



PME 3543
Estruturas Mecânicas e de Veículos
Notas de Aula
Prof. Leandro V. da S. Macedo

07
Inertia Relief



Carregamentos de rodagem



Problema:

Carro em rodagem → carregamento entrando na carroceria pelas ancoragens da suspensão dianteira e traseira sendo equilibrado pela inércia do veículo.

O carregamento de rodagem pode ser obtido virtualmente de um modelo CAE de dinâmica veicular ou obtido experimentalmente com um veículo instrumentado em pista.

Observando-se as manobras na pista de rodagem pode-se escolher algum evento crítico para o qual deseja-se calcular a distribuição de tensões na carroceria.

Uma possibilidade de análise é fazer uma análise estática onde o carregamento que entra pela suspensão, num determinado instante crítico da manobra, fica equilibrado pelas forças de inércia do veículo.

Para termos resultados realistas obviamente precisamos então de um modelo de BIW trimmed, isto é, aquele onde as massas não estruturais estejam “penduradas” na carroceira.

A dificuldade é que este modelo seria livre-livre, isto é, a estrutura não tem vínculos externos, e assim a matriz de rigidez é não singular e não admite inversão.

O procedimento “Inertia Relief” supera esta dificuldade.



Inertia Relief

Propósito:

Análise de estruturas livres, isto é, sem vínculos externos, por meio de uma análise estática.

A análise estática convencional de uma estrutura livre não é possível de ser realizada devido à singularidade da matriz de rigidez da estrutura.

No método de “Inertia Relief” forças de inércia da estrutura são utilizadas para equilibrar o carregamento externo aplicado, resolvendo-se a seguir um cálculo estático.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F_{ext}\}$$

Desprezando amortecimento estrutural (procedimento conservativo):

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F_{ext}\}$$

$$[K]\{u\} = \{F_{ext}\} - [M]\{\ddot{u}\}$$

$$\{u\} = [K]^{-1}(\{F_{ext}\} - [M]\{\ddot{u}\})$$



$$\{u\} = [K]^{-1}(\{F_{ext}\} - [M]\{\ddot{u}\})$$

Todavia a matriz de rigidez está singular e assim não admite inversa.

Artificialmente vamos aplicar um vínculo externo retirando os 6 graus de liberdade da estrutura.

Este vínculo supostamente aplicaria forças de reação sobre a estrutura e assim modificaria a distribuição de tensões invalidando os resultados.

Todavia devemos observar que a estrutura já está equilibrada “antes” da aplicação do vínculo.

Forças de inércia estão equilibrando 100% do carregamento externo. Então é lógico concluir que as reações serão nulas e então a colocação artificial do vínculo não altera o carregamento da estrutura, tensões e deformações não serão alteradas pelo vínculo artificial.

Apenas os deslocamentos serão alterados. Os deslocamento calculados então serão relativos ao ponto vinculado.

O ponto vinculado artificialmente é dito “ponto de suporte”.

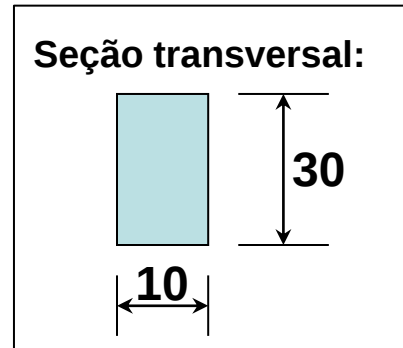
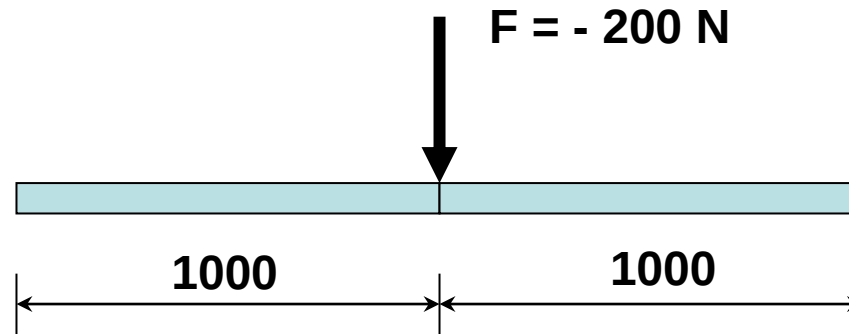


Procedimento:

- calcular o somatório de forças e momentos externos aplicados;
- calcular as acelerações lineares e angulares que equilibram o carregamento imposto (TMB e TMA);
- escolher um “ponto de suporte”, desconsiderando assim seis graus de liberdade da matriz de rigidez que consigam retirar os seis movimentos de corpo rígido da estrutura;
- a matriz de rigidez reduzida resulta não singular e o problema de análise estrutural estática pode ser resolvido;
- obtém-se deslocamentos relativos aos graus de liberdades reduzidos;
- observar que os deslocamentos são relativos mas as deformações (e então as tensões) são absolutas, como desejado;
- a modelagem da estrutura em elementos finitos precisa resultar em uma matriz de massa que contenha termos inerciais para os seis graus de liberdade de corpo rígido da estrutura, de forma que seja possível equilibrar um carregamento externo qualquer com forças inerciais.



Exemplo:



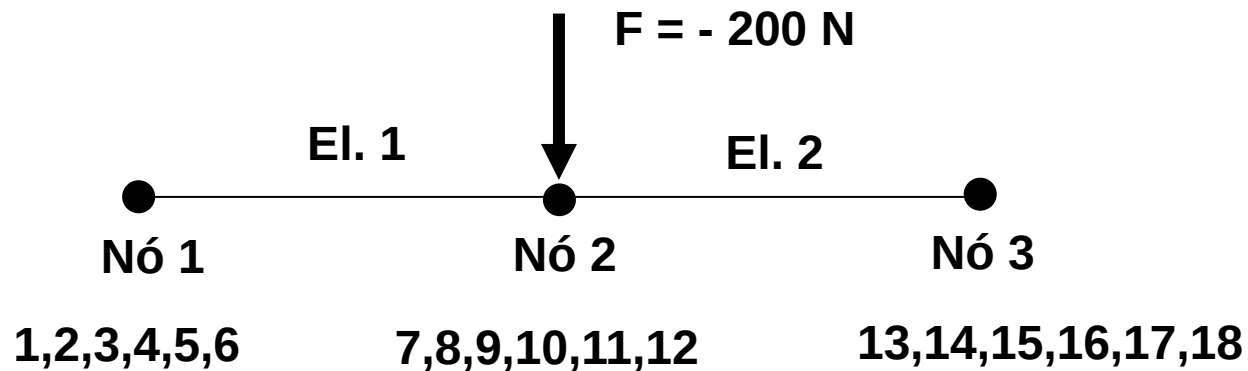
$E = 210.000 \text{ MPa}$

$\nu = 0,3$

$\rho = 7,85 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$

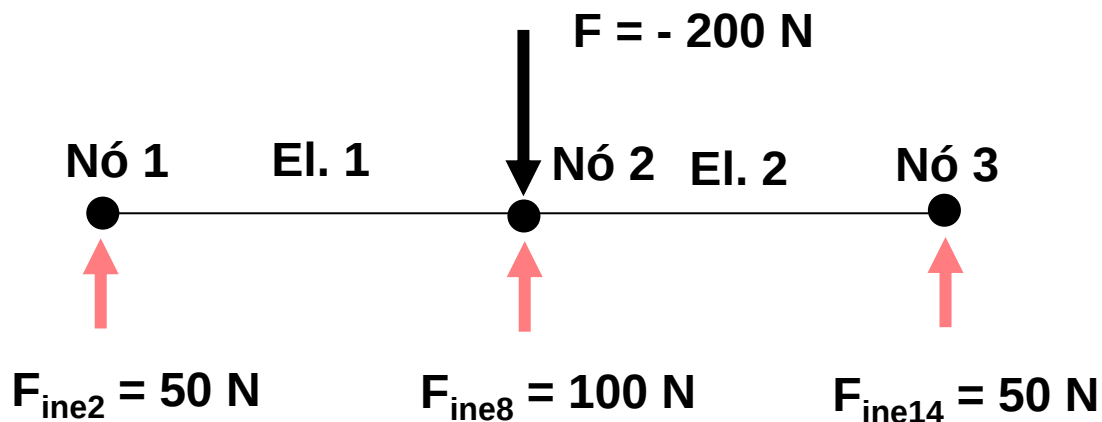
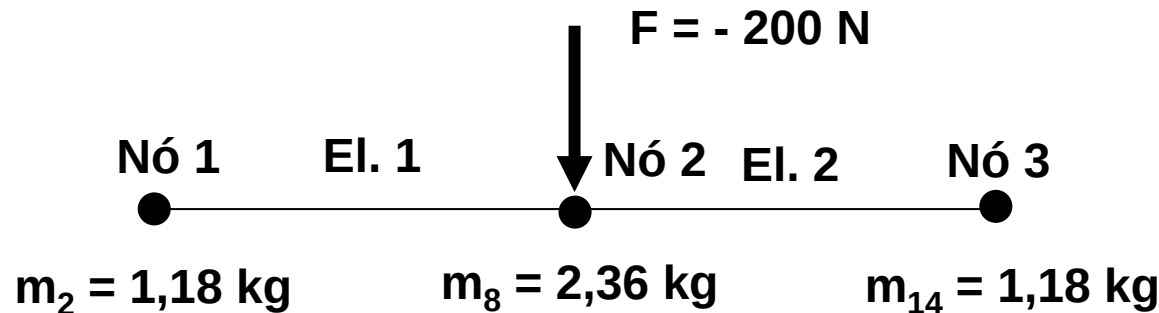
$A = 300 \text{ mm}^2$

$I = 22.500 \text{ mm}^4$





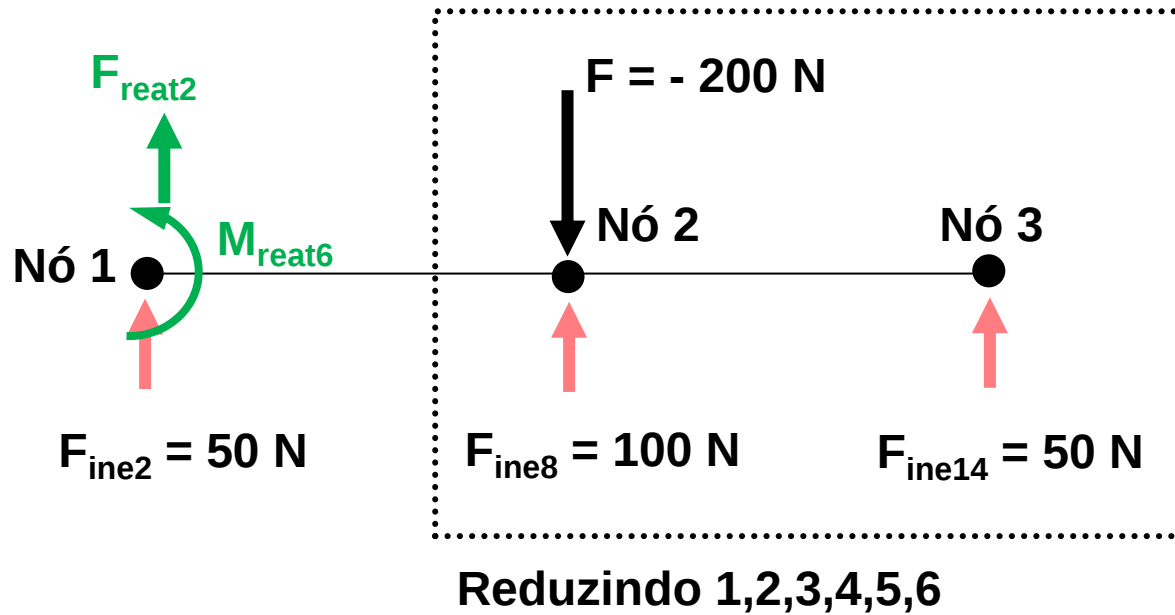
$$M = (10 \times 30 \times 2000 \times 7,85 \times 10^{-6}) = 4,71 \text{ kg}$$
$$a_{\text{inercial}} = - (-200 / 4,71) = 42,46 \text{ m/s}^2 (\sim 4,3 \text{ g})$$



$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M \frac{y}{2}}{I}$$
$$= \frac{50 \cdot 1000 \cdot \frac{30}{2}}{\frac{10(30)^3}{12}}$$
$$= 33,33 \text{ MPa}$$

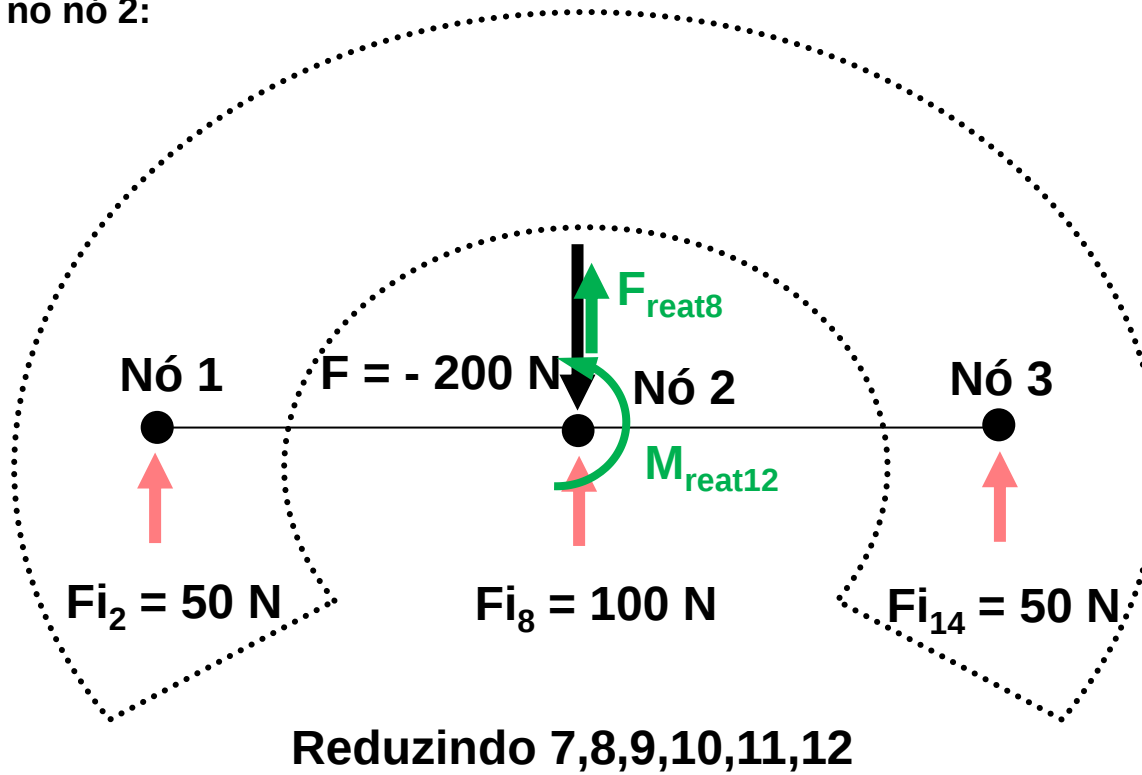


Suporte no nó 1:



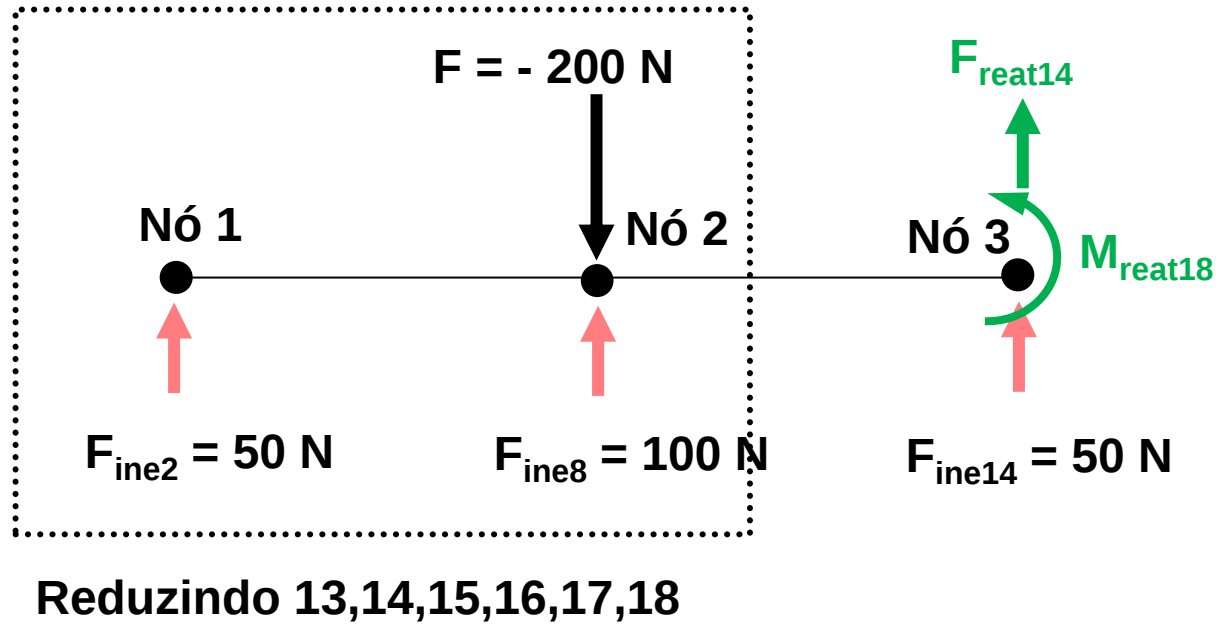


Suporte no nó 2:





Suporte no nó 3:





$$\{u\} = [K]^{-1}(\{F_{ext}\} - [M]\{\ddot{u}\})$$

$$\{F_{ext}\} = \{F_{ativas} + F_{reativas}\}$$

$$-[M]\{\ddot{u}\} = \{F_{inércia}\}$$

Onde $\{\ddot{u}\}$ é o campo de acelerações lineares e angulares que equilibra o carregamento ativo.

Para simplificar iremos escrever apenas para os graus de liberdade de real interesse que correspondem à flecha e à rotação da viga, isto é, g.l. 2, 6, 8, 12, 14 e 18.

Resolvendo para suporte no nó 1, graus de liberdade 2 e 6, aparecem esforços reativos nestes graus de liberdade:

$$\begin{bmatrix} k_{2,2} & k_{2,6} & k_{2,8} & k_{2,12} & 0 & 0 \\ & k_{6,6} & k_{6,8} & k_{6,12} & 0 & 0 \\ & & k_{8,8} & k_{8,12} & k_{8,14} & k_{8,18} \\ & & & k_{12,12} & k_{12,14} & k_{12,18} \\ & & & & k_{14,14} & k_{14,18} \\ & & & & & k_{18,18} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_6 \\ u_8 \\ u_{12} \\ u_{14} \\ u_{18} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{atv2} + F_{reat2} + F_{ine2} \\ M_{atv6} + M_{reat6} + M_{ine6} \\ F_{atv8} + F_{ine8} \\ M_{atv12} + M_{ine12} \\ F_{atv14} + F_{ine14} \\ M_{atv18} + M_{ine18} \end{Bmatrix}$$



Com o suporte no nó 1, temos $u_2 = 0$ e $u_6 = 0$.

Como o carregamento ativo está 100% equilibrado pelas forças de inércia, os esforços reativos são na verdade nulos, isto é, $F_{reat2} = 0$ e $M_{reat6} = 0$.

$$\begin{bmatrix} k_{2,2} & k_{2,6} & k_{2,8} & k_{2,12} & 0 & 0 \\ & k_{6,6} & k_{6,8} & k_{6,12} & 0 & 0 \\ & & k_{8,8} & k_{8,12} & k_{8,14} & k_{8,18} \\ & & & k_{12,12} & k_{12,14} & k_{12,18} \\ & & & & k_{14,14} & k_{14,18} \\ & & & & & k_{18,18} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_8 \\ u_{12} \\ u_{14} \\ u_{18} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{atv2} + 0 + F_{ine2} \\ M_{atv6} + 0 + M_{ine6} \\ F_{atv8} + F_{ine8} \\ M_{atv12} + M_{ine12} \\ F_{atv14} + F_{ine14} \\ M_{atv18} + M_{ine18} \end{Bmatrix}$$

Podemos então reduzir as linhas e colunas 2 e 6:

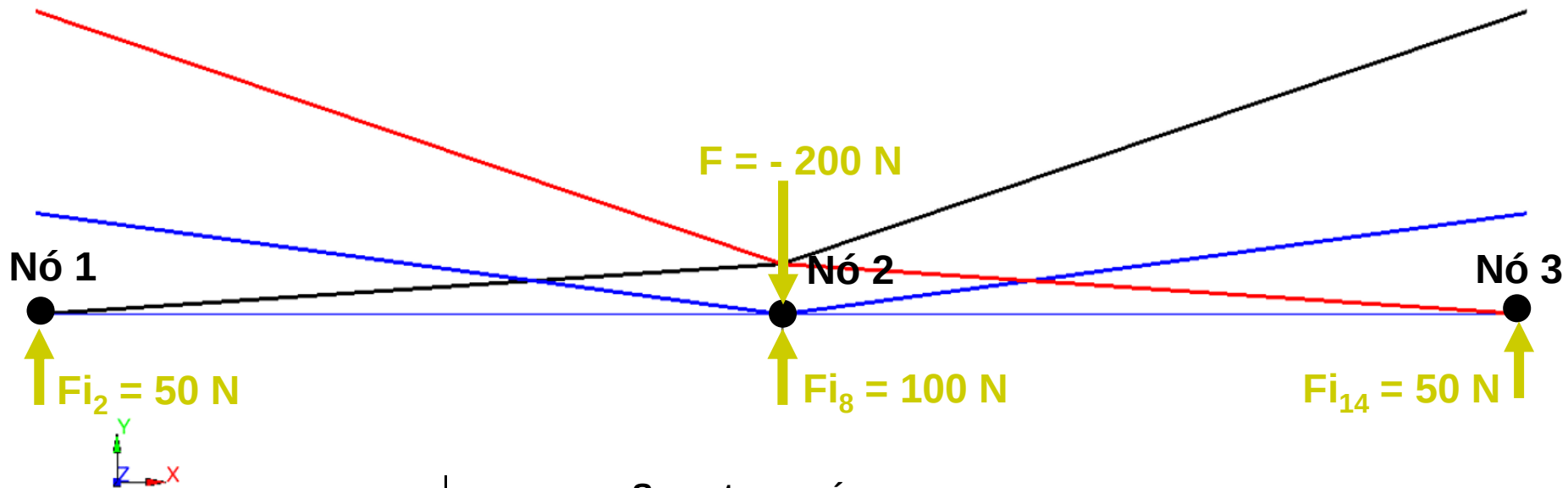
$$\begin{bmatrix} k_{2,2} & k_{2,6} & k_{2,8} & k_{2,12} & 0 & 0 \\ & k_{6,6} & k_{6,8} & k_{6,12} & 0 & 0 \\ & & k_{8,8} & k_{8,12} & k_{8,14} & k_{8,18} \\ & & & k_{12,12} & k_{12,14} & k_{12,18} \\ & & & & k_{14,14} & k_{14,18} \\ & & & & & k_{18,18} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_8 \\ u_{12} \\ u_{14} \\ u_{18} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{atv2} + 0 + F_{ine2} \\ M_{atv6} + 0 + M_{ine6} \\ F_{atv8} + F_{ine8} \\ M_{atv12} + M_{ine12} \\ F_{atv14} + F_{ine14} \\ M_{atv18} + M_{ine18} \end{Bmatrix}$$

**Problema reduzido:**

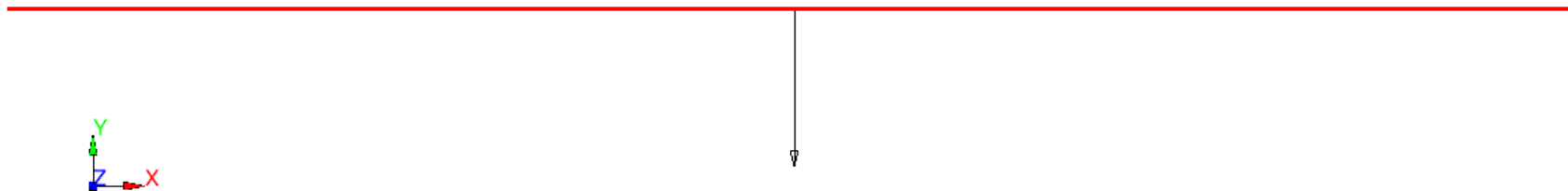
$$\begin{bmatrix} k_{8,8} & k_{8,12} & k_{8,14} & k_{8,18} \\ & k_{12,12} & k_{12,14} & k_{12,18} \\ & & k_{14,14} & k_{14,18} \\ & & & k_{18,18} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_8 \\ u_{12} \\ u_{14} \\ u_{18} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{atv8} + F_{ine8} \\ M_{atv12} + M_{ine12} \\ F_{atv14} + F_{ine14} \\ M_{atv18} + M_{ine18} \end{Bmatrix}$$

Agora temos a matriz de rigidez reduzida não singular admitindo inversa. Resolvendo então para os deslocamentos:

$$\begin{Bmatrix} u_8 \\ u_{12} \\ u_{14} \\ u_{18} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{8,8} & k_{8,12} & k_{8,14} & k_{8,18} \\ & k_{12,12} & k_{12,14} & k_{12,18} \\ & & k_{14,14} & k_{14,18} \\ & & & k_{18,18} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_{atv8} + F_{ine8} \\ M_{atv12} + M_{ine12} \\ F_{atv14} + F_{ine14} \\ M_{atv18} + M_{ine18} \end{Bmatrix}$$



	Suporte no nó:			
	1	2	3	
u2	0.0	3.53	10.58	[mm]
u6	0.0	-0.00529	-0.01058	[rad]
u8	1.76	0.0	1.76	[mm]
u12	0.00529	0.0	-0.00529	[rad]
u14	10.58	3.53	0.0	[mm]
u18	0.01058	0.00529	0.0	[rad]
$\sigma_{\max}$	33.33	33.33	33.33	[MPa]





Arquivo de entrada de dados para o software de Elementos finitos Nastran:

Suporte no nó 1.

```
$  
ID LINEAR,INERTIA  
SOL 101  
TIME 5  
CEND  
TITLE = BAR WITH SUPORT ENTRY  
LOAD = 1  
DISP = ALL  
SPCF = ALL  
STRESS = ALL  
BEGIN BULK  
PARAM,POST,-1  
$
```

Suporte no nó 1



```
SUPORT,1,123456  
PARAM,GRDPNT,1
```

Comando que ativa o método Inertia Relief



```
PARAM,INREL,-1
```

Definição das coordenadas dos nós



```
$  
GRID,1,0,0.0,0.0,0.0  
GRID,2,0,1000.,0.0,0.0  
GRID,3,0,2000.,0.0,0.0  
$
```

Definição dos elementos de viga



```
$  
CBEAM,1,1,1,2,1.,1.,0.0  
CBEAM,2,1,2,3,1.,1.,0.0
```

Definição das propriedades dos elementos de viga



```
$  
PBEAM,1,1,300.,22500.,2500.,,,15.,5.,  
$
```

Definição do carregamento externo



```
$  
FORCE,1,2,,-200.,,1.  
$
```

Definição de propriedades mecânicas de materiais



```
$  
MAT1,1,210000.,,3,7.85E-6  
ENDDATA
```

**Extrato do arquivo texto de resultados para suporte no nó 1:**

DIRECTION					
MASS AXIS SYSTEM (S)	MASS	X-C.G.	Y-C.G.	Z-C.G.	
X	4.710000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	
Y	4.710000E+00	1.000000E+03	0.000000E+00	0.000000E+00	
Z	4.710000E+00	1.000000E+03	0.000000E+00	0.000000E+00	

Massa total e posição do CG.

INTERMEDIATE MATRIX ... URA

		COLUMN	1		
0.000000E+00	-4.246284E+01	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	-2.471663E-17

Aceleração inercial que equilibra o carregamento ativo.

D I S P L A C E M E N T V E C T O R

POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	G	0.0	1.761605E+00	0.0	0.0	0.0	5.291005E-03
3	G	0.0	1.058201E+01	0.0	0.0	0.0	1.058201E-02

BAR WITH SUPORT ENTRY SEPTEMBER 26, 2011 MSC.NASTRAN 6/20/08

Deslocamentos com suporte no nó 1.

F O R C E S O F S I N G L E - P O I N T C O N S T R A I N T

POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	G	0.0	2.569322E-14	0.0	0.0	0.0	0.0

BAR WITH SUPORT ENTRY SEPTEMBER 26, 2011 MSC.NASTRAN 6/20/08

Esforços de reação do suporte – comprovação de que são nulos.

BAR WITH SUPORT ENTRY SEPTEMBER 26, 2011 MSC.NASTRAN 6/20/08

S T R E S S E S I N B E A M E L E M E N T S (C B E A M)

ELEMENT-ID	GRID	STAT DIST/ LENGTH	SXC	SXD	SXE	SXF	S-MAX	S-MIN
1	1	0.000	1.455192E-14	0.0	0.0	0.0	1.455192E-14	0.0
2	2	1.000	-3.333333E+01	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.333333E+01
3	2	0.000	-3.333333E+01	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.333333E+01
3	3	1.000	3.880511E-14	0.0	0.0	0.0	3.880511E-14	0.0

BAR WITH SUPORT ENTRY SEPTEMBER 26, 2011 MSC.NASTRAN 6/20/08

Resultado de tensões nos elementos.

**Extrato do arquivo texto de resultados para suporte no nó 2:**

DIRECTION					
MASS AXIS SYSTEM (S)	MASS	X-C.G.	Y-C.G.	Z-C.G.	
X	4.710000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	
Y	4.710000E+00	1.000000E+03	0.000000E+00	0.000000E+00	
Z	4.710000E+00	1.000000E+03	0.000000E+00	0.000000E+00	

Massa total e posição do CG.

INTERMEDIATE MATRIX ... URA

		COLUMN	1		
0.000000E+00	-4.246284E+01	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	-1.639904E-17

Aceleração inercial que equilibra o carregamento ativo.

D I S P L A C E M E N T V E C T O R

POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	G	0.0	3.529400E+00	0.0	0.0	0.0	-5.291005E-03
2	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	G	0.0	3.529400E+00	0.0	0.0	0.0	5.291005E-03

BAR WITH SUPORT ENTRY SEPTEMBER 26, 2011 MSC.NASTRAN 6/20/08

Deslocamentos com suporte no nó 2.

F O R C E S O F S I N G L E - P O I N T C O N S T R A I N T

POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
2	G	0.0	7.457419E-30	0.0	0.0	0.0	0.0

BAR WITH SUPORT ENTRY SEPTEMBER 26, 2011 MSC.NASTRAN 6/20/08

Esforços de reação do suporte – comprovação de que são nulos.

BAR WITH SUPORT ENTRY SEPTEMBER 26, 2011 MSC.NASTRAN 6/20/08

S T R E S S E S I N B E A M E L E M E N T S (C B E A M)

LEMENT-ID	GRID	STAT DIST/ LENGTH	SXC	SXD	SXE	SXF	S-MAX	S-MIN
-C								
1	1	0.000	4.850638E-15	0.0	0.0	0.0	4.850638E-15	0.0
	2	1.000	-3.333333E+01	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.333333E+01
2	2	0.000	-3.333333E+01	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.333333E+01
	3	1.000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

BAR WITH SUPORT ENTRY SEPTEMBER 26, 2011 MSC.NASTRAN 6/20/08

Resultado de tensões nos elementos.

**Extrato do arquivo texto de resultados para suporte no nó 3:**

DIRECTION					
MASS AXIS SYSTEM (S)	MASS	X-C.G.	Y-C.G.	Z-C.G.	
X	4.710000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	
Y	4.710000E+00	1.000000E+03	0.000000E+00	0.000000E+00	
Z	4.710000E+00	1.000000E+03	0.000000E+00	0.000000E+00	

Massa total e posição do CG.

INTERMEDIATE MATRIX ... URA

0.000000E+00	-4.246284E+01	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	8.238877E-18
--------------	---------------	--------------	--------------	--------------	--------------

Aceleração inercial que equilibra o carregamento ativo.

D I S P L A C E M E N T V E C T O R

POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	G	0.0	1.058201E+01	0.0	0.0	0.0	-1.058201E-02
2	G	0.0	1.761605E+00	0.0	0.0	0.0	-5.291005E-03
3	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

BAR WITH SUPORT ENTRY SEPTEMBER 26, 2011 MSC.NASTRAN 6/20/08

Deslocamentos com suporte no nó 3.

F O R C E S O F S I N G L E - P O I N T C O N S T R A I N T

POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
3	G	0.0	1.803831E-14	0.0	0.0	0.0	0.0

BAR WITH SUPORT ENTRY SEPTEMBER 26, 2011 MSC.NASTRAN 6/20/08

Esforços de reação do suporte – comprovação de que são nulos.

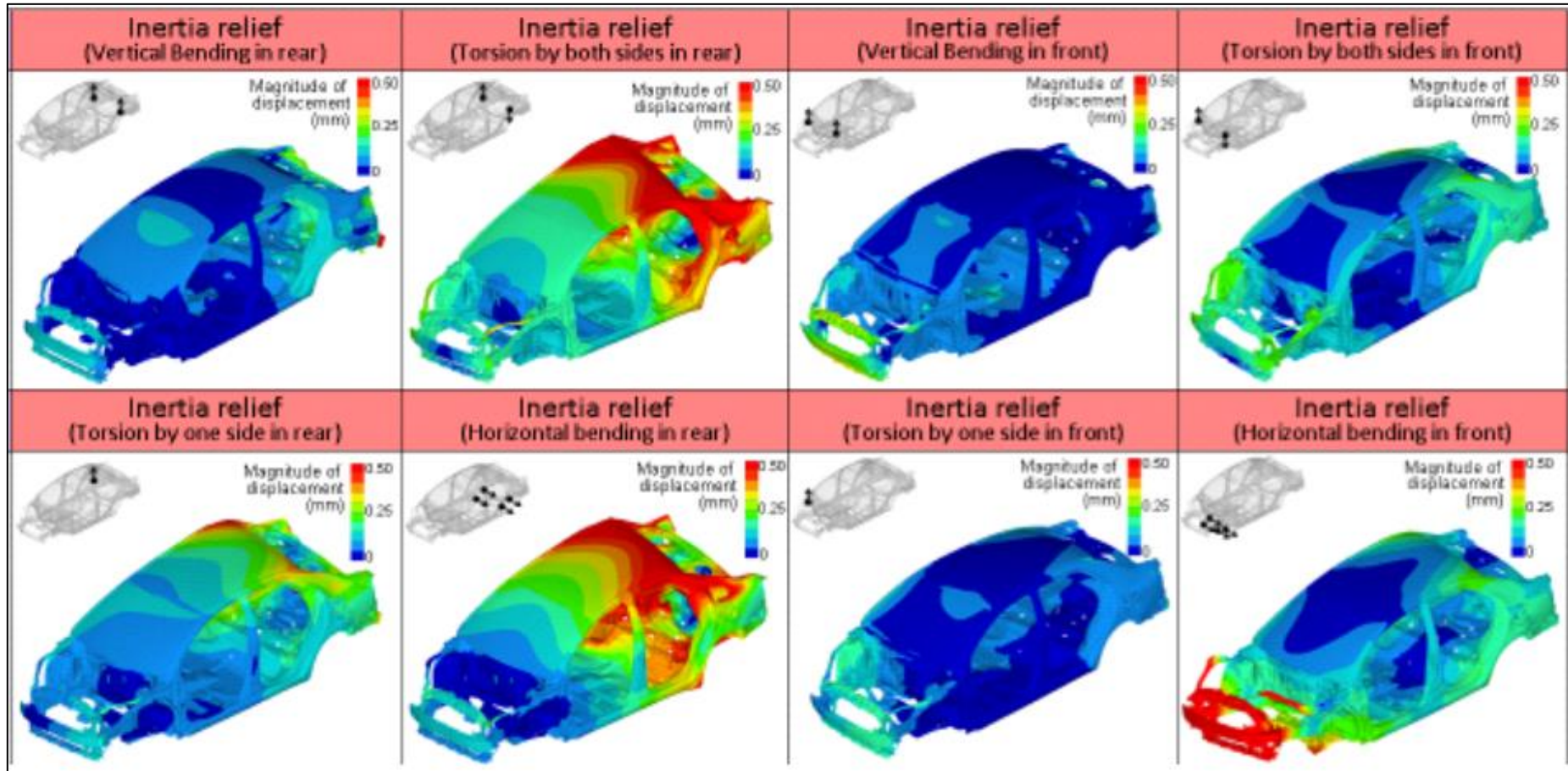
BAR WITH SUPORT ENTRY SEPTEMBER 26, 2011 MSC.NASTRAN 6/20/08

S T R E S S E S I N B E A M E L E M E N T S (C B E A M)

ELEMENT-ID	GRID	STAT DIST/ LENGTH	SXC	SXD	SXE	SXF	S-MAX	S-MIN
1	1	0.000	1.940255E-14	0.0	0.0	0.0	1.940255E-14	0.0
	2	1.000	-3.333333E+01	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.333333E+01
2	2	0.000	-3.333333E+01	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.333333E+01
	3	1.000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

BAR WITH SUPORT ENTRY SEPTEMBER 26, 2011 MSC.NASTRAN 6/20/08

Resultado de tensões nos elementos.



A study of optimization for automotive parts and structures by using inertia relief
Takanobu Saito, Jiro Hiramoto, Toshiaki Urabe
JFE Steel Corporation, Chiba, Japan
11th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization 1074_paper
07th -12th, June 2015, Sydney Australia



FIM 07