1) Cap 6 – Variável aleatória Discreta (CONT.)

Dizemos que X tem uma dist. uniforme se

$$P(X=x_i) = p(x_i) = p = \frac{1}{k}, \quad c/ \; i = 1,2,3,\dots,k$$

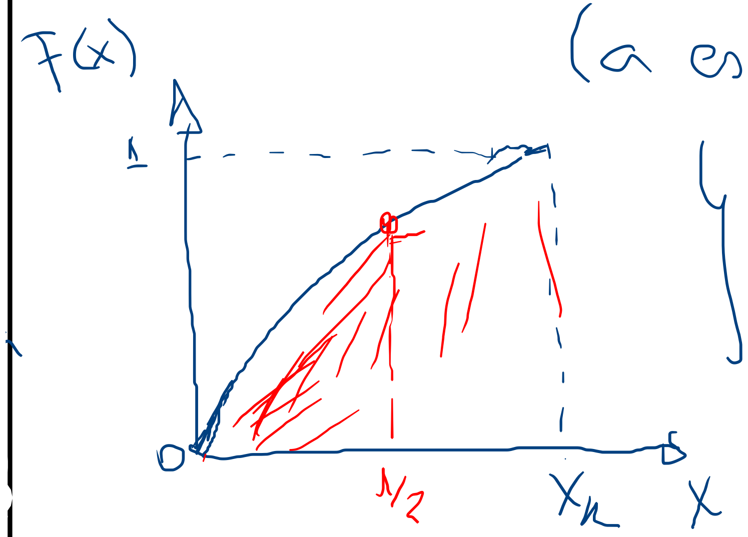
$$\Rightarrow \begin{cases} E(x) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i \rightarrow \boxed{\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i} \\[2ex] Var(x) = \dfrac{1}{k}\left\{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2}{k}\right\} \end{cases}$$

daí:

$$\boxed{\underbrace{F(x)}_{\text{fç de dist. acumulada}} = \sum_{(x_i \le x)} \frac{1}{k} = \frac{n(x)}{k}}$$

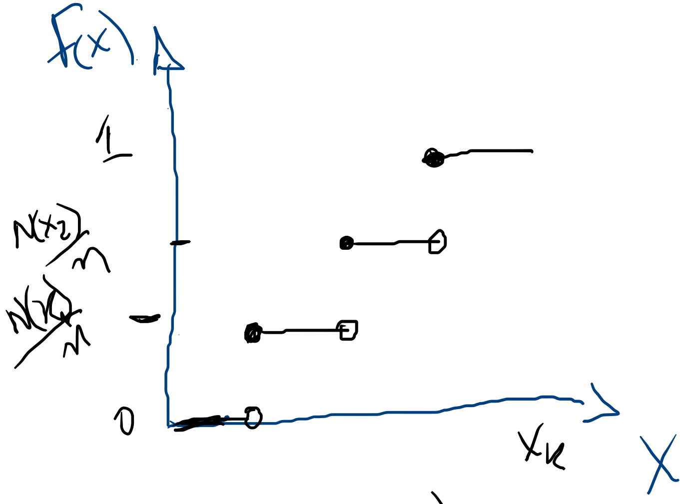
$$F_e(x) = \frac{N(x)}{n}$$

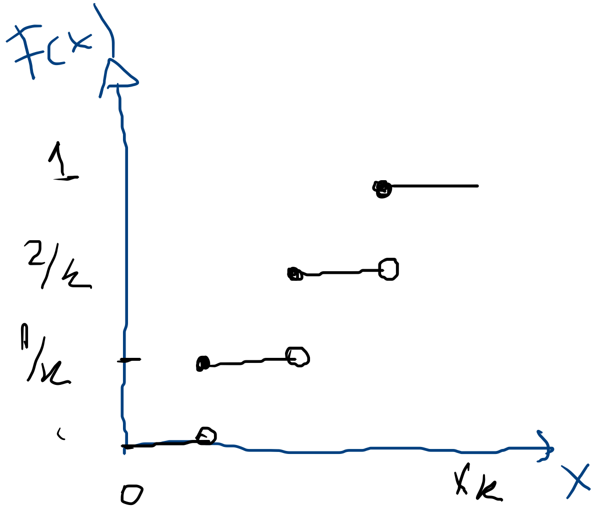
Lembrar que: $N(x) \rightarrow$ nº de observações menores ou iguais a X (a esquerda do X)



P/ contínua

$x_i \le 1/2$





Fe(

Fç de dist. acumulada p/ var. discreta

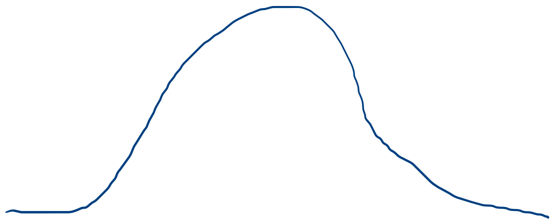
Prob(x) | distribuição variável

X

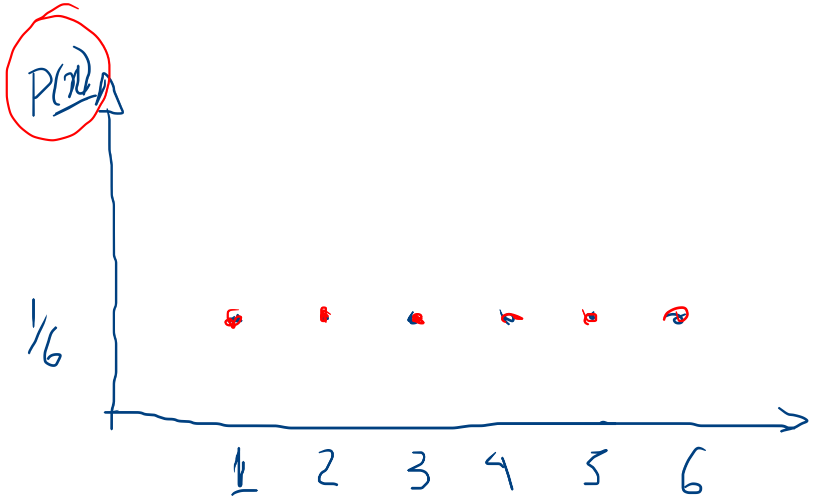
Var(X)

DISCRETA

CONTÍNUA



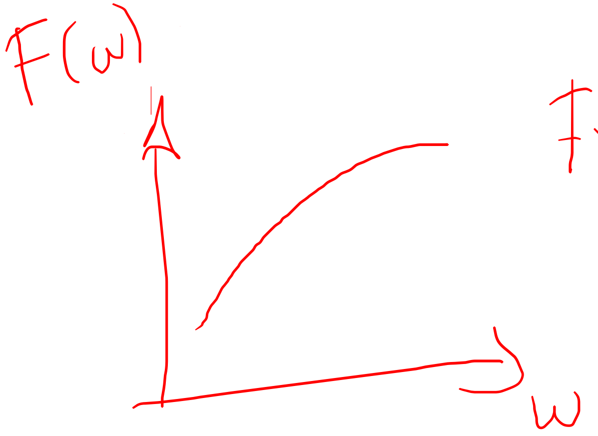
E(X)



DISCRETA
- UNIFORME
- BERNOULLI
- BINOMIAL

→ HIPERGEOMÉTRICA

→ POISSON*



$F_X \begin{cases} 0, & \text{se } w < 4 \\ 1/36, & 4 \leq w < 8 \end{cases}$

2) Exemplo

Imagine um dado (s/ vício)

=> P/ cada lançamento temos:

X	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

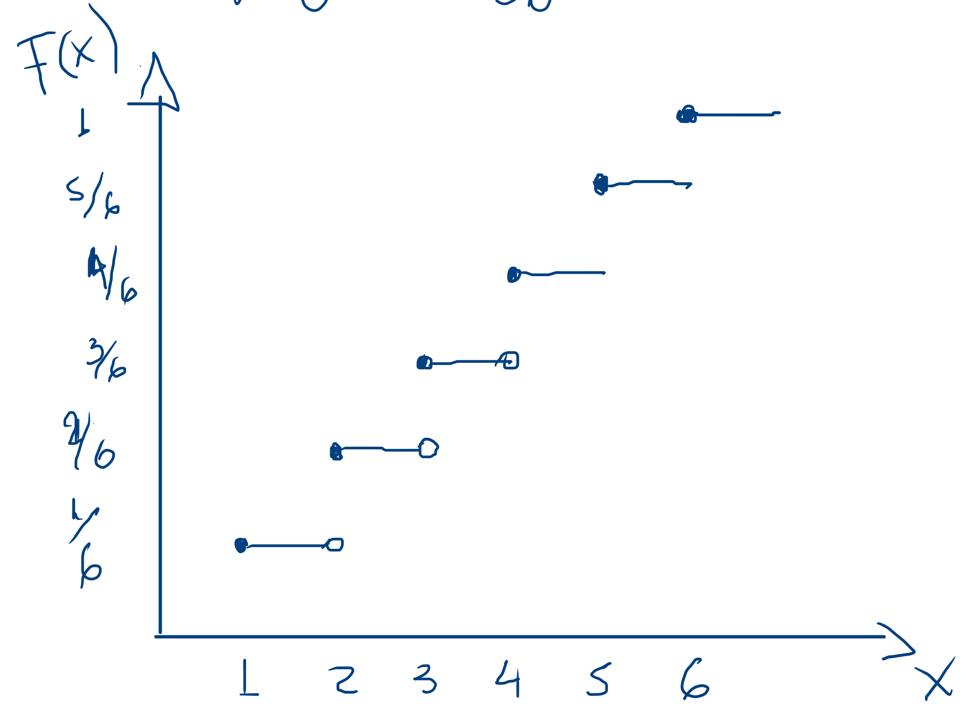
Veja que: $E(X) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{6} X_i = \frac{1}{6}(1+2+\dots+6)$

$= \frac{21}{6} = 3{,}5$

$$Var(X) = \frac{1}{k}\left\{\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{k}\right\}$$

$$\frac{1}{6}\left[(1+4+9+\dots+36) - \frac{21^2}{6}\right] = \left(91 - \frac{21^2}{6}\right)\frac{1}{6}$$

$$\left(\frac{546-441}{6}\right)\cdot\frac{1}{6} = \frac{105}{36} = 2{,}94$$



$$F_e(x) = \frac{N(x)}{n}$$

3) Bernoulli

↳ considere uma variável c/ apenas dois resultados possíveis: NF c/ problema
NF s/ problema

cliente — visitado
— ñ visitado

Peça — c/ defeito
— s/ defeito

Variável dicotômica (0/1)

Variável dummy

Podemos chamar 1 – sucesso
0 – fracasso

$\Rightarrow P(\text{sucesso}) = P(S) = p$, c/ $\boxed{0 < p < 1}$

$P(\text{fracasso}) = P(F) = (1-p)$

Assim, podemos fazer: $\begin{cases} p(0) = p(X=0) = 1-p \\ p(1) = p(X=1) = p \end{cases}$

$\boxed{P(S) = p} \Rightarrow \boxed{P(F) = 1-p}$

Disto, decorre que:

Seja X a v.a q assume 1 ou 0, c/ função de probabil. $(x, p(x))$, tal que

$$\left\{\begin{array}{l} \underbrace{p(0)}_{\text{Fracasso}} = p(X=0) = 1-p \\ \underbrace{p(1)}_{\text{sucesso}} = p(X=1) = p \end{array}\right\}$$

podemos chamar X de variável de Bernoulli

Se X é v. de Bernoulli, então:

$E(X) = p$; $Var(X) = p - p^2 = \boxed{p(1-p)}$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1-p, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ p, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Bernoulli

Atraso → 1 → NÃO ESTAVA PRONTA

Atraso → 0 → ESTAVA PRONTA

$P(R = A = 1) = p$

$P(R = \text{Pontual} = 0) = (1 - p)$

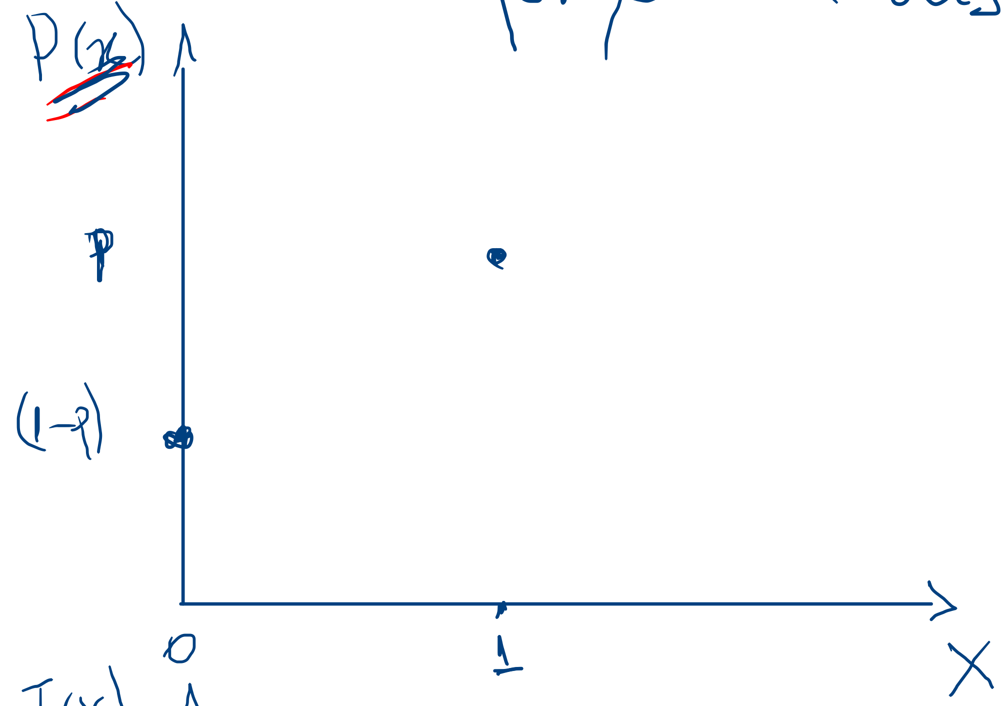
Bernoulli

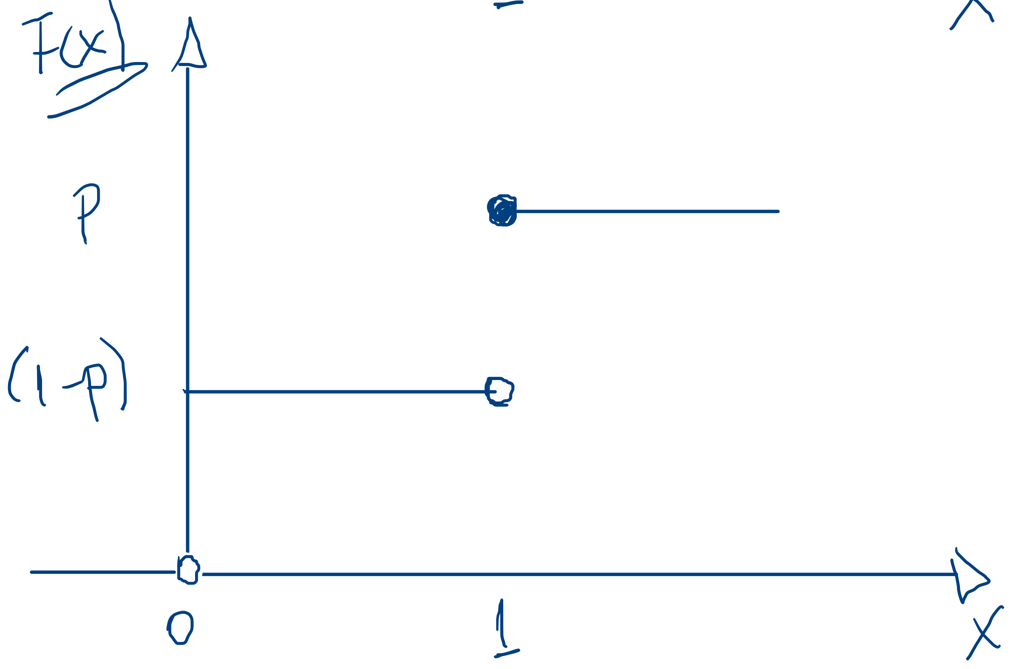
$E(R) = p$

$Var(R) = p(1-p)$

4) Graficamente:

função de dist.





Exemplo:

Você tem uma linha de produção que produz peças p/ automóveis. Cada linha deveria testar a peça antes de mandá-la p/ o estoque. Há duas possibilidades:

(1) Perfeita
(0) defeituosa

seja X o teste

$$\begin{cases} P(X=P) = p(1) = p \\ P(X=0) = p(0) = (1-p) \end{cases} \quad \begin{aligned} E(X) &= p \\ V(X) &= p(1-p) \end{aligned}$$

Vamos dizer que $\underbrace{X \sim Ber(p)}$ → notação

3) Dist. Binomial:

Veja q. no teste anterior olhamos p/ o teste de cada peça. Isto seria quase que impraticável. Será melhor se testarmos uma amostra de um lote.

ASSIM TEREMOS UMA SEQUÊNCIA DE TESTES DE BERNOULLI. ISTO PERMITIRA PENSARMOS NUMA DIST. BINOMIAL. VEJAMOS

SELECIONAMOS CINCO PEÇAS DE UM LOTE.

$\Rightarrow$ TEMOS:

$$\begin{matrix} F & S & S & F & S \\ 1^a & 2^a & 3^a & 4^a & 5^a \end{matrix} = (0, 1, 1, 0, 1)$$

$$k = 2$$

$$n = 5$$

SE FIZERMOS

$$\left.\begin{aligned} P(X=S) &= P(X=1) = p \\ P(X=F) &= P(X=0) = (1-p) \end{aligned}\right\} \text{ Temos:}$$

$$\left[(1-p).(p).(p).(1-p).(p) = p^3(1-p)^2\right]$$

(PRECISAMOS CONSIDERAR QUE OS EVENTOS SÃO INDEPENDENTES)

P/ FACILITAR PENSE EM APENAS 3 PEÇAS c/ PROBABILIDADE IGUAL DE P e D. QUAL A PROB. DE DUAS PEÇAS S/ DEFEITO (Perfeitas)

$\Rightarrow A = \{SSF, SFS, FSS\}$

$= \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$

Evento: DUAS PEÇAS S/ DEFEITO (Perfeitas)

→ S Perfeita → SUCESSO

→ c/ defeito → FRAC

6) Lembre que $P(A) = \underbrace{P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)}$

(SSF) (SFS) (F,SS)

Como $P(A_1) = P(SSD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$P(A_2) = P(P,D,P) = \frac{1}{8}$

$P(A_3) = P(D,P,P) = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow$ $P(A) = \frac{3}{8}$

Outra forma de escrever é:

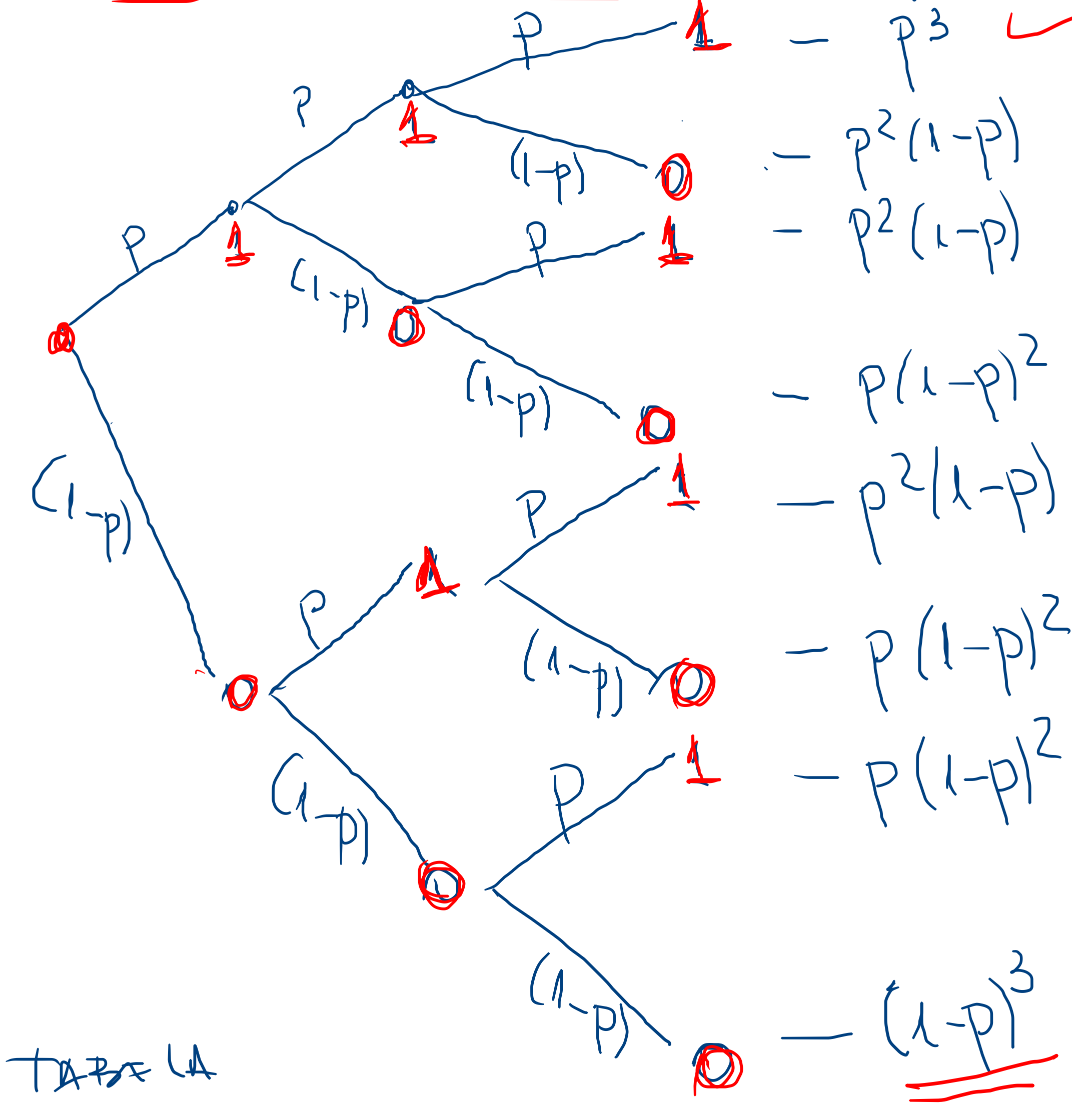
$P(S,S,F) = p \cdot p(1-p) = p^2(1-p)$

$P(S,F,S) = p(1-p) \cdot p = p^2(1-p)$

$P(F,S,S) = (1-p) \cdot p \cdot p = p^2(1-p)$

$\therefore$ $\boxed{P(A) = 3p^2(1-p)}$

A árvore de probabilidade vai me gerar:



Tabela

Nº de peças perfeitas	Prob	$P = 1/2$
0	$(1-p)^3$	$1/8$
1	$3p(1-p)^2$	$3/8$
2	$3p^2(1-p)$	$3/8$
3	p^3	$1/8$

7) Do que vimos, chamemos de X o nº de peças perfeitas em n ensaios de Bernoulli, com prob de sucesso p, c/ $0 < p < 1$.

Os possíveis valores de X são $1, 0, \dots, n$ e os pares $(x, p(x))$, onde $p(x) = P(X = x)$, constituem a cham. dist. binomial.

Assim, se estivermos falando de k peças perfeitas num lote de n peças, temos

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{(n-k)}, \quad c/ \ k = 0, 1, \dots, n$$

Perceba que $n-k$ = nº de peças defeituosas

Notação: $X \sim b(\underbrace{n, p}_{\text{parâmetros da dist.}})$

Exemplo: Sejam 500 peças (lote)

(onde retiramos 10 peças p/ análise (amostra)

Faremos $n = 10$ ensaios de Bernoulli (n)

$P(D) = 0{,}1 \to$ prob de peça defeituosa

Considere D = sucesso $\therefore P(X = \text{sucesso}) = p$

$\Rightarrow p = 0{,}1$

$\therefore (1-p) = 0{,}9$

Se X indica nº de peças defeituosas, qual Prob(X = 10)?

$$P(X=10) = \binom{n=10}{k=10} p^{10}(1-p)^{0} = (0{,}1)^{10} = \frac{1}{10^{10}}$$

$E(X) = np$

$Var(X) = np \cdot (1-p)$

$E(X) = 10 \cdot \frac{1}{10} = 1$

$Var(X) = 10 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} = 9/10$

$E(X) = nP$

$Var(X) = np(1-p)$

Bern

n → dist Bin

lote → 500 peças

Amostra

Amostra mínima

10 peças

nº de ensaios de Bernoulli
- Sucesso
- Fracasso

AAS

Freq

X → nº de peças c/ resultado "Favorável"
- Sucesso
- Fracasso

defeito

Perfeito

Visita

ñ visita