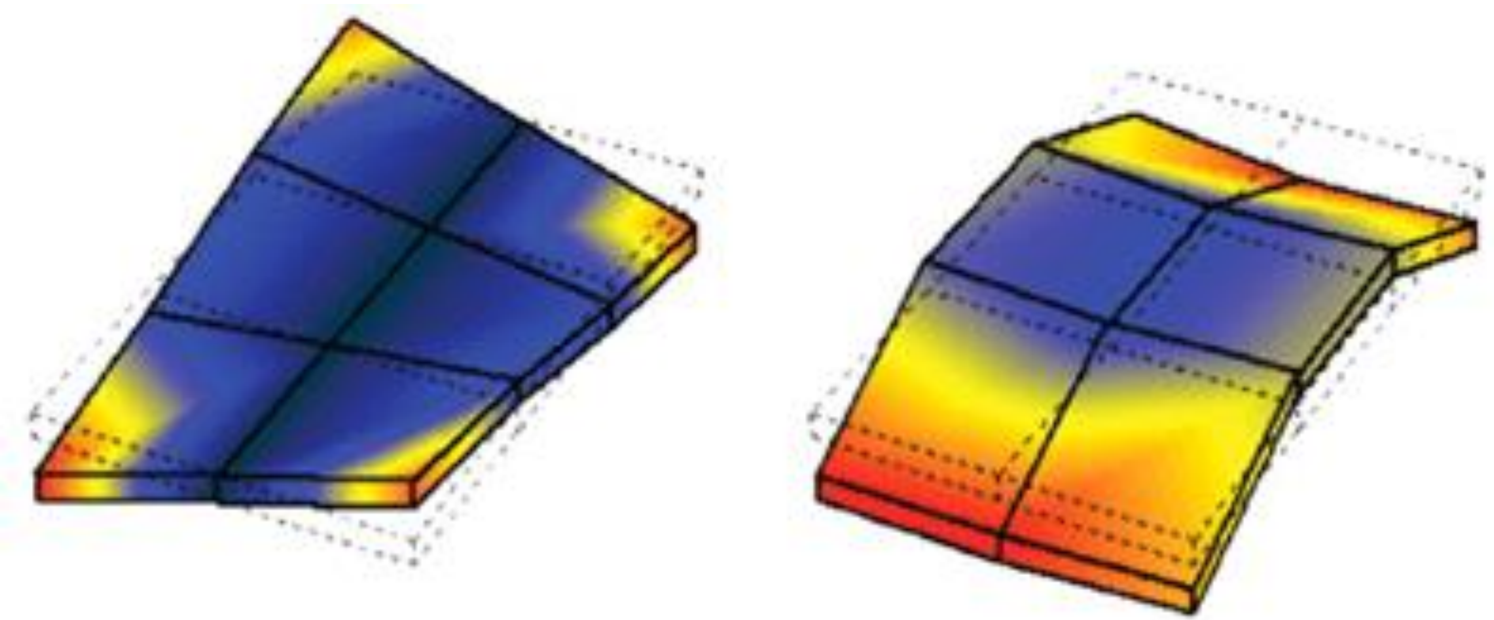
PME 3543
Estruturas Mecânicas e de Veículos
Notas de Aula
Prof. Leandro V. da S. Macedo

06
Análise Modal
&
Método da Superposição Modal

Análise Modal
e
Método de Superposição modal

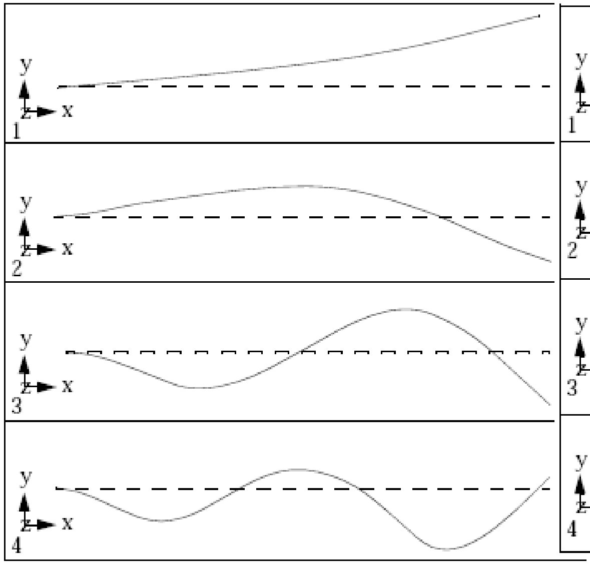


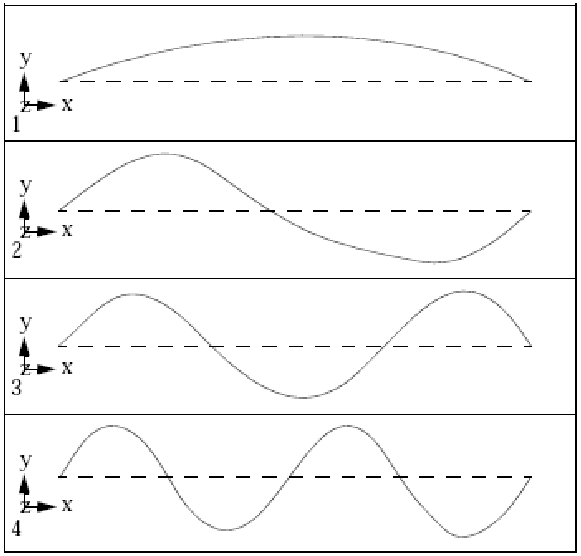
Frequências e modos naturais de vibrar de uma estrutura

São as frequências e correspondentes formas nas quais a estrutura naturalmente tenderá a vibrar quando submetida a uma perturbação. Cada modo está associado a uma frequência.

As frequências naturais e correspondentes modos de vibrar da estrutura são função de sua rigidez, distribuição de massa e condições de contorno.

Caso alguma propriedade que defina a rigidez da estrutura mude, as frequências irão mudar mas não necessariamente os modos, como é o caso por exemplo quando apenas se altera o módulo de elasticidade do material. Caso mude apenas a densidade do material, sem alteração da distribuição de massa, as frequências irão mudar, mas não os modos. Caso a distribuição de massa ou de rigidez se alterem, é esperado então que tanto as frequências quanto os modos poderão se alterar também.





Análise Modal

É a obtenção das frequências e modos naturais de vibrar de uma estrutura.

A importância então de se obter as frequências e modos naturais de vibrar de uma estrutura é porque a resposta dinâmica da mesma está determinada por estas características.

Uma primeira indicação sobre o efeito de mudanças no projeto da estrutura com o objetivo de se melhorar a resposta dinâmica pode ser obtida realizando-se uma análise modal.

Adicionalmente, as frequências e modos obtidos da análise modal podem ser utilizados para em seguida obter-se uma resposta dinâmica da estrutura, seja uma resposta na forma de histórico no tempo pelo método de superposição modal, seja uma resposta em frequência.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\}$$

Admitindo uma solução harmônica da forma:

$$\{u\} = \{\varphi\} \sin \omega\, t \qquad \{\ddot{u}\} = -\omega^2 \{\varphi\} \sin \omega\, t$$

$$-\omega^2 [M]\{\varphi\} \sin \omega\, t + [K]\{\varphi\} \sin \omega\, t = \{0\}$$

Chega-se no problema de autovalores e autovetores de uma transformação linear:

$$([K] - \omega^2 [M])\{\varphi\} = \{0\} \qquad [K]\{\varphi\} = \omega^2 [M]\{\varphi\}$$

Onde: ω^2 **É um autovalor, correspondendo ao quadrado da frequência circular da resposta harmônica do sistema.**

$\{\varphi\}$ **É o autovetor correspondente, que descreve a forma do movimento vibratório harmônico.**

Lembrando que o autoproblema pode ser satisfeito por um conjunto de diferentes autovalores e seus correspondentes autovetores, obtendo-se assim:

$[\Omega^2]$ **Matriz espectral do sistema do sistema (é diagonal).**

$[\Phi]$ **Matriz modal do sistema.**

Solução do autoproblema: $([K]-\omega^2[M])\{\varphi\}=\{0\}$

Havendo movimento, deve-se ter: $\{\varphi\}\neq\{0\}$

Assim: $([K]-\omega^2[M])=[0]$

E então: $\det([K]-\omega^2[M])=0$

Sendo a matriz de ordem (n x n) o determinante será um polinômio de grau "n" em ω^2.
Resolvendo este polinômio obtém-se os "n" autovalores.
Substituindo cada autovalor no sistema de equações lineares do autoproblema, obtém-se os "n" autovetores correspondentes.
Cada autovetor define apenas uma direção no espaço "n" dimensional (ou, no caso da análise de estruturas, melhor dizer que define uma forma referente aos "n" graus de liberdade da estrutura no espaço tridimensional). Assim esta forma pode ser escalonada, assumindo cada grau de liberdade um valor qualquer mas respeitando a proporção entre eles de maneira que a forma, o modo, seja respeitado.
Cada autovetor pode então ser normalizado de alguma forma, para dar um vetor unitário por exemplo, ou então ortonormalizado, isto é normalizado em relação à matriz de massa com as seguinte definição. A matriz modal ortonormalizada é definida como sendo:

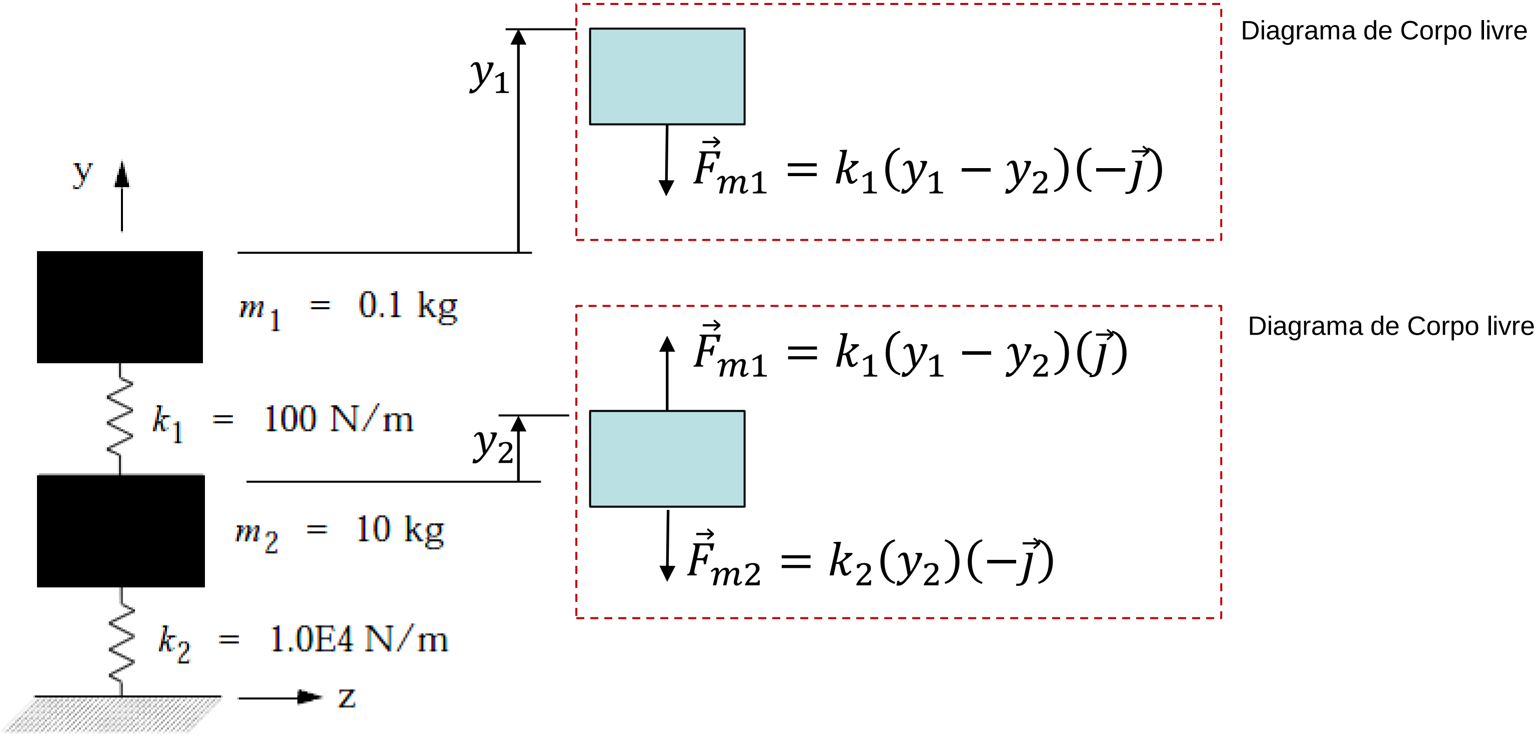
$$[\Phi]^T[M][\Phi]=[I]$$

A matriz modal ortonormalizada tem ainda a seguinte propriedade: $[\Phi]^T[K][\Phi]=[\Omega^2]$

Propriedades dos autovalores e autovetores

- **Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes, isto é, são ortogonais entre si (um qualquer autovetor não pode ser obtido por combinação linear dos demais).**
- **Autovalores de uma matriz triangular são os seus elementos da diagonal.**
- **Deriva daí que os autovalores de uma matriz diagonal são os elementos da diagonal.**
- **Autovalores de matrizes simétricas reais são reais.**

Exemplo: Análise modal



Equações de equilíbrio dinâmico:

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 = -k_1(y_1 - y_2) \\ m_2\ddot{y}_2 = k_1(y_1 - y_2) - k_2 y_2 \end{cases}$$

Colocando na forma matricial:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Exemplo: Análise modal (continuação)

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 10100 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 100 - 0{,}1\omega^2 & -100 \\ -100 & 10100 - 10\omega^2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(100 - 0{,}1\omega^2) \cdot (10100 - 10\omega^2) - (-100) \cdot (-100) = 0$$

$$1010000 - 1000\omega^2 - 1010\omega^2 + \omega^4 - 10000 = 0$$

$$\omega^4 - 2010\omega^2 + 1000000 = 0$$

$$\omega_1^2 = 904{,}875 \qquad \omega_1 = 30{,}08 rad/s \qquad f_1 = 4{,}79 Hz$$

$$\omega_2^2 = 1105{,}125 \qquad \omega_2 = 33{,}24 rad/s \qquad f_2 = 5{,}29 Hz$$

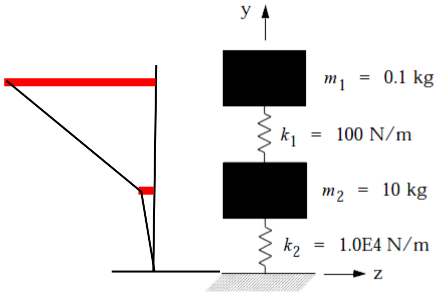
Exemplo: Análise modal (continuação)

$$([K]-\omega^2[M])\{\varphi\}=\{0\} \qquad \begin{bmatrix} 100-0{,}1\omega^2 & -100 \\ -100 & 10100-10\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} (100-0{,}1\omega^2)\varphi_1-100\varphi_2 \\ -100\varphi_1+(10100-10\omega^2)\varphi_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

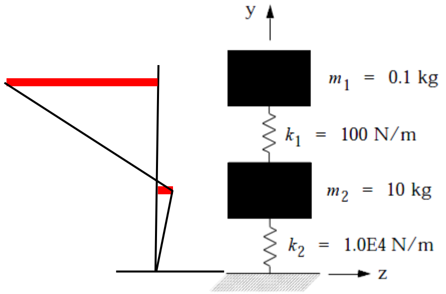
$$\omega_1^2=904{,}875 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 9{,}51\varphi_{11}-100\varphi_{12}=0 \\ -100\varphi_{11}+1051{,}25\varphi_{12}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{11}=10{,}51\varphi_{12} \\ \varphi_{11}=10{,}51\varphi_{12} \end{cases}$$



$$\omega_2^2=1105{,}125 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -10{,}5125\varphi_{21}-100\varphi_{22}=0 \\ -100\varphi_{21}-951{,}25\varphi_{22}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{21}=-9{,}5125\varphi_{22} \\ \varphi_{21}=-9{,}5125\varphi_{22} \end{cases}$$



Exemplo: Análise modal (continuação)

Matriz espectral do sistema do sistema:

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[\Omega^2] = \begin{bmatrix} 904{,}875 & 0 \\ 0 & 1105{,}125 \end{bmatrix}}$$

Matriz modal do sistema

$$[\Phi] = [\{\varphi_1\} \quad \{\varphi_2\}] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[\Phi] = \begin{bmatrix} 10{,}51 & -9{,}51 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Matriz modal normalizada (vetores de módulo unitário)

$$\boxed{[\Phi] = \begin{bmatrix} 0{,}995 & -0{,}999 \\ 0{,}095 & 0{,}105 \end{bmatrix}}$$

<u>Tarefa</u>:
Obtenha a matriz modal normalizada mostrada ao lado.

Matriz modal ortonormalizada (normalizada em relação à matriz de massa)

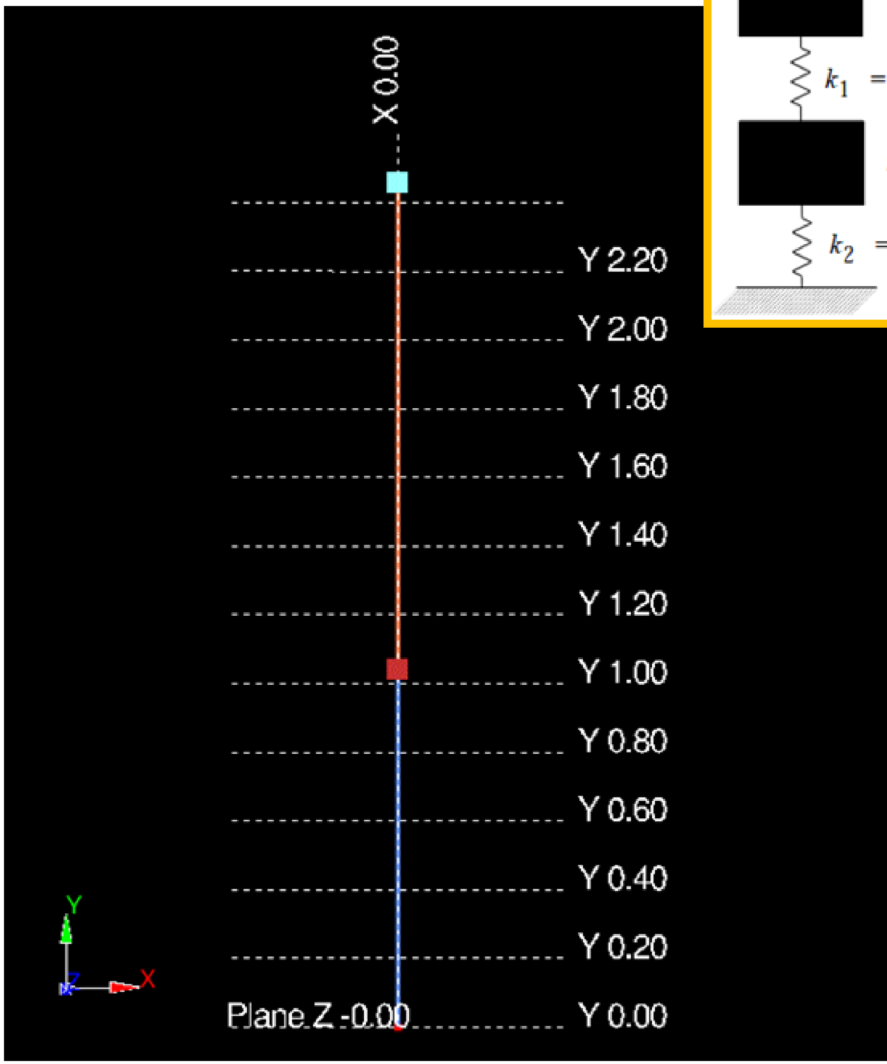
$$\boxed{[\Phi] = \begin{bmatrix} 2{,}291 & -2{,}179 \\ 0{,}218 & 0{,}229 \end{bmatrix}}$$

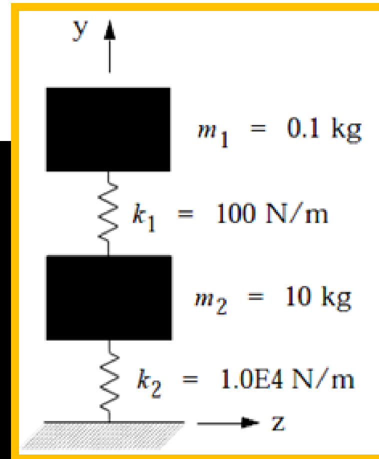
<u>Tarefa</u>:
Obtenha a matriz modal ortonormalizada mostrada ao lado satisfazendo $[\Phi]^T[M][\Phi] = [I]$

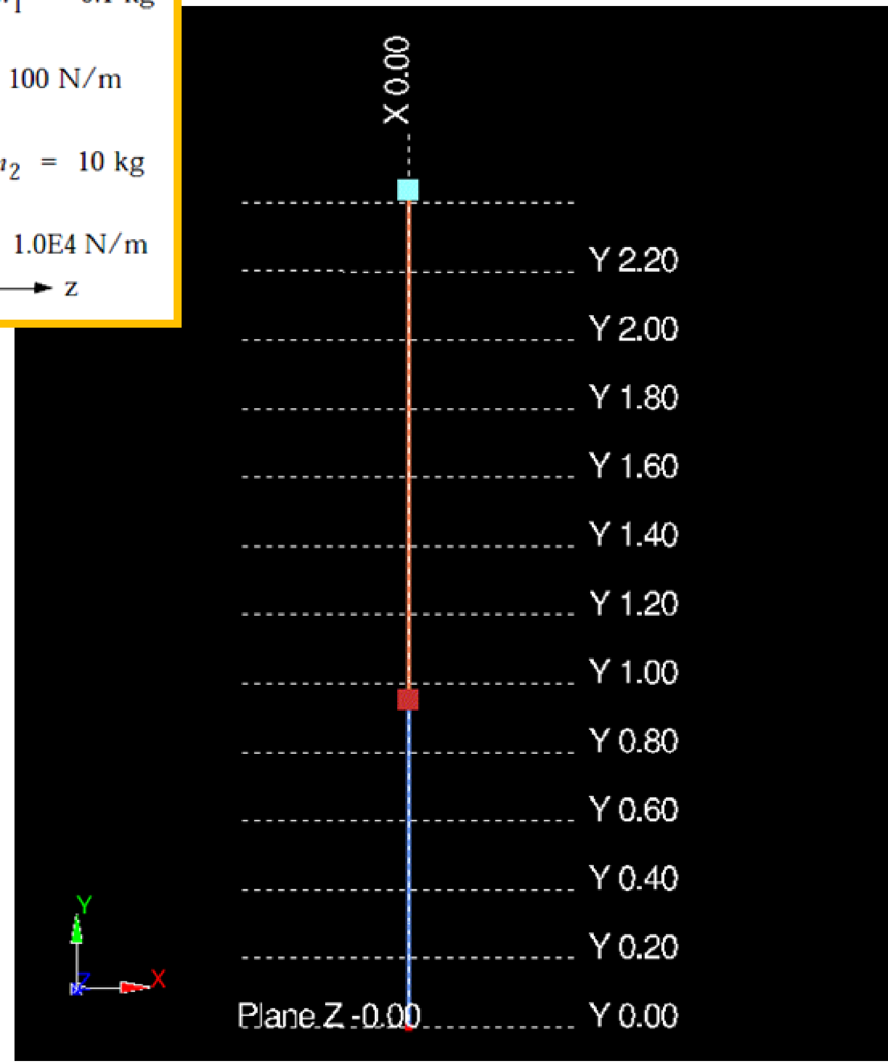
Tarefa:
Verifique que a matriz ortonormalizada também satisfaz: $[\Phi]^T[K][\Phi] = [\Omega^2]$

1º modo $f_1 = 4{,}79\,Hz$

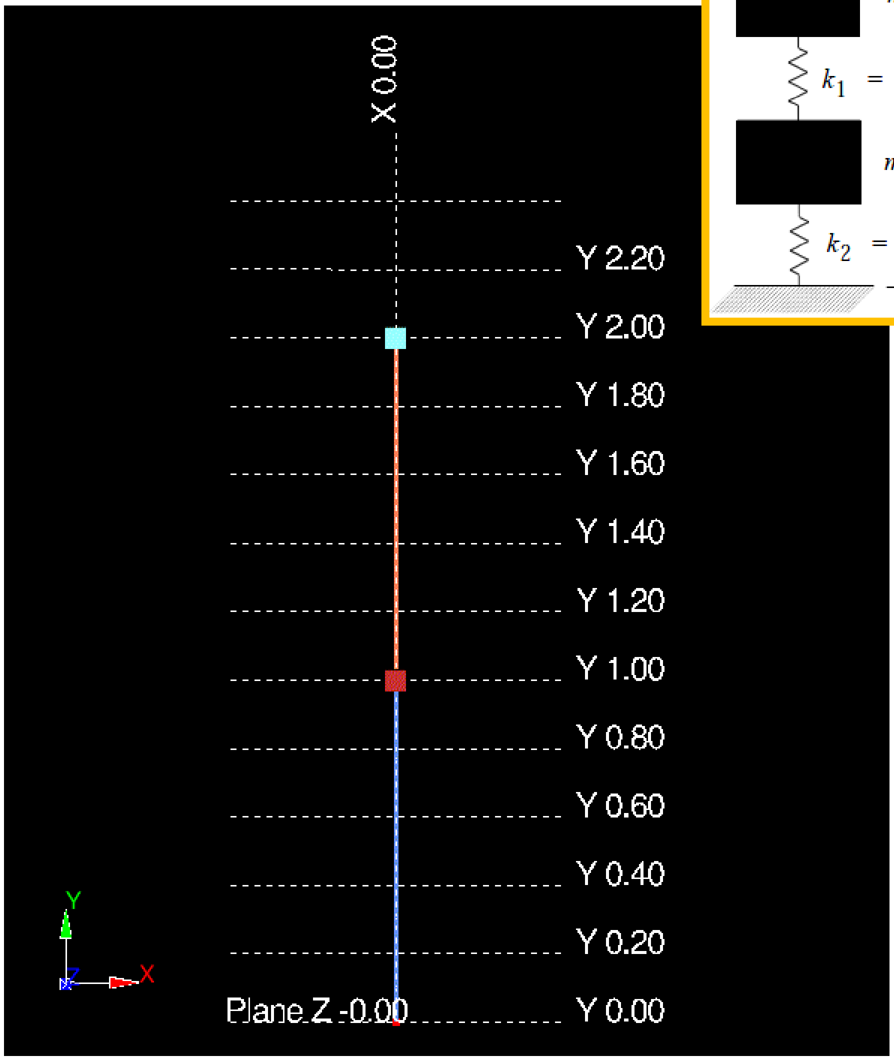
$f_2 = 5{,}29\,Hz$ **2º modo**

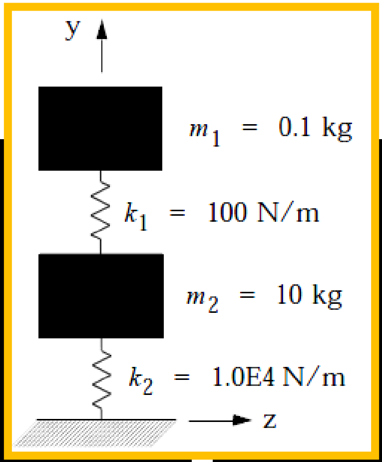




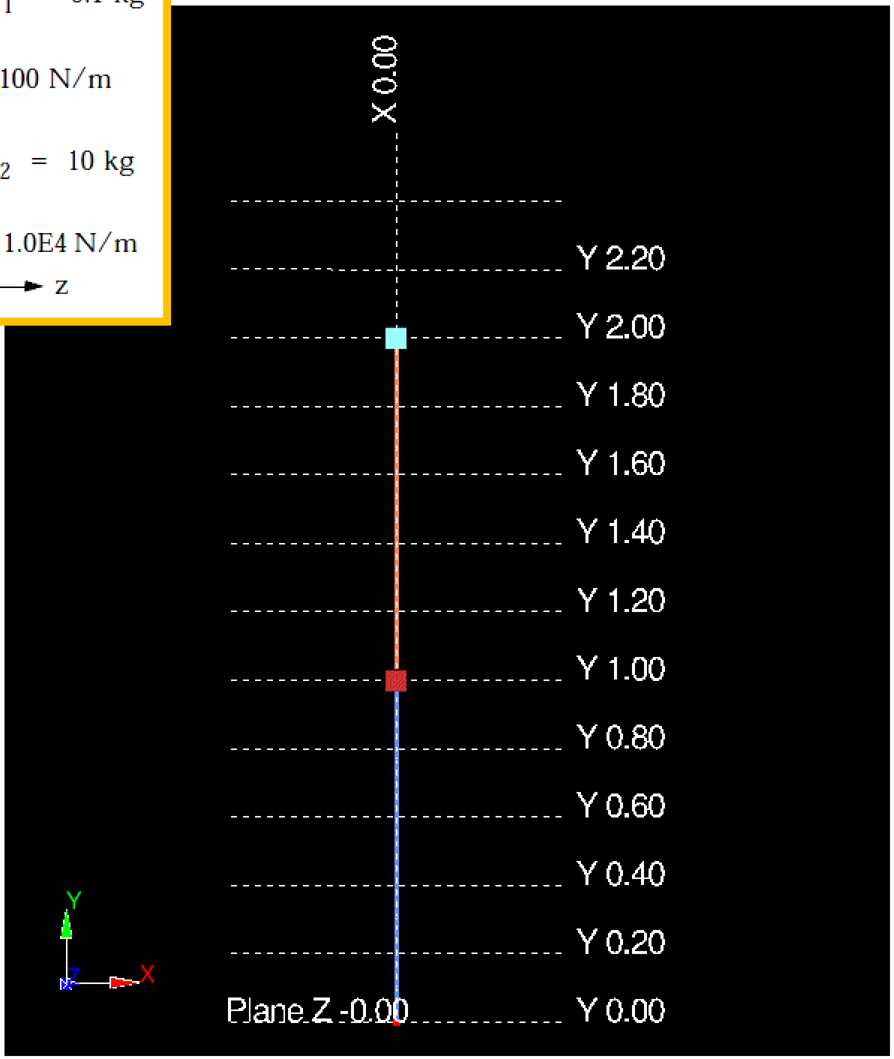


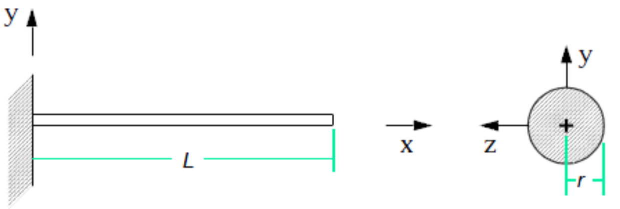
1º modo $f_1 = 4{,}79\,Hz$





$f_2 = 5{,}29\,Hz$ **2º modo**



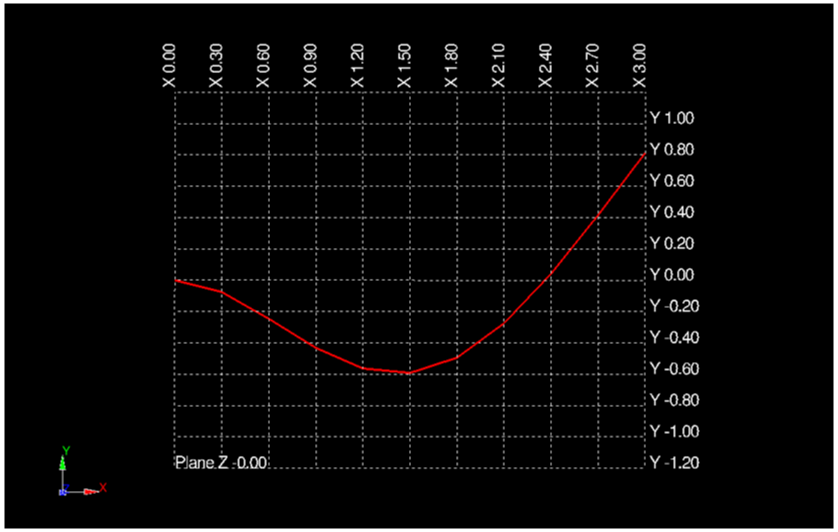


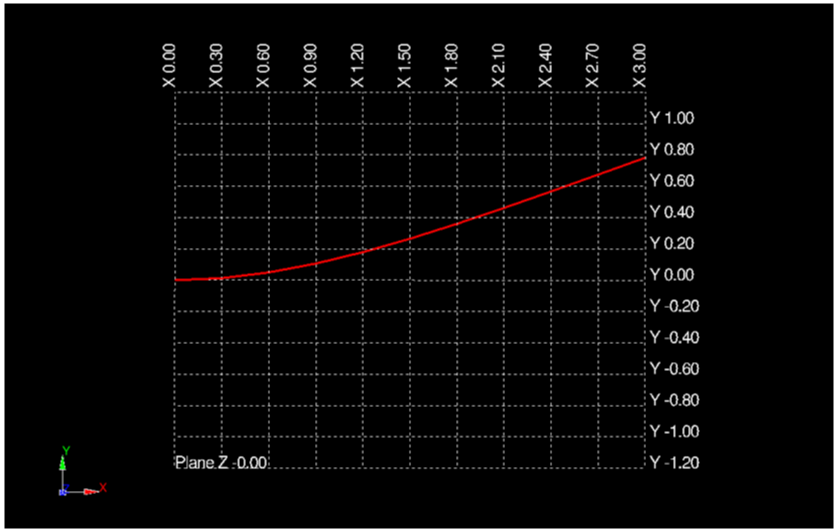
$L = 3.0$ m $\quad r = 0.014$ m $\quad J = 6.0\text{E-}8\ \text{m}^4$

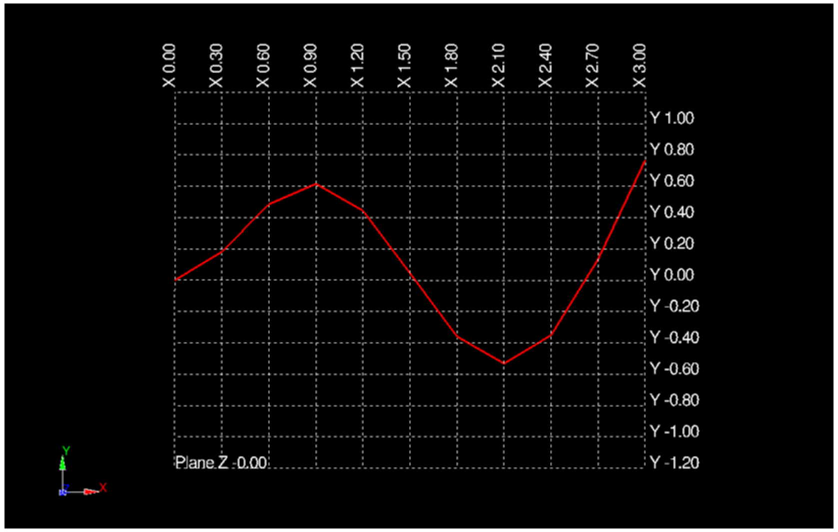
$A = 6.158\text{E-}4\ \text{m}^2 \quad I1 = I2 = 3.0\text{E-}8\ \text{m}^4 \quad \rho_w = 2.65\text{E}4\ \text{N/m}^3$

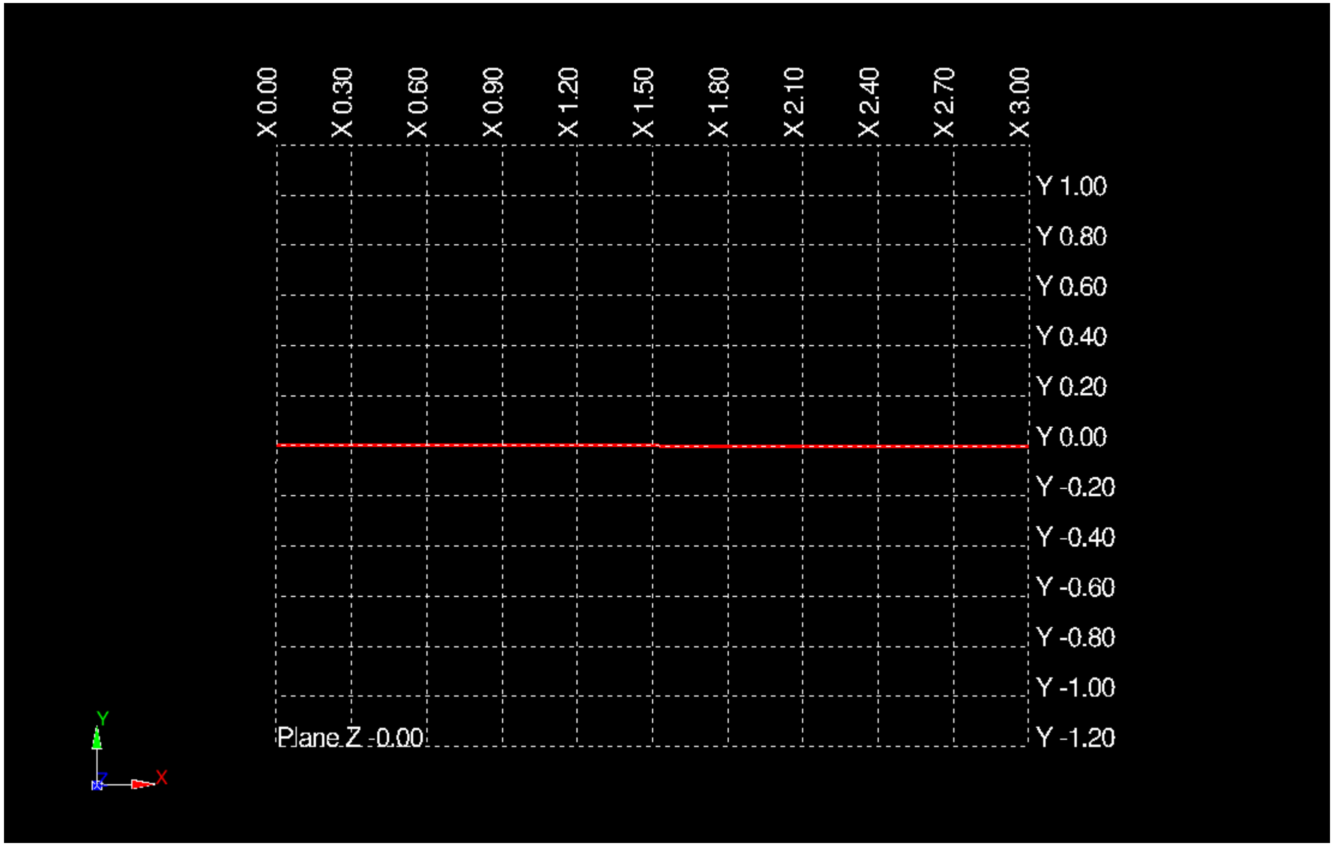
$E = 7.1\text{E}10\ \text{N/m}^2 \quad \nu = 0.33$

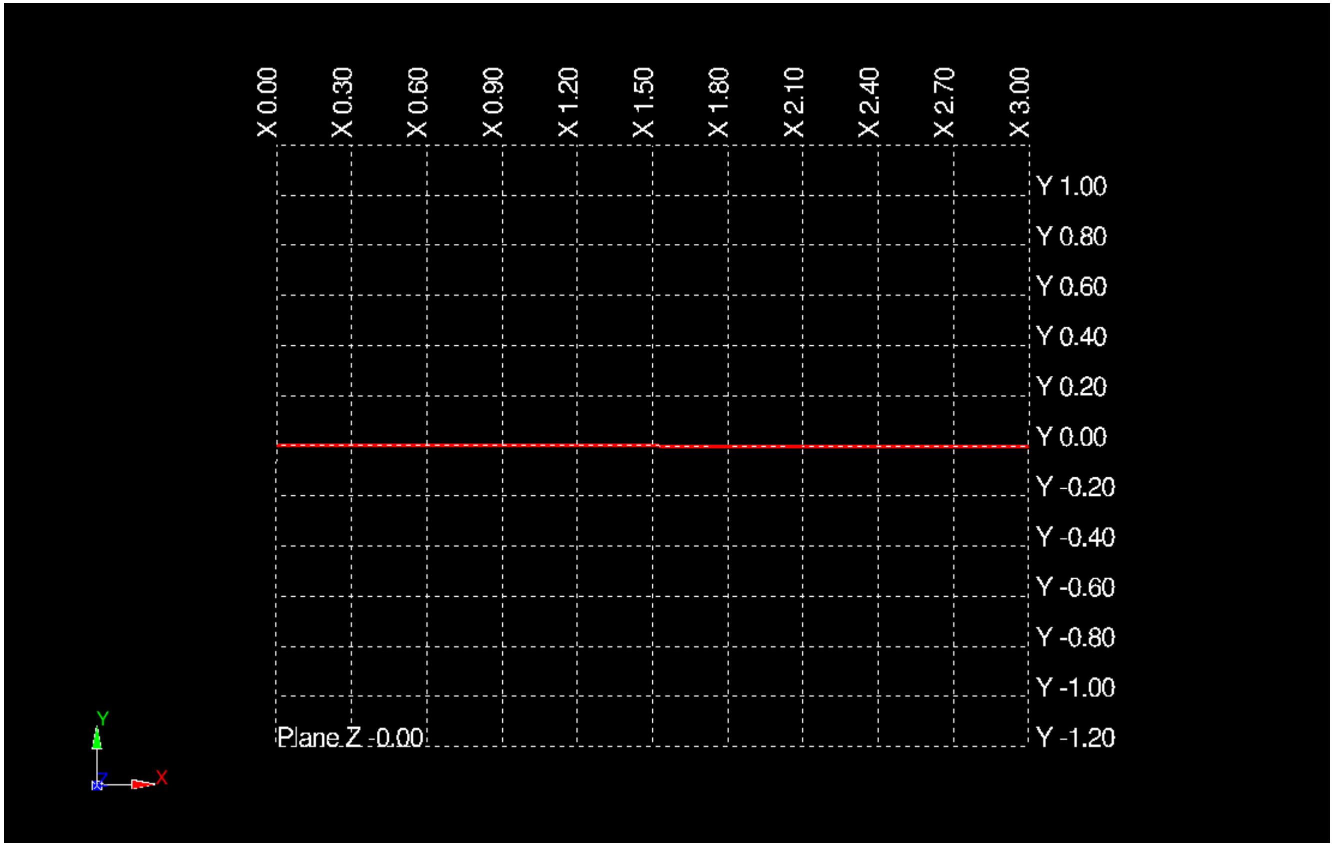
Nonstructural Weight $= 2.414$ N/m

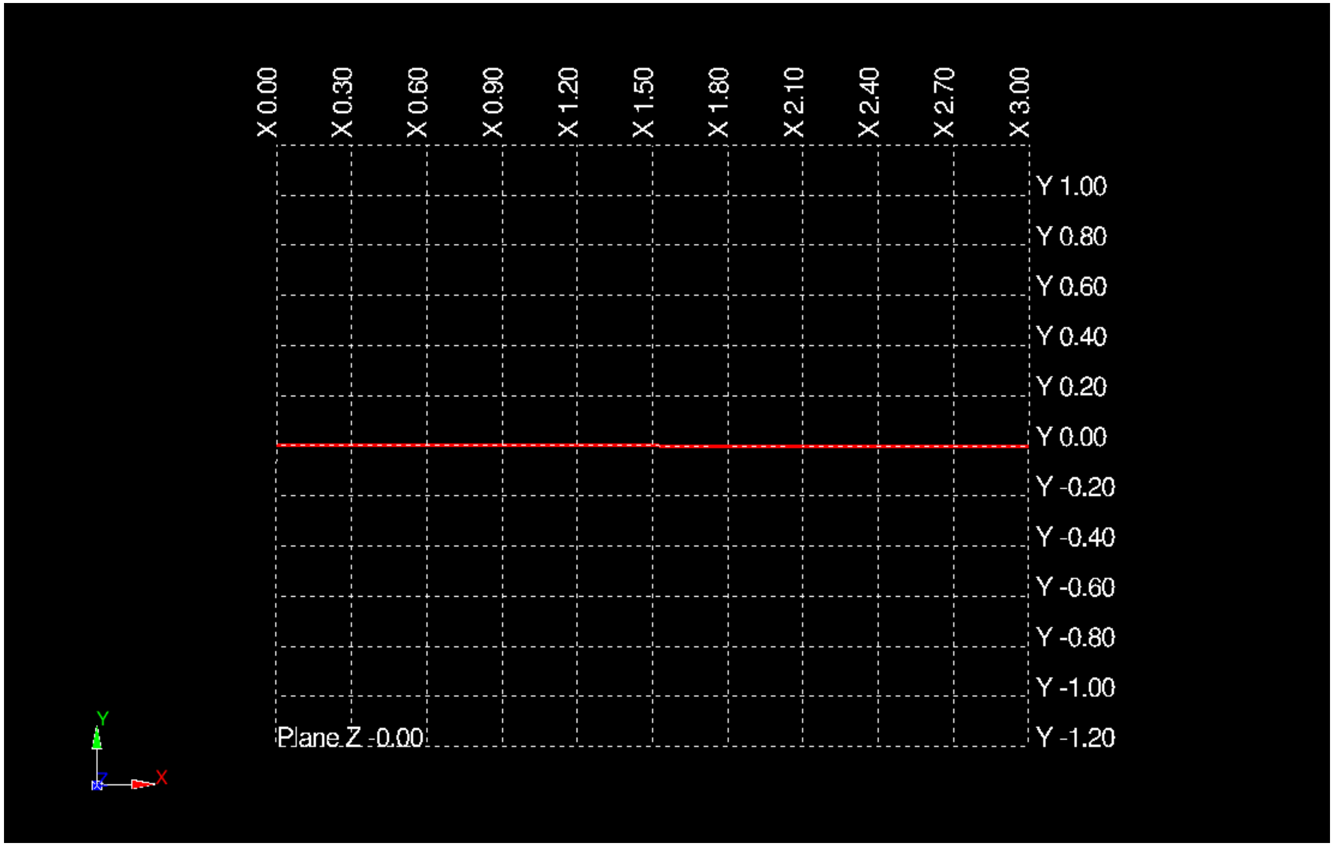







X 0.00
X 0.30
X 0.60
X 0.90
X 1.20
X 1.50
X 1.80
X 2.10
X 2.40
X 2.70
X 3.00
Y 1.00
Y 0.80
Y 0.60
Y 0.40
Y 0.20
Y 0.00
Y -0.20
Y -0.40
Y -0.60
Y -0.80
Y -1.00
Y -1.20
Plane Z -0.00
Y
X
Z


X 0.00
X 0.30
X 0.60
X 0.90
X 1.20
X 1.50
X 1.80
X 2.10
X 2.40
X 2.70
X 3.00
Y 1.00
Y 0.80
Y 0.60
Y 0.40
Y 0.20
Y 0.00
Y -0.20
Y -0.40
Y -0.60
Y -0.80
Y -1.00
Y -1.20
Plane Z -0.00
Y
X


X 0.00
X 0.30
X 0.60
X 0.90
X 1.20
X 1.50
X 1.80
X 2.10
X 2.40
X 2.70
X 3.00
Y 1.00
Y 0.80
Y 0.60
Y 0.40
Y 0.20
Y 0.00
Y -0.20
Y -0.40
Y -0.60
Y -0.80
Y -1.00
Y -1.20
Plane Z -0.00
Y
X
Z

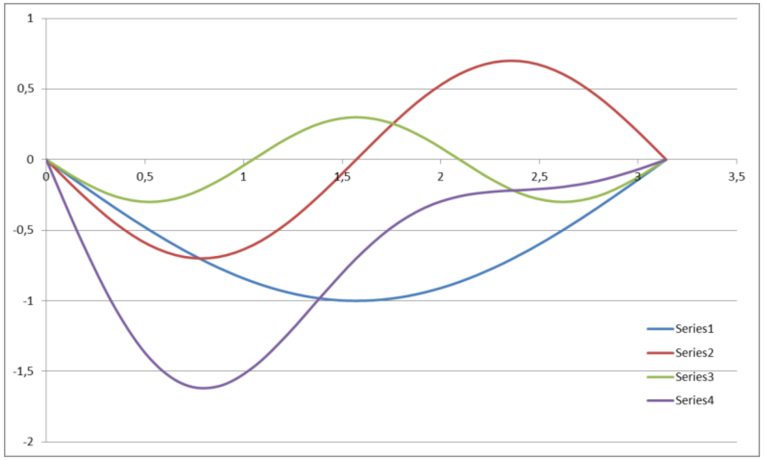
Resposta Dinâmica
Método de Superposição Modal

A resposta dinâmica de uma estrutura pode ser obtida pela superposição das respostas de cada modo de vibrar da estrutura. Em outras palavras a resposta global pode ser obtida pela soma de contribuições dadas por cada modo.

Matematicamente:

$$\{u\} = \sum_{j=1}^{N} \{\varphi_j\} z_j$$

Onde N corresponde ao número de modos naturais da estrutura.



$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F_{ext}\}$$

Retomando a equação diferencial do movimento e fazendo a substituição de coordenadas:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F_{ext}\}$$

$$[M]\sum_{j=1}^{N}\{\varphi_j\}\ddot{z}_j + [C]\sum_{j=1}^{N}\{\varphi_j\}\dot{z}_j + [K]\sum_{j=1}^{N}\{\varphi_j\}z_j = \{F_{ext}\}$$

Pré-multiplicando por um modo "n" dos "N" modos:

$$\{\varphi_n\}^T[M]\sum_{j=1}^{N}\{\varphi_j\}\ddot{z}_j + \{\varphi_n\}^T[C]\sum_{j=1}^{N}\{\varphi_j\}\dot{z}_j + \{\varphi_n\}^T[K]\sum_{j=1}^{N}\{\varphi_j\}z_j = \{\varphi_n\}^T\{F_{ext}\}$$

Devido à ortogonalidade dos modos, resulta em:

$$\{\varphi_n\}^T[M]\{\varphi_n\}\ddot{z}_j + \{\varphi_n\}^T[C]\{\varphi_n\}\dot{z}_j + \{\varphi_n\}^T[K]\{\varphi_n\}z_j = \{\varphi_n\}^T\{F_{ext}\}$$

Fazendo a mesma pré-multiplicação para os “N” modos, obtemos um sistema de “N” equações que pode ser colocado na forma matricial:

$$[\Phi]^T[M][\Phi]\{\ddot{z}\} + [\Phi]^T[C][\Phi]\{\dot{z}\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{z\} = [\Phi]^T\{F_{ext}\}$$

Utilizando modos ortonormalizados, isto é, normalizados em relação à matriz de massa, onde:

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = [I] \qquad\qquad [\Phi]^T[K][\Phi] = [\Omega^2]$$

Obtém-se:

$$[I]\{\ddot{z}\} + [\Phi]^T[C][\Phi]\{\dot{z}\} + [\Omega^2]\{z\} = [\Phi]^T\{F_{ext}\}$$

Admitindo amortecimento desacoplado nos modos, amortecimento modal portanto, obtém-se um sistema de “N” equações desacopladas da forma:

$$\ddot{z}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{z}_j + \omega_j^2 z = \varphi_j^T\{F_{ext}\}$$

Sistema de “N” equações desacopladas nas coordenadas generalizadas:

$$\boxed{\ddot{z}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{z}_j + \omega_j^2 z = \varphi_j^T \{F_{ext}\}}$$

Obtivemos assim um sistema de equações, que por serem desacopladas podem ser mais facilmente resolvidas. Corresponde à equação diferencial de um sistema massa-mola-amortecimento viscoso, de 1 grau de liberdade, amplamente estudado.

A resposta nas coordenadas originais pode ser obtida pela superposição:

$$\boxed{\{u\} = \sum_{j=1}^{N} \{\varphi_j\} z_j}$$

Sendo a equação diferencial de um sistema massa-mola não amortecido, de 1 grau de liberdade:

$$\ddot{z}_j + \omega_j^2 z = \frac{F(t)}{m_j}$$

Para um carregamento harmônico, a resposta é dada pela seguinte expressão:

$$F(t) = F_0 \sin \omega\, t$$

$$z_j = z_o \cos \omega_j\, t + \frac{v_0}{\omega_j} \sin \omega_j\, t + \frac{\omega}{\omega_j} \frac{F_0/m_j}{\left(\omega_j^2 - \omega^2\right)} \left(\sin \omega\, t - \sin \omega_j\, t\right)$$

Vemos que a resposta homogênea é inversamente proporcional à frequência natural do sistema.

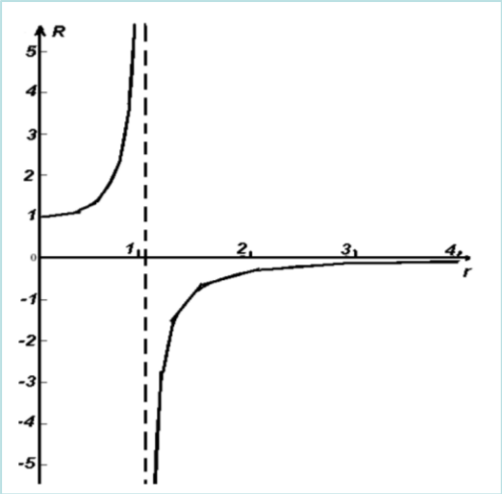
A resposta particular é mais complexa. Há um termo inversamente proporcional à frequência natural do sistema, todavia há outro termo função da diferença entre os quadrados da frequência natural do sistema e da frequência da excitação. Daí surge inclusive o problema da ressonância, quando as duas frequências são idênticas.

Interpretando estes resultados aplicados à resposta dinâmica de uma estrutura, obtida pelo método de superposição modal, submetida a um carregamento dinâmico qualquer, têm-se que:

- Considerando a amplitude de resposta em cada modo inversamente proporcional à frequência de cada modo, é de se esperar que os primeiros modos, de frequência mais baixa, tenham maior participação na resposta global. Assim pode-se fazer a superposição com um número limitado de modos, desprezando-se a contribuição daqueles de frequência mais elevada. Isto é de grande vantagem considerando-se que as estruturas reais são corpos contínuos e sendo assim têm infinitos modos naturais de vibrar. Caso fosse necessária a superposição dos infinitos modos isto invalidaria a utilização prática do método.

- Considerando que a amplitude de resposta em cada modo é inversamente proporcional à frequência de cada modo, querendo-se minimizar a resposta global devemos aumentar o valor das frequências naturais, em especial os valores dos modos das frequências mais baixas, isto é, dos primeiros modos. Aqui não estamos considerando o fenômeno de ressonância.

Para considerar a situação de ressonância, precisamos relembrar o conceito do fator de amplificação da resposta dinâmica em função da razão entre a frequência da excitação e a frequência natural do sistema, em um sistema massa-mola , um grau de liberdade, submetido a excitação harmônica.
Considerar as situações com e sem amortecimento.



Na superposição modal precisamos então levar em conta, além dos modos de frequência mais baixa, que têm maior fator de participação, os modos cujas frequências naturais estejam dentro do espectro do carregamento de excitação.

FIM 06