Eletromagnetismo

4300372

F.S. Navarra

navarra@if.usp.br

Guilherme Germano (monitor)

guilherme.germano@usp.br

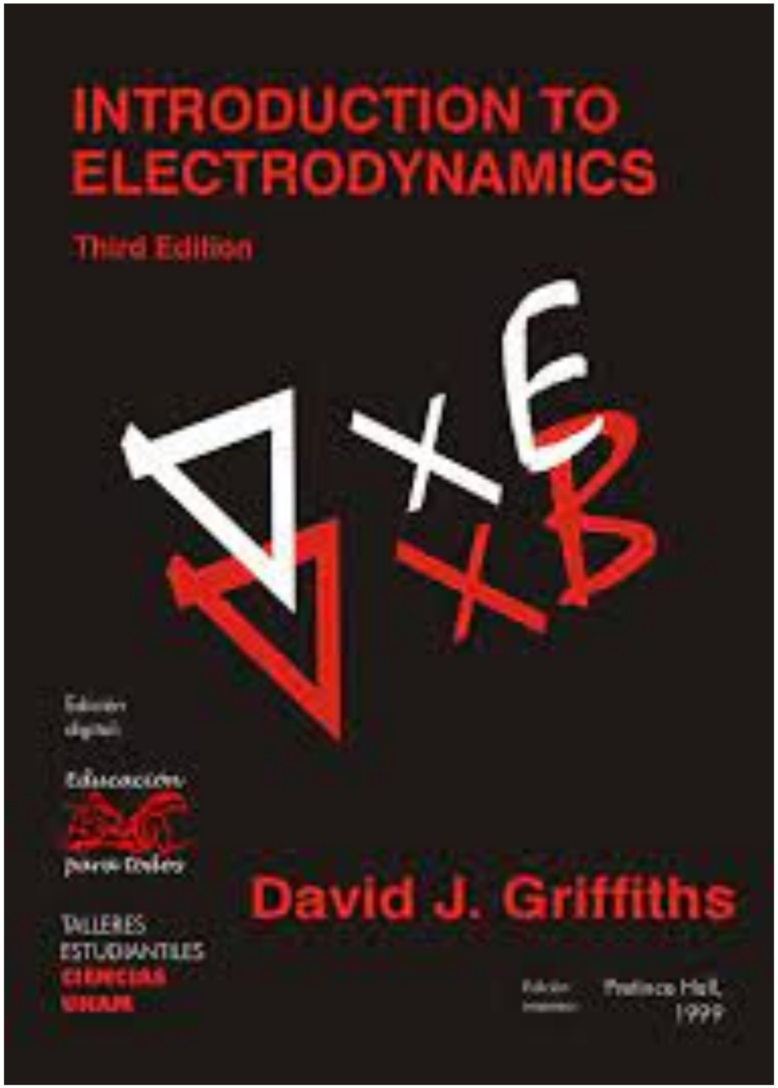
edisciplinas.if.usp.br

Plano do Curso

17/08	14/09	12/10	09/11
20/08	17/09	15/10	12/11
24/08	21/09	19/10	16/11
27/08	24/09	22/10	19/11
31/08	28/09	26/10	23/11
03/09	01/10	29/10	26/11
07/09	05/10	02/11	30/11
10/09	08/10	05/11	03/12

Substitutiva: 07/12

Bibliografia



Capítulo 2 : eletrostática

Capítulo 5 : magnetostática

Capítulo 7 : eletrodinâmica

Capítulo 8 : leis de conservação

Capítulo 9 : ondas eletromagnéticas

Capítulo 10 : campos e potenciais

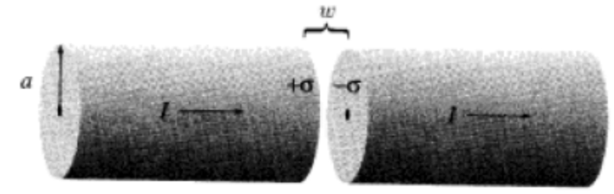
Capítulo 11 : radiação

Aula 24

Exercícios

Lista 5

1. Um fio espesso, de raio a, carrega uma corrente constante I, uniformemente distribuida sobre sua seção transversal. Um espaço estreito, de largura $w << a$, forma um capacitor de placas planas paralelas, conforme a figura.



(a) Calcule os campos elétrico e magnético no vão, como função da distância ao eixo s e do tempo t, assumindo que a carga nas superfícies é nula em $t = 0$.

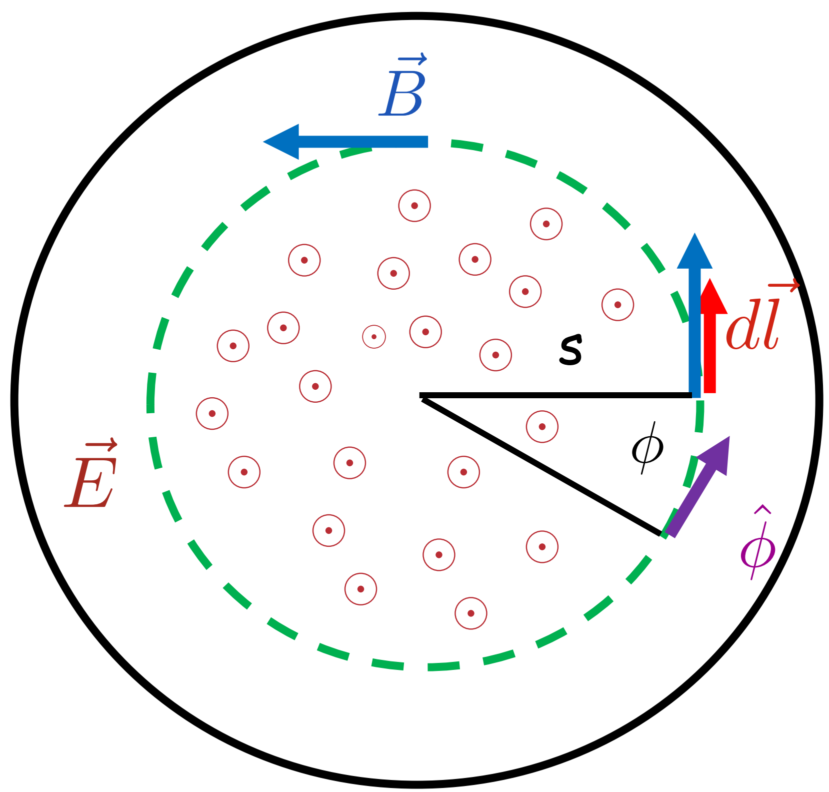
$$\mathbf{E}(t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} = \frac{Q}{\pi a^2 \epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} = \boxed{\frac{It}{\pi a^2 \epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}}$$

$$\oint \vec{B} \,.\, \vec{dl} = \mu_0 \, \epsilon_0 \int \frac{d\vec{E}}{dt} \,.\, \vec{da}$$

$$B 2\pi s = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \pi s^2 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{I \pi s^2}{\pi \epsilon_0 a^2}$$

$$\boxed{\mathbf{B}(s,t) = \frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\hat{\phi}}$$

Olhando pela direita :

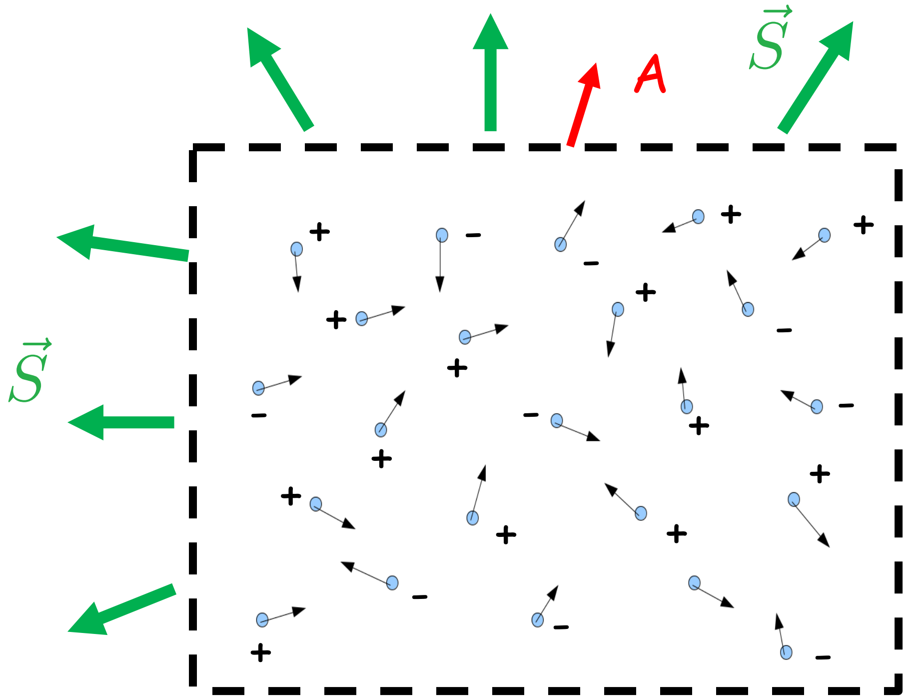


Vamos lembrar do teorema de Poynting :

A diminuição da energia armazenada nos campos é igual ao aumento de energia das partículas mais a energia que escapa do volume de observação com o vetor de Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\,(\vec{E} \times \vec{B})$$

Vetor de Poynting



$$-\frac{d}{dt}U_{em} = \frac{dW}{dt} + \oint_A \vec{S}\,.\,d\vec{a}$$

Quando não existem partículas:

$$-\frac{d}{dt}U_{em} = \oint_A \vec{S}\,.\,d\vec{a}$$

$$-\frac{d}{dt}\int u_{em}\,d^3r = \int_V \vec{\nabla}\,.\,\vec{S}\;d^3r$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}u_{em} = -\vec{\nabla}\,.\,\vec{S}}$$

(b) Encontre a densidade de energia u_{em} e o vetor de Poynting $\mathbf{S}$ no vão e verifique que:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{em} = -\nabla \mathbf{S}$$

$$u_{em} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{1}{2}\left[\epsilon_0 \left(\frac{It}{\pi\epsilon_0 a^2}\right)^2 + \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\right)^2\right] = \boxed{\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^4}[(ct)^2] + (s/2)^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^4} 2c^2 t = \frac{I^2 t}{\pi^2 \epsilon_0 a^4};}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{It}{\pi\epsilon_0 a^2}\right)\left(\frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\right)(-\hat{\mathbf{s}}) = \boxed{-\frac{I^2 t s}{2\pi^2 \epsilon_0 a^4}\hat{\mathbf{s}}}$$

$$\vec{\nabla} . \vec{V} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s\, V_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\boxed{-\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{I^2 t}{2\pi^2 \epsilon_0 a^4} \nabla \cdot (s\hat{\mathbf{s}}) = \frac{I^2 t}{\pi^2 \epsilon_0 a^4};}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} u_{em} = -\nabla \cdot \mathbf{S}}$$

(c) Determine a energia total no vão como função do tempo. Determine a potencia que flui para o interior do vão, calculando o fluxo do vetor de Poynting através de uma superfície adequada. Verifique que a potencia é igual a taxa de aumento da energia.

Integrando u_{em} sobre um cilindro de raio R dentro do vão (para o vão todo basta tomar $R = a$):

$$U_{em} = \int_0^R u_{em} w 2\pi s ds = 2\pi w \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^4} \int_0 [(ct)^2 + (s/2)^2] s ds = \frac{\mu_0 w I^2}{\pi a^4} \left[(ct)^2 \frac{s^2}{2} + \frac{1}{4}\frac{s^4}{4} \right]_0^R$$

$$\boxed{U_{em} = \frac{\mu_0 w I^2 R^2}{2\pi a^4} \left[(ct)^2 + \frac{R^2}{8} \right]}$$

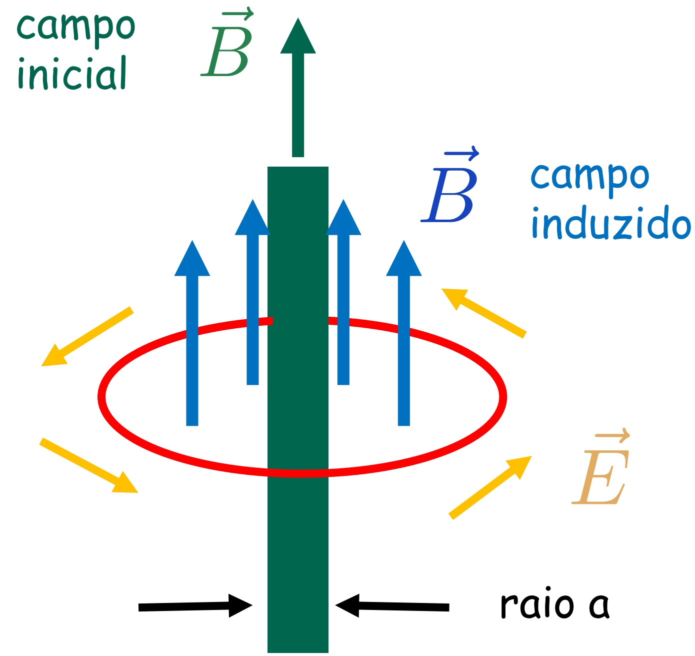
A potência que flui pra dentro do cílindro de raio R no vão é:

$$P_{in} = -\int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \frac{I^2 t}{2\pi^2 \epsilon_0 a^4} [b\hat{\mathbf{s}} \cdot (2\pi b w \hat{\mathbf{s}})] = \boxed{\frac{I^2 w t R^2}{\pi \epsilon_0 a^4}} \qquad c^2 = 1/(\mu_0 \epsilon_0)$$

$$\frac{dU_{em}}{dt} = \frac{\mu_0 w I^2 b^2}{2\pi a^4} 2c^2 t = \frac{I^2 w t b^2}{\pi \epsilon_0 a^4} = P_{in}$$

(2) Um solenóide infinito, de raio a, com n voltas por unidade de comprimento, carrega uma corrente I_S. Coaxial ao solenóide, há um fio em forma de anel circular de raio $b >> a$, com resistência R. Quando a corrente no solenóide é gradualmente diminuida, uma corrente I_r é induzida no anel.

(a) Calcule I_r em termos de dI_S/dt.



O campo gerado pelo solenóide é $B = \mu_0 n I_S$

$$\Phi = \pi a^2 B = \mu_0 n \pi a^2 I_S$$

$$I_r = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{d\Phi}{dt}\frac{1}{R} = \boxed{-\frac{1}{R}(\mu_0 \pi a^2 n)\frac{dI_S}{dt}}$$

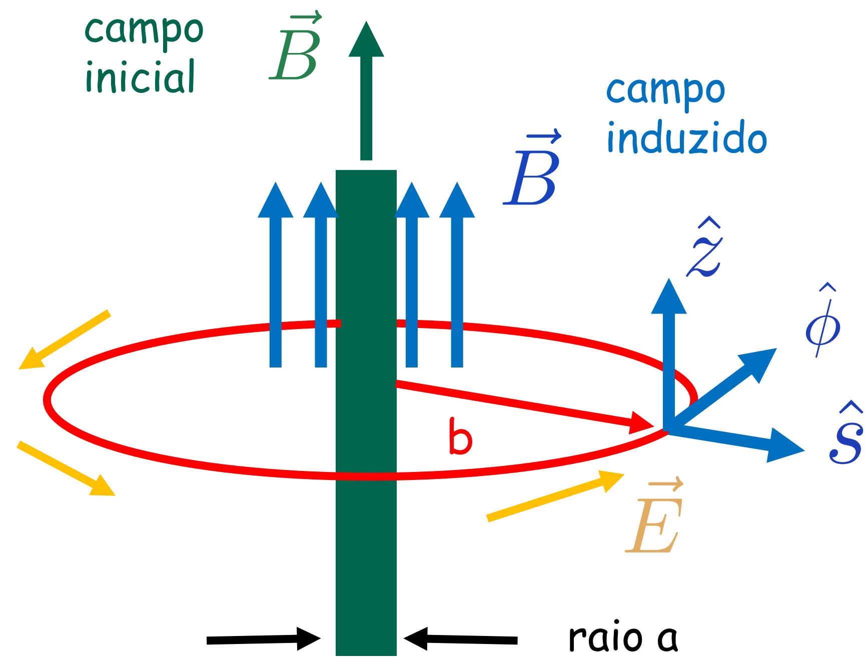
(b) Calcule o vetor de Poynting na superfície externa do solenóide (o campo elétrico é devido ao fluxo variavel no solenóide e o campo magnético devido à corrente induzida no anel). Calcule o fluxo de **S** através da superfície do solenóide e verifique que a potencia obtida corresponde a potência $I_r^2 S$, entregue ao anel.

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = E(2\pi a) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 \pi a^2 n \frac{dI_S}{dt}$$

$$\boxed{\mathbf{E} = -\frac{1}{2}\mu_0 a n \frac{dI_S}{dt}\hat{\phi}}$$

O campo magnético induzido produzido pela corrente que passa no anel :

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_r}{2}\frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}}}$$



$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\mu_0 a n}{2}\frac{dI_S}{dt}\right)\left(\frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}\right)(\hat{\phi}\times\hat{\mathbf{z}})$$

energia fluindo para fora !

$$P = \int \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a} = \int_{-\infty}^{\infty} S(2\pi a)dz = -\frac{1}{2}\pi a^2 b^2 n I_r \frac{dI_S}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(b^2+z^2)^{3/2}}dz$$

$$P = -\left(\pi\mu_0 a^2 n\frac{dI_S}{dt}\right)I_r = RI_r = \boxed{I_r^2 R.}$$

$$\left[\frac{z}{b^2(z^2+b^2)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{b^2}$$

3 Encontre os campos, cargas e distribuições de corrente correspondendo aos potenciais:

$$V(\mathbf{r},t) = 0; \quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r^2}\hat{\mathbf{r}}.$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\cancelto{0}{A_\varphi}\sin\theta) - \cancelto{0}{\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}}\right)\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cancelto{0}{\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}} - \frac{\partial}{\partial r}(r\cancelto{0}{A_\varphi})\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\cancelto{0}{A_\theta}) - \cancelto{0}{\frac{\partial A_r}{\partial\theta}}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = 0}$$

Os potênciais acima são uma escolha não usual uma carga estacionária q na origem, a escolha habitual é $V = q/4\pi\epsilon_0 r$ e $\mathbf{A} = 0$. As respectivas distribuições de carga e corrente são:

$$\boxed{\rho = q\delta^3(\mathbf{r}); \quad \mathbf{J} = 0}$$

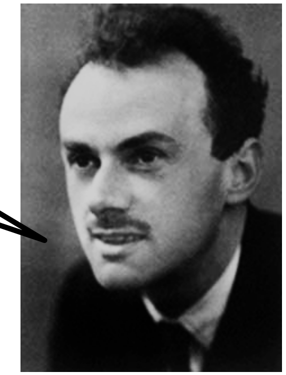
$$\int \rho\, d^3r = \int q\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)\,dx\,dy\,dz = q$$

A função delta de Dirac

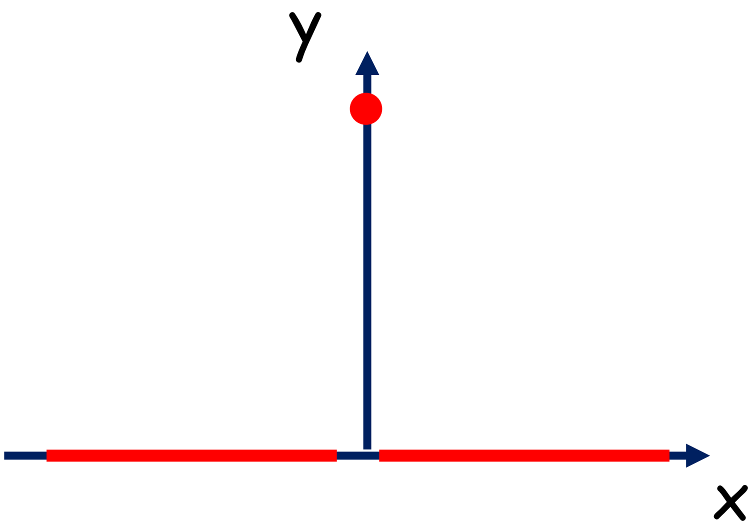
$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

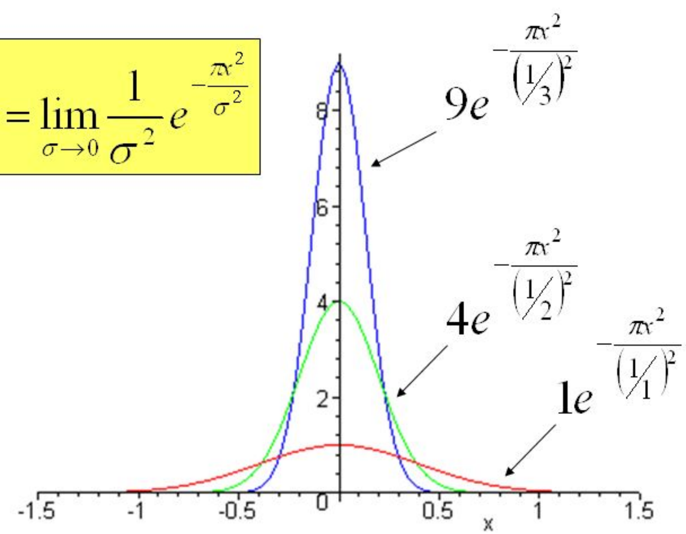
Ela é meio ruim de desenhar ...



Paul Dirac



$$\delta(x) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{\pi x^2}{\sigma^2}}$$



4. Supondo $V = 0$ e $\mathbf{A} = A_0 \sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{y}})$, onde A_0, ω e k são constantes. Encontre $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ e mostre que eles satisfazem as equações de Maxuell no vácuo. Qual condição deve ser imposta sobre k e ω ?

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -A_0 \cos(kx - \omega t)(-\omega)\hat{\mathbf{y}} = \boxed{A_0 \omega \cos(kx - \omega t)\hat{\mathbf{y}}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial x}[A_0 \sin(kx - \omega t)] = \boxed{A_0 k \cos(kx - \omega t)\hat{\mathbf{z}}}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -A_0 \omega k \sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{z}}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -A_0 \omega k \sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{E} = \boxed{A_0 \omega \cos(kx - \omega t)\hat{\mathbf{y}}}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial x}[A_0 \omega \cos(kx - \omega t)] = -A_0 \omega k \sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{z}},$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}.$$

Tem que ser satisfeita !

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial x}[A_0 k \cos(kx - \omega t)] = A_0 k^2 \sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{y}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = A_0 \omega^2 \sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{y}}$$

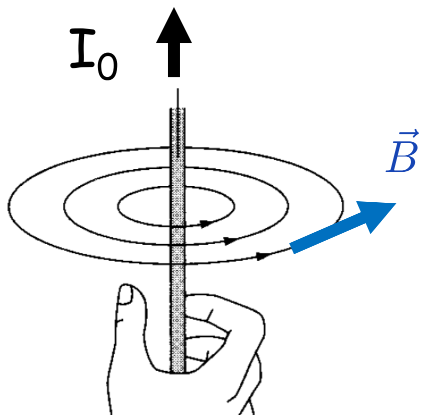
$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}$$

Tem que ser satisfeita e é desde que :

$k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2$, ou, como $c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$, $\omega = ck$.

(5) Um fio infinito carrega uma corrente $I(t) = kt$, com k constante e para $t > 0$. Encontre os campos elétricos e magnéticos produzidos.

Corrente estacionária num fio retilíneo gera campo magnético



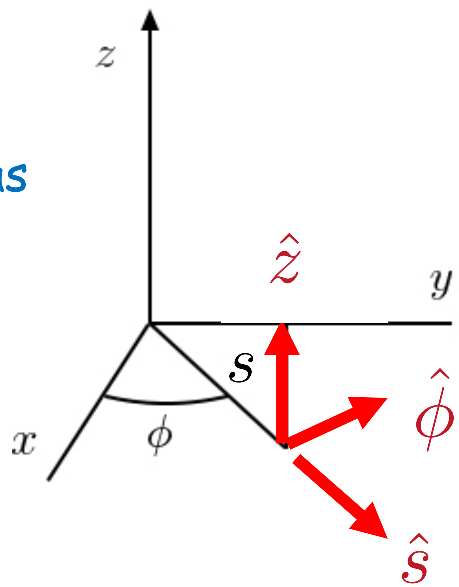
Vimos em aula o caso:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ I_0 & t > 0 \end{cases}$$

Agora:

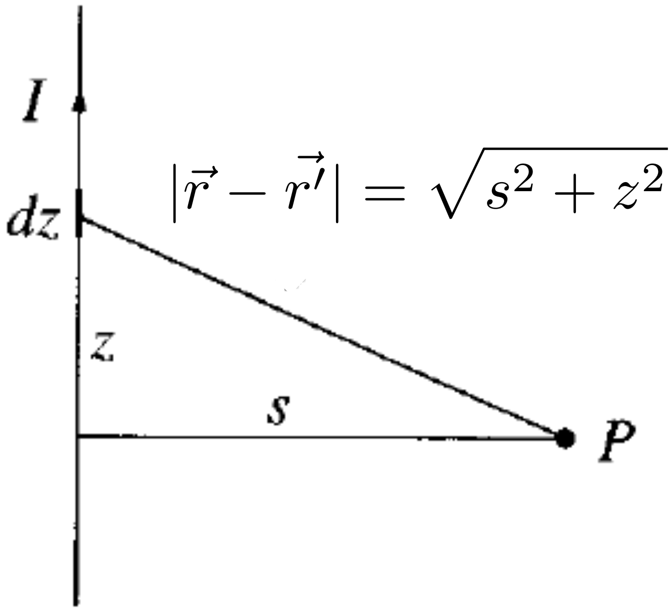
$$I(t) = \{ \; I(t) = k\,t$$

Coordenadas cilíndricas



Temos que levar em conta a velocidade de propagação da informação ("retardamento")

Calculamos primeiro os potenciais !



O fio não tem carga: $\rho = 0$

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r'}, t_r)}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\, d^3 r'$$

$$V = 0$$

O fio tem corrente: $\vec{J}(t) = I(t)\,\hat{z}$

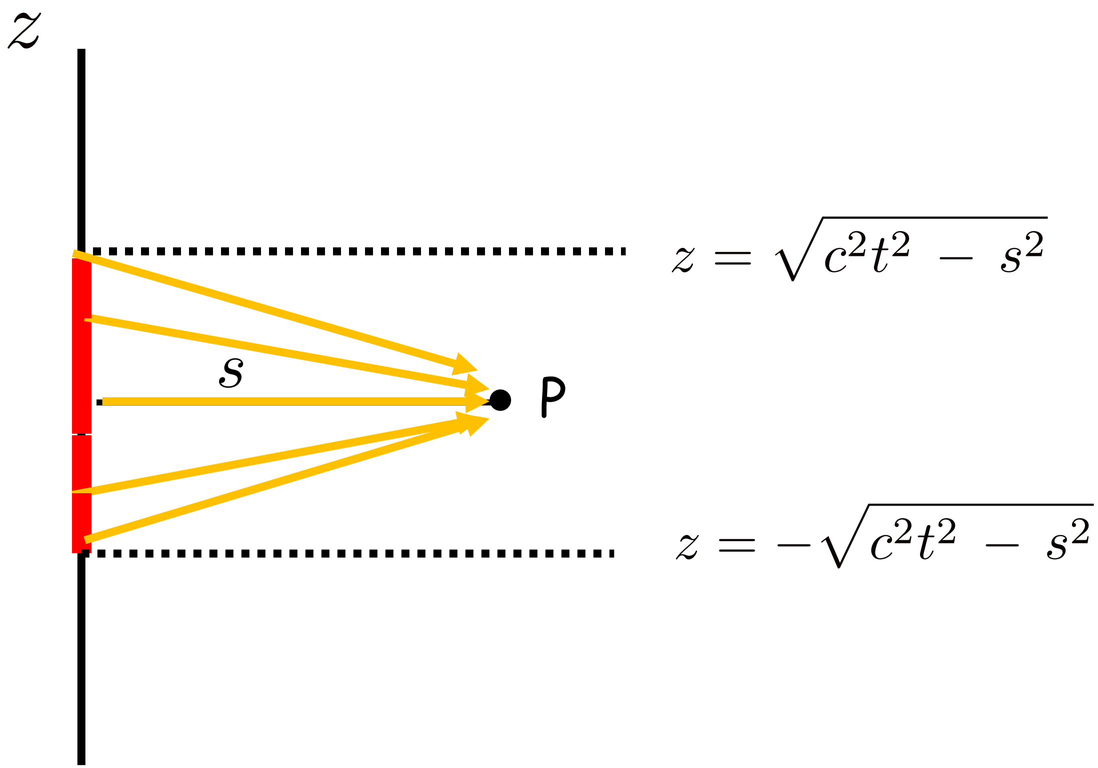
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r'}, t_r)}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\, d^3 r'$$

$$\vec{A}(s, t) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\hat{z} \int_{\infty}^{\infty} \frac{I(t_r)}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\, dz \qquad t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r'}|}{c} = t - \frac{\sqrt{s^2 + z^2}}{c}$$

Para um t fixo existe um z especial, para o qual $t_r = 0$

$$t - \frac{\sqrt{s^2 + z^2}}{c} = 0 \qquad z = \sqrt{c^2 t^2 - s^2}$$

Para z maior, a informação ainda não chegou e corrente ainda é zero !



O ponto P demora para sentir o fio todo

No instante t ele só vê a parte vermelha do fio

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\int_{-\sqrt{c^2t^2-s^2}}^{\sqrt{c^2t^2-s^2}} \frac{I(t_r)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\,dz$$

(vamos usar r no lugar de s)

$$\mathbf{A}(r,t) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\hat{\mathbf{z}}\right) 2\int_0^{\sqrt{(ct)^2-r^2}} \frac{k(t-\sqrt{r^2+z^2}/c)}{\sqrt{r^2+z^2}}\,dz$$

$$\mathbf{A}(r,t) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\hat{\mathbf{z}}\right) 2\int_0^{\sqrt{(ct)^2-r^2}} \frac{k(t-\sqrt{r^2+z^2}/c)}{\sqrt{r^2+z^2}}dz$$

$$= \frac{\mu_0 k}{2\pi}\hat{\mathbf{z}}\left[\int_0^{\sqrt{(ct)^2-r^2}} \frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{1}{c}\int_0^{\sqrt{(ct)^2-r^2}} dz\right]$$

$$= \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\hat{\mathbf{z}}\right)\left[t\ln\left(\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-r^2}}{r}\right) - \frac{1}{c}\sqrt{(ct)^2-r^2}\right]$$

$$\mathbf{E}(r,t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{2\pi}\hat{\mathbf{z}}\left\{\ln\left(\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-r^2}}{r}\right)+\right.$$

$$\left. t\left(\frac{r}{ct+\sqrt{(ct)^2-r^2}}\right)\frac{1}{r}\left(c+\frac{1}{2}\frac{2c^2t}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}\right)-\frac{1}{2c}\frac{ct}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}\right\}$$

$$= -\frac{\mu_0}{2\pi}\hat{\mathbf{z}}\left\{\ln\left(\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-r^2}}{r}\right)+\frac{ct}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}-\frac{ct}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}\right\}$$

$$\boxed{= -\frac{\mu_0 k}{2\pi}\ln\left(\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-r^2}}{r}\right)\hat{\mathbf{z}}}$$

$$\mathbf{B}(r,t) = -\frac{\partial \mathbf{A_z}}{\partial r}\hat{\phi}$$

$$= -\frac{\mu_0 k}{2\pi}\left\{t\left(\frac{r}{ct+\sqrt{(ct)^2-r^2}}\right)\frac{\left[r\frac{1}{2}\frac{-2r}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}-ct-\sqrt{(ct)^2-r^2}\right]}{r^2}-\frac{1}{2c}\frac{(-2r)}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}\right\}\hat{\phi}$$

$$= -\frac{\mu_0 k}{2\pi}\left[\frac{-ct^2}{r\sqrt{(ct)^2-r^2}}+\frac{r}{c\sqrt{(ct)^2-r^2}}\right]\hat{\phi} = -\frac{\mu_0 k}{2\pi}\frac{(-c^2t^2+r^2)}{rc\sqrt{(ct)^2-r^2}}\hat{\phi}$$

$$\boxed{= \frac{\mu_0 k}{2\pi rc}\sqrt{(ct)^2-r^2}\hat{\phi}.}$$