinido **sob carregamento constante**.

Isto irá acontecer quando toda uma seção transversal, isto é em toda a altura da seção transversal, a tensão atingir seu valor máximo admissível, que é o valor de tensão correspondente ao limite de escoamento do material.

Conforme o carregamento aumenta, mas antes de qualquer fibra atingir o limite elástico, a distribuição de tensões ao longo da altura da seção transversal é triangular.

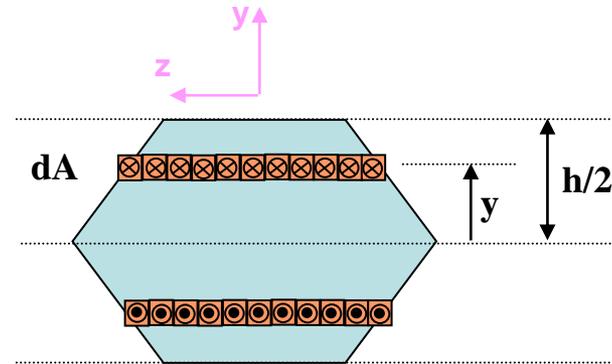
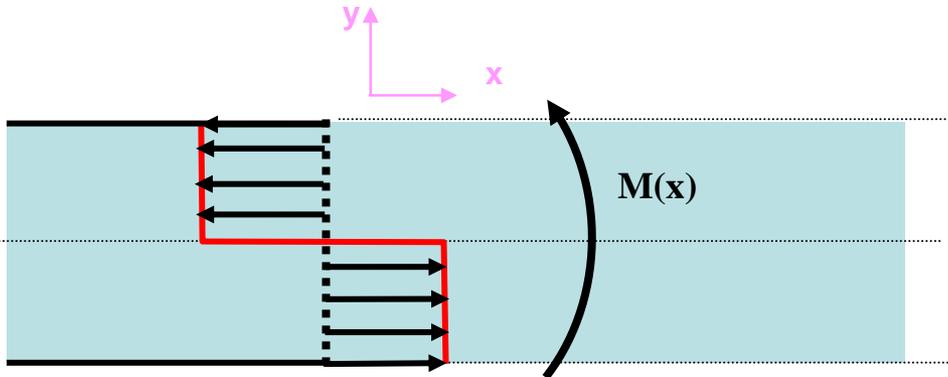
Ultrapassado o limite de escoamento das fibras mais externas, a distribuição de tensões passa a ser trapezoidal.

Quando da formação da rótula plástica, toda a seção está no limite de escoamento e assim a distribuição de tensões torna-se retangular.

Pode-se determinar assim a carga limite nesta situação:



# Carga limite de flexão em vigas – formação da rótula plástica



$$M(x) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma(x, y) \cdot y \cdot dA = 2 \int_0^h \sigma_{esc} \cdot y \cdot dA = 2\sigma_{esc} \int_0^h y dA$$

$$M(x) = \sigma_{esc} \cdot \bar{y}A$$

Onde  $\bar{y}$  é o centroide da semi-área

No exemplo, o momento fletor máximo ocorre no meio da viga ( $x=L/2$ ):

$$M_{máx} = \frac{qL^2}{4}$$

E assim a carga distribuída que acarreta a formação da rótula plástica resulta em:

$$q_{rótula\ plástica} = \frac{4\sigma_{esc}}{L^2} \bar{y}A$$

Para uma seção transversal retangular de base “b” e altura “h”:

$$\bar{y} = \frac{h}{4} \quad A = bh$$

$$q_{rótula\ plástica} = \frac{bh^2}{L^2} \sigma_{esc}$$



## Regime elástico vs. Carga limite (formação da rótula plástica)

Comparando então os dois resultados, vê-se que, para uma viga de seção transversal retangular, bi-apoiada, submetida a uma carga distribuída, a carga limite atinge 4/3 da carga máxima do regime elástico.

$$q_{m\acute{a}x} = \frac{3bh^2}{4L^2} \sigma_{esc}$$

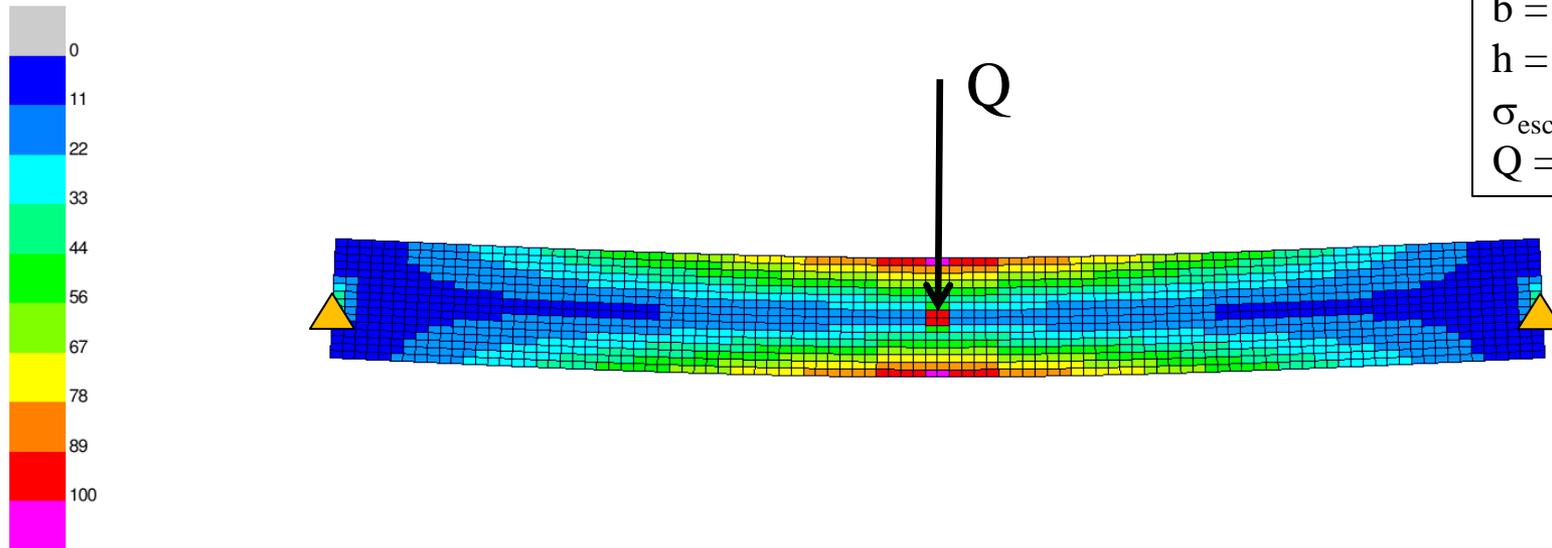
$$q_{r\acute{o}tula\ pl\acute{a}stica} = \frac{bh^2}{L^2} \sigma_{esc}$$

$$\frac{q_{r\acute{o}tula\ pl\acute{a}stica}}{q_{m\acute{a}x.\ el\acute{a}stico}} = \frac{4}{3}$$



Modelando em elementos finitos, para uma viga de seção transversal retangular, bi-apoiada, submetida a uma carga central :

Element stress: max. v. Mises (Shell/Solid)



$L = 100 \text{ mm}$   
 $b = 5 \text{ mm}$   
 $h = 10 \text{ mm}$   
 $\sigma_{esc} = 100 \text{ MPa}$   
 $Q = 0 \dots 600 \text{ N}$



Subcase 1, Load Step 0.550000: ESTUDO\_CARGA\_LIMITE VIGA\_SECCAO\_RETANGULAR MB01

$$Q_{\text{máx.elástico}} = \frac{2bh^2}{3L} \sigma_{esc}$$

$$Q_{\text{máx.elástico}} = 333 \text{ N}$$

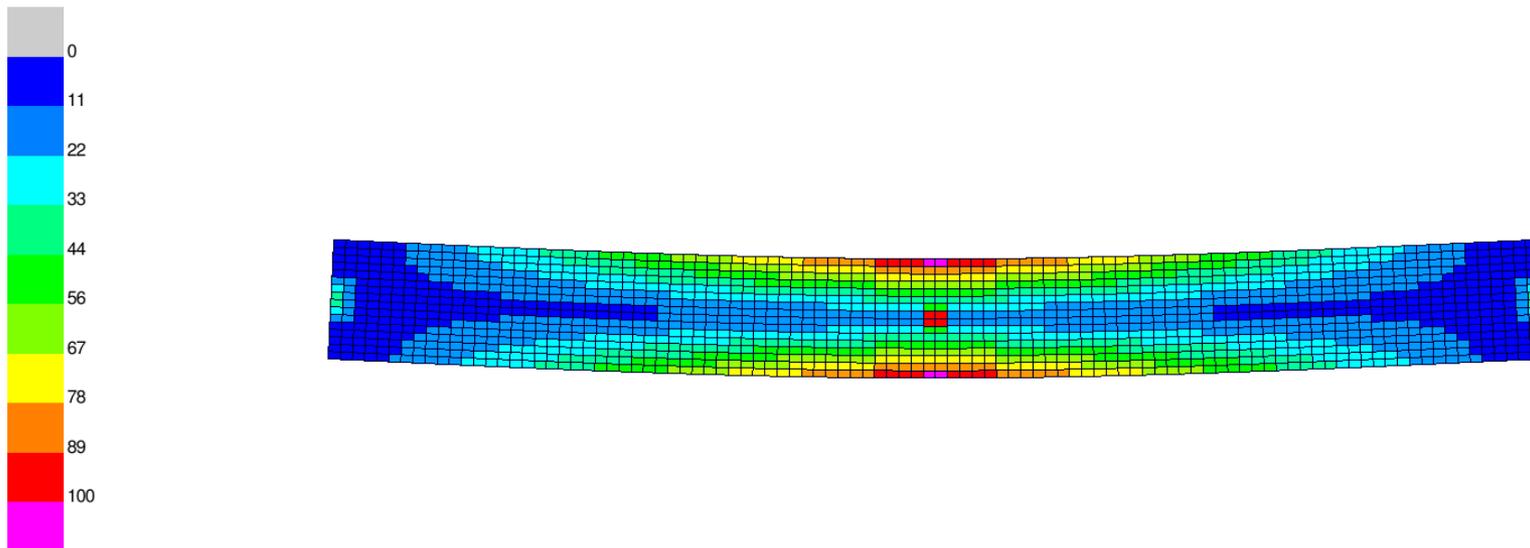
$$Q_{\text{rótula plástica}} = \frac{bh^2}{L} \sigma_{esc}$$

$$Q_{\text{rótula plástica}} = 500 \text{ N}$$

$$\frac{Q_{\text{rótula plástica}}}{Q_{\text{máx.elástico}}} = \frac{3}{2}$$



Element stress: max. v. Mises (Shell/Solid)

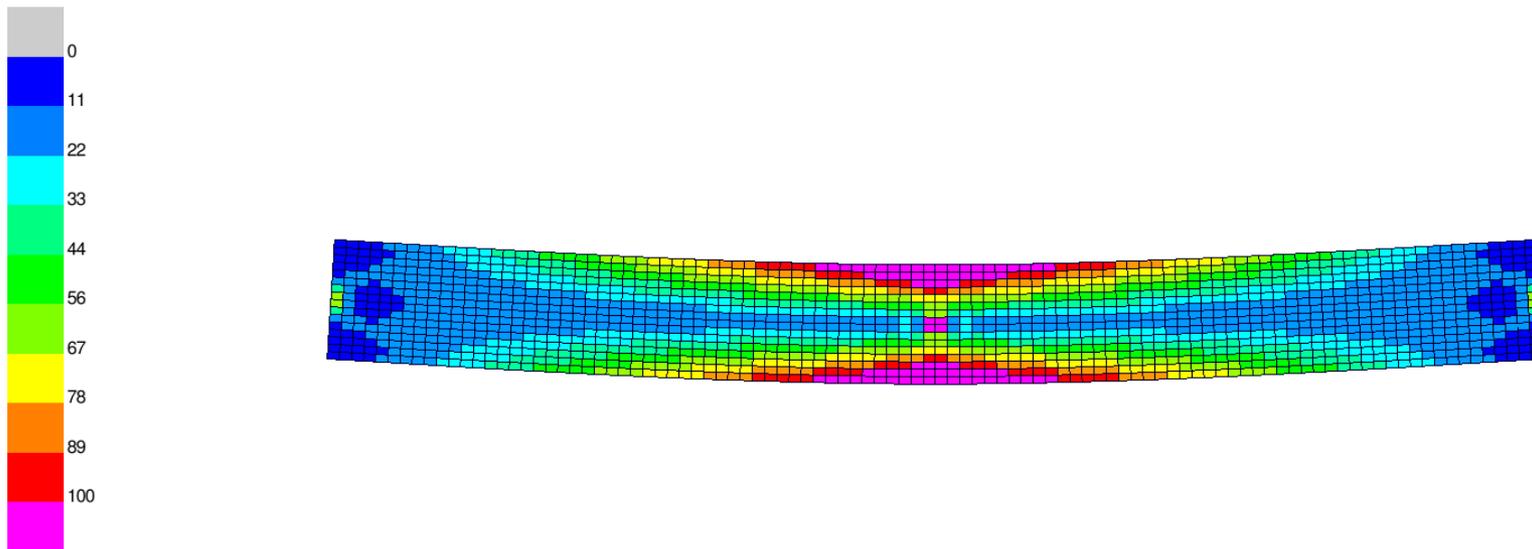


Subcase 1, Load Step 0.550000: ESTUDO\_CARGA\_LIMITE VIGA\_SECCAO\_RETANGULAR MB01

$Q = 0 \dots 600 \text{ N}$   
55% da carga = 330 N  
Atingido limite elástico



Element stress: max. v. Mises (Shell/Solid)



Subcase 1, Load Step 0.700000: ESTUDO\_CARGA\_LIMITE VIGA\_SECCAO\_RETANGULAR MB01

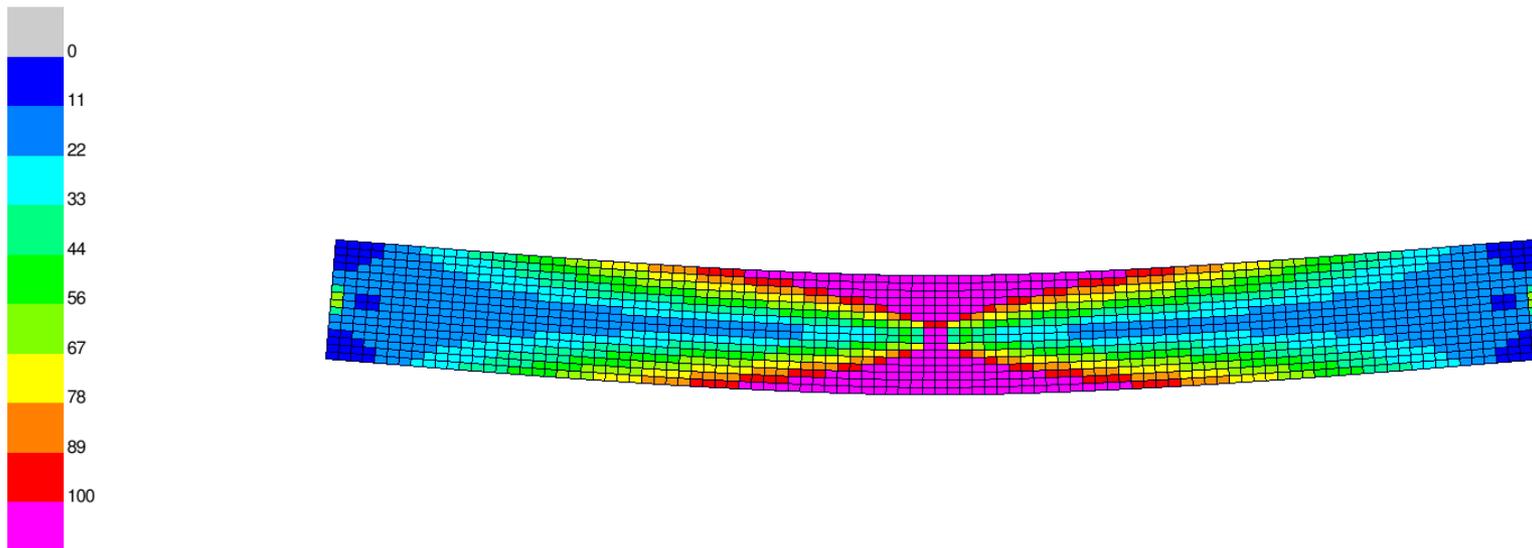
$$Q = 0 \dots 600 \text{ N}$$

$$70\% \text{ da carga} = 420 \text{ N}$$

Plastificação progredindo em direção  
à linha neutra



Element stress: max. v. Mises (Shell/Solid)

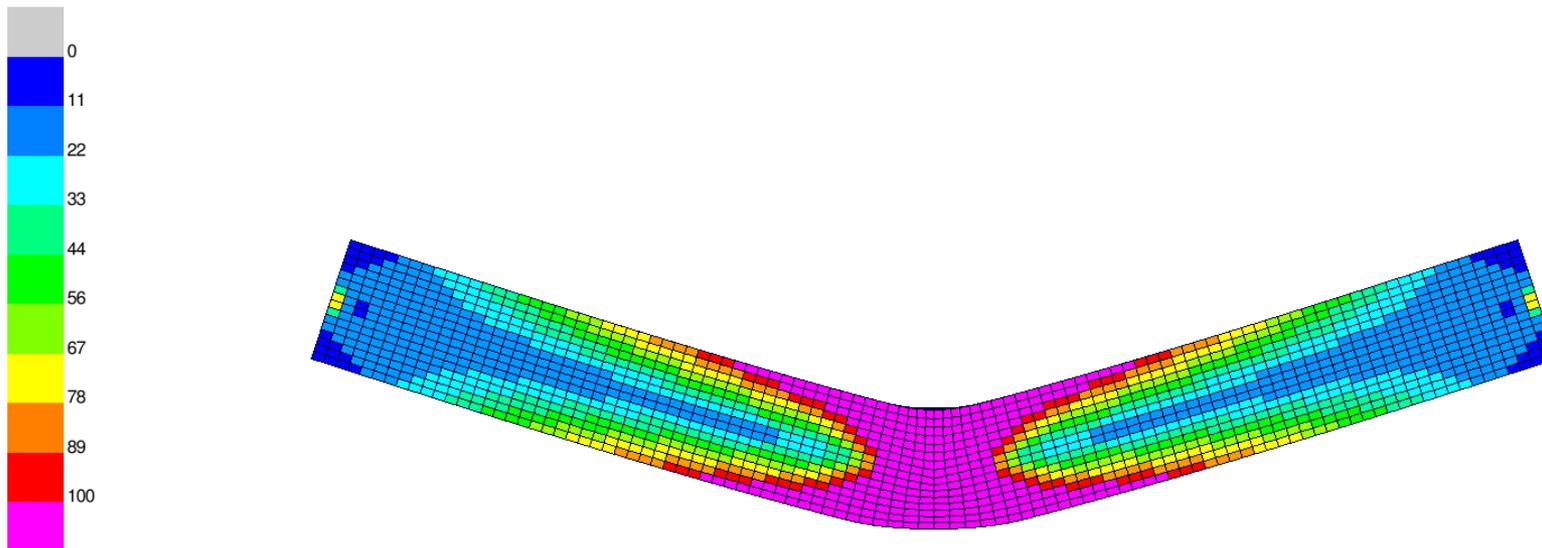


Subcase 1, Load Step 0.820000: ESTUDO\_CARGA\_LIMITE VIGA\_SECCAO\_RETANGULAR MB01

$Q = 0 \dots 600 \text{ N}$   
82% da carga = 492 N  
Carga limite atingida  
Formação da rótula plástica

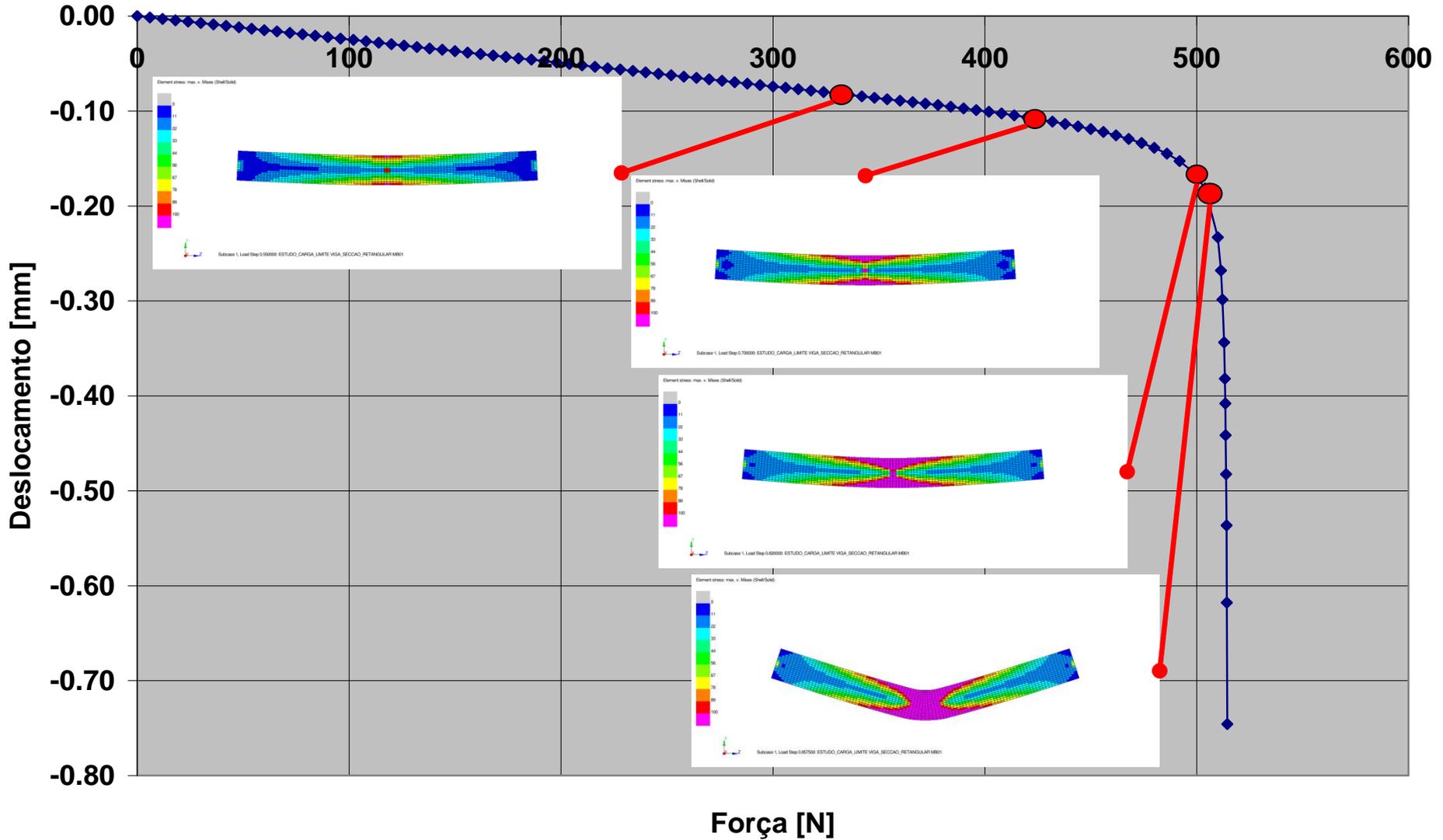


Element stress: max. v. Mises (Shell/Solid)



Subcase 1, Load Step 0.857500: ESTUDO\_CARGA\_LIMITE VIGA\_SECCAO\_RETANGULAR MB01

$Q = 0 \dots 600 \text{ N}$   
85,75% da carga = 514,5 N  
Estrutura colapsando





```

$
ID sol106
SOL 106
TIME 3.15E7
CEND
$
ECHO =NONE
$ ----- SET DEFINITION SECTION -----
$ ----- NODE SETS -----
$no_carregamento
SET 1= 101 THRU 107
$ ----- END OF SET DEFINITION SECTION -----
$
SUBCASE 1
TITLE =ESTUDO_CARGA_LIMITE
SUBTITLE =VIGA_SECCAO_RETANGULAR
LABEL =MB01
SPC =1
LOAD =1
NLPARM =1
DISPLACEMENT(PLOT)=ALL
GPFORCE (PRINT)=1
STRESS (PLOT)=ALL
NLSTRESS (PLOT)=ALL
$
BEGIN BULK
PARAM,GRDPNT,0
PARAM,K6ROT, 100.
PARAM,LGDISP,2
PARAM,MAXRATIO, 1.E8
PARAM,NEWSEQ,-1
PARAM,POST,-1
PARAM,PRGPST,NO
PARAM,EPZERO,1e-8
$
GRID 101 -1.66667 0.49.99998
GRID 102 -2.5-1.78-1549.99998
.....

```

```

....
CHEXA 97 2000 1075 1000 1076 1077 1194 1119
+ 1195 1196
CHEXA 98 2000 1194 1119 1195 1196 1313 1238
+ 1314 1315
CHEXA 99 2000 1313 1238 1314 1315 1432 1357
+ 1433 1434
.....
$vigia retangular
PSOLID 2000 1
$
SPC 1 1024 123 0.
SPC 1 1090 123 0.
SPC 1 1031 123 0.
SPC 1 1037 123 0.
SPC 1 1043 123 0.
SPC 1 1050 123 0.
SPC 1 1103 123 0.
SPC 1 12924 12 0.
SPC 1 12990 12 0.
SPC 1 12931 12 0.
SPC 1 12937 12 0.
SPC 1 12943 12 0.
SPC 1 12950 12 0.
SPC 1 13003 12 0.
$
FORCE 1 200 600. 0. -1. 0.
$controle_incremento_carga_e_convergencia
NLPARM 1 100 0.ITER 1 25UPW ALL
+ 1.-3 1.-3 1.-7 3 25 4 0.2 0.5
+ 5 20. 20.
$aco S100_modificado [elastico - perfeitamente plastico]
MAT1 1 210000.80729.23 0.3 7.85-9 1.2-5
MATS1 1 PLASTIC 0.1 1 100.
ENDDATA
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$

```



# Estudando a Contribuição de uma Nervura



## Estudando a contribuição de uma nervura

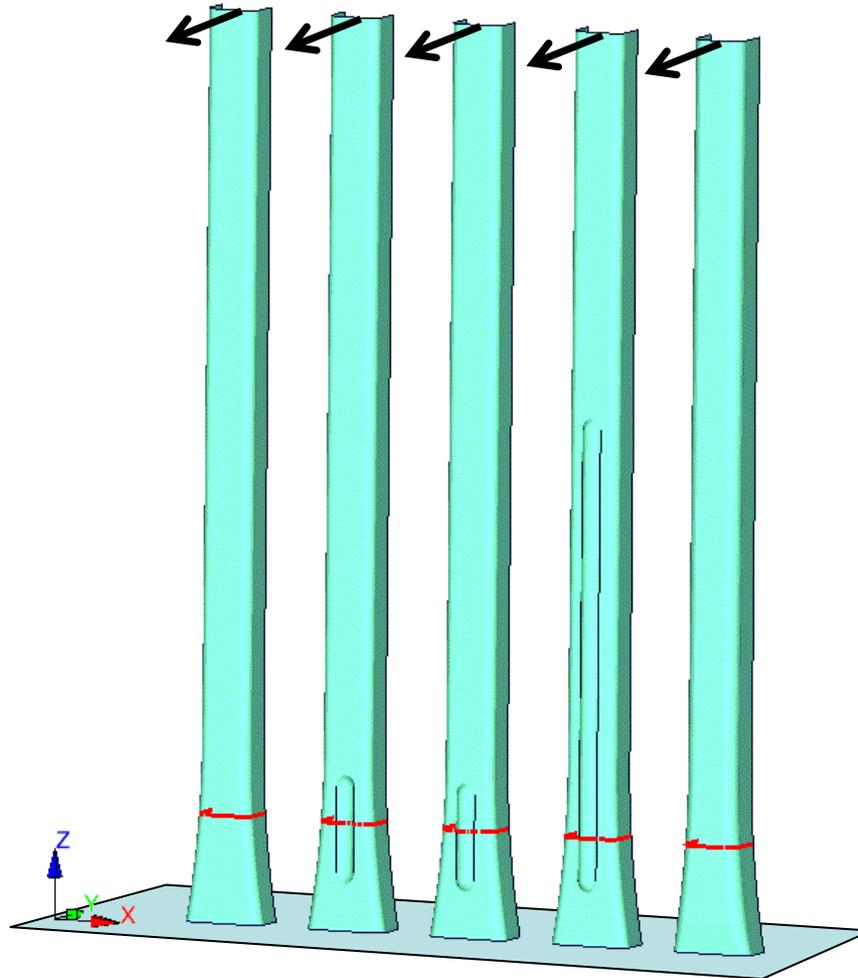
Uma alternativa comum quando procuramos aumentar a rigidez de uma peça é nervurá-la. Todavia a aplicação de nervuras deve ser criteriosa pois se por um lado a nervura confere rigidez, por outro lado ela pode concentrar tensões.

Vamos explorar um exemplo simples para entender o que pode estar acontecendo.

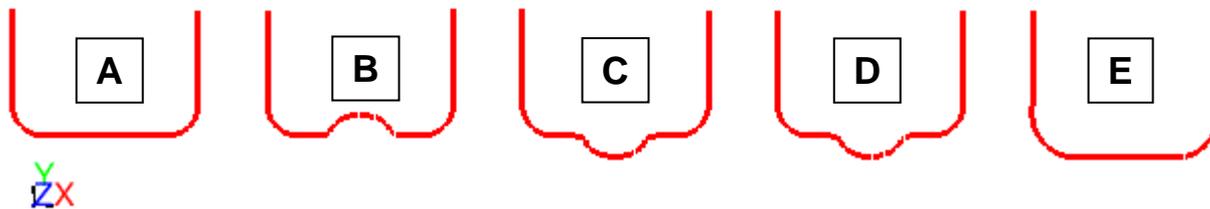
Vamos considerar as peças ilustradas na figura que tem a característica de vigas engastadas submetidas a uma carga em suas extremidades livres. O objetivo seria o de melhorar rigidez. Em outras palavras, diminuir os seus deslocamentos, tanto elásticos quanto os permanentes (ou plásticos, ou residuais).

Assim, iremos elevar gradativamente a carga de modo a estudar inclusive o que acontece quando o limite elástico do material for ultrapassado em algumas regiões da peça. Situações deste tipo são admissíveis em algumas de nossas peças e conjuntos. Pequenos deslocamentos permanentes são admissíveis nos critérios de projeto estrutural de alguns conjuntos quando são consideradas cargas de “misuse”.

A partir de uma geometria básica, comparamos resultados considerando a inclusão de algumas diferentes configurações de nervuras.

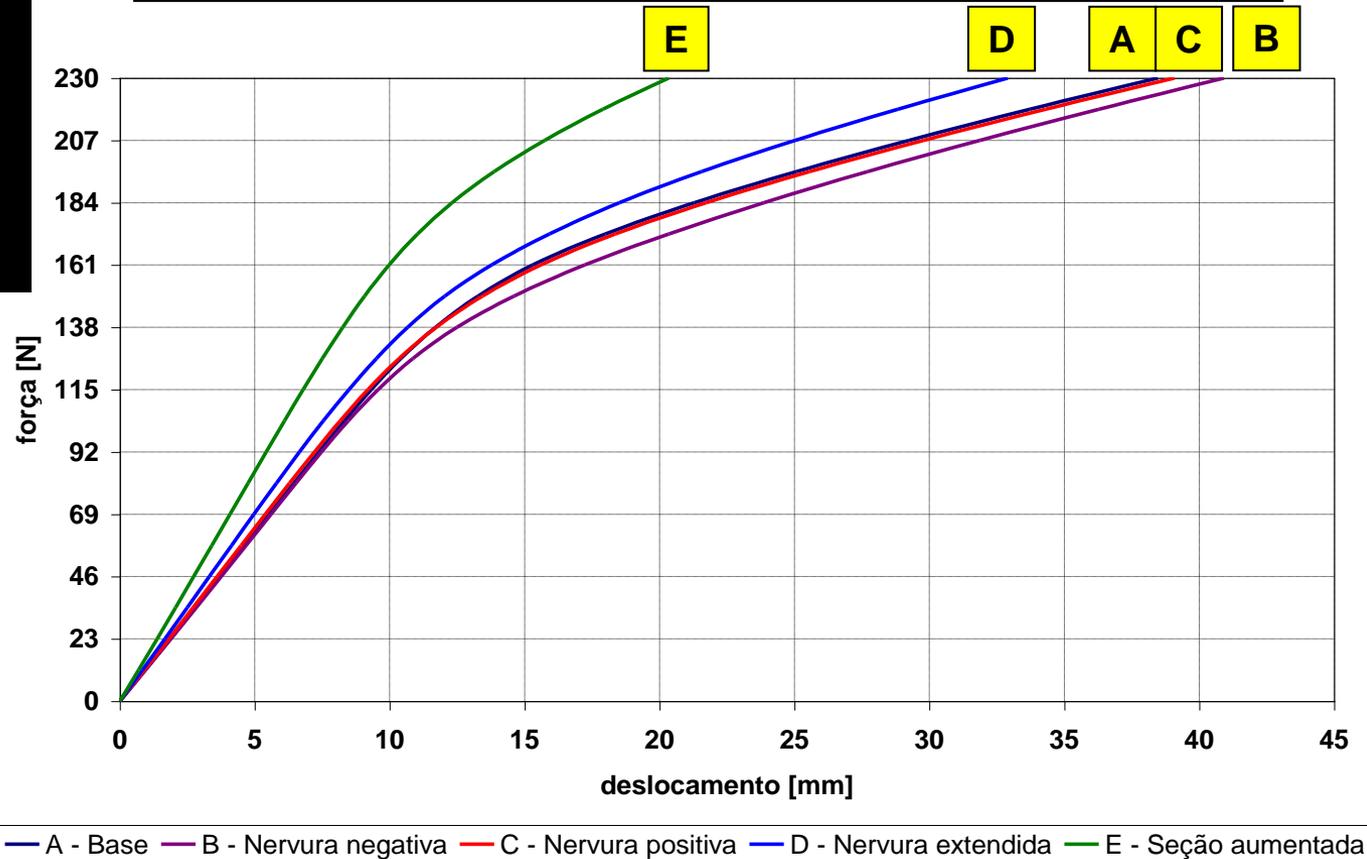
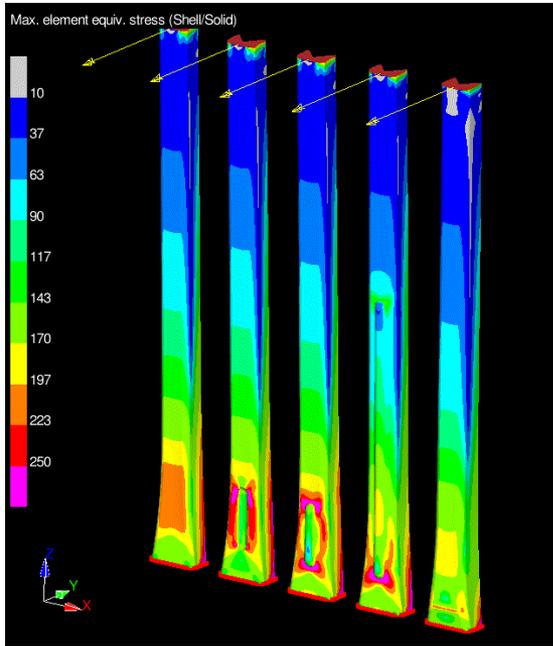


$F_{\text{máx}} = 230 \text{ N}$   
 $L = 700 \text{ mm}$   
Alma = 40 mm  
Aba = 30 mm  
Espessura = 1 mm  
Material: Aço  
 $\sigma_{\text{esc}} = 140 \text{ MPa}$





Versão	Linear		Não Linear	
	$\delta$ [mm]	k [%]	$\delta$ [mm]	k [%]
A base	19.0	100%	38.5	100%
B nervura negativa	19.2	99%	40.9	94%
C nervura positiva	18.3	104%	39.1	98%
D nervura extendida	16.9	112%	32.9	117%
E seção aumentada	14.0	136%	20.3	190%



— A - Base — B - Nervura negativa — C - Nervura positiva — D - Nervura extendida — E - Seção aumentada

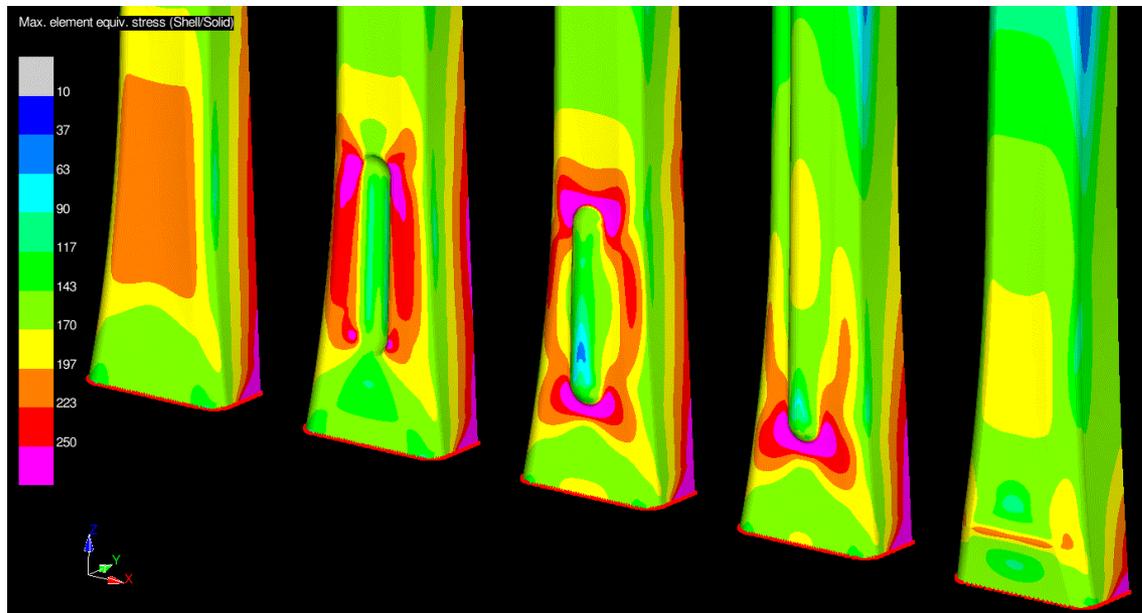


Na geometria de base (versão “A”) a maior tensão ocorre na transição de seção transversal da viga, onde ocorre a pior combinação de momento fletor e de módulo de resistência à flexão.

A primeira tentativa (versão “C”) seria então inserir uma nervura nesta região, como ilustrado na figura. Esta cobre a altura da transição e então se poderia esperar uma melhoria na rigidez.

Quando consideramos apenas o regime elástico esta melhoria realmente se verifica e é explicada pelo aumento do momento de inércia da seção transversal da viga na região da nervura.

É interessante observar que invertendo o sentido da nervura (versão “B”) há uma diminuição na rigidez, que é explicada pela diminuição do momento de inércia da seção transversal da viga.





Agora, se considerarmos um nível de carga mais elevado, no qual as tensões ultrapassem o regime elástico, mesmo a nervura original da versão “C” não apresenta bom resultado. A rigidez diminui, os deslocamentos são maiores. A explicação do porquê isto ocorre é que a geometria da nervura induz uma concentração de tensões na extremidade da mesma, responsável por um maior escoamento local e, por consequência, na perda de rigidez global da peça.

Uma alternativa de melhoria é então aumentar o comprimento da nervura conforme por exemplo a versão “D”. De fato verifica-se uma melhoria na rigidez. Isto é explicado porque a extremidade da nervura, que induz concentração de tensões, está agora localizada em região de menor momento fletor. Assim a elevação da tensão se dá sobre um valor nominal de fundo menor, de modo que a peça permanece em regime elástico em níveis de carga superiores.

Algo que provavelmente nossa intuição não deixaria fazer seria uma nervura perpendicular á direção longitudinal da peça. Os resultado é certamente ruim.

### **Conclui-se então o seguinte:**

- quando no regime elástico, uma nervura numa posição e orientação adequadas pode ser efetiva em aumentar a rigidez da peça;
- a nervura deve ser feita de modo a aumentar o momento de inércia da seção transversal da peça;
- a orientação da nervura deve ser perpendicular ao gradiente de deslocamentos;
- a nervura concentra tensões na sua extremidade, assim devemos levar esta extremidade para longe de regiões de tensão elevada, caso contrário pode haver perda de rigidez, problemas de durabilidade, indução de formação de rótulas plásticas.



## **Adicionalmente:**

- como resultado do processo de manufatura, a introdução da nervura pode acarretar em reduções localizadas da espessura da chapa em relação ao valor nominal, o que pode resultar em uma piora de desempenho, tanto sob o ponto de vista de rigidez como no que diz respeito a durabilidade (surgimento de trincas por fadiga);
- pelo mesmo efeito citado anteriormente, qual seja, o de concentrar tensões, uma nervura pode piorar as deformações em situações de “crash”;
- incluir nervuramento não é neutro em termos de custos: pode acarretar em custos de desgaste de ferramenta ou de controle da geometria...

De modo geral então deve-se ponderar sobre a conveniência de incluir nervuras nas peças.

O mais efetivo e com menos risco de consequências negativas no que diz respeito a deformações permanentes, durabilidade e desempenho em “crash” é fazermos as peças lisas, aumentando o máximo possível a sua seção transversal como um todo. A versão “E” mostra isso. Nela aumentamos a seção transversal como um todo, ocupando a altura de seção transversal que já era ocupada pelo topo da nervura. O aumento de rigidez e diminuição do nível de tensões é muito mais significativo.

Faço a ressalva que o que discutimos até aqui vale para peças que tenham geometria que as aproxime de um comportamento de viga. Para painéis que se aproximem de um comportamento de placa, outras particularidades devem ser consideradas (vale lembrar por exemplo que não há sentido em se falar em momento de inércia de seção transversal para uma placa). Mesmo para estruturas com comportamento de viga, quando as espessuras de parede são pequenas, flambagem local das abas ou mesmo da alma pode ocorrer, assim, nestas situações, nervuras que impeçam estas instabilidades locais podem ser convenientes.