

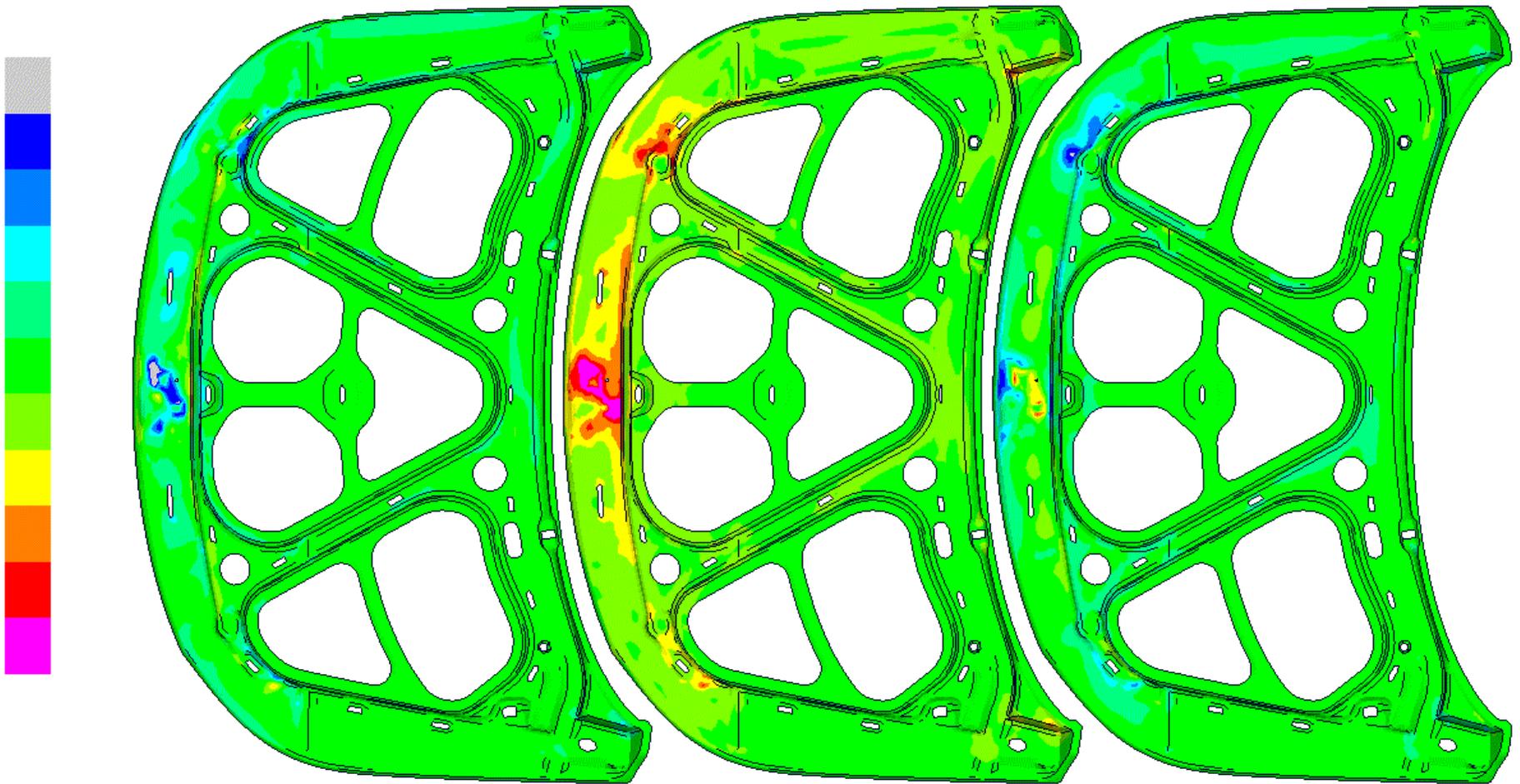


PME 3543
Estruturas Mecânicas e de Veículos
Notas de Aula
Prof. Leandro V. da S. Macedo

03
Análise de Tensões e
Deformações



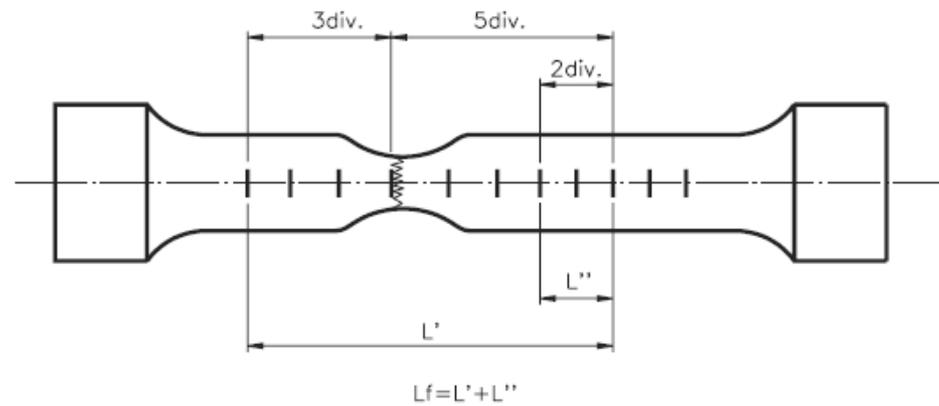
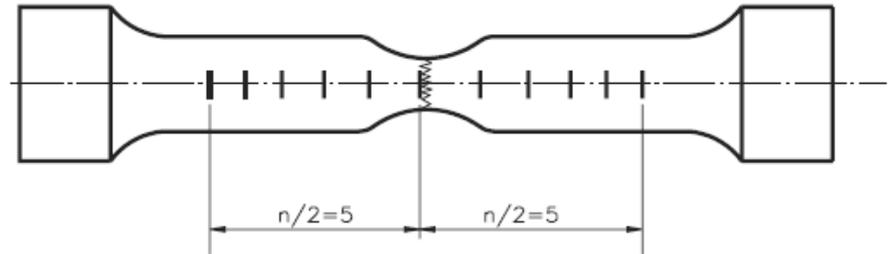
Análise de Tensões



Tensões Von Mises	Tensões Tresca	Tensões Máx. principal	deformações	deslocamentos
-------------------	----------------	------------------------	-------------	---------------



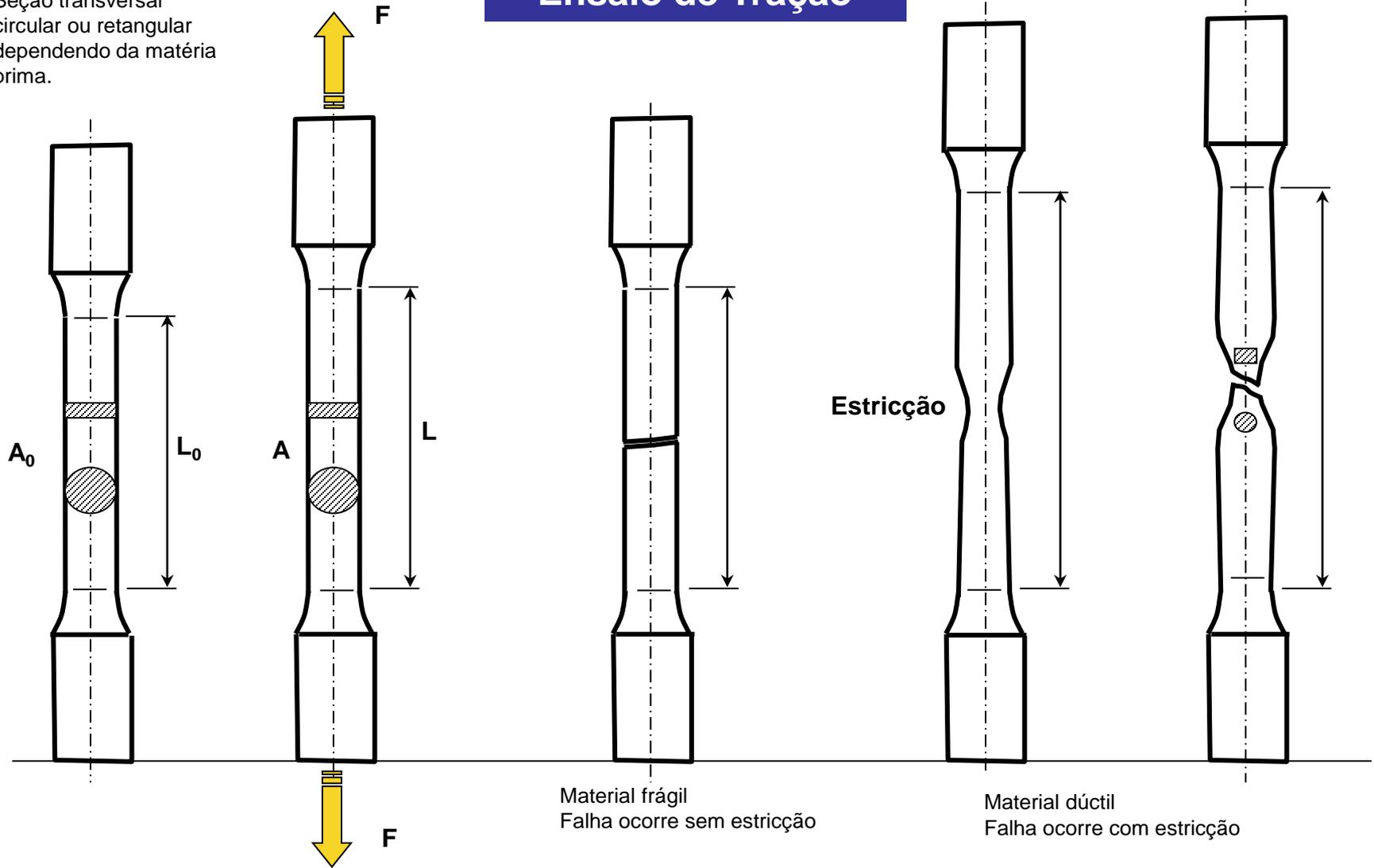
Ensaio de Tração





Ensaio de Tração

Seção transversal circular ou retangular dependendo da matéria prima.





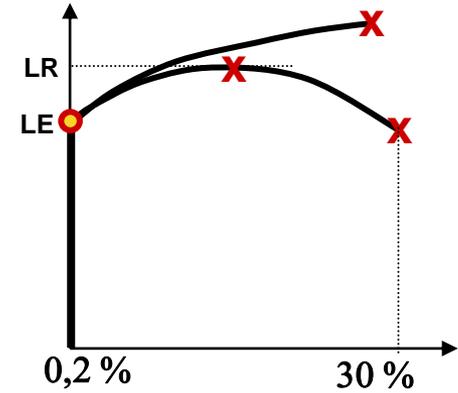
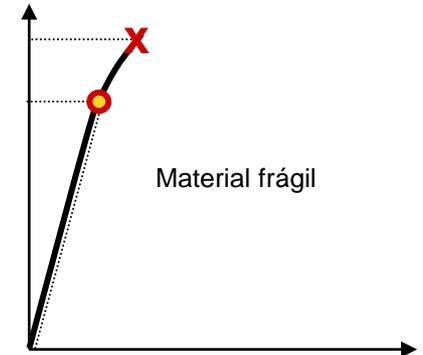
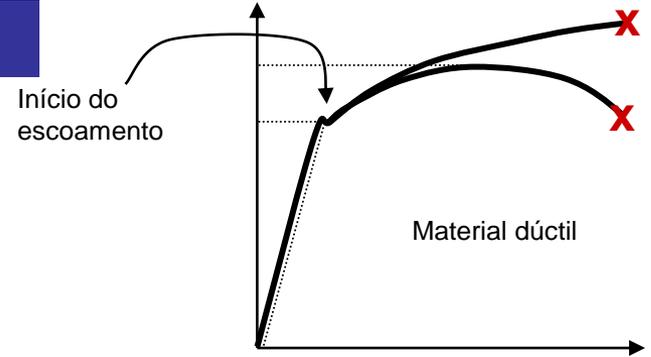
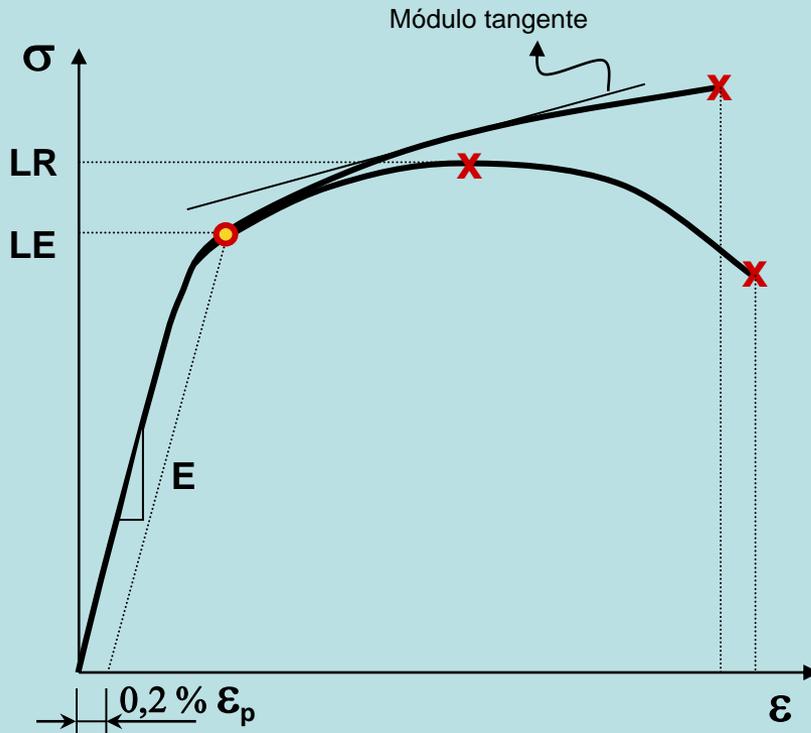
Ensaio de Tração

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\varepsilon = \ln \frac{L}{L_0}$$





Mechanical Property	Material Type			
	DC01	DC04	DD13	DD14
Yield Strength [MPa]	280	210	170-330	170-310
Ultimate Tensile Strength [MPa]	410	350	400	380
Elongation [%]	28	38	28	33

Steel Grade	YS (MPa)	UTS (MPa)	Total Elongation (%)
HSLA 350/450	350	450	23-27
DP 300/500	300	500	30-34
DP 350/600	350	600	24-30
DP 500/800	500	800	14-20
DP700/1000	700	1000	12-17
CP 700/800	700	800	10-15
TRIP 450/800	450	800	26-32
MS 1250/1520	1250	1520	4-6

Mechanical Properties

	Coating	Standard	Yield strength R_e ¹⁾ (MPa)	Tensile strength R_m (MPa)	Elongation A_{80} ²⁾ (min %)
HX220LAD	Z, ZA, ZF		220 - 320	340 - 400	30
HX260LAD	Z, ZA, ZF	EN10346:2015	260 - 330	350 - 430	26
HX300LAD	Z, ZA, ZF	EN10346:2015	300 - 380	380 - 480	23
HX340LAD	Z, ZA, ZF	EN10346:2015	340 - 420	410 - 510	21
HX380LAD	Z, ZA, ZF	EN10346:2015	380 - 480	440 - 560	19
HX420LAD	Z, ZA, ZF	EN10346:2015	420 - 520	470 - 590	17
HX460LAD	Z, ZA	EN10346:2015	460 - 560	500 - 640	15
HX500LAD	Z, ZA	EN10346:2015	500 - 620	530 - 690	13

¹⁾ If no pronounced yield point is present, the 0.2 % yield point value $R_{p0.2}$ is used. If the product has a pronounced yield point, the values apply for the lower yield point R_{eL} .

²⁾ Decreased minimum elongation A_{80} value for thickness $0.50\text{mm} < t \leq 0.70\text{mm}$ (minus 2 units) and $t \leq 0.50\text{mm}$ (minus 4 units) apply. In addition, in case of ZF coating the minimum elongation A_{80} value is reduced by 2 units.



Ensaio de Tração

Ensaio de tração (“tensile test”)

Simples, barato e normatizado.

Medição do nível de resistência e ductilidade do material.

Obtenção da curva tensão vs. deformação.

Deformação (“strain”)

É a quantidade de alongamento do corpo de prova durante o ensaio de tração.

Deformação de engenharia (“engineering strain”) é o alongamento medido pelo quociente entre o comprimento sob uma determinada carga e o comprimento inicial.

Deformação verdadeira (“true strain”) é o alongamento medido pelo logaritmo natural deste quociente.

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \qquad \varepsilon = \ln \frac{L}{L_0} \qquad \left(\varepsilon = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} \right)$$

Alongamento na ruptura (“elongation” A_{80})

É o alongamento máximo ocorrido durante o ensaio. Corresponde ao valor na ruptura do material. O índice “80” indica o comprimento útil L_0 considerado no corpo de prova. É uma medida da ductilidade do material.

Tensão (“stress”)

É o resultado do quociente do esforço aplicado pela área da seção transversal do corpo de prova.

Na tensão de engenharia (Piola-Kirchof) (“engineering stress”) utiliza-se a área de seção transversal original.

Na tensão verdadeira (Cauchy) (“true stress”) utiliza-se a área real sob uma determinada carga.

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \qquad \sigma = \frac{F}{A}$$



Lei de Hooke

Relação linear entre a força aplicada e o alongamento obtido.

Válida na região linear da curva tensão vs. deformação (onde as deformações são pequenas, a redução de área é pequena, a estricção ainda não ocorreu).

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

E - Módulo de Elasticidade (ou módulo de Young)

Medida da rigidez do material.

É o coeficiente angular da região linear da curva tensão vs. deformação conforme a Lei de Hooke.

Módulo tangente (ou módulo de elasticidade tangente)

O módulo tangente é idêntico ao módulo de Young enquanto estivermos no regime de proporcionalidade linear entre tensão e deformação.

A partir daí o módulo tangente é o quociente da variação da tensão pela variação infinitesimal na deformação e obviamente varia ao longo da curva tensão vs. deformação.

$$E_T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad \left(E_T = \lim_{d\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)$$

Módulo secante (ou módulo de elasticidade secante)

Para materiais que não apresentam regime linear de proporcionalidade entre tensão e deformação pode-se definir o módulo secante de elasticidade.

Ele é determinado pelo coeficiente angular de uma reta que passe pela origem e intercepte a curva tensão deformação. Obviamente, varia ao longo da curva tensão vs. deformação.



Estricção (ou empescoçamento)

Redução localizada da seção transversal do corpo de prova submetido a uma carga de tração.

É desconsiderada no cálculo da tensão de engenharia mas levada em consideração no cálculo da tensão verdadeira.

Limite de escoamento (“Yield Strength”)

Valor de tensão característico do material, obtido do ensaio de tração, no qual começa a ocorrer deformação plástica.

Normalmente refere-se a um valor de tensão de engenharia e não de tensão verdadeira.

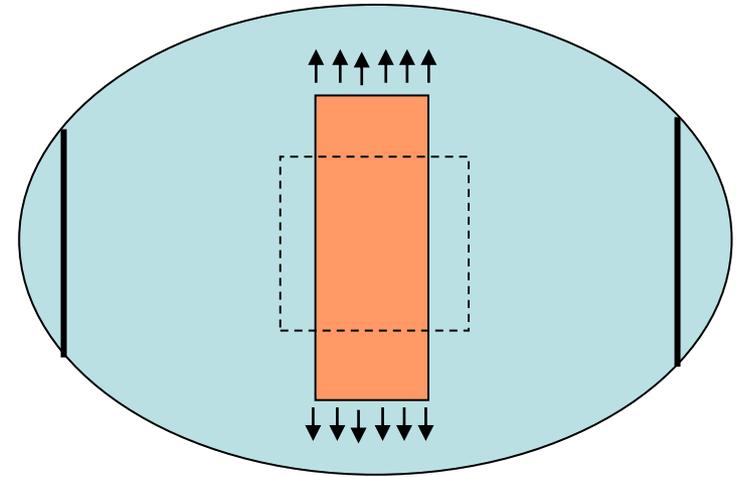
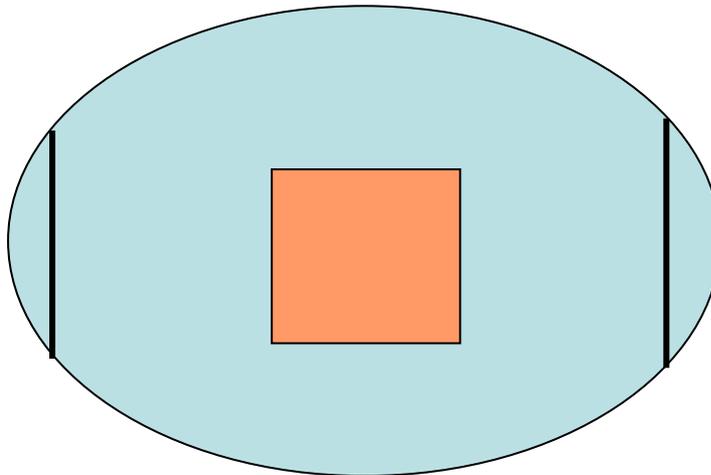
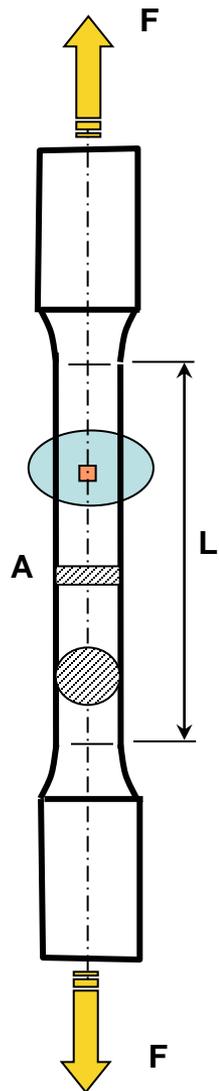
A saída do regime elástico e início das deformações plásticas pode não ser de fácil determinação. Assim, o limite de escoamento é usualmente especificado pela intersecção da curva tensão vs. deformação com uma reta paralela à região linear da mesma, deslocada de um determinado valor de deformação (0,2% para metais, 2% para plásticos). Vide ASTM E8M e ASTM D638.

A partir do limite de escoamento a lei de Hooke não é mais válida. O material irá plastificar, não retornando mais à sua forma original mesmo após a carga ser retirada.

Limite de resistência à tração (“Ultimate Tensile Strength - UTS”)

Valor mais alto de tensão obtido do ensaio de tração.

Normalmente refere-se a um valor de tensão de engenharia e não de tensão verdadeira.



$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (\text{Lei de Hooke})$$

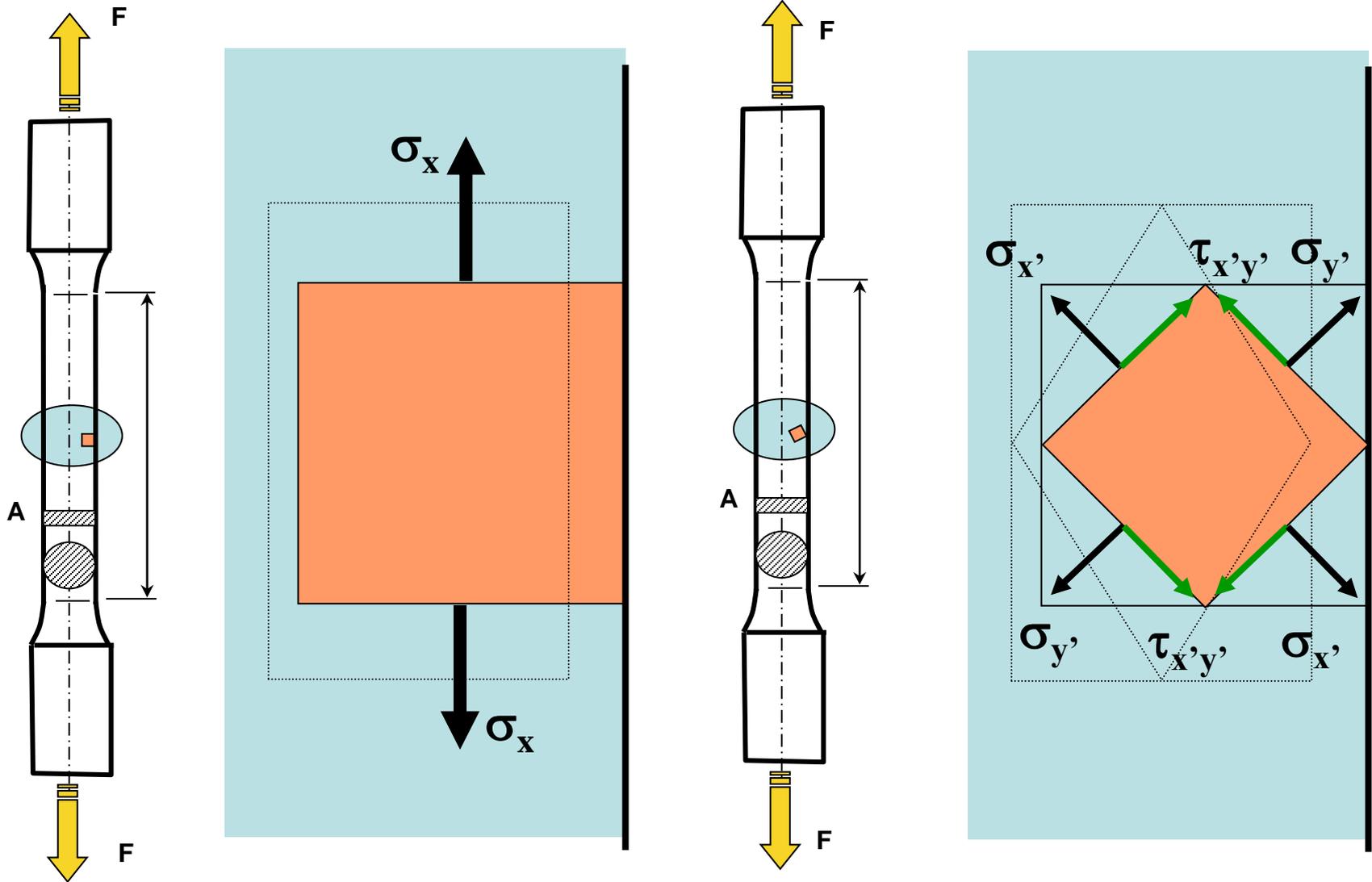
$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \epsilon_x$$

Coeficiente de Poisson (ν)

Quando aplica-se uma tensão em uma direção, o material além de deformar-se naquela direção, deforma-se também segundo as direções ortogonais. A relação entre a deformação ortogonal e aquela na direção do carregamento aplicado chama-se coeficiente de Poisson. O coeficiente de Poisson é uma grandeza positiva e menor do que $\frac{1}{2}$. Para os aços $\nu \cong 0,3$.

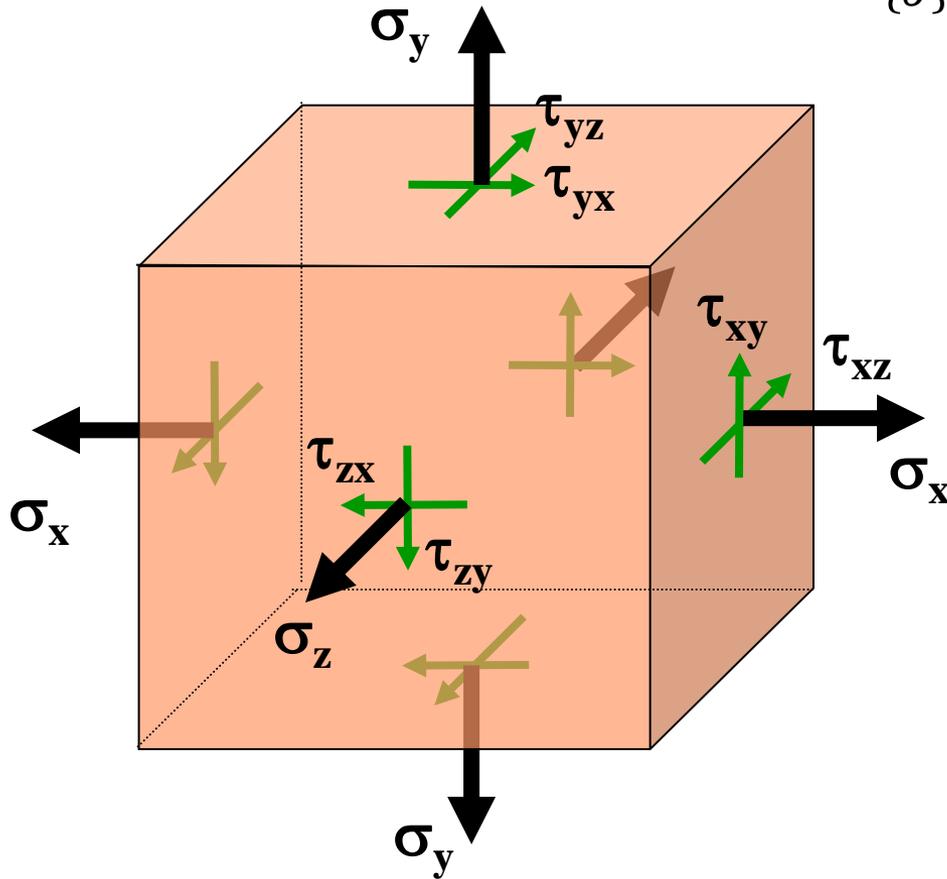


Tensão normal e tensão de cisalhamento (“shear stress”)





Tensor de tensões



$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

É uma matriz quadrada e simétrica.

É um tensor no espaço 3D

Dimensão: 9

Ordem: 2

a_{ij} :

na face normal ao eixo i ,
segundo a direção j .

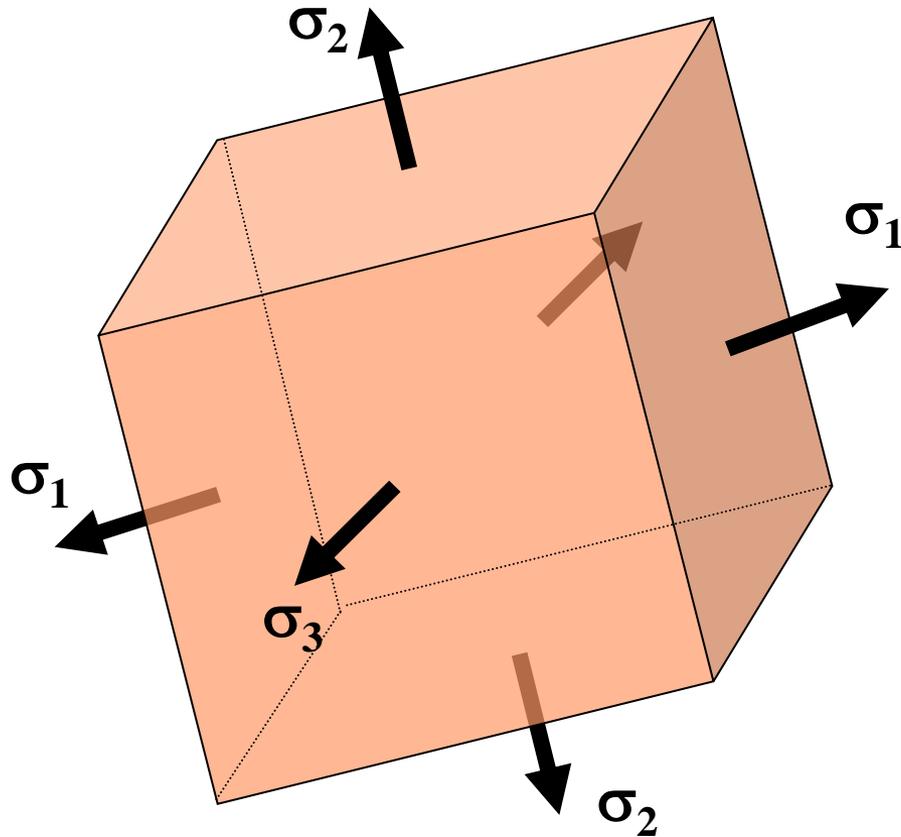
$$\begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{xz} & a_{yz} & a_{zz} \end{pmatrix}$$

Tensores tem a propriedade de armazenarem informação dentro de si que independe do sistema de coordenadas adotado.

Isto tem sentido, pois a resistência em um determinado ponto não deve ser função do sistema de coordenadas que escolhermos!



Tensor de tensões – tensões principais



O tensor de tensões é uma matriz quadrada e simétrica, assim da álgebra Linear, sabemos que pode ser diagonalizado.

A diagonalização se dá numa adequada orientação do sistema de coordenadas. Resulta apenas os termos da diagonal principal, anulando-se os demais.

Obtêm-se assim as chamadas tensões normais principais.

A tensão normal principal σ_1 é o máximo valor de tensão normal que pode-se obter com o giro do sistema de coordenadas.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$



Tensor de tensões – Invariantes do tensor de tensões

Cortando a figura por um plano que passe pela tensão principal e aplicando as equações de equilíbrio, obtêm-se:

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2)\sigma - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0$$

Equação do 3º grau cujas 3 raízes são as 3 tensões principais.

Como as tensões principais não dependem do sistema de coordenadas adotado, então os coeficientes desta equação devem ser invariantes:

$$I_1 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$I_2 = (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2)$$

$$I_3 = (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2)$$

Caso então o sistema de coordenadas coincida com as direções das tensões principais:

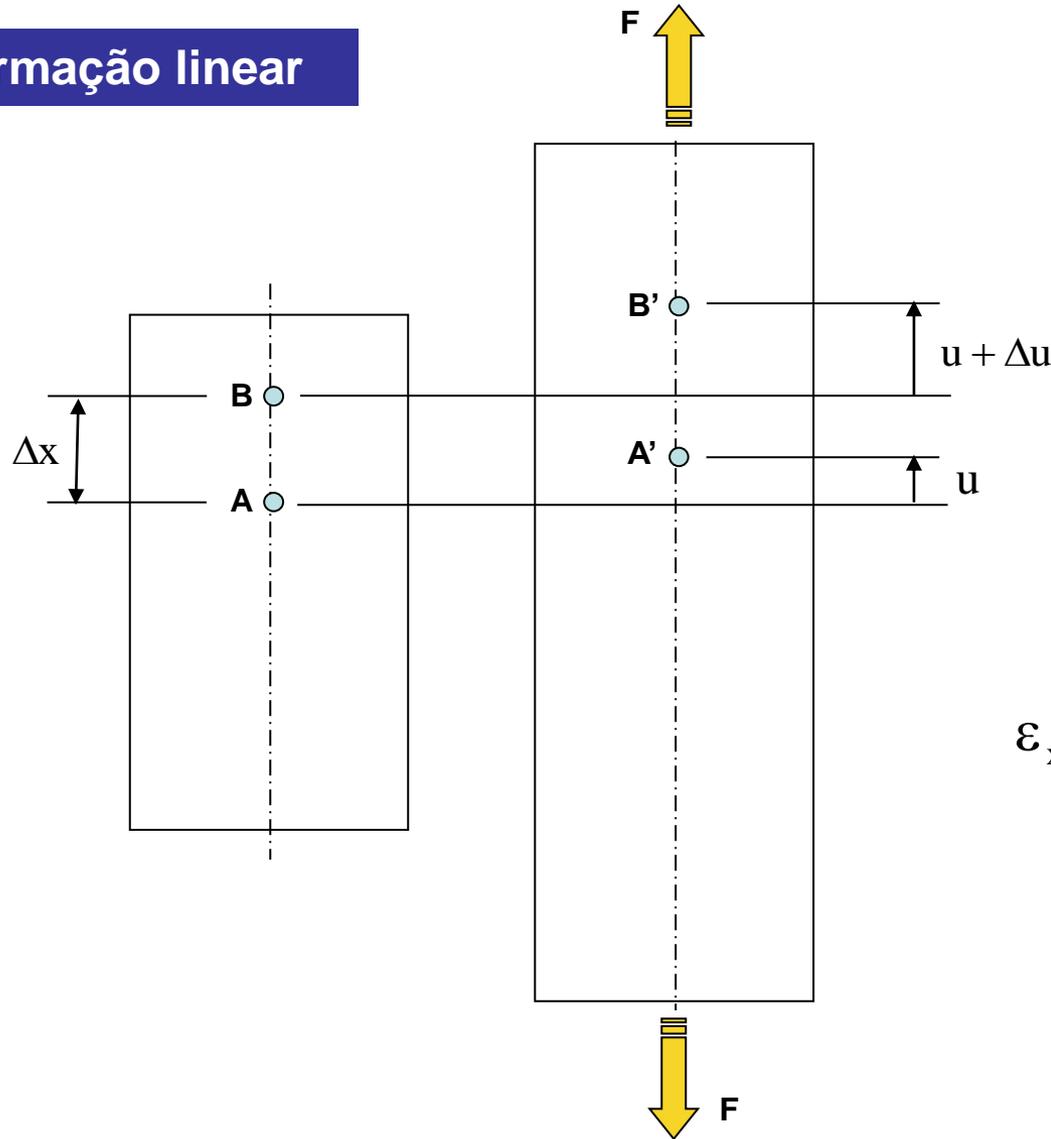
$$I_1 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$I_2 = (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)$$

$$I_3 = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$$



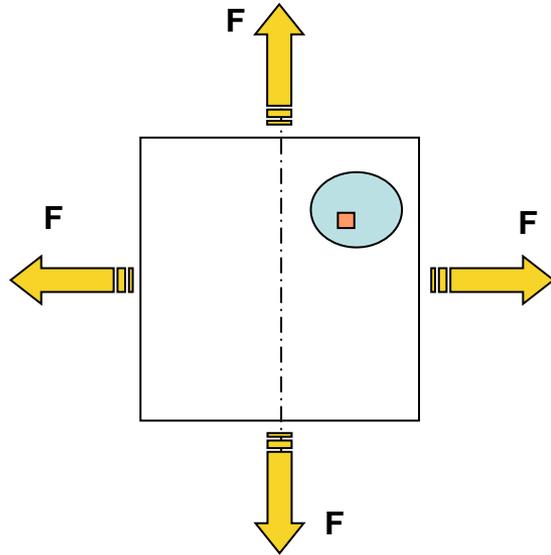
Deformação linear



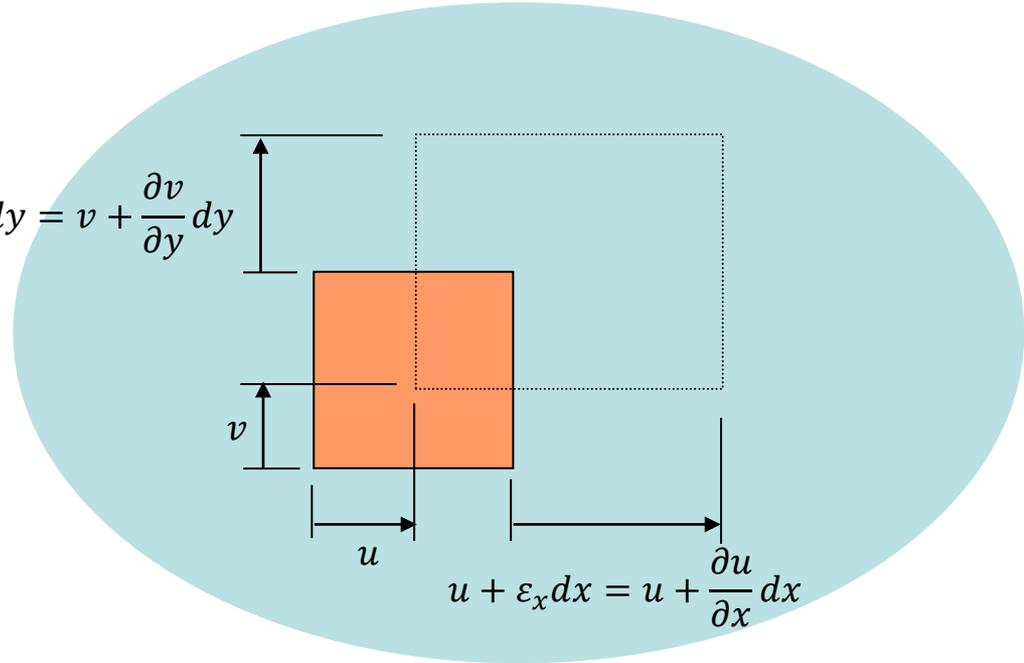
$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$



Deformações lineares



$$v + \varepsilon_y dy = v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

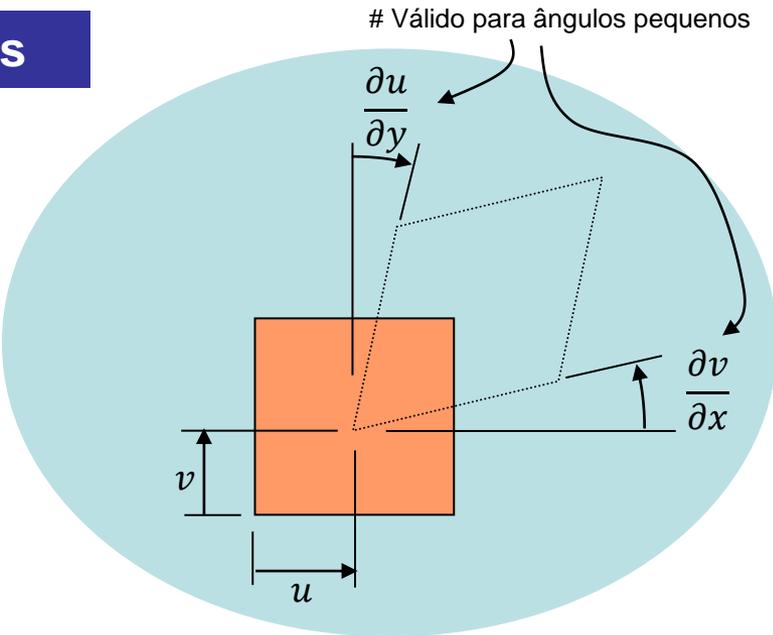
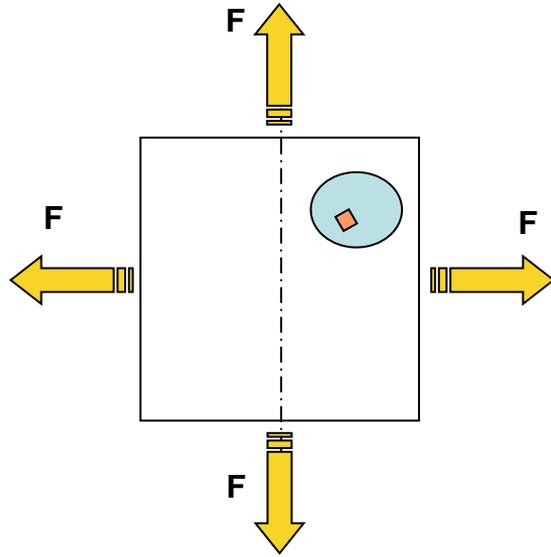


$$u + \varepsilon_x dx = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$



Deformações angulares



$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_{zy} = \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

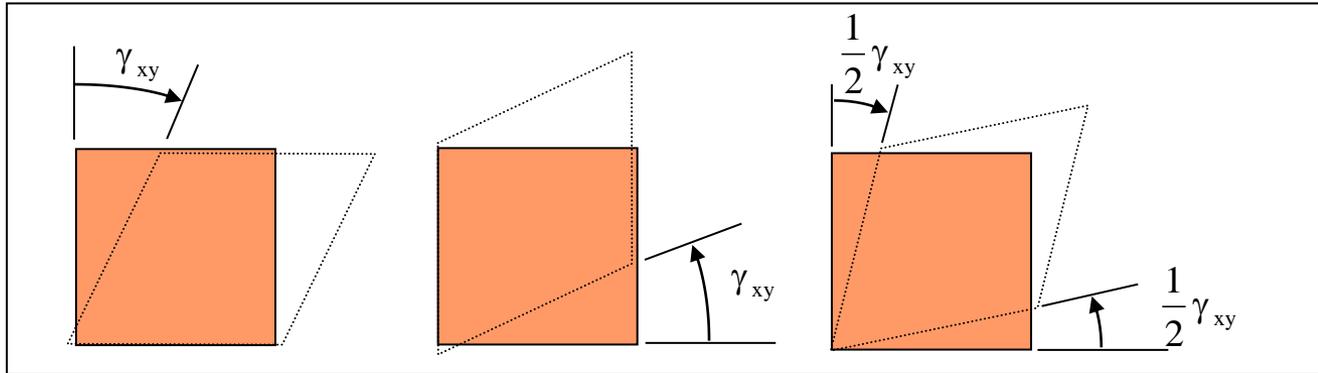
$$\epsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\gamma_{yz}}{2}$$

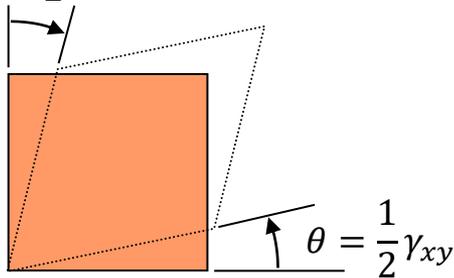
$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$



$$\theta = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$$



$$v(x) = \tan\theta \cdot x$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \tan\theta$$

$$u(y) = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \cdot y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \tan\theta$$

Para ângulos pequenos: $\tan\theta \cong \theta$

$$\Rightarrow \theta \cong \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \theta \cong \frac{\partial u}{\partial y}$$

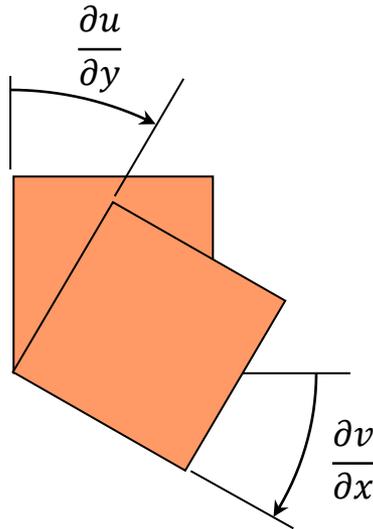
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

c.q.d

$$\epsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$



Verificação para rotações de corpo rígido:



$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} + \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = 0$$

Rotação compatível com movimento de corpo rígido resulta em deformação angular nula → OK!



Tensor de deformações

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{array} \right\}$$

Tensor de deformações

- Deformações Principais

Pode-se diagonalizar o tensor de deformações (anulando-se as deformações angulares), por meio de uma orientação adequada do sistema de coordenadas.

Obtêm-se assim as chamadas deformações principais.

A deformação principal ε_1 é o máximo valor de deformação linear que pode-se obter com o giro do sistema de coordenadas.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$



Lei de Hooke generalizada para material isotrópico

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

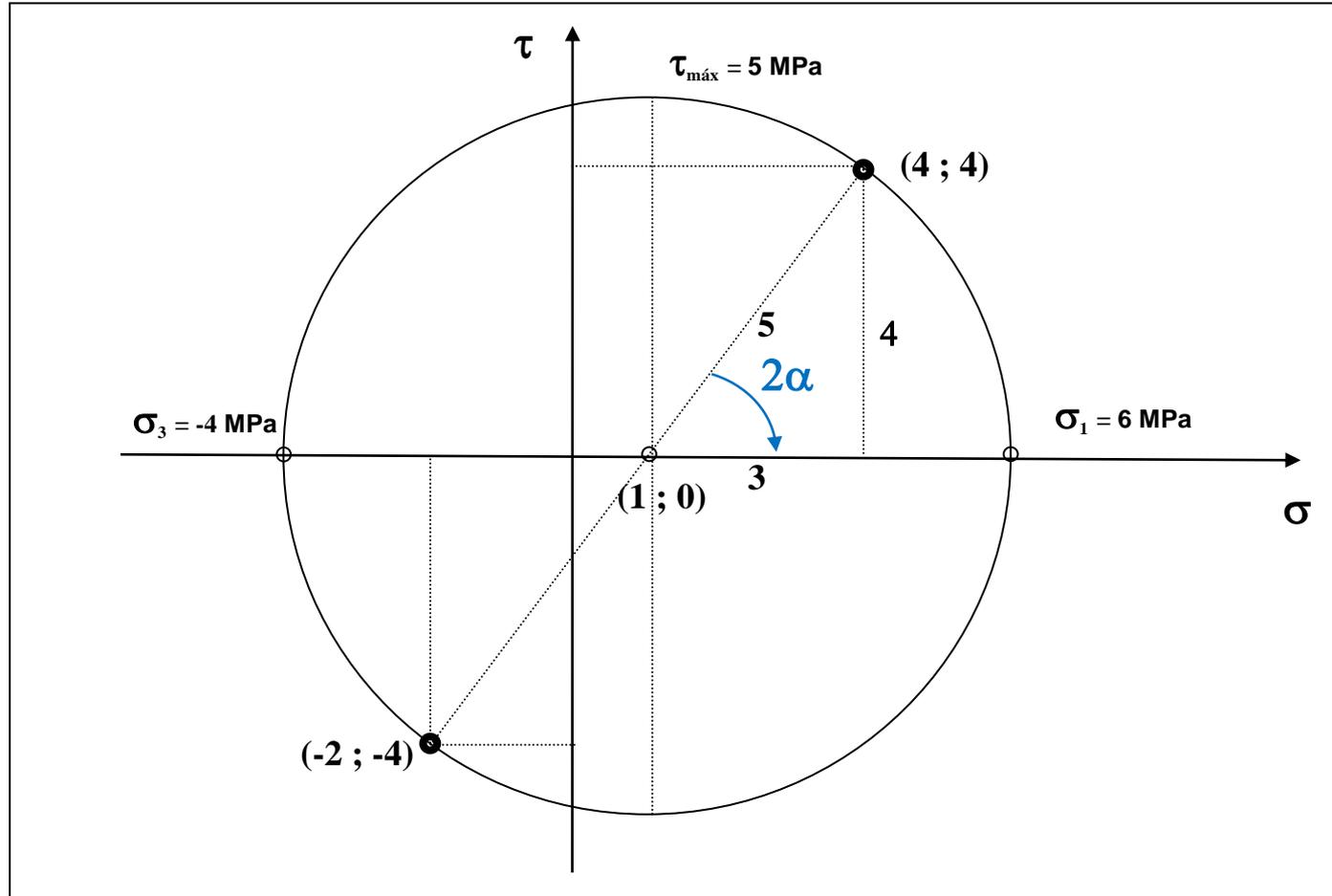
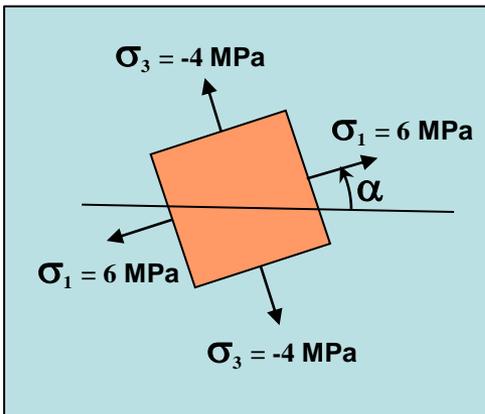
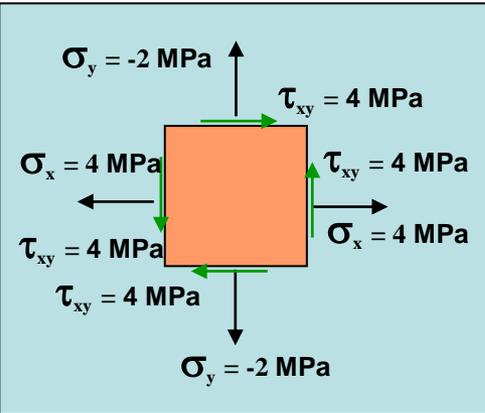
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

G → módulo de elasticidade transversal

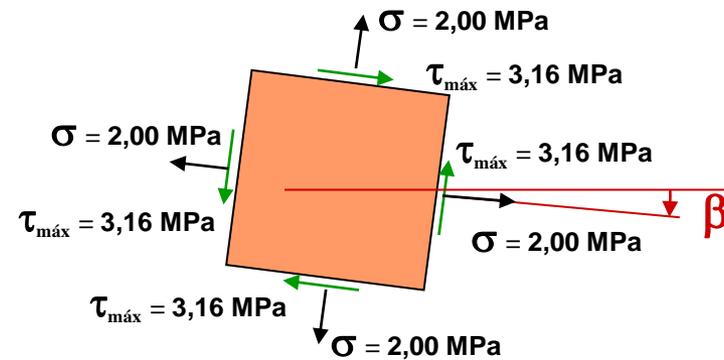
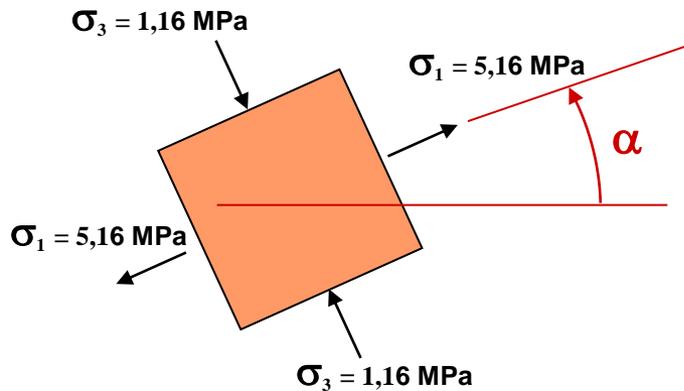
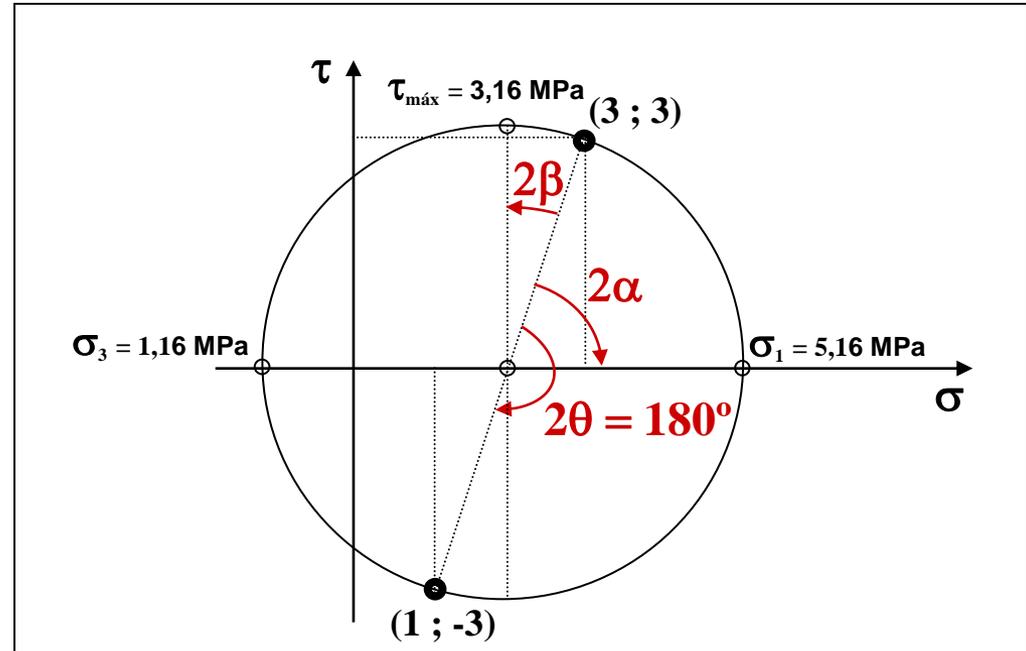
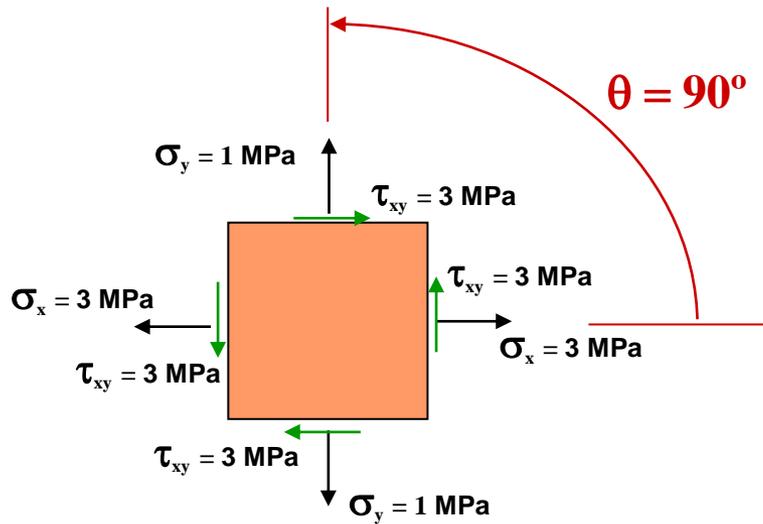


- 1 - Marcar o ponto (4,4)
- 2 - Marcar o ponto (-2,-4)
- 3 - Traçar o diâmetro
- 4 - O centro está em $\sigma = 1$ que é o ponto médio entre 4 e -2

- 5 - O raio é 5 (tensão tangencial máxima)
- 6 - A máxima tensão principal é $(1 + 5) = 6$
- 7 - A mínima tensão principal é $(1 - 5) = -4$
- 8 - $2\alpha = \text{arctg } 4/3$
- 9 - $2\beta = \text{arctg } 3/4$

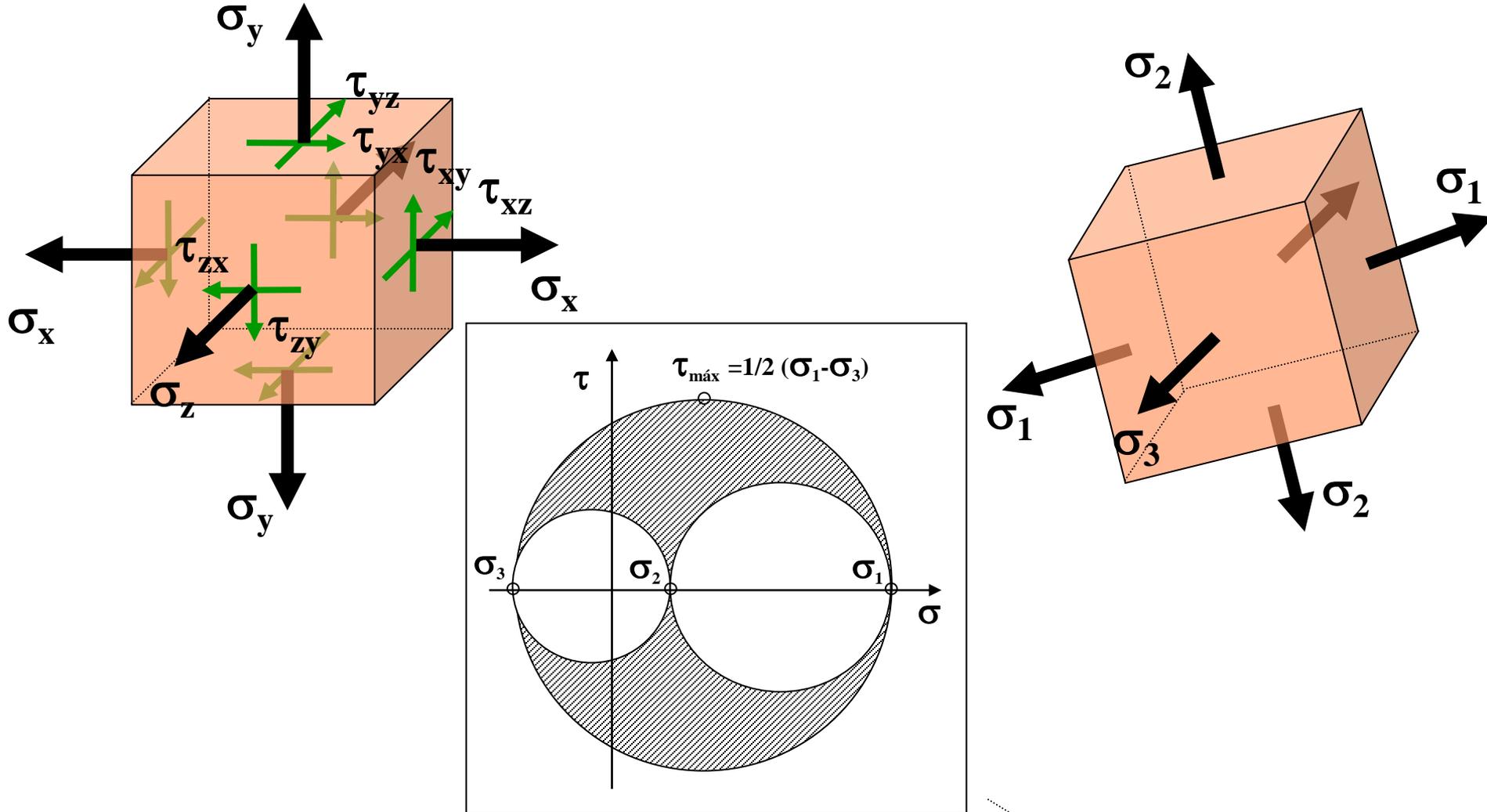


Circulo de Mohr das Tensões



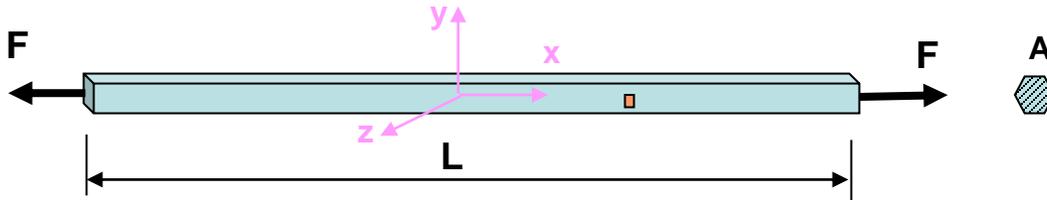


Circulo de Mohr Tridimensional

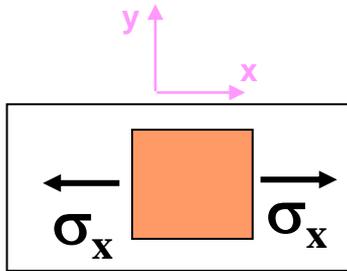




Carga axial em vigas



F = força aplicada
A = área da seção transversal
L = comprimento da viga
E = módulo de elasticidade
v = coeficiente de Poisson



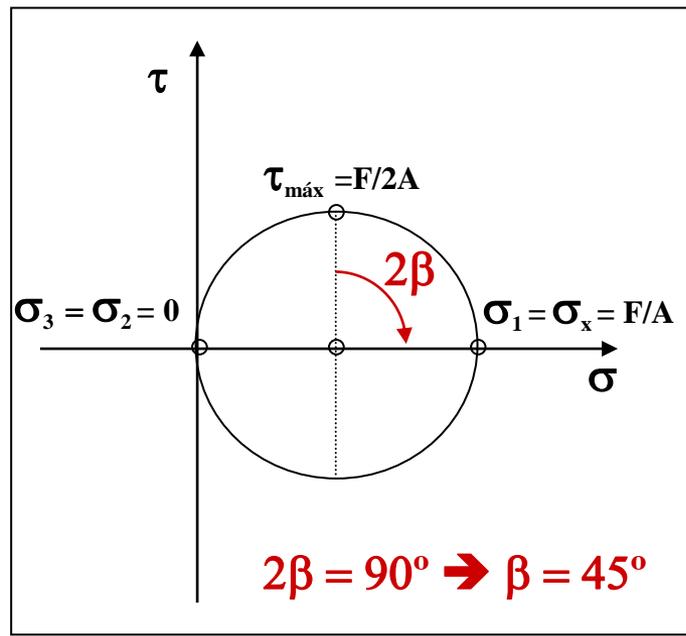
$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Tensor de tensões:

$$\begin{pmatrix} \frac{F}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\epsilon_x = \frac{F}{EA}$$

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -v \frac{F}{EA}$$

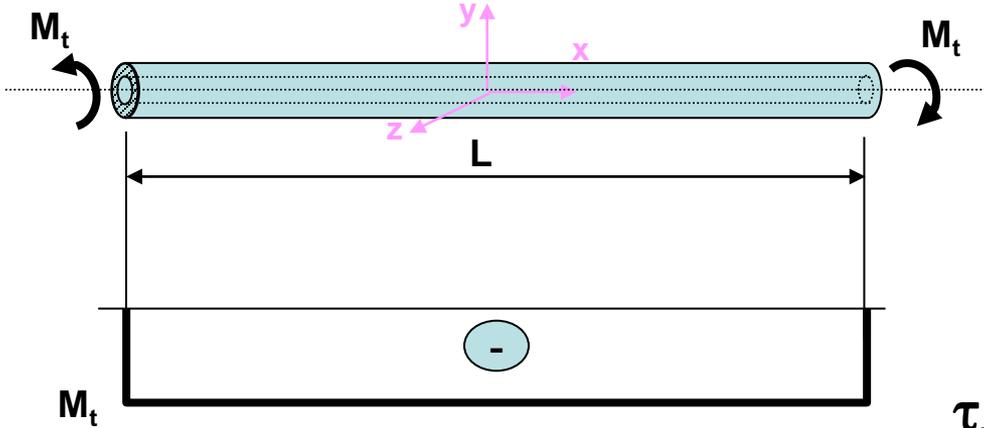
$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Tensor de deformações:

$$\begin{pmatrix} \frac{F}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & -v \frac{F}{EA} & 0 \\ 0 & 0 & -v \frac{F}{EA} \end{pmatrix}$$

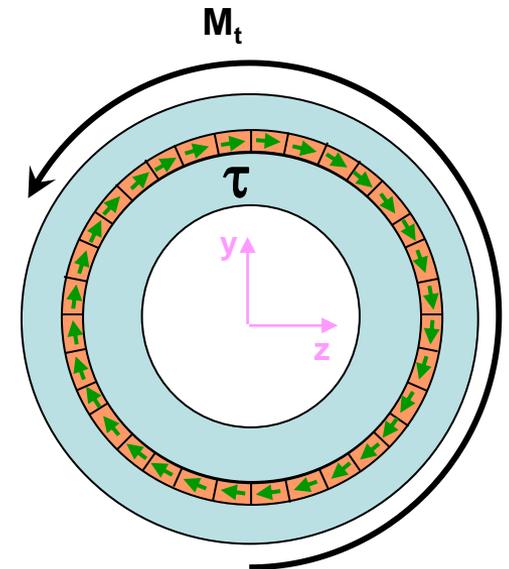
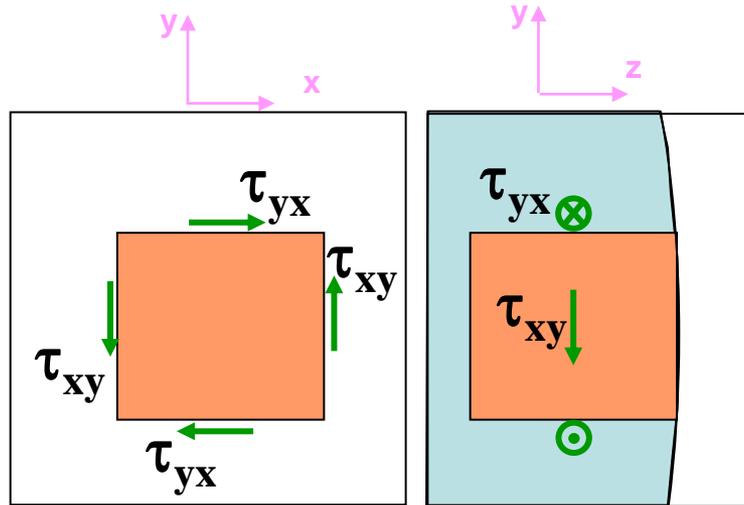
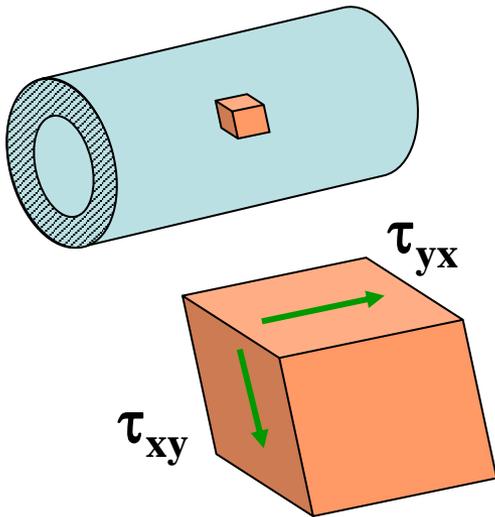


Carga de torção em vigas de seção circular



- M_t = momento torsor aplicado
- R_e = raio externo
- R_i = raio interno
- L = comprimento da viga
- E = módulo de elasticidade
- ν = coeficiente de Poisson

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$$





Carga de torção em vigas de seção circular (continuação)

Hipóteses:

- não há empenamento da seção transversal
- a deformação angular varia linearmente a partir do eixo central

$$\tau(r) = \tau_{\text{máx}} \frac{r}{R_e}$$

$$M_t = \int_{R_i}^{R_e} \tau(r) \cdot 2\pi r dr \cdot r = \int_{R_i}^{R_e} \tau_{\text{máx}} \frac{r}{R_e} \cdot 2\pi r dr \cdot r = \frac{2\pi\tau_{\text{máx}}}{R_e} \int_{R_i}^{R_e} r^3 dr = \frac{2\pi\tau_{\text{máx}}}{R_e} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{R_i}^{R_e} = \frac{\pi\tau_{\text{máx}}}{2R_e} [R_e^4 - R_i^4]$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_t \cdot R_e}{\frac{\pi}{2} [R_e^4 - R_i^4]} = \frac{M_t \cdot R_e}{\frac{\pi}{32} [\phi_e^4 - \phi_i^4]}$$

Identifica-se o denominador como sendo o momento polar de inércia da seção transversal, assim:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_t \cdot R_e}{J_x}$$

$$\tau(r) = \frac{M_t \cdot r}{J_x}$$

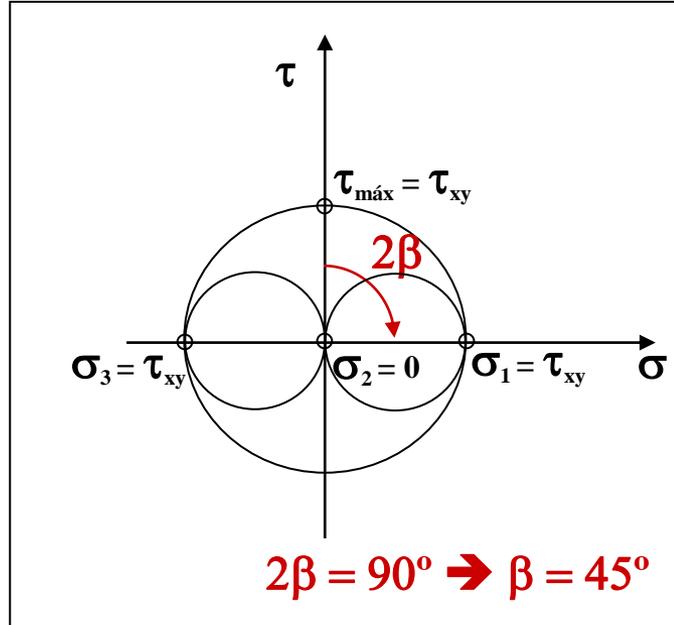


Carga de torção em vigas de seção circular (continuação)

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{Mt \cdot r}{J_x}$$

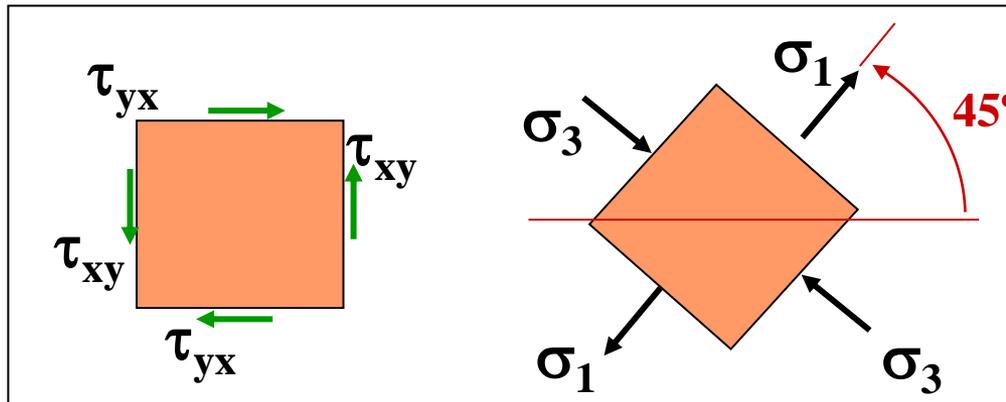
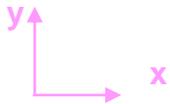


Tensor de tensões:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{Mt \cdot r}{J_x} & 0 \\ \frac{Mt \cdot r}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tensor de tensões principais:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \frac{Mt \cdot r}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{Mt \cdot r}{J_x} \end{bmatrix}$$





Carga de torção em vigas de seção circular (continuação)

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{yz} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{Mt \cdot r}{GJ_x} \Rightarrow \varepsilon_{xy} = \frac{Mt \cdot r}{2GJ_x}\end{aligned}$$

Tensor de deformações:

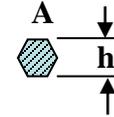
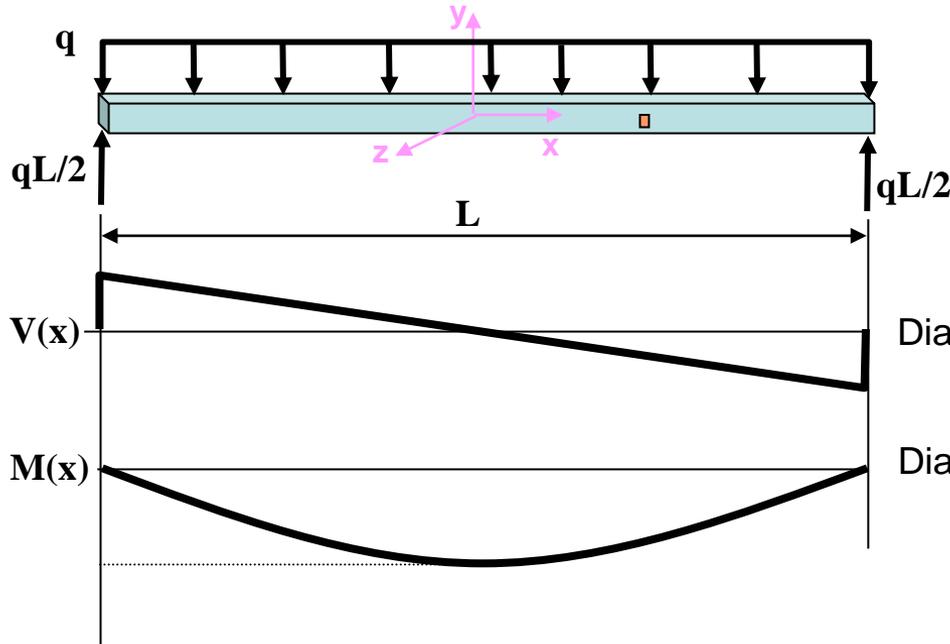
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{Mt \cdot r}{2GJ_x} & 0 \\ \frac{Mt \cdot r}{2GJ_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tensor de deformações principais:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{Mt \cdot r}{2GJ_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Mt \cdot r}{2GJ_x} \end{bmatrix}$$



Carga de flexão em vigas



q = carregamento distribuído
 A = área da seção transversal
 h = altura da seção transversal
 L = comprimento da viga
 E = módulo de elasticidade

Diagrama de esforços cortantes (V)

Diagrama de momentos fletores (M)

$$V(x) = q \frac{L}{2} - qx$$

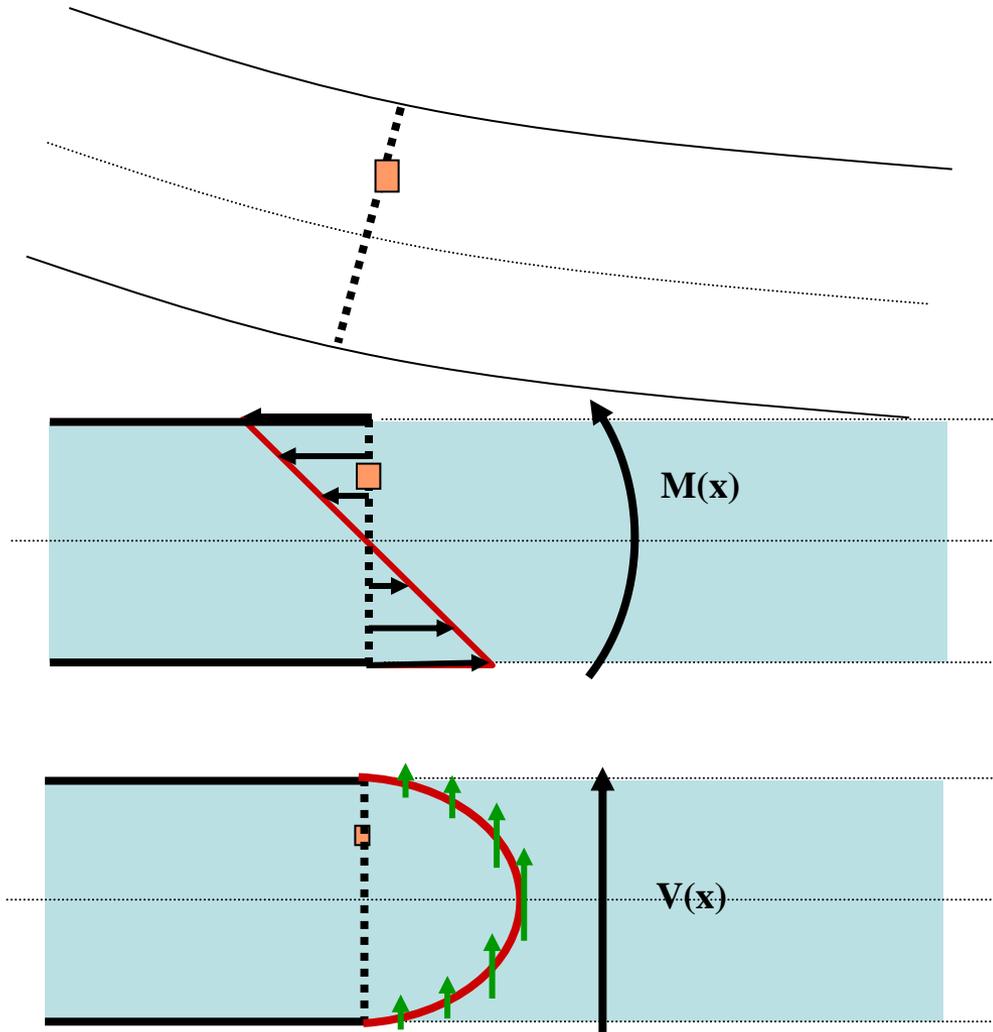
$$V_{\text{máx}(x=0)} = \frac{qL}{2}$$

$$M(x) = -q \frac{L}{2} \cdot x + qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{q}{2} (x^2 - Lx)$$

$$M_{\text{máx}(x=L/2)} = \frac{qL^2}{8}$$

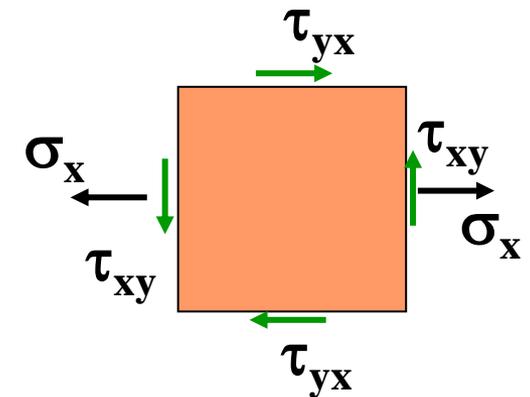


Carga de flexão em vigas (continuação)



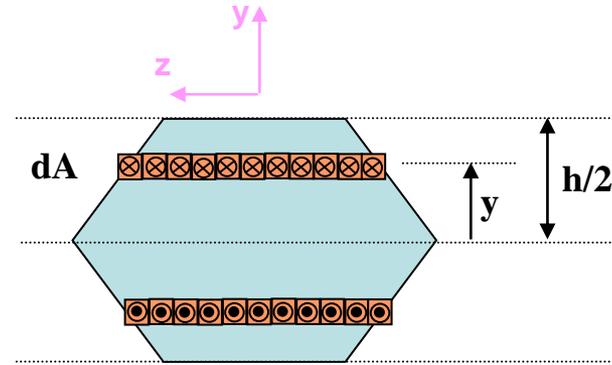
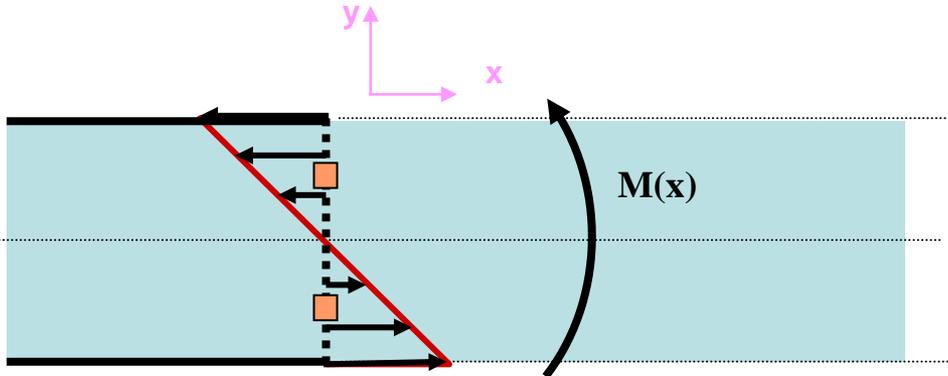
Hipóteses:

- deformações lineares variam linearmente a partir do eixo longitudinal da viga que passa pelo centróide da seção transversal
- deformações angulares de cisalhamento são máximas no eixo longitudinal e zeram nas fibras externas superior e inferior





Carga de flexão em vigas (continuação)



$$M(x) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma(x, y) \cdot y \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{x,m\acute{a}x} \frac{y}{h/2} \cdot y \cdot dA = \frac{2\sigma_{x,m\acute{a}x}}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dA$$

$$\sigma_{x,m\acute{a}x} = \frac{M(x) \frac{h}{2}}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dA}$$

Identifica-se o denominador como sendo o momento de inércia da seção transversal, assim:

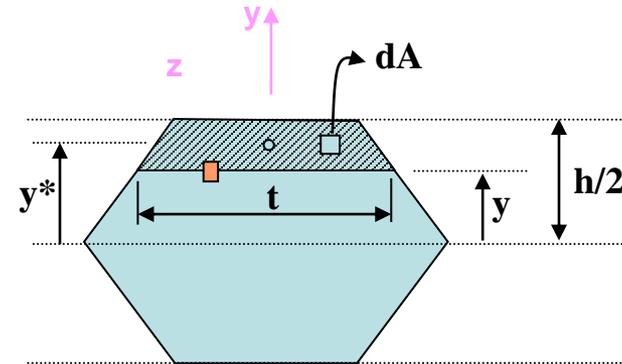
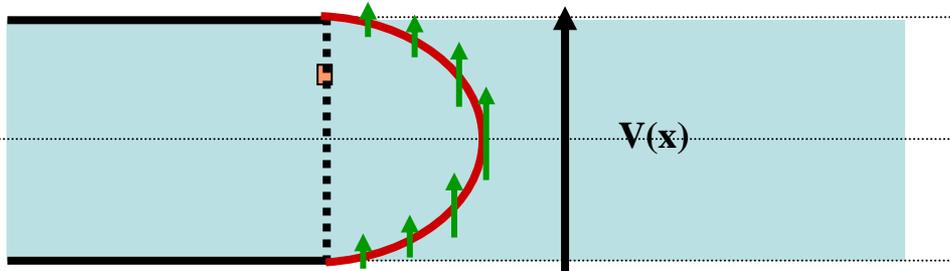
$$\sigma_{x,m\acute{a}x} = \frac{M(x) \frac{h}{2}}{Jz}$$

No exemplo, o momento fletor máximo ocorre no meio da viga ($x=L/2$):

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{qL^2 \frac{h}{2}}{8Jz}$$



Carga de flexão em vigas (continuação)



$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{V(x)Q(y)}{Jz \cdot t}$$

Q = momento estático da área hachurada (acima do ponto de interesse)

y* = distância do centróide da área hachurada ao eixo neutro

t = largura da base da área hachurada

Jz = momento de inércia da seção transversal

$$Q(y) = \int y dA = Ay^*$$

sobre a área hachurada



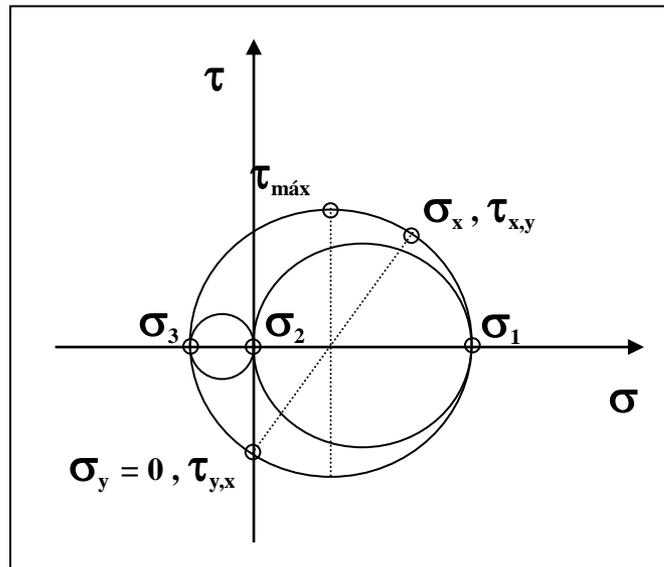
Carga de flexão em vigas (continuação)

Tensor de tensões:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tensor de tensões principais:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$



Observe-se que:

- O momento fletor é máximo no meio da viga enquanto o esforço cortante é máximo nas extremidades;

- Numa mesma seção transversal, a tensão de flexão é máxima nas fibras superiores e inferiores enquanto a tensão de cisalhamento é máxima na linha neutra.



Critérios de Falha

p/ materiais frágeis

Teoria da máxima tensão normal (Rankine, ~1850)

A falha ocorre quando máxima tensão normal ultrapassa valor admissível de tensão normal obtido no ensaio de tração.

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 < \frac{LR}{N}$$

p/ materiais dúcteis

Teoria da máxima tensão de cisalhamento (Tresca, ~1868)

A falha ocorre quando máxima tensão tangencial ultrapassa valor admissível de tensão tangencial obtido no ensaio de tração.

$$\tau_{m\acute{a}x} < \tau_{adm} \Rightarrow \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} < \frac{LE}{2N}$$

$$\sigma_{eq} = |\sigma_1 - \sigma_3| < \frac{LE}{N}$$

Teoria da máxima energia de distorção (von Mises, ~1913)

A falha ocorre quando a máxima energia de distorção de cisalhamento ultrapassa valor admissível de energia de distorção de cisalhamento obtido no ensaio de tração.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} < \frac{LE}{N}$$

$N \rightarrow$ coeficiente de segurança

$\sigma_{eq} \rightarrow$ tensão equivalente para verificação do dimensionamento

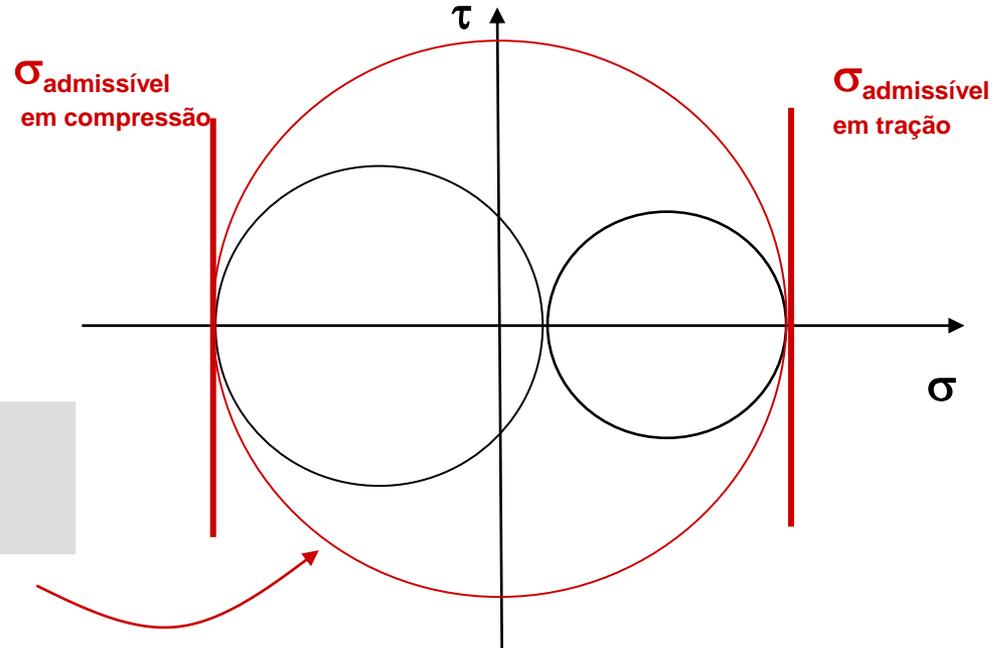
$LR \rightarrow$ limite de resistência do material

$LE \rightarrow$ limite de escoamento do material

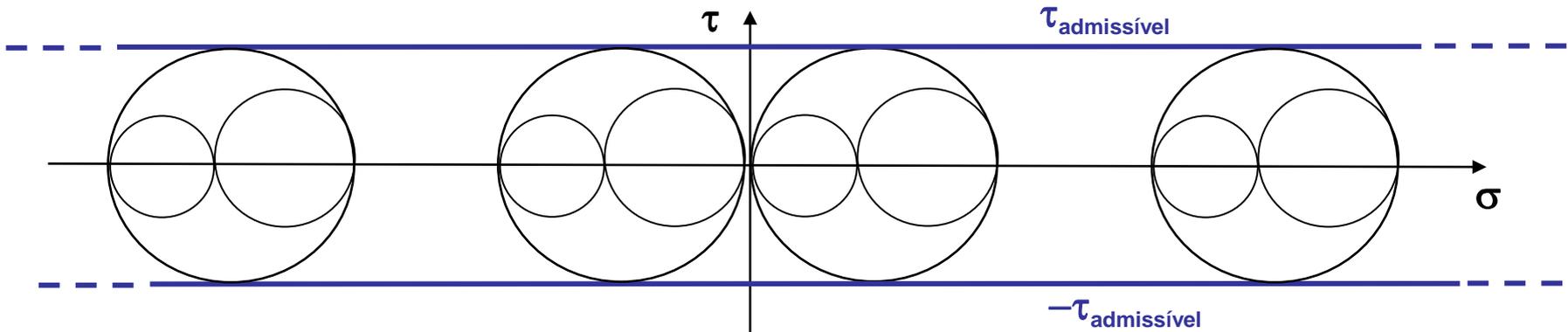


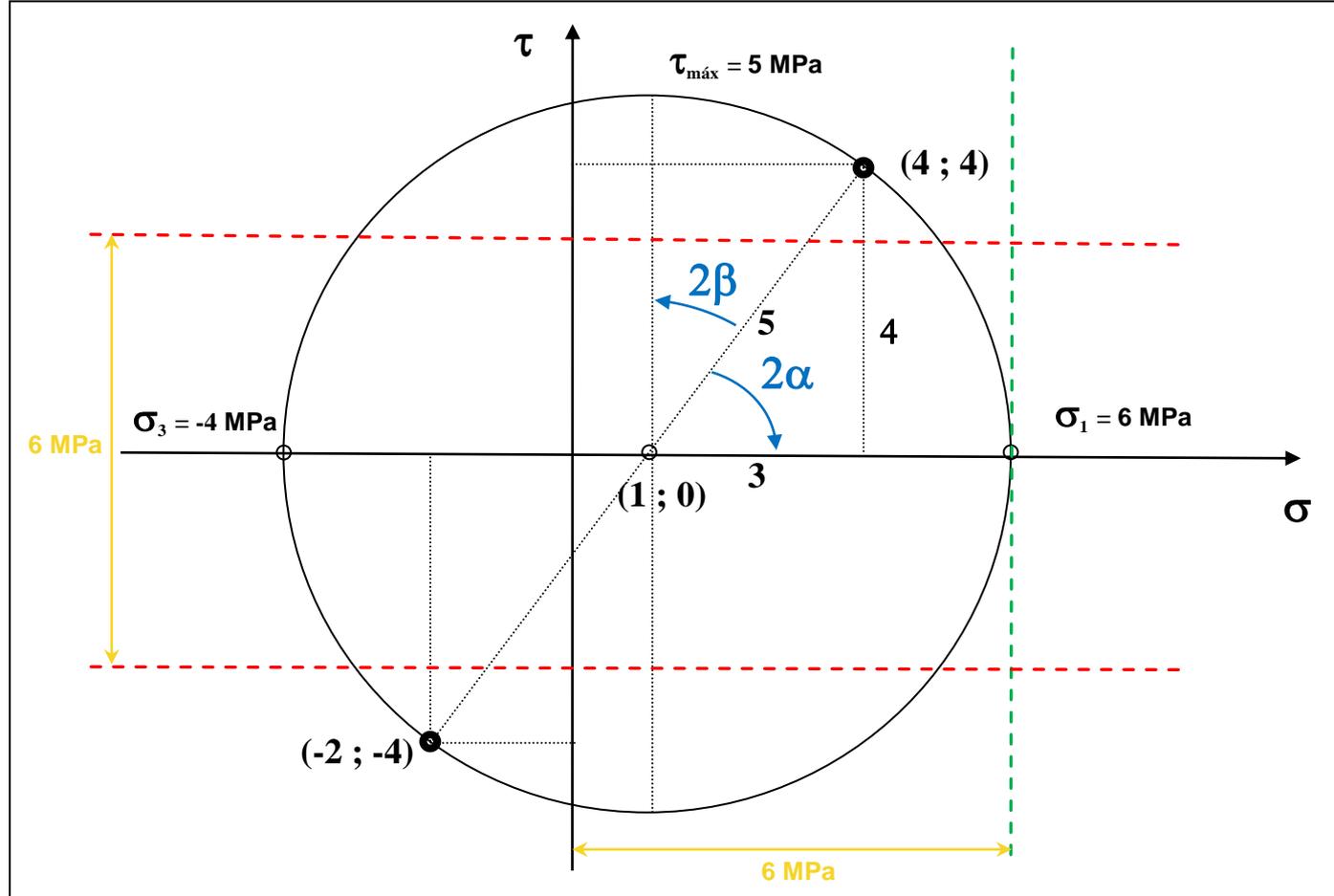
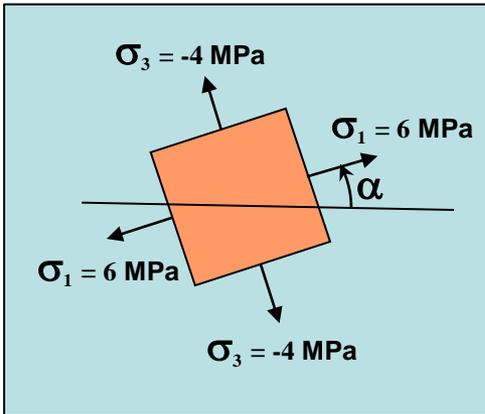
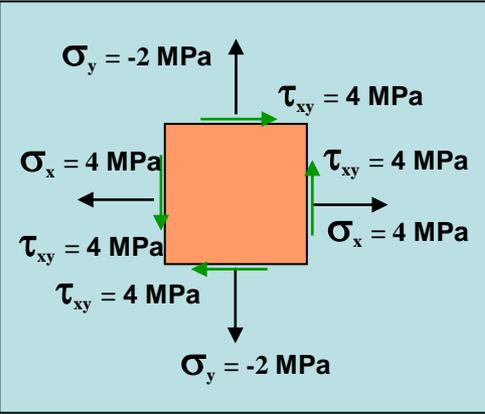
• Critério de falha segundo a teoria da máxima tensão normal

Envoltório do máximo círculo de Mohr admissível



• Critério de falha segundo a teoria da máxima tensão de cisalhamento (Tresca)





- 1 - Marcar o ponto (4,4)
- 2 - Marcar o ponto (-2,-4)
- 3 - Traçar o diâmetro
- 4 - O centro está em $\sigma = 1$ que é o ponto médio entre 4 e -2

- 5 - O raio é 5 (tensão tangencial máxima)
- 6 - A máxima tensão principal é $(1 + 5) = 6$
- 7 - A mínima tensão principal é $(1 - 5) = -4$
- 8 - $2\alpha = \arctg 4/3$
- 9 - $2\beta = \arctg 3/4$

Sendo: $\sigma_{\text{adm}} = 6 \text{ MPa}$:

Rankine $\rightarrow \sigma_{\text{eq}} = 6 \text{ MPa} \rightarrow \text{OK}$

Tresca $\rightarrow \sigma_{\text{eq}} = 10 \text{ MPa} \rightarrow \text{n\~{o} OK}$



Galileo Galilei
1564 - 1642



Robert Hooke
1635 - 1703



Thomas Young
1773 - 1829



Augustin Cauchy
1789 - 1857



Claude Navier
1785 - 1836

Galileu Galilei, - “Discorsi su due nuove scienze” - 1638
“a resistência é proporcional a área da seção transversal”.

Robert Hooke, – “De Potentia Restitutiva” - 1679
“ut tensio sic vis” (“conforme é a extensão é a força”) → Lei de Hooke.

Thomas Young - [*A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts \(1807, republished 2002 by Thoemmes Press\).*](#)
Módulo de Elasticidade: relação entre a tensão e a deformação no regime elástico linear.

Augustin Cauchy, 1822
Tensão é a força dividida pela área.
Deformação é a variação relativa do comprimento quando o corpo está submetido a um esforço.

Claude Navier – 1826
Forma matemática do módulo de elasticidade; equacionamento para vigas em flexão.



FIM 03