

# Exercício 10

10. A demanda diária de arroz num supermercado, em centenas de quilos, é uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} 2x/3, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -x/3 + 1, & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 3. \end{cases}$$

$X = \text{demanda}$

- (a) Qual a probabilidade de se vender mais do que 150 kg, num dia escolhido ao acaso?
- (b) Em 30 dias, quanto o gerente do supermercado espera vender?
- (c) Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada à disposição dos clientes diariamente para que não falte arroz em 95% dos dias?

f.d.p

$f(x) \Rightarrow F(x)$   $\left( \begin{smallmatrix} \text{f} \\ \text{d} \end{smallmatrix} \right)$

$\downarrow$  definida  $\downarrow$  F.d.a

$\Rightarrow$  Lembremos que:

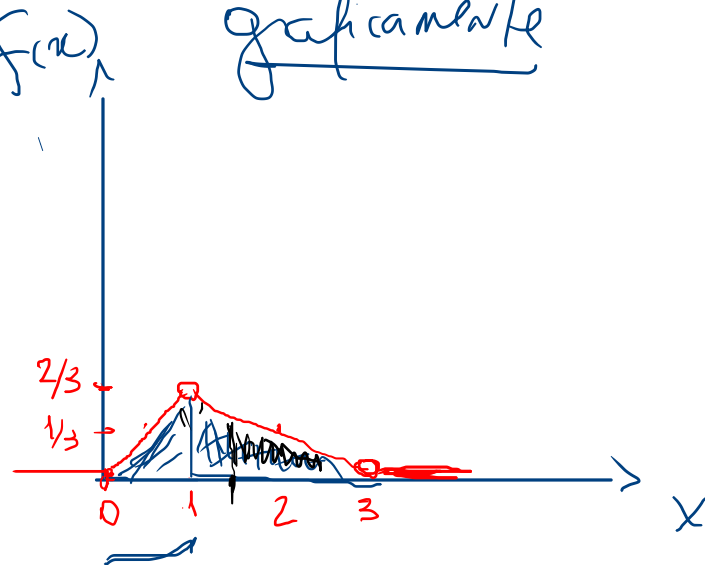
$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a < x \leq b \\ 1, & \text{se } x > b \end{cases}$$

Descrevendo:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ \frac{2x}{3}, & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ -\frac{x}{3} + 1, & \text{se } 1 \leq x < 3; \\ 0, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

OK

graficamente



$$P = 0,95$$

$$P(\quad) = \underline{\underline{0,95}}$$

$$\underline{\underline{E(x) = 1,33}}$$

$$\underline{\underline{1,33\text{ kg}}}$$



?

a

$$E(x) = 1,33\text{ kg}$$

???

a

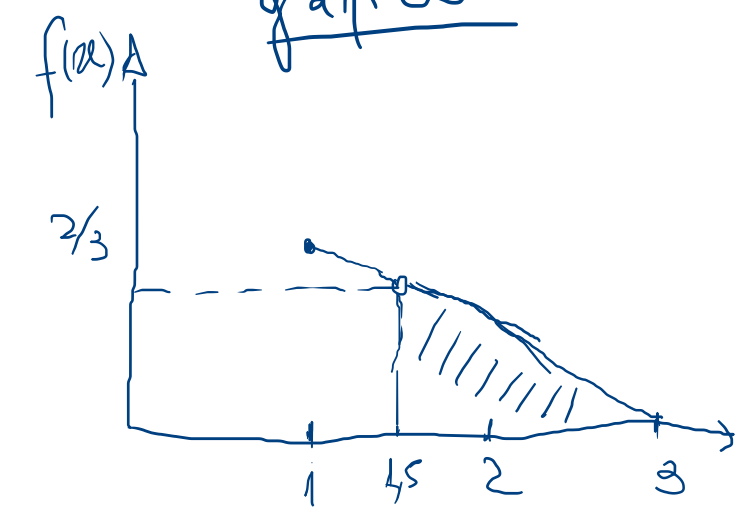
a

2) Usando as regiões

a)  $P(X > 150 \text{ kg}) = P(X > 1,5)$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{3}, & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ 0, & \text{se } x > 3 \end{cases}$

gráfico



$\Rightarrow P(X > 1,5) = \int_{1,5}^3 f(x) dx = \int_{1,5}^3 (1 - \frac{x}{3}) dx$

$\left[ x - \frac{x^2}{6} \right]_{1,5}^3 = \left( 3 - \frac{9}{6} \right) - \left( \frac{3}{2} - \frac{(3/2)^2}{6} \right) =$

$\left( \frac{18-9}{6} \right) - \left( \frac{9 - \frac{9}{4}}{6} \right) = \frac{9}{6} - \left( \frac{\frac{36-9}{4}}{6} \right)$

$= \frac{9}{6} - \frac{27/4}{6} = \frac{9 - \frac{27}{4}}{6}$

$= \frac{\frac{36-27}{4}}{6} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{9 \cdot 1}{24} = \frac{3}{8}$

$\therefore \text{Prob}(x > 1,5) = 0,375 \approx 37,5\%$

b) **Qual a venda esperada em 30 dias?**

Num Período de 30 dias (valor esperado)

$E(x) = \int_A^B x f(x) dx$

$0 \leq x < 3$

$E(x) = \int_0^1 x f(x) dx + \int_1^3 x g(x) dx$

$E(x) = \int_0^1 x \left( \frac{2x}{3} \right) dx + \int_1^3 \left( 1 - \frac{x}{3} \right) x dx = \int_0^1 \frac{2x^2}{3} dx + \int_1^3 \left( \frac{x-x^2}{3} \right) dx$

3) Reformando;

$$t(x) = \int_0^1 \frac{2x^2}{3} dx + \int_1^3 \left(x - \frac{x^2}{3}\right) dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 x^2 dx + \int_1^3 \left(x - \frac{x^2}{3}\right) dx$$

$$= \frac{2}{3} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{9} \right]_1^3$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow x^2 \rightarrow \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3}$$

$$x \Rightarrow \frac{x^{1+1}}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^2}{3} = \frac{x^{2+1}}{3(2+1)} = \frac{x^3}{9}$$

$$E(x) = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} \right) + \left[ \frac{9}{2} - \frac{27}{9} \right] - \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \right]$$

$$= \frac{2}{9} + \left[ \frac{81-54}{18} - \left( \frac{9-2}{18} \right) \right]$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{81-54-9+2}{18} = \frac{2}{9} + \frac{20}{18}$$

$$\frac{83}{63} \approx \frac{20}{20}$$

$$\frac{4+20}{18} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \approx 1,33$$

1 dig

P/ 30 dias:

$$\frac{4}{3} \cdot 30 = \frac{120}{3} = 4000 \text{ kg}$$

c) X q. deve ser deixada p/ n  
faltar arroz em 95% do dias.

$$4) P(X \leq \underline{a}) = \underline{0,95} \text{ (95\%)}$$

Voraus.  $E(X) = 1,3/\text{dien}$

$\Rightarrow$  se  $\boxed{0 \leq X \leq 1}$  in faller anfang

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 \underline{f(x)} dx = \int_0^1 \frac{2x}{3} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x dx$$

$$= \frac{2}{3} \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{2} \right] = \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

da:

$$\frac{1}{3} + \int_1^a \left( 1 - \frac{x}{3} \right) dx$$

$$= \underline{\underline{0,95}}$$

Ind. in faller  
anfang

$$\frac{1}{3} + \left[ x - \frac{x^2}{6} \right]_1^a = 0,95$$

$$\frac{1}{3} + \left[ \left( a - \frac{a^2}{6} \right) - \left( 1 - \frac{1}{6} \right) \right] = \underline{\underline{0,95}}$$

continuity:

$$\boxed{a^2 - 6a + 8,7 = 0}$$

$$\boxed{a = 2,45}$$

$$\boxed{245 \text{ kg}}$$

$$a - \frac{a^2}{6} - \frac{5}{6} = 0,95 - \frac{1}{3}$$

$$a - \frac{a^2}{6} - \frac{5}{6} + \frac{1}{3} = 0,95$$

$$a - \frac{a^2}{6} - \frac{5+2}{6} = 0,95$$

$$a - \frac{a^2}{6} - \frac{3}{6} = 0,95$$

$$\frac{6a - a^2 - 3}{6} = 0,95$$

$$-a^2 + 6a - 3 = 5,7$$

# 5) Modelos de Probabilidade

## ⇒ Modelo Normal

Def: Diz-se que  $X$ , uma v.a., tem dist. normal c/ parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$  com:

$$\begin{cases} -\infty < \mu < +\infty \\ 0 < \sigma^2 < \infty \end{cases}$$

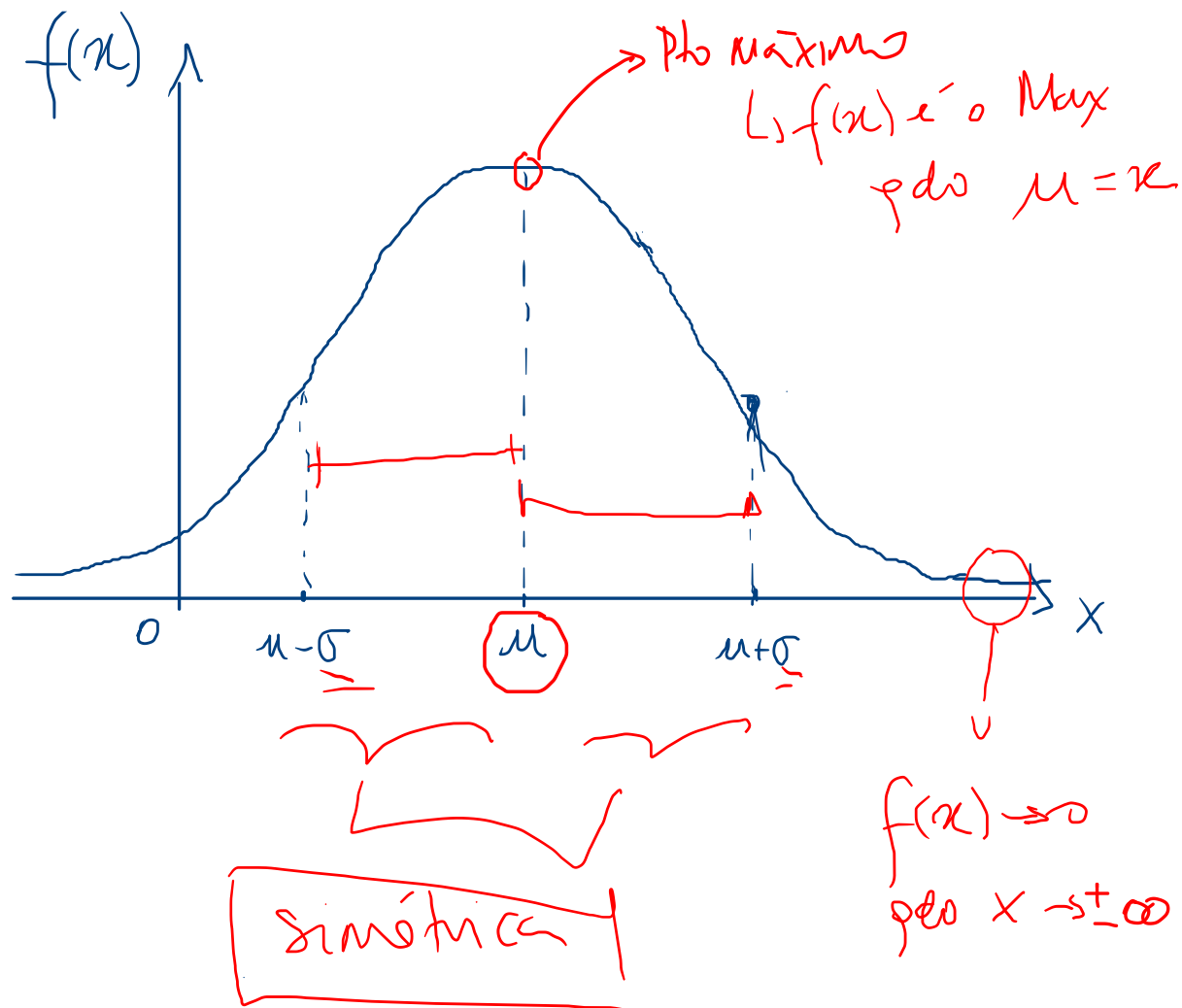
$\mu$  → Média  
 $\sigma^2$  → Variância  
 $\sigma$  → Desvio Padrão  
 $E(X)$

Se sua f.d.p. é dada por:

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

c/  $-\infty < x < \infty$

Se usarmos alguns valores p/  $\mu$  e  $\sigma^2$



$$f(x+\mu; \mu, \sigma^2) = f(x-\mu; \mu, \sigma^2) \quad \forall \text{ todo } x \in \mathbb{R}$$

Notação:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

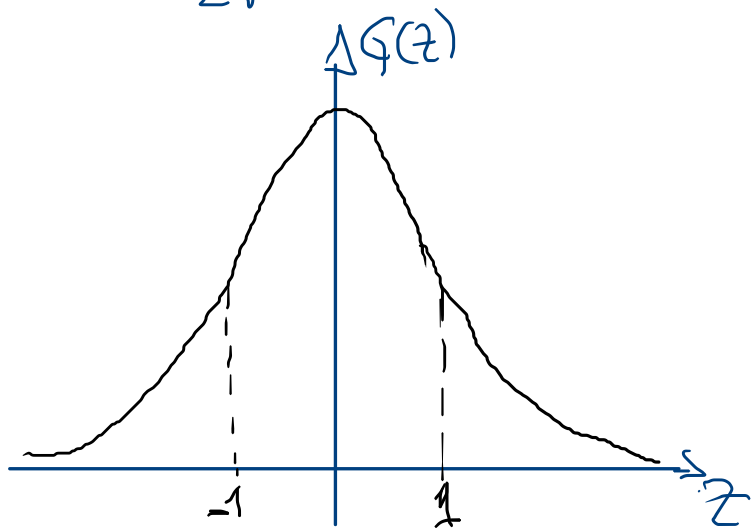
b) Importante se  $\begin{cases} \mu=0 \\ \sigma^2=1 \end{cases}$

temos uma dist. Normal Padronizada

$$\Rightarrow Z \sim N(0,1)$$

Podemos fazer:

$$G(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad \text{ou } -\infty < z < \infty$$



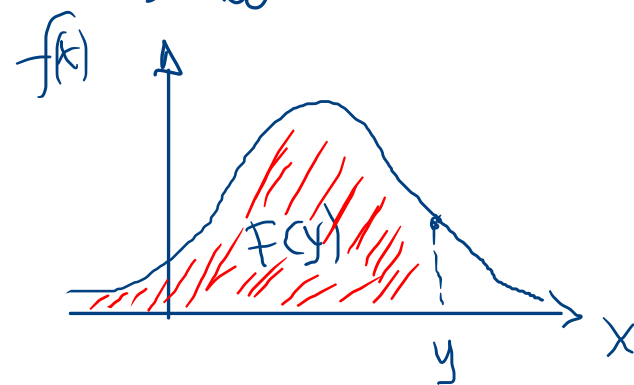
se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , então a v.a.  $Z$  é dada por:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z \text{ terá } \begin{cases} \mu=0 \\ \sigma^2=1 \end{cases}$$

A f.d.a. (função densidade acumulada) de uma v.a.  $X$ , tal que  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , é dada por:

$$F(y) = \int_{-\infty}^y f(x; \mu, \sigma^2) dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$



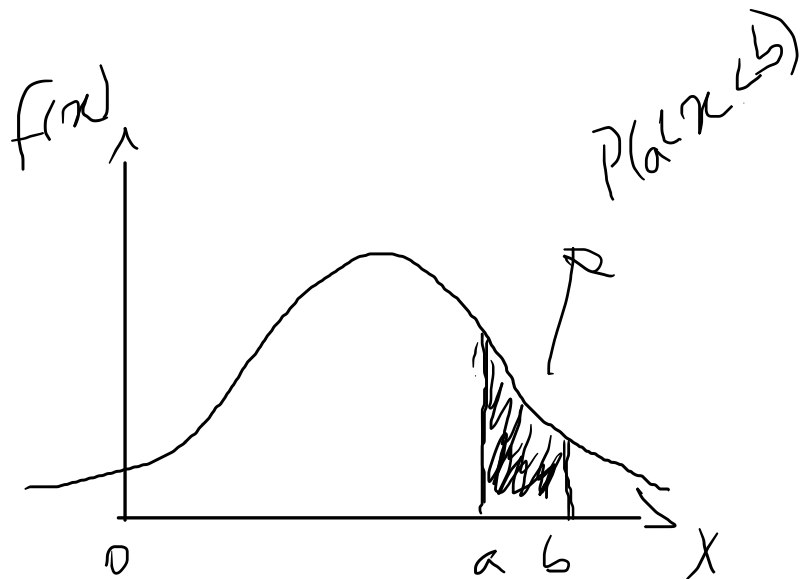
7) Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , podemos calcular

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

onde:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Gráfico/



⇒ Precisamos integrar todas as vezes

→ P/ cada valor de  $\mu, \sigma^2$  temos  $\int_a^b f(x) dx$  fazer  
 $P(a < X < b)$  p/ cada valor de  $a$  e  $b$ ,

Não Precisamos sofrer:

→ podemos usar uma tabela q. aponta as  
probabilidades (Tab. III do livro)