

Capítulo I. Estudo matemático das leis naturais.

1.º — Ciência e lei natural.

1. Objecto da Ciência.

No capítulo IV da 1.ª parte (pág. 64 e seg.) vimos como o homem, na sua necessidade de *lutar* contra a Natureza e no seu desejo de a *dominar*, foi levado, naturalmente, à observação e estudo dos fenómenos, procurando descobrir as suas *causas* e o seu *encadeamento*.

Os resultados dêsse estudo, lentamente adquiridos e acumulados, vão constituindo o que, no decurso dos séculos da vida consciente da Humanidade, se pode designar pelo nome de *Ciência*. O *conhecimento científico* distingue-se, portanto, do conhecimento *vulgar* ou *primário*, no facto essencial seguinte: este satisfaz-se com o resultado imediato do fenómeno — uma pedra abandonada no ar, cai; uma leve pena de ave, abandonada no ar, paira ou sobe —; aquele faz a pergunta *porquê?* e procura uma resposta que dê uma explicação aceitável pelo nosso entendimento.

O objectivo final da Ciência é, portanto, a formação de um *quadro ordenado e explicativo* dos fenómenos naturais ⁽¹⁾, — fenómenos do mundo físico e do mundo humano, individual e social.

(1) No parág. 9, pág. 119, se encontra a noção de *fenómeno natural*.

2. Exigências.

Duas são as exigências fundamentais a que esse quadro explicativo deve satisfazer:

1.^a—*Exigência de compatibilidade.* As razões são as que demos no parág. 5 do cap. III (1.^a parte, pág. 48)—obediência ao princípio de *acôrdo da razão consigo própria.*

2.^a—*Exigência de acôrdo com a realidade.* Os homens pedem à Ciência que lhes forneça um meio, não só de conhecer, mas de *prever* fenómenos—quanto maior fôr a possibilidade de previsão, maior será o domínio dêles sobre a Natureza; quem sabe prever sabe melhor defender-se e, além disso, pode provocar a repetição, para seu uso, dos fenómenos naturais. A Ciência deve ser considerada, acima de tudo, como um *instrumento forjado pelos homens, instrumento activo de penetração no desconhecido.*

É evidente que, se as previsões fornecidas pelo quadro explicativo não forem confirmadas pela realidade, esse quadro pode satisfazer altamente a primeira exigência, mas nunca poderá ser o instrumento de que os homens necessitam.

Entendamo-nos bem. A Ciência não tem, *nem pode ter*, como objectivo descrever a realidade *tal como ela é.* Aquilo a que ela aspira é a construir quadros racionais de *interpretação e previsão*; a legitimidade de tais quadros dura enquanto durar o seu acôrdo com os resultados da observação e da experimentação.

Em nenhum momento, o homem de ciência pode dizer que *atingiu a essência última* da realidade; o mais que pode desejar é dar uma descrição, uma *imagem*, que satisfaça às duas exigências fundamentais.

A História da Ciência está cheia de exemplos de renovação e substituição de quadros explicativos, tornados insuficientes por deixarem de satisfazer à segunda exigência; a todo o momento, a actividade teórica (construção de quadros) e a actividade prática (observação e experimentação) estão, não só colaborando, mas em *acção-recíproca*, que faz que nenhum esquema interpretativo esteja isento da substância real que o alimenta, que nenhuma experiência esteja desacompanhada da actividade racional que a inspira e orienta.

E é esta acção-recíproca, tantas vezes desconhecida ou desdenhada por certos homens de ciência e certos filósofos, que vai a todo o momento tecendo a Ciência, fazendo dela esse maravilhoso instrumento humano, instrumento de luta, sempre incompleto, constantemente aperfeiçoado.

3. As duas características fundamentais.

A *Realidade* que a inteligência dos homens se esforça por compreender, o Mundo, no seu sentido mais largo, apresenta-se com duas características essenciais:

1.^a—*Interdependência.* Todas as coisas estão relacionadas umas com as outras; o Mundo, toda esta *Realidade* em que estamos mergulhados, é um organismo vivo, uno, cujos compartimentos comunicam e participam, todos, da vida uns dos outros.

Olhemos, por exemplo, coisa tão simples como o crescimento duma pequena erva num campo, e examinemos, com cuidado, as coisas de que depende: temos, em primeiro lugar, a constituição geológica do solo, a quantidade de calor recebida do Sol, etc., coisas que não podem perceber-se desligadas da situação da Terra no sistema solar, e dêste no Universo; é por consequência, todo o problema cosmológico. Em segundo lugar, sobre o crescimento da pequena planta influem as condições climáticas da região, e estas dependem de toda a complexidade de fenómenos atmosféricos e marinhos, actividade das manchas solares, etc.. Temos, ainda, a acção exercida pelos outros organismos vegetais e animais—há, próximo da pequena erva, outras plantas? quais? e animais? de que natureza? concorrendo para a sua destruição ou para a sua conservação? é a região habitada pelo homem? se é, que interesse tem ele pela pequenina planta? que animais cria ele que a possam prejudicar ou favorecer? porquê? que condições de fertilidade proporciona ele ao solo? que regime de cultura exerce? porquê? quais são as condições de trabalho da região?

Como se vê, uma vez examinada a questão com um pouco de cuidado, começam a aparecer as dependências, a ligar-se os problemas;—problema cosmológico, problema físico, problema

económico, problema social, tocam-se e entrelaçam-se no mais íntimo detalhe do organismo universal.

2.^a—*Fluência*. O Mundo está em permanente evolução; todas as coisas, a todo o momento, se transformam, tudo *flue*, tudo *devém*. Isto, que é a afirmação fundamental do filósofo *Heraclito* de Efeso (1.^a parte, pág. 67 e seg.) foi, posteriormente, reconhecido por grandes pensadores e pode ser verificado por qualquer de nós, seja qual for aquele objecto em que fixemos a nossa atenção. Pois não é verdade que tudo está sujeito a uma mesma lei de nascimento, vida e morte, que, por sua vez, vai originar outros nascimentos?

Isto é evidente para os seres do mundo animal; é-o ainda para os do mundo vegetal, mas parece falso para os objectos do mundo mineral.

No entanto, basta observar com atenção, tomando o recuo conveniente; notar como até as coisas mais estáveis se alteram com o tempo: como o ferro envelhece com a ferrugem, como a rocha se desagrega e se torna areia, como as próprias montanhas mudam de forma pela erosão, como os rios mudam de leito, as margens dos continentes ganham e perdem em luta com o mar. Tudo está numa permanente agitação e, por graus insensíveis, evolucionando de forma que a Terra não é, neste instante, a mesma que era há momentos, e será daqui a uns momentos diferente da que é agora. De tal modo que nem a própria frase «o que é agora» tem significado real; — durante o tempo que ela levou a pronunciar, ou a escrever, o processo de evolução actuou e a Terra transformou-se. E evolucionando assim, ela participa ainda doutra evolução mais larga; girando em torno do Sol, ela entra na vida de outro organismo—o sistema solar—com a sua evolução própria que condiciona a de cada um dos seus componentes. E assim, do mesmo modo, de grau em grau de complexidade e de extensão; do sistema solar à Via Láctea, desta ao Universo, considerado como conjunto de ilhas galácticas.

De modo que, do extremo superior ao inferior da escala, do movimento prodigioso de *expansão* do Universo, ao movimento, não menos prodigioso, das partículas constituintes do átomo,— tudo flue, tudo devém, tudo é, a todo o momento, *uma coisa nova*.

Este princípio do permanente rejuvenescimento tem preocupado os pensadores de todos os tempos e provocado as atitudes mais contraditórias.

Uns, aceitando-o como um dado real, uma característica fundamental da Natureza, fazem dele a base de partida do seu esforço na compreensão do real. Outros, aterrorizados pelo sentimento de instabilidade que ele provoca, instabilidade que nada poupa, do mundo físico ao mundo social, reagem, procurando substituir o mundo real do *devir*, por um mundo artificial da *permanência*.

A História do Pensamento está cheia desta luta gigantesca, luta de que traçamos, no cap. IV da 1.^a Parte, um dos primeiros episódios.

Não é objecto deste livrinho a descrição completa das fases posteriores dessa luta, mas a ela teremos que nos referir ainda para esclarecimento de certos problemas.

Por agora, vamos seguir o fio dos raciocínios que se ligam ao objecto directo deste capítulo:—o estudo matemático das leis naturais.

4. Dificuldades.

Começemos por observar que as duas características fundamentais que apontámos—*interdependência* e *fluência*—nos colocam em sérios embaraços ao pretendermos empreender o estudo de qualquer facto natural.

Se tudo depende de tudo, como fixar a nossa atenção num objecto particular de estudo? temos que estudar tudo ao mesmo tempo? mas qual é o cérebro que o pode fazer?

Por outro lado, se tudo *devém*, como encontrar, no mundo movente da fluência, os factos, os seres, os próprios objectos do nosso estudo?

Veremos, no decorrer deste trabalho, como os homens de ciência conseguiram encontrar os métodos de investigação que permitem fazer o estudo da realidade fluente.

Agora, vamos ocupar-nos do primeiro grupo de perguntas: —as referentes à interdependência.

5. Noção de isolado.

Na impossibilidade de abraçar, num único golpe, a totalidade do Universo, o observador ⁽¹⁾ recorta, destaca, dessa totalidade, um conjunto de seres e factos, abstraindo de todos os outros que com eles estão relacionados.

A um tal conjunto daremos o nome de *isolado*; um *isolado* é, portanto, uma *secção* da realidade, nela recortada arbitrariamente. É claro que o próprio facto de tomar um *isolado* comporta um erro inicial—afastamento de todo o resto da realidade ambiente,—erro que necessariamente se vai reflectir nos resultados do estudo. Mas é do bom-senso do observador recortar o seu *isolado* de estudo, de modo a compreender nele todos os factores dominantes, isto é, todos aqueles cuja acção de interdependência influi sensivelmente no fenómeno a estudar. De que nem sempre isso se consegue, a história da Ciência e a vida de todos os dias oferecem múltiplos exemplos. Quantas vezes, na observação de um certo fenómeno ou no decurso duma dada acção, surge um facto inesperado. Que quer dizer—*inesperado*? Que o *isolado* não fora convenientemente determinado, que um factor dominante estava ignorado e se revela agora. Será preciso acrescentar que no aparecimento do *inesperado* reside um dos motivos principais do progresso no conhecimento da realidade, porque, obrigando a uma melhor determinação do *isolado*, exige um mais cuidadoso exame das condições iniciais?

Muitas vezes, o estudo encaminha-se de modo que há necessidade de tomar um *isolado* como elemento constitutivo de um outro mais largo.

Por exemplo, após ter tomado como *isolado* cada um dos órgãos duma árvore e estudado a sua fisiologia particular, constitui-se um *isolado* superior—árvore e terreno—no qual se estudará a vida fisiológica da árvore. Por sua vez, a árvore pode ser tomada como uma unidade dum novo *isolado* mais largo—uma floresta,— a flora duma certa região, etc. Quer dizer,

(1) Entenderemos aqui o termo *observador* num sentido muito largo: todo aquele—homem de ciência, agricultor, literato—que, num dado momento, empreende um estudo qualquer.

para a recomposição dum certo compartimento da Realidade, é necessário constantemente construir *cadeias*, e a cada elo da cadeia corresponde um *nível de isolado*.

6. Noção de qualidade.

No cap. VI da 1.^a Parte (pág. 98) tivemos já ocasião de definir o conceito de *qualidade*, o que fizemos da maneira seguinte: ao conjunto de relações em que um determinado ser se encontra com os outros seres dum agregado, chamaremos as qualidades desse ser.

Temos agora que dar maior precisão a esse conceito, porque ele importa grandemente para o que vai seguir-se.

Sejam *A* e *B* dois componentes dum *isolado*; entre eles existem relações de interdependência. Consideremos uma dessas relações; nela podemos distinguir dois *sentidos*: um de *A* para *B*, e outro de *B* para *A*; diremos, do primeiro sentido, que tem *antecedente* *A* e *consequente* *B*, do segundo, que tem *antecedente* *B* e *consequente* *A*; distingui-los-emos respectivamente pelas notações: *sentido de relação* $A \rightarrow B$ e *sentido de relação* $B \rightarrow A$.

Por exemplo, suponhamos que *A* e *B* são duas espécies animais, das quais *B* se alimenta de *A*. Nesta relação, o sentido $A \rightarrow B$ implica para o consequente *B* uma fonte de *conservação*, e o sentido $B \rightarrow A$ implica para o consequente *A* uma fonte de *destruição*.

A relação é *uma*, simplesmente os seus dois sentidos têm significados distintos para os respectivos consequentes.

Pode acontecer que os dois sentidos duma mesma relação tenham o mesmo significado; diremos então que se trata duma *relação simétrica*.

Por exemplo: de acordo com a lei de gravitação de *Newton*, entre dois corpos *c* e *c'*, de massas *m* e *m'*, desenvolve-se uma força atractiva cuja intensidade é proporcional ao produto $m \cdot m'$; aqui, os dois sentidos $c \rightarrow c'$ e $c' \rightarrow c$ têm o mesmo significado—desenvolvimento duma acção atractiva.

Definição de qualidade:—Sejam *A*, *B*,...*L* componentes dum *isolado*; ao conjunto de todas as relações $A \rightarrow B$,... $A \rightarrow L$ dá-se o nome de *qualidades de A em relação a B*,...*L*.

Desta definição resultam algumas consequências importantes:

1.^a—Dados dois objectos *A* e *B*, entre eles existem sempre relações de interdependência; a cada uma delas corresponde uma qualidade de *A* em relação a *B*, e uma qualidade de *B* em relação a *A*; se a relação for *simétrica*, cada uma das duas qualidades que dela resultam diz-se também *simétrica*. Por exemplo, a qualidade atractiva existente entre duas massas quaisquer *m* e *m'* é simétrica; é também simétrica a *qualidade de equivalência* entre dois conjuntos (1.^a Parte, cap. I, parágs. 8 e 14).

2.^a—Não se pode falar de *qualidades intrinsecas* dum ser ou objecto, de qualidades que residam no *objecto-em-si*. As qualidades são relações orientadas; se os consequentes mudam, mudam as relações. Por exemplo, uma folha de amoreira tem, para a árvore, a qualidade de ser um órgão de respiração, para o bicho de seda, a de ser um meio de nutrição, para o homem, a de ser verde, de poder servir de meio económico, etc.

3.^a—É indispensável que o leitor se familiarize com a ideia de plasticidade e fluência da noção de qualidade, que se compenetre bem desta verdade fundamental—*a isolado novo, qualidades novas*. É preciso sempre, quando se consideram as qualidades dum ser, pensar no isolado a que ele pertence, *pensar no seu contexto*; só em relação ao contexto é que as qualidades têm significado.

Assim como há níveis de isolado (parágs. 5), assim há também *níveis de qualidade*; o leitor tem alguns exemplos no cap. VI, 1.^a Parte (pág. 97), e com facilidade encontra muitos outros.

7. Noção de quantidade.

Há qualidades que não são susceptíveis de admitir graus diferentes de intensidade, isto é, *qualidades a respeito das quais se não podem fazer juízos de mais que, maior, menos que, menor*.

Por exemplo, uma circunferência não é mais nem menos circular que outra; duas rectas dum plano, em geometria euclídeana, não podem ser mais ou menos paralelas — ou são paralelas ou são concorrentes.

Do mesmo modo, dados dois movimentos que, em relação

a um sistema de referência, são rectilíneos e uniformes, não se pode dizer de um deles que é mais ou menos rectilíneo e uniforme que o outro.

Para outras qualidades, porém, o caso passa-se de maneira diferente; vejamos dois exemplos:

Exemplo a) João, António e Manuel são três indivíduos a respeito dos quais, pelo conhecimento que temos do seu comportamento em situações semelhantes, consideramos João como mais corajoso que António e António como mais corajoso que Manuel. A qualidade *coragem*, que João, António e Manuel têm em relação a nós, *observadores*, admite gradações de intensidade, as quais respeitam a transitividade, — se temos João como mais corajoso que António e António como mais corajoso que Manuel, temos evidentemente João como mais corajoso que Manuel.

Exemplo b) Consideremos um corpo *c* em movimento e seja *v* a sua velocidade em cada ponto da trajectória (1). Esta qualidade—velocidade do móvel *c*—é susceptível de intensificação, de aumentar ou diminuir, como toda a gente sabe.

Pois bem, — *daquelas qualidades, como as dos exemplos a) e b), a respeito das quais se podem fazer os juízos de mais que, menos que, maior que, menor que, diremos que admitem variação segundo a quantidade*.

A *quantidade* aparece-nos, assim, como um *atributo da qualidade* e é sempre neste sentido que usaremos o termo neste livrinho. Na linguagem corrente ele é por vezes tomado como sinónimo de *número*; — quando se diz: uma grande quantidade de pessoas, quer significar-se: um grande número de pessoas.

Na linguagem científica e filosófica, o termo *quantidade* é empregado, muitas vezes, com sentidos diferentes. *Aristóteles* definiu quantidade como «aquilo que é divisível em dois ou mais elementos integrantes, dos quais cada um é, por natureza, uma coisa una e determinada» (2).

Frequentemente, toma-se quantidade como «aquilo que é

(1) Só na 3.^a Parte será definido com rigor o que se entende por velocidade num ponto; para a compreensão do que se diz aqui, basta, porém, a noção intuitiva que toda a gente tem do significado duma frase como esta: — o comboio passou pela gare de X a 70 km. à hora.

(2) *Metafísica* Δ 13, 1020 a.

objecto de medida» ou, pelo menos, aquilo que, por natureza, admite ser medido, ainda que se não possa representá-lo efectivamente por um número (1).

O sentido que usaremos aqui e que acima estabelecemos é, como o leitor vê, diferente.

Consideramos a quantidade como um *atributo* da qualidade e não como um *objecto*; nem sequer exigimos que haja possibilidade de *medir* para falarmos em quantidade. No exemplo *b*), a quantidade (da velocidade) pode ser medida; tem sentido o falar-se duma velocidade dupla, tripla, de outra; mas no exemplo *a*) não se dá isso — a qualidade *coragem* admite uma variação segundo a quantidade, mas essa variação não é traduzível em números; tem sentido o dizer-se que João é mais corajoso que António mas não que a coragem de João é dupla da de António.

De resto, o poder ou não traduzir-se em números uma variação de quantidade é uma questão que depende, acima de tudo, do grau de conhecimento momentâneo dos homens; não é, de modo nenhum, uma questão que possa pôr-se em absoluto. O progresso das ciências de observação permite em certa altura *medir* o que antes se sabia apenas que variava segundo a quantidade.

O que é necessário para que se possa medir uma variação de quantidade? (2) — Que cada estado possa ser obtido, por adição, a partir de outros estados, e que essa adição seja comutativa e associativa (3). Tomando então um desses estados, convenientemente escolhido, para *unidade*, a medição faz-se comparando cada estado com aquêle que se tomou como unidade; veja o leitor o que dissemos a pág. 29 e seg. (1.ª Parte) a propósito da medição de segmentos e interprete-o dentro destes elementos teóricos gerais que estamos agora apresentando.

Como imediatamente se verifica, a possibilidade de medição existe, no estado actual do nosso conhecimento, no caso do exemplo *b*) e não existe no do exemplo *a*).

Em resumo, a *quantidade* é um *atributo* da *qualidade* e,

(1) Vocabulário filosófico de A. Lalande, artigo *Quantité*.

(2) V. Pierre Duhem, *La Théorie Physique*, pág. 163.

(3) 1.ª Parte, cap. I, pág. 17-18.

como tal, *só em relação a ela pode ser considerada*. A questão de saber se a variação de quantidade é ou não susceptível de medida não tem significado absoluto mas apenas significado *histórico*; — num dado momento, em determinado estado de avanço das ciências da Natureza, pode aprender-se a medir o que até aí era impossível.

8. Transformação da quantidade em qualidade.

Aos homens interessa, como atrás dissemos, (parág. 1), construir um *quadro explicativo* dos fenómenos naturais. Em que consiste?

Tomemos um certo *isolado* de estudo; arrastado na fluência de todas as coisas, ele transforma-se — cada um dos seus componentes *deve* a todo o instante uma coisa nova. Alterando-se constantemente os elementos constitutivos, alteram-se as suas relações, isto é, as suas *qualidades*, e o *isolado* aparece a todo o momento com qualidades novas.

Rigorosamente, deveríamos dizer que a cada momento temos um *isolado novo*, mas, pelo mesmo acto arbitrário que nos levou já a *recortá-lo* do seio da Realidade (acto justificado pela necessidade e comodidade de estudo), diremos que o *isolado evoluciona* e que os diferentes estados observados correspondem, não a isolados novos, mas a diferentes *fases de evolução* do *isolado* inicial. Este modo de ver é, naturalmente, condicionado e limitado pela própria natureza da evolução — pode chegar uma certa altura em que o *isolado* apresente qualidades de tal modo diferentes que não haja vantagem ou possibilidade de o considerar o mesmo. Vai aqui muito do bom-senso do observador e das conveniências do seu estudo.

O aparecimento de qualidades novas no decurso da evolução de um *isolado*, ou sua transformação noutra com estrutura qualitativa diferente, põe em evidência a ligação íntima, já acima assinalada, entre os conceitos de qualidade e quantidade.

Consideremos um corpo em queda livre no ar: por exemplo, uma pedra abandonada sem velocidade inicial no alto duma torre. Mostra a observação que o movimento da pedra é, a

princípio, uniformemente acelerado⁽¹⁾ mas que a resistência do ar exerce sobre ela uma acção de freio cada vez mais intensa, de modo que, a certa altura, o movimento se torna uniforme, isto é, a velocidade não aumenta mais, conserva-se constante. (Seja dito de passagem que é devido a isto que se torna possível o uso de paraquedistas na guerra moderna).

Analisemos este facto à luz dos princípios que temos vindo a expor.

Temos um isolado — Terra-pedra — no qual existem, entre outras, estas duas qualidades: a) *movimento acelerado* da pedra em relação à Terra, por virtude da acção da gravidade; b) *resistência do ar* opondo-se à queda. A *quantidade* de cada uma destas qualidades varia durante a queda, e essas qualidades são tais que o aumentar da quantidade de resistência do ar provoca a diminuição da quantidade de velocidade de queda; pode, portanto, dizer-se que a intensificação da quantidade da resistência do ar *contraria* a qualidade *movimento acelerado*. Chega um momento — é a experiência que o mostra — em que a intensificação da quantidade de resistência do ar atinge um grau tal que o movimento deixa de ser acelerado para passar a ser uniforme; daí em diante, a velocidade, que vinha a aumentar *cada vez menos*, passa a ser constante. Nesse momento, a qualidade movimento acelerado desapareceu e surgiu outra — *movimento uniforme*.

Vê-se, portanto, como a intensificação duma quantidade, que contraria uma qualidade estrutural dum isolado, pode chegar a destruir essa qualidade e a fazer surgir uma qualidade nova. E' com esse significado que se fala na *transformação da quantidade em qualidade*. O ponto (empregando aqui o termo *ponto* como indicativo dum conjunto de condições) em que essa transformação se dá, chama-se *ponto crítico* da evolução do isolado.

A vida quotidiana oferece-nos a todo o momento exemplos de transformações destas. A ebulição da água, o rompimento duma membrana ou chapa a que se faz suportar um peso crescente, para não falar já da multidão de fenómenos que a história

(1) Movimento em que a velocidade é crescente e proporcional ao tempo; se a queda se realizasse no vácuo, a relação entre a velocidade e o tempo seria $v = 9,81 \cdot t$, (t medido em segundos, v em metros).

nos apresenta — formação e dissolução de agregados políticos, etc., — são fenómenos nos quais em dado momento foi atingido o *ponto crítico* em que a quantidade se transformou numa qualidade nova.

9. Noção de lei.

À evolução dum isolado, chamaremos daqui em diante um *fenómeno natural*.

Fenómenos naturais são, portanto, o movimento dos corpos, a vaporização da água sob a acção do calor, a passagem duma corrente eléctrica num condutor, a germinação duma semente, o exercício de direitos políticos pelos cidadãos, etc.

Em virtude desta definição, explicar um fenómeno é explicar a evolução dum isolado.

Essa evolução manifesta-se pela alteração das qualidades dos componentes do isolado; logo, *explicar um fenómeno é dar o porquê da alteração das qualidades*. Mas, esse porquê como atingi-lo? Pode o homem estar certo de nalgum instante ter alcançado a *essência íntima* das coisas (para empregar, por um momento, a linguagem da metafísica)? Tarefa vã! As coisas revelam-se-nos pelas suas relações connosco — nada mais podemos atingir que isso!

O trabalho do cientista é, portanto, o de observar e descrever os fenómenos e ordenar os resultados da sua observação num *quadro explicativo* — construção intelectual — coerente, e cujas consequências e previsões sejam confirmadas pela observação e experimentação.

A observação mostra que há certos fenómenos que apresentam *regularidades*, isto é, comportamento idêntico, desde que as condições iniciais sejam as mesmas.

A existência de regularidades é extremamente importante porque permite a *repetição* e *previsão*, desde que se criem as condições iniciais convenientes; ora, *repetir* e *prever* é fundamental para o homem na sua tarefa essencial de dominar a Natureza. Toda a *técnica* se baseia nisso, e o leitor que pense um momento na possibilidade e utilidade dessa técnica na vida corrente — de um extremo ao outro da aparelhagem técnica, da enxada ao ciclotrão — verificará sem trabalho que tal possi-

bilidade e utilidade se baseiam nestas duas coisas essenciais: repetir os fenómenos tantas vezes quantas sejam precisas, prever os seus resultados.

Daqui resulta que uma das tarefas mais importantes no trabalho de investigação da Natureza é a procura de regularidades dos fenómenos naturais.

Definição: — Chamaremos lei natural a toda a regularidade de evolução dum isolado.

Com esta definição, e do que anteriormente se disse, fica estabelecido que o quadro explicativo que os homens procuram construir deve assentar sobre leis naturais, e que na sua procura e ordenação deve consistir o objectivo essencial da Ciência.

10. Diferentes tipos de lei.

Estamos de posse do conceito de lei; percebe-se que, conforme a natureza do isolado e da sua evolução, possa haver dois tipos fundamentais de lei:

lei qualitativa — aquela que diz respeito a variação de qualidade;

lei quantitativa — aquela que diz respeito a variação de quantidade.

Que estes dois tipos não podem ser rigidamente separados é evidente em virtude do que foi dito nos parágrafos 7 e 8; a utilidade da distinção está em que a lei acentua, por vezes, um ou outro aspecto da Realidade. Frequentemente, mesmo, a lei põe em evidência a ligação íntima da qualidade e quantidade, de modo tal que se não pode classificá-la em nenhum dos dois tipos; diremos então que se trata duma lei qualitativa-quantitativa (em rigor, todas o são).

Vejamos alguns exemplos de leis:

- I. — Cada planeta descreve em torno do Sol uma elipse, da qual o Sol ocupa um dos focos (*1.ª lei de Kepler*)⁽¹⁾.
- II. — Para todo o gás existe uma temperatura, chamada temperatura crítica, acima da qual ele não pode ser

(1) João Kepler, astrónomo que pode ser considerado como um dos precursores da Astronomia moderna (1571-1630).

liquefeito; logo que a temperatura desça abaixo da temperatura crítica, o gás pode liquefazer-se, submetendo-o a uma pressão conveniente.

- III. — Entre dois corpos de massas m e m' desenvolve-se uma força atractiva que é directamente proporcional ao produto das duas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância dos dois corpos (*lei da gravitação de Newton*)⁽¹⁾.

- IV. — Toda a necessidade tende a provocar as reacções próprias a dar-lhe satisfação (*1.ª lei da psicologia funcional de Claparède*).

- V. — Para todo o corpo, em queda livre no vácuo, as alturas de queda são directamente proporcionais aos quadrados dos tempos de queda (*lei da queda dos graves*).

Destas cinco leis naturais, a primeira e quarta podem ser consideradas como leis qualitativas, a terceira e quinta como leis quantitativas, com as restrições que acima pusemos à classificação. Quanto à segunda, ela fornece o tipo que chamámos lei qualitativa-quantitativa — a manutenção da qualidade *estado gasoso* está dependente de variações quantitativas de pressão e temperatura, e o objectivo da lei é, precisamente, acentuar essa ligação, determinando as condições sob as quais a quantidade (de pressão) se pode transformar em qualidade nova (estado líquido).

11. Primado da qualidade ou da quantidade?

A Realidade existe, independente da nossa vontade. Mergulhados na fluência universal e tendo necessidade, para fins humanos, de a explicar, lançamos, sobre ela, toda uma teia de leis — regularidades dos fenómenos tais como se nos revelam.

A tonalidade geral dessas leis, o tipo dominante delas, é qualitativo ou quantitativo? A qual dos dois damos o primado para a explicação? A história da Ciência dá a esta pergunta uma resposta nítida — a medida que a Realidade se vai conhecendo melhor, o primado tende a pertencer ao tipo quantitativo.

(1) Isaac Newton (1642-1727), físico e matemático, uma das figuras dominantes da Ciência moderna.

Não é que a Ciência, no seu avanço, tenda a pôr de parte a *qualidade*, e isso seria, mesmo, absurdo, uma vez que as qualidades traduzem as relações de interdependência dos seres uns com os outros (parág. 6), e a *interdependência* é, precisamente, uma das características essenciais da Realidade (parág. 3). Mas a Ciência não se ocupa apenas de *descrever*, empreende a tarefa de *explicar* e, nesta, há um facto que se impõe com força cada vez maior — *para obter a explicação das variações de qualidade há que aprofundar o estudo das variações de quantidade*.

A segunda lei que demos como exemplo no parágrafo 10 oferece-nos uma ilustração flagrante disto. Durante muito tempo, os físicos não encontravam explicação para o facto seguinte: — a maioria dos gases podia liquefazer-se por um aumento conveniente de pressão, mas outros, denominados então gases refractários ou *permanentes* (oxigénio, hidrogénio, azoto e alguns outros), suportavam as maiores pressões sem se liquefazem. Só em 1868, *Andrews* mostrou a existência, para cada gás, de uma *temperatura crítica*, acima da qual não se podia obter a liquefacção. Ora, dava-se a circunstância de que, para os gases de que já se obtivera a liquefacção, essa temperatura era relativamente alta (157° para o anidrido sulfuroso, por exemplo), e, por esse motivo, às temperaturas a que normalmente se operava estavam criadas as condições de liquefacção. Para os gases refractários, porém, a temperatura crítica é extremamente baixa (— 119° para oxigénio, — 147° para o azoto, — 240° para o hidrogénio) e, portanto, só abaixo dessas temperaturas eles podem ser liquefeitos por aumento de pressão. Vê o leitor como só uma variação de quantidade (temperatura) permitiu dar uma *explicação* do fenómeno — alteração de qualidade — até aí misterioso?

Exemplos como este oferece-nos a história da Ciência em abundância.

Mas há mais...

12. O perigo do verbalismo.

É tão fácil pôr um nome a uma coisa! arranjar um rótulo, para encobrir a nossa ignorância! É tão generalizada a tendência, em certas épocas históricas, para elevar os rótulos à categoria de explicação!

O físico francês *Pierre Duhem*, referindo-se, no seu belo livro *A teoria física*, à querela entre os cientistas de espírito moderno do Renascimento e os filósofos tradicionais da Escolástica, diz: «*Aquilo de que os filósofos do Renascimento acusavam, acima de tudo, os filósofos escolásticos era de inventarem uma qualidade nova cada vez que um fenómeno novo lhes chamava a atenção; de atribuírem a uma virtude particular cada efeito que não tinham nem estudado nem analisado; de imaginarem que tinham dado uma explicação onde se tinham limitado a pôr um nome e de transformarem assim a Ciência num caldo pretensioso e inútil*».

É dá um exemplo célebre de explicação... verbalista: «*A luz, ou antes, a iluminação é um movimento lumínico de raios compostos de corpos luminosos que enchem os corpos transparentes e que são movidos lumínicamente por outros corpos luminosos*» (1).

Está o leitor vendo? Mas há mais...

13. Um exemplo célebre.

O fenómeno do movimento dos corpos foi daqueles que primeiro atraíram as atenções dos pensadores, como dissemos no cap. IV da 1.ª Parte; lá mostrámos como esse problema esteve intimamente ligado à evolução da Matemática e da Filosofia na Grécia clássica. Apontámos também, embora ao de leve, como circunstâncias determinadas, principalmente de carácter político e social, induziram na ciência grega posterior ao século IV a. C. o *horror do movimento* (2).

Quer isto dizer que ele foi posto totalmente de parte? De modo nenhum! Procurou-se dar dele uma explicação que o relegasse para o museu das múmias e o tornasse consequentemente inofensivo, embora existente. E como há sempre um filósofo para cada tarefa, por mais retorsa e macabra, esse filósofo surgiu, na pessoa de *Aristóteles*.

Aristóteles, que aliás conseguiu realizações interessantes em alguns domínios do pensamento, deu do movimento uma de-

(1) Duma carta dirigida a *Pascal* pelo jesuíta *Padre Noël*, antigo professor de *Descartes* no colégio de la Flèche.

(2) V. o cap. IV desta Parte.

finição e uma teoria qualitativa tão subtil⁽¹⁾ que conseguiu torná-las totalmente incompreensíveis a este pobre ente — o homem de-todos-os-dias e de-todos-os-lugares — que, com trabalho e sangue, muito sofrimento e algumas alegrias, um pouco de capacidade de entendimento e grande dose de ilusão, vai encontrando, às apalpadelas, o seu caminho nesta maravilhosa Realidade de trevas e luz em que está mergulhado.

Só duma coisa parece ter-se esquecido *Aristóteles* — de observar o movimento! O que foi origem dum percalço de vulto — afirmar (*Física*, livro IV 216 a) que «a experiência mostra que os corpos, cuja força é maior, seja em peso, seja em ligeireza, todas as outras condições iguais quanto às figuras, atravessam mais depressa um espaço igual e na proporção que as grandezas (peso ou ligeireza) têm entre si, afirmação que equivale a esta — os corpos caem com velocidades proporcionais aos pesos — e que a Física experimental mais tarde havia de desmentir totalmente⁽²⁾.

14. Primado da explicação quantitativa.

O leitor pode ver, pelos exemplos que apresentamos, como é grande o perigo de deslizar no abuso da explicação qualitativa. Os construtores da Ciência moderna, do Renascimento em diante, apercebendo-se desse perigo, deram rumo novo à barca da Ciência, dedicando-se à *observação e experimentação*, procurando *medir*, tentando explicar por variações de quantidade, tecendo uma toia de leis quantitativas.

O novo rumo da barca da Ciência está cheio de triunfos. No cap. IV desta Parte trataremos mais demoradamente deste assunto, mas queremos dar, desde já, um exemplo frisante. A 1.ª lei de *Kepler* (parág. 10) é uma lei *qualitativa*; pois muito bem: essa lei e as outras duas leis de *Kepler* (estas quantitativas) estão englobadas, como se demonstra sem grande dificuldade, na lei da gravitação de *Newton* (parág. 10, III), que é o tipo perfeito da lei quantitativa⁽³⁾.

(1) Vidé *Física de Aristóteles*, livro III.

(2) Por obra de *Galileo* (1564-1642), o fundador da Física moderna e o verdadeiro iniciador do método experimental em Ciência.

(3) Essa demonstração é uma parte da obra de *Newton*, *Princípios matemáticos da filosofia natural*, um dos maiores monumentos científicos de todos os tempos.

Por toda a parte, em todos os ramos do conhecimento, há esta tendência para o quantitativo, para a medida⁽⁴⁾, de modo tal que pode afirmar-se que o estado *própriamente científico* de cada ramo só começa quando nele se introduz a *medida* e o estudo da variação quantitativa como explicação da evolução qualitativa. É o que está acontecendo nos nossos dias a uma ciência em formação — a Psicologia — e a uma outra que desponta — a Sociologia; ambas se estão emancipando da descrição verbal e procurando atingir, lentamente, a idade da adolescência científica.

Com o significado e as restrições referidos no começo do parág. 10, podemos portanto falar, plenamente, no *primado da lei quantitativa no seio da Ciência Moderna*.

2.º — Conceito de função.

15. Intervenção da Matemática.

Na 1.ª Parte viu-se, em vários exemplos, como os conceitos matemáticos surgem, uma vez que sejam postos problemas de interesse capital, prático ou teórico: — é o número natural, surgindo da necessidade da contagem, o número racional, da da medida, o número real, para assegurar a compatibilidade lógica de aquisições diferentes.

É natural, portanto, esperar que, de coisa tão importante para o entendimento e explicação da Realidade como é a *lei quantitativa*, surja também o conceito matemático próprio para o seu estudo; esperar aqui, ainda, que a necessidade crie o instrumento. Assim acontece de facto.

O leitor, instruído pelos exemplos anteriores, não esperará, decerto, que esse instrumento tenha saído dum jacto, pronto e acabado; que aos cientistas se tenha apresentado a questão assim: — temos aqui uma multidão de leis quantitativas, vamos criar o instrumento próprio de estudo. Muito longe disso! Deu-se uma gestação lenta em que necessidade e instrumento inter-actu-

(4) Inclusive na Geometria, para explicar as formas das figuras (coisa essencialmente qualitativa). Vidé cap. IV.

aram, ajudando-se e esclarecendo-se mutuamente. No cap. IV veremos alguma coisa sobre as condições históricas dessa gestação e evolução; as páginas que seguem contêm apenas um *esquema* de como a questão pode ser vista hoje.

16. Surge o instrumento matemático.

Suponhamos que temos que estudar uma variação de quantidade; seja, para fixar idéias, a variação quantitativa de espaço e tempo no fenómeno da queda dos graves no vácuo. Suponhamos realizadas as condições físicas necessárias — o isolado conveniente — e procuremos a *regularidade* do fenómeno: a *lei quantitativa*. Que fazemos? Medimos as alturas de queda em intervalos de tempo iguais, e estudamos depois a variação dessas alturas de queda: é claro que, quanto mais pequenos forem os intervalos de tempo em que fazemos as medições, melhor se conhecerá a variação. Suponhamos que se fizeram as medições de segundo em segundo e que se encontraram os valores seguintes:

tempos (em segundos)	0	1	2	3	4	5	...
espaços (em metros)	0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,5	...

Não é, evidentemente, nesta simples tabela que se encontra toda a regularidade, a *lei quantitativa*; mas ela dá uma primeira idéia dessa lei. Em que consiste, no fundo, esta tabela? Em duas sucessões, dois conjuntos, de números — o dos *tempos*, que representaremos por conjunto *t*, e os dos *espaços*, que representaremos por conjunto *e* — postos em correspondência um com o outro, correspondência essa da qual podemos afirmar que é *unívoca* ⁽¹⁾ *no sentido de t para e*, visto que não podemos, evidentemente, conceber um movimento de queda em que, ao fim dum certo tempo, o mesmo corpo tenha percorrido dois espaços diferentes. Onde está a lei quantitativa de que aquela tabela nos dá apenas uma primeira aproximação? — A lei está na forma como essa correspondência do conjunto *t* ao conjunto *e* se realiza; se a correspondência mudar, mudarão os consequentes — aqui os espaços — mudará, por consequência, a variação, mudará a lei.

(1) V. 1.ª Parte, cap. I, págs. 7 e 8.

Então em que consiste, afinal, a lei? — Na forma de correspondência dos dois conjuntos. Se, por consequência, queremos estudar leis quantitativas, *temos que criar um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência de dois conjuntos*.

Está o leitor notando que novamente nos aparece, no seio desta questão vital para a Ciência, aquele maravilhoso instrumento da *correspondência* que nos surgiu logo no conceito de número natural e não mais nos abandonou ao longo de toda a 1.ª Parte? Como tudo isto, afinal, é simples!

17. Noção de variável.

Estamos de posse da idéia fundamental do instrumento a criar; de que se trata agora é de, com os materiais colhidos, fazer a *montagem* do instrumento e aperfeiçoá-lo.

O instrumento consiste na correspondência de dois conjuntos de números; a primeira coisa a fazer, para o tornar facilmente manejável, é arranjar uma representação simbólica para os conjuntos; de contrário, teríamos sempre que estar pegados a tabelas de resultados particulares e não obteríamos a generalidade conveniente.

Essa representação simbólica consegue-se introduzindo o conceito de *variável*, o que se faz da forma seguinte: Seja (*E*) um conjunto *qualquer* de números, conjunto finito ou infinito, e convençionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex.: *x*. *A este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto (E), chamamos variável*.

Quando dizemos, por exemplo: seja (*E*) o conjunto dos números reais do intervalo (0,1), e seja *x* a sua *variável*, que queremos significar? Que o símbolo *x*, sem coincidir *individualmente* com nenhum dos números reais desse intervalo, é susceptível de os representar a todos; é, afinal, o símbolo da *vida colectiva* do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, *mas não se reduz a ela*.

A variável é, portanto, uma entidade que, dizendo respeito a um nível ⁽¹⁾ de isolado — o conjunto — superior ao do número, é, ela própria, de uma natureza superior. Isto é perfeitamente

(1) V. parág. 5, pág. 112.

compreensível dentro do quadro geral de ideias que esboçamos nos primeiros parágrafos deste capítulo; no entanto, o carácter contraditório do conceito — a variável *é e não é* cada um dos elementos do conjunto — deu origem a que a sua introdução na Ciência seja relativamente recente. Pelo seu carácter essencial — síntese do *ser e não ser* — ela sai fora daquele quadro de ideias que quer ver na Realidade uma *permanência* e irrompe ligada à corrente de pensamento que, expressa ou tácitamente, vê na *fluência* a primeira das suas características.

Uma variável é o que fôr determinado pelo conjunto numérico que ela representa — a sua *substância*, o seu *domínio*, como daqui em diante diremos.

Dois casos particularmente importantes são aqueles em que:

a) O domínio é o conjunto dos números reais compreendidos entre dois números reais a e b dados, ou, como correntemente se diz: o conjunto dos números reais do intervalo (a, b) ; a variável x diz-se então *variável real contínua*⁽¹⁾, ou simplesmente *variável real*.

b) O domínio é o conjunto infinito dos números naturais $1, 2, 3, \dots$; utilizaremos, neste caso, o símbolo n e designaremos a variável por *variável inteira*.

De um outro caso muito importante falaremos adiante (cap. III, parág. 22).

18. Noção de função.

Voltemos ao exemplo do parágrafo 16; a lei da queda dos graves consiste na correspondência do conjunto dos tempos (anteriores) ao conjunto dos espaços; estamos agora em condições de criar o instrumento matemático cuja essência seja essa correspondência. Seja t a *variável* do conjunto dos tempos e e a *variável* do conjunto dos espaços; a lei consiste na existência duma dada correspondência entre t e e , correspondência de que sabemos que é unívoca no sentido $t \rightarrow e$. Diremos que a *variável* e é função da *variável* t , e escreveremos simbolicamente $e = f(t)$; à *variável* t , antecedente da correspondência, chama-

⁽¹⁾ Porque o conjunto dos números reais é o equivalente aritmético do contínuo geométrico. Vidé 1.ª Parte, pág. 87 e seg.

remos *variável independente*; à *variável* e chamaremos *variável dependente*.

Assim, o conceito de *função* aparece-nos, no campo matemático, como o instrumento próprio para o estudo de leis.

Repare bem o leitor em que, quando nós dizemos que $e = f(t)$, dizemos mais qualquer coisa do que o que está na tabela do parágrafo 16; nesta, estão apenas indicados *alguns* pares de valores da correspondência, ao passo que na afirmação $e = f(t)$ está implicado que a *qualquer* valor de t corresponde um valor (e um só) de e . Por aqui pode começar a ver-se já a força latente que este novo instrumento traz em si.

Vamos resumir e fixar o que está dito numa definição, a que nos reportaremos daqui em diante.

Definição: — Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se

$$1) \quad y = f(x)$$

se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$. A x chama-se variável independente, a y variável dependente.

Para indicar que y é função de x , usaremos também escrever simplesmente $y(x)$; para representar aquele valor b de y que corresponde a um valor particular a de x , escreve-se $b = f(a)$ ou $b = y(a)$, conforme se usou a representação $y = f(x)$ ou $y(x)$.

19. Modos de definição.

Encarando agora o conceito de função do ponto de vista propriamente matemático, pondo de parte a origem concreta do conceito, põe-se a questão seguinte: como se estabelece a correspondência da variável independente para a dependente? por que maneira podemos determinar qual o valor b de y que corresponde ao valor a de x ? por outras palavras, como se define

cada função particular $y(x)$? como se dá, em cada caso, a lei da correspondência (1.ª Parte, cap. I, pará. 6, pág. 7)? Vamos ver que há várias maneiras de o fazer.

20. Definição analítica.

Consiste este modo de definição em dar um conjunto de operações de modo tal que, por meio delas, se possa fazer corresponder a cada valor a de x um valor b de y . Demos, por exemplo, a igualdade

$$2) \quad y = 4,9 \cdot x^2.$$

Efectuando as operações indicadas no segundo membro, vemos que esta igualdade faz efectivamente corresponder a cada valor de x um valor de y ; por exemplo, a $x=1 \rightarrow y=4,9$, a $x=2 \rightarrow y=19,6$, a $x=3 \rightarrow y=44,1$, a $x=\frac{1}{2} \rightarrow y=1,225$, etc.

Portanto, a expressão analítica do segundo membro de 2) define uma função $y(x)$.

Como o leitor facilmente verifica, essa expressão analítica permite construir a tabela do parágrafo 16 e, além disso, dá a possibilidade de obter o valor de y correspondente a qualquer outro valor real de x .

Dado, por exemplo, a x o valor $a=\frac{3}{2}$, ela dá-nos para y o valor $b=4,9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2=11,025$; pois muito bem, dentro do grau de aproximação que as medidas comportam, é 11,025 m. a altura da queda de um grave no vácuo, durante $\frac{3}{2}$ segundos.

E como isto se dá para quaisquer valores de x (representando tempos) e os correspondentes valores de y (representando espaços), diremos que a igualdade 2) é a tradução analítica ou a lei matemática do fenómeno da queda dos graves no vácuo.

Temos assim uma cadeia: lei quantitativa—função—sua

definição analítica, cadeia em que está sintetizada a conexão da Matemática com as ciências da Natureza.

Repare bem o leitor: o conceito de função não se confunde com o de expressão analítica;—esta é apenas um modo de estabelecer a correspondência das duas variáveis. Por outras palavras, pode dizer-se que uma igualdade como 2), em que figura y igualado a uma expressão analítica em x , contém uma lei matemática ligando as duas variáveis; essa lei matemática define a correspondência que existe entre x e y e faz, portanto, que y seja função de x . A lei matemática constitui, portanto, o terreno de que a função se vai nutrir. Mas, na definição que demos (pará. 18), não está dito que seja este o único terreno em que a função possa enraizar, e já vamos ver que há outro não menos próprio. Tudo isto nos leva a concluir que não devemos confundir função com expressão analítica; e, no entanto, estas duas ideias andam constantemente confundidas na linguagem e na escrita dos matemáticos! O leitor só muito raramente encontrará, na pena dum matemático, uma frase como esta—seja a função $y(x)$, cuja definição analítica é $y=4,9x^2$; o matemático escreverá mais simplesmente—seja a função $y=4,9x^2$.

Erro! dirá o leitor. Sim, erro; mas seja o leitor indulgente para com o matemático. O matemático é um ser humano, com os mesmos defeitos e as mesmas limitações dos outros seres humanos. Um desses defeitos é a indolência que o faz sacrificar à rotina; houve um tempo—vai para século e meio ou dois séculos—em que a noção de função, ainda não suficientemente depurada, se assimilava inteiramente à de expressão analítica; de então para cá, ficou a maneira de dizer, que não corresponde hoje ao estado de evolução do conceito.

Vamos agora mostrar como se pode satisfazer à definição do parágrafo 18 sem falar em expressões analíticas.

21. Sistemas de referência.

No que vai seguir-se, tratar-se-á de interpretação geométrica de conjuntos de números. Esta ideia não é nova para o leitor; na 1.ª Parte lidámos demoradamente com ela e foi até desse lidar que saiu a construção do conjunto de números reais.

Que fizemos? Tomámos um *sistema de referência*, muito simples, constituído (fig. 30) por uma recta em que, a partir dum ponto O , *arbitrário*, denominado *origem*, se tomam dois sentidos: um *convencionado* positivo, de O para a *direita*, outro negativo de O para a *esquerda*; a recta assim orientada chama-se



Fig. 30

eixo. Tomado ainda, arbitrariamente, um segmento \overline{OP} como unidade, o conjunto dos números reais relativos pode pôr-se em correspondência biunívoca com o conjunto dos pontos da recta, para o que basta fazer corresponder a cada número real a aquêl ponto único A , para a direita de O se a é positivo, para a esquerda se é negativo, tal que o comprimento do segmento \overline{OA} seja $|a|$. Abreviadamente pode dizer-se—faz-se corresponder a a aquêl ponto único A tal que a *medida algébrica* de \overline{OA} seja a . Reciprocamente, a todo o ponto A faz-se corresponder aquêl número relativo que, com a mesma unidade \overline{OP} , é igual à medida algébrica de \overline{OA} ; assim se assegura, como sabemos, a biunivocidade da correspondência.

Agora, porém, o problema é um pouco mais complicado—temos não só que interpretar simultaneamente dois conjuntos de números mas, ainda, arranjar maneira de, nessa interpretação, podermos representar também a correspondência das suas variáveis respectivas. Isso consegue-se, duma maneira simples ⁽¹⁾, com um sistema de referência denominado *cartesiano* por ter sido usado pela primeira vez por René Descartes ⁽²⁾ (em latim *Cartesius*) na primeira metade do séc. XVII.

22. O sistema cartesiano de referência.

Consiste ele no seguinte. Sejam no plano, (fig. 31) duas rectas concorrentes que, por comodidade, se tomam perpendiculares entre si, e orientadas como a figura indica—uma vez

⁽¹⁾ Entre outras, porque há outros sistemas de referência.

⁽²⁾ Matemático e, principalmente, filósofo (1596-1650). A sua obra filosófica marca uma era na história da Filosofia. Da sua importância na Matemática falaremos adiante.

orientado o eixo Ox como na fig. 30, toma-se para sentido positivo do outro eixo aquêl sentido tal que o semi-eixo positivo Ox se pode levar à coincidência com o semi-eixo positivo Oy por uma rotação de 90° feita no sentido *directo* ou *positivo* (contrário ao sentido do movimento dos ponteiros dum relógio).

Pôsto isto, nós podemos tomar cada um dos eixos para cada uma das variáveis—sobre o eixo Ox interpretamos geomêtricamente aquêl conjunto de números reais que é o *domínio* da variável x , e sobre o eixo Oy aquêl conjunto de números reais que é o *domínio* de y . As duas variáveis aparecem-nos assim representadas, ou interpretadas, independentemente uma da outra, e nós podemos, além disso, utilizar o plano definido pelos dois eixos para fazer construções geométricas que definam correspondências entre as duas variáveis, isto é, construções que definam funções $y(x)$. Como?

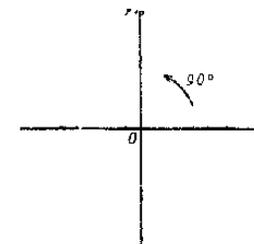


Fig. 31

23. Definição geométrica duma função.

Seja (fig. 32) um sistema de referência cartesiano e uma curva (C) que não seja cortada em mais de um ponto por uma paralela ao eixo Oy .

Essa curva permite definir uma função $y(x)$, para o que basta fazer o seguinte:

Seja P um ponto qualquer da curva e tiremos, por ele, perpendiculares aos eixos, as quais os encontram nos pontos A e B ; sejam a e b os números reais (relativos) iguais, respectivamente, às medidas algébricas de \overline{OA} e \overline{OB} . Suponhamos feita uma construção análoga para cada ponto da curva e façamos corresponder a cada número a o número b obtido pela construção indicada. Fica assim definida uma correspondência do conjunto dos aa —variável x —ao conjunto dos bb —variável y —fica, portanto, definida uma função $y(x)$.

Trata-se, de facto, duma função no sentido da definição do parágrafo 18, visto que, como impusemos à curva a condição

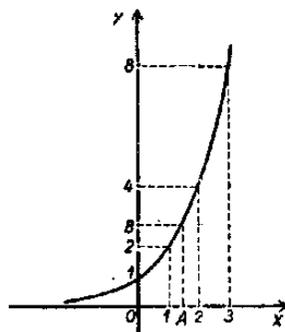


Fig. 32

de só ser cortada num ponto por cada paralela ao eixo Oy , a correspondência é *unívoca* no sentido $x \rightarrow y$: a cada a corresponde apenas um b .

Vê o leitor que, assim, definimos uma função $y(x)$ tão bem como no parág. 20; lá, o instrumento de definição era uma expressão analítica; aqui, é uma curva. Em cada um dos casos, a função não se confunde com o instrumento que serviu para a definir.

Esta mesma questão pode ser encarada, como vamos ver, de um outro ponto de vista. Para isso, vamos dar uma noção prévia, muito importante—a de *coordenadas*.

24. Coordenadas cartesianas.

Voltemos ao sistema cartesiano de referência, definido no parágrafo 22, e sejam a e b dois números reais, um pertencente ao domínio da variável x , outro ao domínio da variável y . Marquemos, sobre os eixos respectivos, (fig. 33) os pontos A e B que lhes correspondem, isto é, os pontos A e B tais que $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ (medidas algébricas).

Tiremos por A e B perpendiculares aos eixos e seja M o seu ponto de encontro; ao par (a, b) façamos corresponder o ponto M . Como imediatamente se verifica pela própria construção, esta correspondência é *unívoca* no sentido $(a, b) \rightarrow M$, isto é, a cada par (a, b) corresponde um ponto M e um só.

Reciprocamente, a cada ponto M' do plano podemos fazer corresponder um par (a', b') e um só; basta tirar por M' perpendiculares aos eixos (fig. 33), determinar as medidas algébricas a' e b' dos segmentos $\overline{OA'}$ e $\overline{OB'}$, respectivamente, e fazer corresponder a M' o par de números reais (a', b') .

Temos assim, por uma construção geométrica simples, a possibilidade de estabelecer uma correspondência *biunívoca* (1.ª Parte, págs. 8-9) entre *par* de números reais e *ponto* do plano. Esta correspondência generaliza imediatamente aquela que na 1.ª Parte, (pág. 99) foi estabelecida entre a recta e o conjunto dos números reais (relativos). Lá, mostrou-se que a cada ponto da recta corresponde um número real, e reciprocamente; agora vê-se que a cada ponto do plano corresponde um par de números reais, e reciprocamente. Daqui em diante, chamaremos aos números (a, b) as *coordenadas cartesianas*

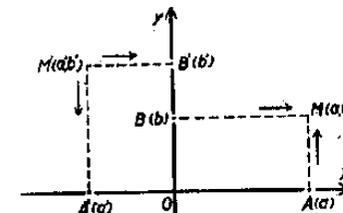


Fig. 33

do ponto M , a *abscissa* e *b ordenada*; ao conjunto dos dois eixos (sistema cartesiano de referência), *eixos coordenados*; ao eixo Ox , eixo das *abscissas*; ao eixo Oy , eixo das *ordenadas*; ao ponto O , *origem das coordenadas*. Sempre que quisermos indicar que o ponto M tem coordenadas (a, b) —abscissa a e ordenada b —escreveremos, como fizemos na fig. 33, $M(a, b)$.

Pois bem, a construção que acabamos de fazer permite encarar sob outro aspecto o problema das relações do conceito de *função* com o de *curva*. De que maneira?

25. Imagem geométrica duma função.

Seja $y=f(x)$ uma função definida não geométrica—definida por uma expressão analítica ou pelo enunciado directo da correspondência entre x e y .

Seja como fôr, pelo simples facto de se tratar de uma função $y(x)$, sabemos que a cada valor a da variável x corresponde um valor b de y . O que dissemos no parágrafo anterior permite-nos construir (fig. 34) o ponto $M(a, b)$. Feita uma construção análoga para cada par de valores das duas variáveis, obtemos no plano um conjunto de pontos.

A esse conjunto de pontos chamaremos *imagem geométrica* ou *representação geométrica* da função $y(x)$.

Assim, de toda a função, seja qual for o modo como é definida, nós podemos sempre construir uma *imagem geométrica*, e essa imagem é um conjunto de pontos do plano.

—Uma curva, dirá o leitor apressado.

—Mais devagar. O conceito de *curva* tem uma larga história que vale a pena ser contada porque ela foca alguns dos motivos mais íntimos da história da Ciência. Contaremos resumidamente essa história no cap. IV, mas podemos dizer desde já ao leitor que houve uma altura em que curva e imagem geométrica duma função se consideraram como sinónimos; melhor, em que se tomou como ideia mais geral de curva o conjunto de pontos da imagem geométrica de uma função $y(x)$.

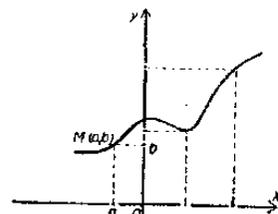


Fig. 34

Cedo apareceram, porém, as dificuldades. Consideremos, por exemplo, a função assim definida:

$$x < 0 \rightarrow y = -1, \quad x = 0 \rightarrow y = 0, \quad x > 0 \rightarrow y = +1.$$

Trata-se, de facto, de uma função no sentido da definição dada no parágrafo 18—o domínio da variável x é o conjunto de todos os números reais; o domínio da variável y é o conjunto dos três números $-1, 0, +1$, e a correspondência $x \rightarrow y$ é unívoca (não o é a sua recíproca, mas isso não é exigido na definição). A imagem geométrica desta função é constituída (fig. 35) pelas duas semi-rectas paralelas ao eixo Ox , menos os pontos -1 e $+1$, e pelo ponto O .

Uma semi-recta que não acaba, outra que não começa e um ponto entre as duas! É esta figura uma curva no

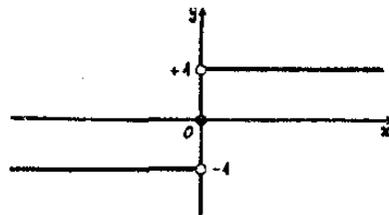


Fig. 35

sentido intuitivo do termo—figura obtida pelo movimento contínuo (1) dum ponto? Não!

O leitor poderá pensar que casos como este são de excepção e que, em geral, a imagem geométrica duma função coincide com uma curva, no sentido corrente do termo. Não é assim, porém.

O que é geral é darem-se casos como o apontado; aquelas funções cujas imagens são curvas no sentido corrente, formam, entre a multidão de todas as funções $y(x)$, um agrupamento ínfimo—são elas, portanto, que constituem a *excepção*!

Pois muito bem, é entre estas que se encontram as funções mais importantes, pelo menos do ponto de vista das aplicações. É, por exemplo, uma delas a função (já nossa conhecida, parág. 20) de definição analítica $y = -4,9 x^2$.

Se a representarmos geometricamente, encontraremos a curva da fig. 36, cuja parte para a direita de Oy pode ser considerada como a tradução geométrica da lei da queda dos graves no vácuo.

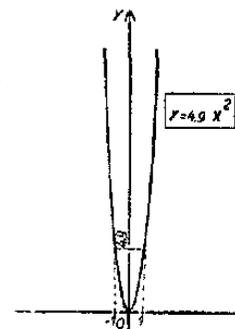


Fig. 36

É ainda nesse agrupamento ínfimo que se encontram muitas outras funções cujas definições analíticas são leis matemáticas de importantes fenómenos naturais.

26. O importante e o excepcional.

Esta ideia—que o *importante* se encontra entre o *excepcional*—aparece, à primeira vista, como um pouco desconcertante. A visão de um Universo em que o *fundamental* para o seu entendimento se ache entre o *excepcional*, entre o *particular*, não pode deixar de causar um profundo sentimento de decepção.

Repare, porém, o leitor no seguinte. Dissemos atrás que «a

(1) Para o entendimento desta frase apela-se apenas para o significado corrente de «movimento contínuo». A noção de continuidade há-de ser estudada mais tarde (3.ª Parte).

Ciência não tem, *nem pode ter*, como objectivo, descrever a Realidade *tal como ela é* (parág. 2), mas apenas «construir quadros racionais de interpretação e previsão» (parág. 2), «lançar sobre a Realidade fluente uma teia de leis, regularidades, como elas se nos revelam, dos fenómenos naturais» (parág. 11).

Que quer dizer, dentro deste modo de ver, que o importante se encontra entre o excepcional?

Apenas isto:—que os instrumentos que nós criamos (aqui o conceito de função) para a interpretação da Realidade, ultrapassam, por vezes, em possibilidades *racionais* (não quer dizer em *adaptação à realidade*), as necessidades que originaram o seu aparecimento. A Natureza mostra-nos um seu *aspecto*, determinado pelas qualidades das coisas em relação a nós. Forjamos o instrumento e as malhas do quadro interpretativo para o estudo desse aspecto, e a nossa actividade racional é levada em seguida, pelo *princípio de extensão* (1.ª Parte, pág. 9), a tirar dele todas as consequências racionais, todas as possibilidades lógicas. Que admira que a certa altura desapareça o acordo que existia junto da fonte da criação, e que aquilo que é *possível*, para a nossa lógica, não encontre a contra-partida de *existência*? O leitor deve ter sempre presente, a este respeito, estas palavras de Jean Perrin:

Toda a noção acaba por perder a sua utilidade, a sua própria significação, à medida que nos afastamos das condições experimentais em que ela teve a sua origem (1).

Adiante teremos necessidade de voltar a esta ideia. Por agora, vamos ainda chamar a atenção do leitor para um aspecto extremamente interessante dos problemas que estamos estudando.

27. Leis analíticas e leis geométricas.

Está adquirido que de toda a função $y(x)$ se pode construir uma imagem geométrica. Suponhamos que a função fora definida por uma expressão analítica—a imagem geométrica da função é

(1) *Espace et Temps*—Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann, 1940.

a tradução, no campo geométrico, daquela lei analítica que a expressão analítica implica.

Por exemplo, o fenómeno da queda dos graves no vácuo é *regulado*, no campo analítico, pela lei matemática $20, 2) y=4,9x^2$; é igualmente *regulado*, no campo geométrico, pela curva da fig. 36, visto que, tanto a expressão analítica como a curva definem, afinal, a mesma função $y(x)$.

Quer dizer, o conceito de função permite estabelecer uma correspondência entre as leis matemáticas e as leis geométricas, entre as expressões analíticas e os lugares geométricos (conjuntos de todos os pontos que gozam de uma mesma propriedade). Para estabelecer essa correspondência não há mais que, a cada *expressão* analítica, fazer corresponder aquele *lugar* que define a mesma função que ela. A expressão analítica, ou, melhor, a igualdade $y=expressão\ analítica$ chama-se *equação* do lugar que lhe corresponde; assim: $y=4,9 \cdot x^2$ é a equação da curva da fig. 36.

28. A grande unificação.

Veja bem o leitor o que há de importante nesta nova relação—*tradução de leis analíticas em leis geométricas*.

Em primeiro lugar, o facto de se obter assim uma *unificação* dos dois campos—geométrico e analítico—que, durante perto de vinte séculos, se tinham considerado separados em compartimentos estanques.

Nesta unificação, realizada de há três séculos para cá, reside um dos factos mais dramáticos, mais importantes e mais profundos da história do Conhecimento; no capítulo IV nos ocuparemos dêlo com um pouco mais de vagar.

Em segundo lugar, o facto de ser o próprio conceito de função, instrumento de estudo das *correspondências*, que vai agora servir de elemento definidor dessa nova correspondência, de *motivo de unificação* dos dois campos.

Está o leitor vendo a potencialidade extraordinária deste conceito? Neste livrinho não podemos mais que levantar uma ponta do véu sobre o domínio encantado das possibilidades que ele nos oferece.

É o que faremos nos capítulos seguintes, em duas ligeiras excursões—uma pelo domínio da Técnica, outra pelo da História.