PME 3543
Estruturas Mecânicas e de Veículos
Notas de Aula
Prof. Leandro V. da S. Macedo

05
Método dos Elementos Finitos

Simbologia

$\{u^{el.i}\}$ vetor de deslocamentos no interior do elemento “i”

$\{a^{el.i}\}$ vetor de deslocamentos nodais do elemento “i”

$\{\delta a^{el.i}\}$ vetor de deslocamentos virtuais nodais do elemento “i”

$[N]$ matriz das funções de interpolação (ou matriz das “funções de forma”) do elemento finito

$[S]$ matriz de operação linear derivadas parciais espaciais

$[B]$ matriz das derivadas parciais espaciais das funções de interpolação

$\{\varepsilon^{el.i}\}$ vetor de deformações no elemento “i”

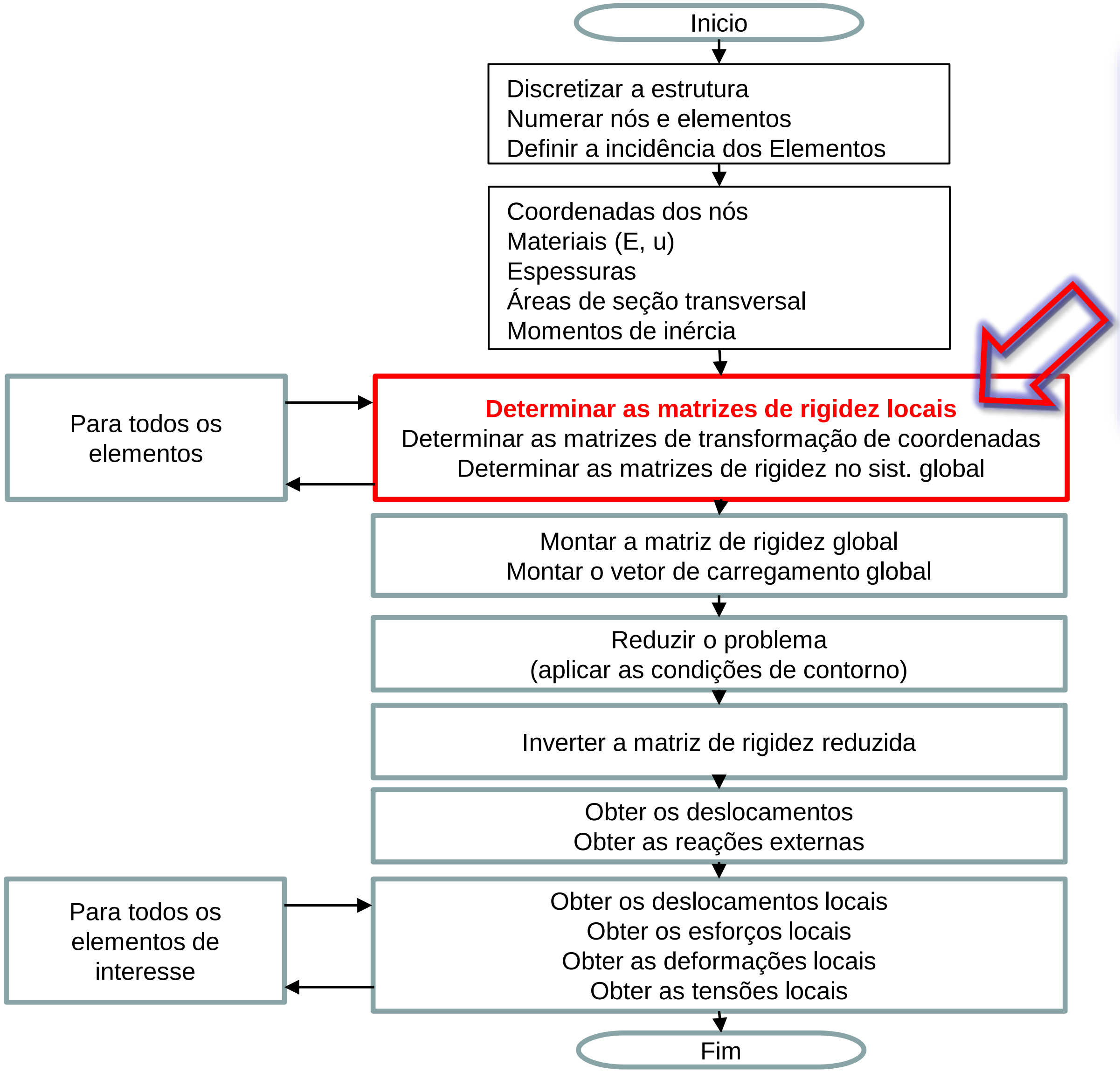
$[\sigma^{el.i}]$ tensor de tensões no elemento “i”

$[D]$ matriz de elasticidade

$\{F^{el.1}\}$ vetor de carregamento externo nodal sobre o elemento “i”

$[k^{el.i}]$ matriz de rigidez do elemento “i”

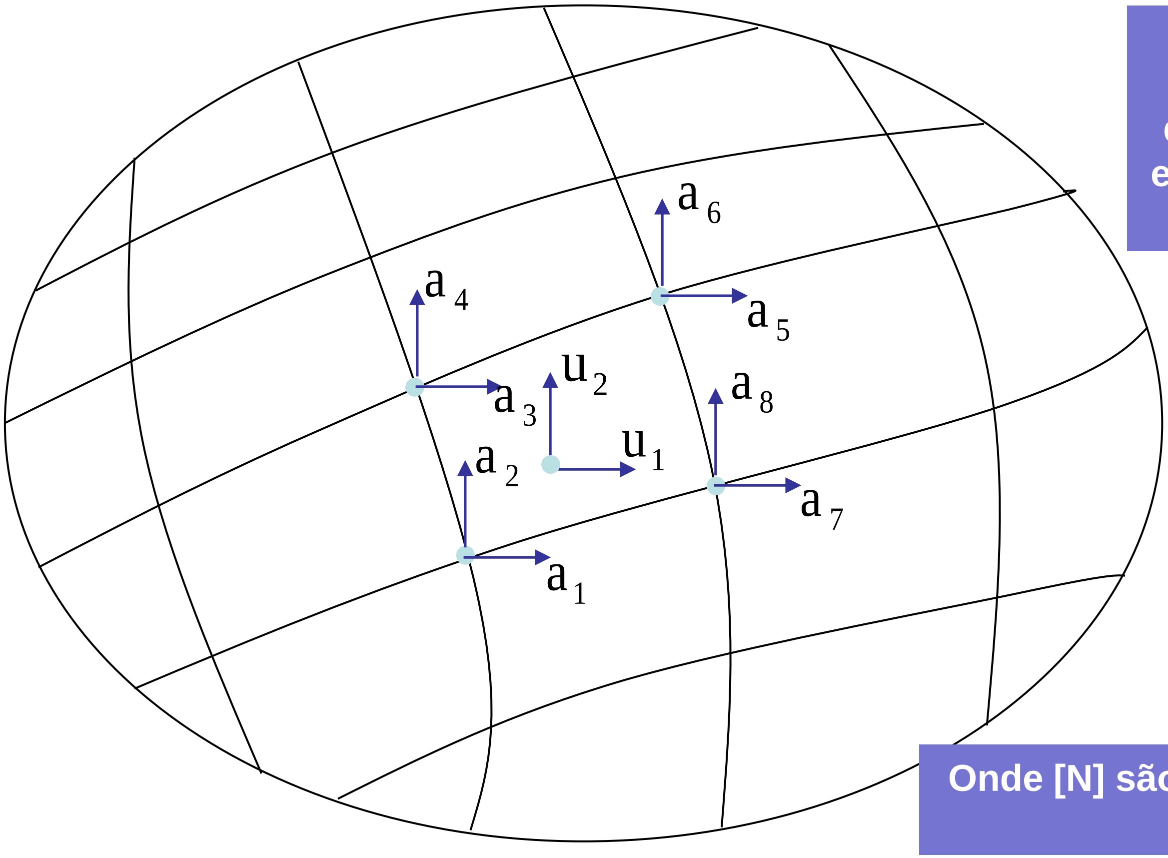
Procedimento da Análise Matricial de Estruturas



O método dos elementos finitos consiste num forma de obter-se a matriz de rigidez local dos elementos para uma geometria geral qualquer.

O Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos consiste num forma de obter-se a matriz de rigidez local dos elementos para uma geometria geral qualquer.



Hipótese:
"O deslocamento de qualquer ponto de um elemento finito pode ser dado em função dos deslocamentos nodais deste elemento."

$$\left\{u^{el.i}\right\} = [N]\left\{a^{el.i}\right\}$$

Onde [N] são as chamadas funções de interpolação ou funções de forma

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon^{el.i}\} = [S]\{u^{el.i}\}$$

Onde: $$[S] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Mas: $$\{u^{el.1}\} = [N]\{a^{el.i}\}$$

Logo: $$\{\varepsilon^{el.i}\} = [S][N]\{a^{el.i}\} \Rightarrow \{\varepsilon^{el.i}\} = [B]\{a^{el.i}\}$$

Onde: $$[B] = [S][N]$$

$$\left[k^{el.i}\right]\left\{a^{el.i}\right\} = \left\{F^{el.i}\right\}$$

$$\left[\sigma^{el.i}\right] = [D]\left\{\varepsilon^{el.i}\right\}$$

Onde: $$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & {(1-\nu)}/{2} \end{bmatrix}$$

matriz de elasticidade

Igualando-se o trabalho virtual das forças externas ao trabalho virtual das forças internas:

$$\left\{\delta a^{el.i}\right\}^T\left\{F^{el.i}\right\} = \int_{el.i}\left\{\delta\varepsilon^{el.i}\right\}^T\left\{\sigma^{el.i}\right\}dvol$$

$$\left\{\delta a^{el.i}\right\}^T\left\{F^{el.i}\right\} = \int_{el.i}\left[[B]\left\{\delta a^{el.i}\right\}\right]^T\left\{\sigma^{el.i}\right\}dvol = \int_{el.i}\left\{\delta a^{el.i}\right\}^T[B]^T\left\{\sigma^{el.i}\right\}dvol$$

$$\left\{\delta a^{el.i}\right\}^T\left\{F^{el.i}\right\} = \left\{\delta a^{el.i}\right\}^T\int_{el.i}[B]^T\left\{\sigma^{el.i}\right\}dvol$$

E assim, sendo o deslocamento virtual qualquer:

$$\left\{F^{el.i}\right\} = \int_{el.i}[B]^T\left\{\sigma^{el.i}\right\}dvol$$

$$\{F^{el.i}\} = \int_{el.i} [B]^T \{\sigma^{el.i}\} dvol$$

$$[\sigma^{el.i}] = [D]\{\varepsilon^{el.i}\}$$

$$\{\varepsilon^{el.i}\} = [B]\{a^{el.i}\}$$

$$\{F^{el.i}\} = \int_{el.i} [B]^T [D][B]\{a^{el.i}\} dvol$$

$$[k^{el.i}]\{a^{el.i}\} = \{F^{el.1}\} = \int_{el.i} [B]^T [D][B] dvol \cdot \{a^{el.i}\}$$

$$\boxed{[k^{el.i}] = \int_{el.i} [B]^T [D][B] dvol}$$

Matriz de rigidez do elemento

Onde:

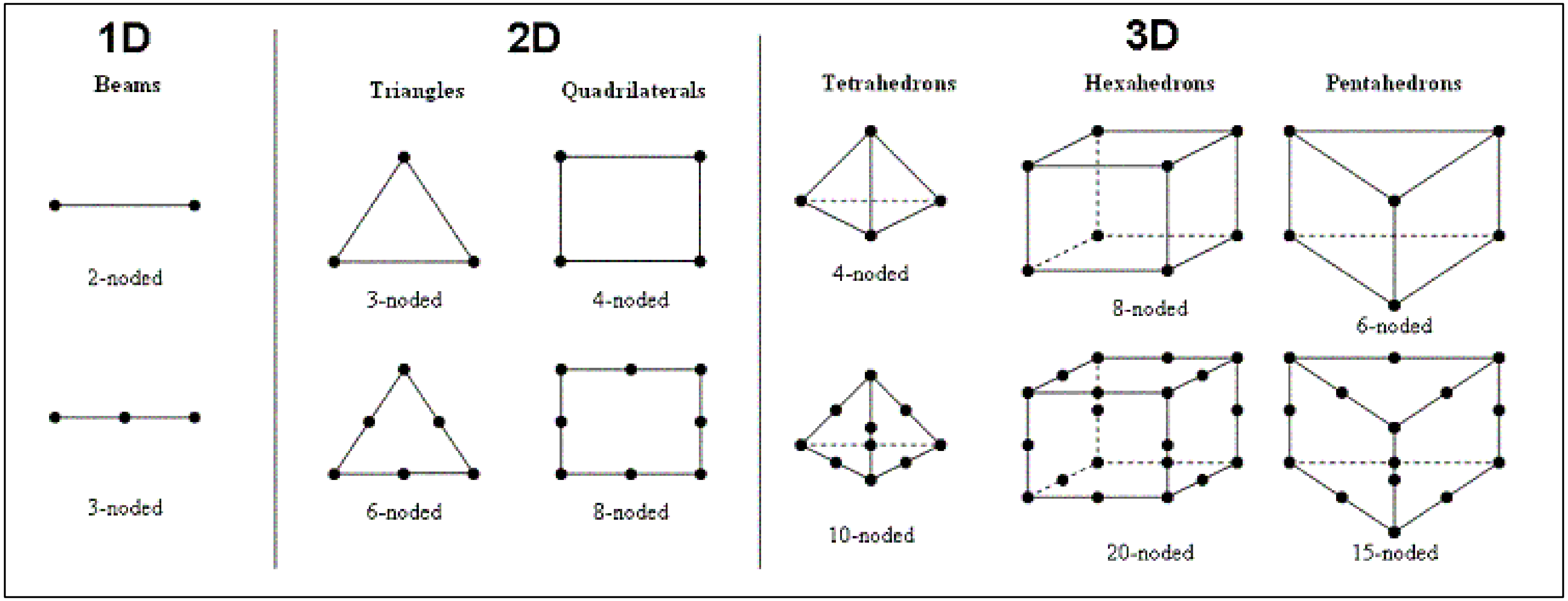
$$[B] = [S][N]$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$[N]$ **funções de interpolação**

$[D]$ **matriz de elasticidade**

Alguns tipos de elementos finitos



Funções de Interpolação

As funções de interpolação apenas aproximam as situações reais de deslocamentos e deformações. Por mais refinada que seja a discretização uma resposta válida pode não ser atingida.

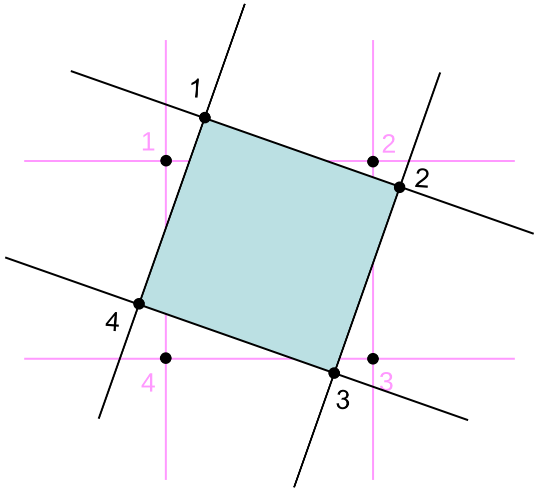
Convém estabelecer <u>critérios sobre as funções de interpolação</u> para assegurar uma resposta válida:

1. A função de interpolação deve ser tal que não haja deformação no elemento quando os deslocamentos dos seus nós corresponderem a um deslocamento de corpo rígido do elemento.

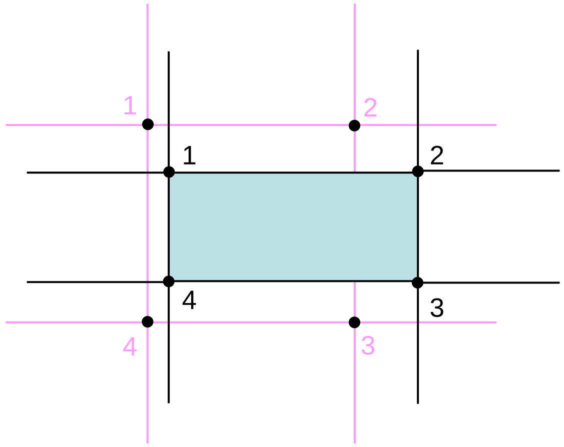
2. A função de interpolação deve ser tal que quando os deslocamentos nodais forem compatíveis com uma deformação constante ao longo do elemento, esta deformação constante seja de fato obtida.

3. A função de interpolação deve ser tal que garanta continuidade no campo de deslocamentos entre os elementos (em alguns tipos de elementos finitos, tipo “beam” e tipo "shell" e.g., também há necessidade de continuidade na derivada do campo de deslocamentos, pois as curvaturas são função da derivada primeira dos deslocamentos e estas devem ser também contínuas).

Funções de Interpolação



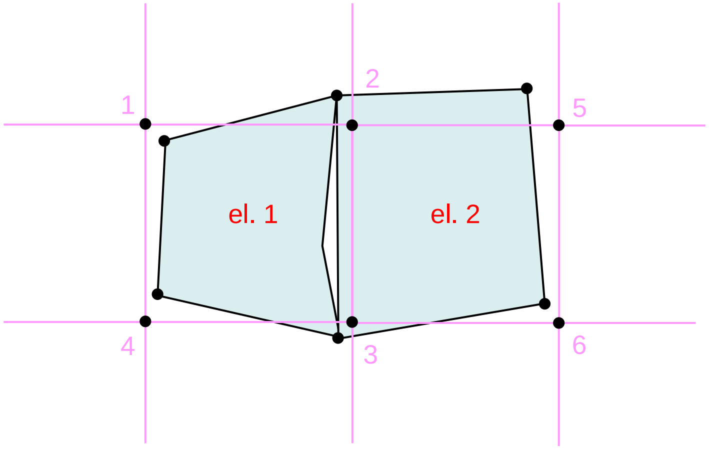
Deslocamentos do nós compatíveis com deslocamento de corpo rígido do elemento ➔ deformação calculada num ponto qualquer no interior do elemento resultante das funções de interpolação deve ser nula!

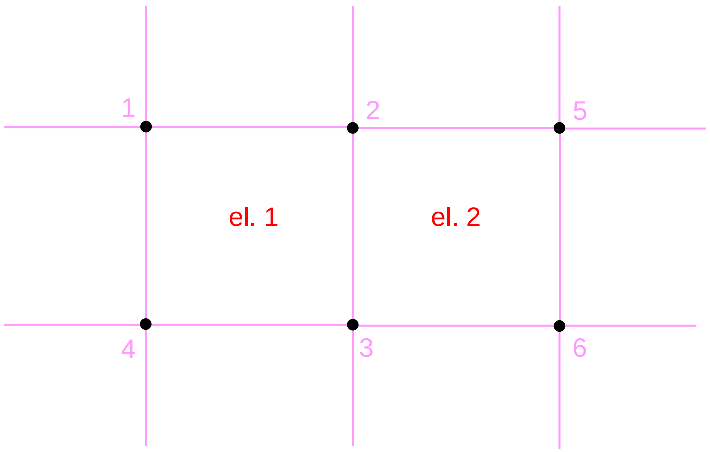


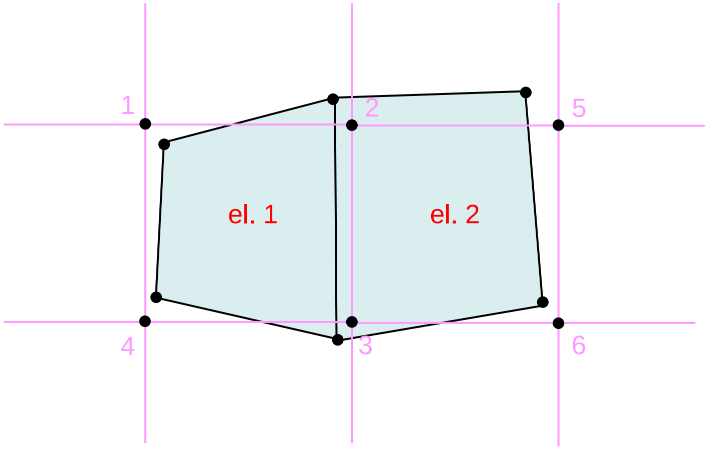
Deslocamentos do nós compatíveis com deslocamento constante ao longo do elemento ➔ deformações calculadas para todo e qualquer ponto no interior do elemento devem ser iguais entre si, compatíveis com um estado de deformação constante ao longo do elemento.

Funções de Interpolação

Buraco entre os elementos! ñOK!



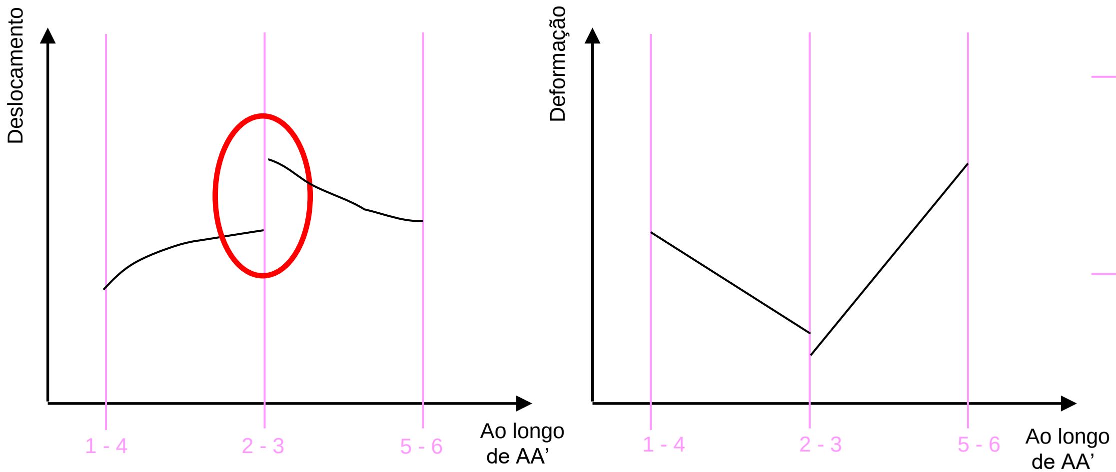


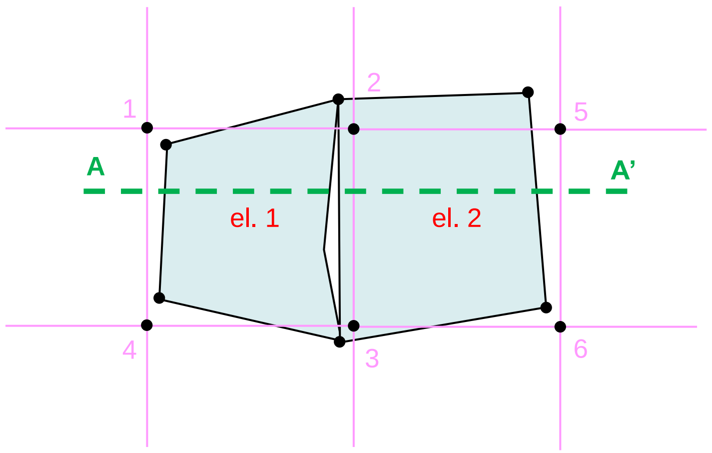


Continuidade de deslocamentos nas arestas comuns dos elementos ➔ OK.

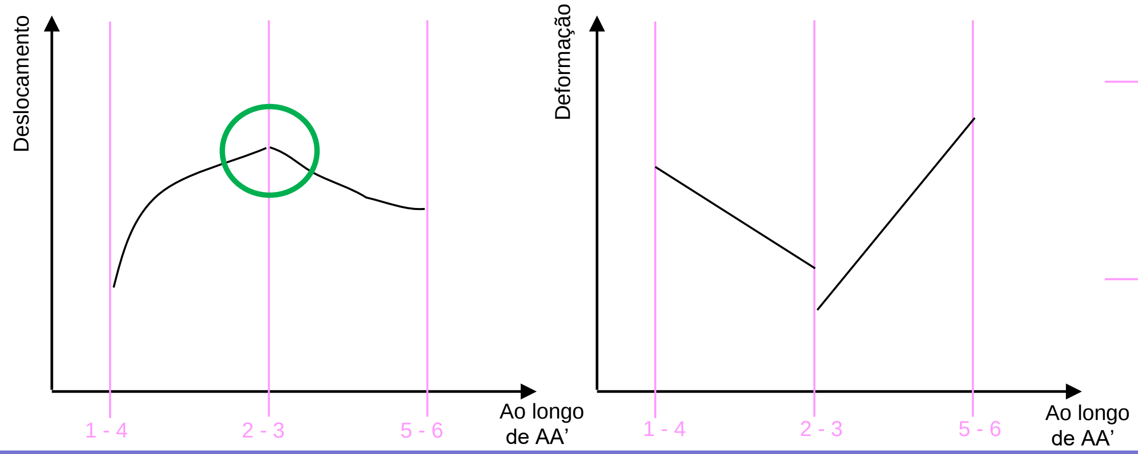
Funções de Interpolação

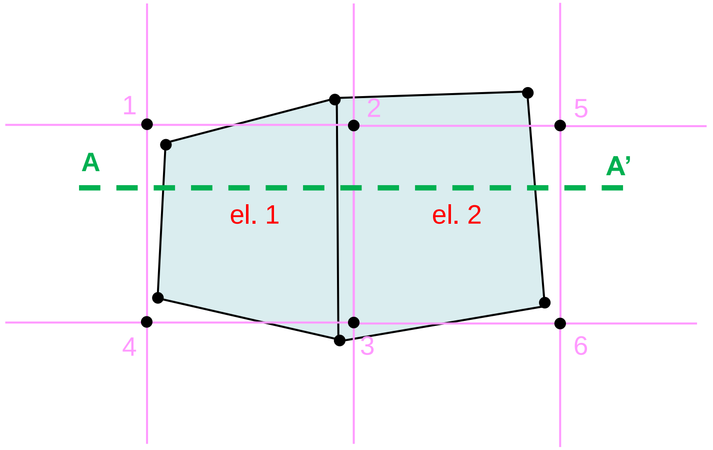
Buraco entre os elementos! ➔ ñOK! ➔ aumento da discretização não garante ausência do buraco! ➔ diz-se então um salto de deformação infinito.





Continuidade de deslocamentos nas arestas comuns dos elementos ➔ OK ➔ aumento da discretização irá levar à continuidade também das deformações ➔ diz-se então um salto de deformação finito.





Método dos Elementos Finitos – Conclusão:

O Método dos Elementos Finitos garante:

- **Compatibilidade de deslocamento para os nós discretizados.**
- **Transmissão de forças entre os elementos através dos nós comuns.**

Boas funções de interpolação garantem:

- **Continuidade no campo de deslocamentos.**
- **Compatibilidade total com movimentos de corpo rígido e estados simples de deformação.**

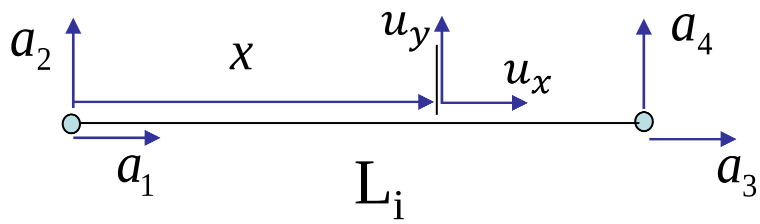
Limitações do M.E.F:

- **Em geral, não há transmissão de forças pelas arestas comuns entre dois elementos;**
- **Em geral, não há continuidade no campo de deformações entre dois elementos.**

Estas limitações podem ser contornadas aumentando-se a discretização da malha!
Ou ainda, escolhendo-se funções de interpolação especiais para as quais sabe-se que serão capazes de fornecer um campo de deformações complexo esperado.

Matriz de Rigidez/Funções de Interpolação – Caso exemplo 01: Treliça

Retomando o caso exemplo da barra de treliça, vamos obter a sua matriz de rigidez utilizando agora o M.E.F:



$$u_x(x) = N_1(x)a_1 + N_2(x)a_2 + N_3(x)a_3 + N_4(x)a_4$$

$$u_y(x) = N_5(x)a_1 + N_6(x)a_2 + N_7(x)a_3 + N_8(x)a_4 = 0$$

Condições de contorno: $u_x(x=0) = a_1 \qquad u_x(x=L_i) = a_3$

Logo:

$$N_1(x=0)=1 \qquad N_2(x=0)=0 \qquad N_3(x=0)=0 \qquad N_4(x=0)=0$$

$$N_1(x=L_i)=0 \qquad N_2(x=L_i)=0 \qquad N_3(x=L_i)=1 \qquad N_4(x=L_i)=0$$

Como não há deslocamentos no sist. de coordenadas local na direção y, é imediato que:

$$\boxed{N_5(x) = N_6(x) = N_7(x) = N_8(x) = 0}$$

Matriz de Rigidez/Funções de Interpolação – Caso exemplo 01: Treliça

Várias soluções são possíveis para este conjunto de funções.
Uma solução possível, a mais simples, seria um conjunto de polinômios lineares:

$$N_1(x) = c_0 + c_1(x) \qquad N_2(x) = 0 \qquad N_3(x) = d_0 + d_1(x) \qquad N_4(x) = 0$$

Para determinar os coeficientes, considera-se as condições de contorno:

$$N_1(x=0) = 1 \quad ; \quad N_1(x = L_i) = 0 \qquad N_3(x=0) = 0 \quad ; \quad N_3(x = L_i) = 1$$

Obtém-se os coeficientes:

$$c_0 = 1 \quad ; \quad c_1 = -\frac{1}{L_i} \qquad d_0 = 0 \quad ; \quad d_1 = \frac{1}{L_i}$$

Obtendo-se as funções de interpolação que faltavam:

$$\boxed{N_1(x) = 1 - \frac{x}{L_i}} \qquad \boxed{N_2(x) = 0} \qquad \boxed{N_3(x) = \frac{x}{L_i}} \qquad \boxed{N_4(x) = 0}$$

Matriz de Rigidez/Funções de Interpolação – Caso exemplo 01: Treliça

Deslocamento de um ponto qualquer intermediário em função dos deslocamentos nodais do elemento:

$$\{u^{el.i}\} = [N]\{a^{el.i}\} \qquad \begin{Bmatrix} u_x(x) \\ u_y(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & N_3(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

Identificando a matriz [S]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}$$

Logo:

$$[B] = [S][N] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{x}{L_i} & 0 & \dfrac{x}{L_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L_i} & 0 & \dfrac{1}{L_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez/Funções de Interpolação – Caso exemplo 01: Treliça

Identificando a matriz elasticidade [D]: $\left[\sigma^{el.i}\right] = [D]\left\{\varepsilon^{el.i}\right\}$ $\quad [D] = E\begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix}$

Substituindo então:

$$[B]^T[D][B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_i} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} E\begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{L_i} & 0 & \frac{1}{L_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} -\frac{1}{L_i} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{L_i} & 0 & \frac{1}{L_i} & 0 \\ \frac{\nu}{L_i} & 0 & -\frac{\nu}{L_i} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B]^T[D][B] = \begin{bmatrix} \frac{E}{{L_i}^2} & 0 & -\frac{E}{{L_i}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E}{{L_i}^2} & 0 & \frac{E}{{L_i}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez/Funções de Interpolação – Caso exemplo 01: Treliça

$$[B]^T[D][B] = \begin{bmatrix} \frac{E}{{L_i}^2} & 0 & -\frac{E}{{L_i}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E}{{L_i}^2} & 0 & \frac{E}{{L_i}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[k^{el.i}\right] = \int_{el.i} [B]^T[D][B]dvol$$

$$\left[k^{el.i}\right] = \begin{bmatrix} \frac{E}{{L_i}^2} & 0 & -\frac{E}{{L_i}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E}{{L_i}^2} & 0 & \frac{E}{{L_i}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \int_{el.i} dvol = \begin{bmatrix} \frac{E}{{L_i}^2} & 0 & -\frac{E}{{L_i}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E}{{L_i}^2} & 0 & \frac{E}{{L_i}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot A_i L_i$$

Matriz de Rigidez/Funções de Interpolação – Caso exemplo 01: Treliça

$$\left[k^{el.i}\right] = \int_{el.i} [B]^T [D][B] dvol$$

$$\left[k^{el.i}\right] = \begin{bmatrix} \frac{EA_i}{L_i} & 0 & -\frac{EA_i}{L_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA_i}{L_i} & 0 & \frac{EA_i}{L_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observa-se que a matriz de rigidez de uma barra de treliça obtida pelo M.E.F, com função de interpolação sendo um polinômio linear, chega no resultado teórico exato obtido anteriormente pela Mecânica dos Sólidos.

Exercício Proposto: Obter matriz de rigidez de elemento de viga pelo MEF

Exercício Proposto:

Obter a matriz de rigidez de um elemento de viga pelo M.E.F. utilizando funções de interpolação que cheguem no resultado teórico da Mecânica dos Sólidos.

Opcional!
Não há necessidade de entregar!
Pesquisar na bibliografia!

FIM 05