

# Física 3

Maria José Bechara

José Luciano Miranda Duarte

Manoel Roberto Robilotta

Suzana Salem Vasconcelos

*Instituto de Física da Universidade de São Paulo*

São Paulo, 5 de fevereiro de 2020



# Sumário

1	o universo físico	1
2	o eletromagnetismo	13
3	a matéria: condutores e dielétricos	27
4	a eletrização da matéria	41
5	densidades de carga	57
6	cargas no átomo de hidrogênio e no núcleo de ouro	71
7	carga elétrica e campo de Coulomb	81
8	campo de Coulomb: princípio da superposição	97
9	princípio da superposição: distribuições unidimensionais	107
10	princípio da superposição: distribuições bi e tridimensionais	113

11 fluxo do campo elétrico	123
12 lei de Gauss elétrica	135
13 lei de Gauss - exemplos com simetria esférica	153
14 lei de Gauss - aplicações	163
15 lei de Gauss - aplicações II	177
16 energia potencial - aplicações	187
17 potencial eletrostático	197
18 densidade de energia eletrostática	209
19 auto-energia	221
20 auto-energia: duas cargas puntiformes	231
21 operador diferencial - gradiente	239
22 o operador vetorial -	247
23 resumo da eletrostática - características elétricas dos núcleons	263
24 corrente elétrica e equação da continuidade	273
25 lei de Ohm	285
26 baterias e fios metálicos	295



27 fios metálicos e baterias	305
28 magnetismo - leis de Gauss e de Biot e Savart	313
29 lei de Biot e Savart - aplicações	323
30 lei de Ampère	333
31 força de Lorentz	347
32 força de Lorentz em metais	359
33 forças sobre correntes: aplicações	371
34 lei de Faraday	379
35 lei de Faraday - aplicações	389
36 geração de correntes: Lorentz ou Faraday ?	397
37 indução de correntes	405
38 auto-indução	417
39 auto-indução - campos...	427
40 energia do campo magnético	435
41 corrente de deslocamento	441
42 o eletromagnetismo	453



# Capítulo 1

## o universo físico

O assunto principal deste curso é o eletromagnetismo, uma das teorias mais fantásticas, profundas, fundamentais, bonitas, jamais elaboradas<sup>1</sup>. Começamos este curso discutindo a relação do eletromagnetismo com o contexto mais amplo da física para que possamos admirá-la em perspectiva. Para nós, que estudamos e trabalhamos com física, este tipo de distanciamento é muito útil, pois ele complementa a nossa imersão cotidiana nos importantíssimos afazeres miúdos, que dificulta a reflexão sobre o conjunto. Daí a necessidade de uma emersão.

Nós vivemos em um universo composto por muitos universos. A palavra universo e a palavra mundo também são usadas para designar grandes totalidades. Dentro delas cabem, por exemplo, corpos celestes, galáxias, energia, massa, matéria, antimatéria, espaço, tempo, carga elétrica, luz, ondas, juntamente com borboletas, elefantes e dinossauros, juntamente com pensamentos, sentimentos, consciência, fome, inteligência... Esta lista poderia ser muito mais ampla, como indica o provérbio francês que diz: *il faut de tout pour faire un monde...*, que pode ser traduzido como *é preciso de tudo para fazer um mundo...* O importante, aqui, é chamar a atenção para que ela é feita de conceitos, de ideias expressas por meio de palavras. E, como é característico das construções humanas, a concepção que cada um de nós tem do universo envolve opções pessoais, influenciadas por culturas locais. Muitas pessoas acreditam em ideias religiosas ou místicas, muitas pessoas, não. Já se discutiu muito se os corpos celestes ocupam uma região finita ou infinita do mundo. Já se discutiu muito se espaço existe. Já se discutiu muito se campo elétrico é real. Já se discutiu muito se o vazio, o nada, pode existir: se ele existe, ele não pode ser nada...

Assim, não existe *a* concepção do universo, existem muitas, todas elas envolvendo elementos históricos e culturais, temperados por ingredientes pessoais e pela época em que vivemos. Ao estudarmos uma disciplina particular, tal como a física, efetuamos um

---

<sup>1</sup>Você achou esta descrição exagerada? Se você discutir isso com uma pessoa bastante experiente em física, é bem possível que ela ainda acrescente outros adjetivos...

recorte mais ou menos consciente no grande universo, que contém tudo, nos concentramos em alguns temas e, deliberadamente, evitamos outros. Desta atitude resulta um universo menor, que podemos chamar de universo físico. Neste caso, também, este recorde não é único, dependendo muito de quem o produz e da época em que ele é feito. Vivemos em um universo muito amplo e trabalhamos com universos físicos, que é a parte que mais nos interessa aqui.

Ainda que, para os praticantes, seja relativamente fácil reconhecer a existência de um universo físico, a sua demarcação não é simples, pois este universo não é único. Esta demarcação não é feita por entidades oficiais, universidades ou sociedades científicas, e não existem definições formais ou legais do que seja o universo físico. Como alternativa, notamos que, há várias gerações, uma parte importante da educação dos físicos é baseada no uso de livros-texto. Este fato marca de maneira bastante forte a nossa comunidade<sup>[1]</sup> e nos permite supor que as concepções de universo físico presentes neles sejam partilhadas por muitas pessoas. Embora estas concepções não estejam, em geral, formalmente explicitadas nos livros-texto, podemos descobri-las “lendo” as suas entrelinhas. Algumas destas formulações são discutidas a seguir.

### • universos físicos

Ao longo dos últimos quatro séculos, os físicos, os químicos, os astrônomos e seus antecessores, os filósofos naturais, tiveram sucesso em articular uma visão bastante ampla e coerente do mundo material. Atualmente, a física trata de uma variedade enorme de problemas, abrangendo desde fenômenos que ocorrem no interior do próton até a evolução do universo em grande escala. Entretanto, apesar desta enorme diversidade de assuntos, existem algumas regularidades, muito fortes, no modo como eles são abordados no âmbito da física.

Um problema típico é o do sistema solar, onde planetas orbitam em torno do Sol e satélites orbitam em torno de planetas. Estamos bastante acostumados com o estudo deste sistema e sabemos que a Terra, em particular, descreve uma órbita aproximadamente elíptica em torno do Sol. O que nos interessa aqui é discutir como a física descreve o comportamento do sistema Terra-Sol ou, alternativamente, no que consiste a solução do problema Terra-Sol. Ao formular o problema desta maneira, já o circunscrevemos a apenas dois entes materiais, o Sol e a Terra e, tacitamente, às interações entre eles. No contexto da física newtoniana, identificamos as massas do dois corpos como responsáveis por estas interações e utilizamos a lei da gravitação universal para obter a força atrativa que age em cada corpo. O próximo passo consiste em passar do conhecimento da interação ao conhecimento das trajetórias dos corpos, empregando as leis dinâmicas de Newton, que descrevem os seus movimentos inerciais, a relação entre força e aceleração e a igualdade entre ação e reação. Obtemos, então, duas funções matemáticas, que representam as posições do Sol e da Terra em função do tempo. O conhecimento dessas funções corresponde à solução do problema, pois a partir delas podem-se obter as trajetórias e outras características do sistema.

De modo alegórico, podemos pensar este problema como uma dança cósmica, onde o Sol e a Terra correspondem a atores materiais que interagem entre si, com movimentos dirigidos pelas leis dinâmicas, em um palco formado pelo espaço e pelo tempo. A explicação clássica da órbita elíptica da Terra envolve, assim, três tipos de entidades:

**palco** → o espaço e o tempo

**diretor** → as três leis dinâmicas de Newton

**atores** → o Sol e a Terra, portadores de massa e campo gravitacional

A nossa compreensão acerca do comportamento da matéria se apoia em teorias, elaborações intelectuais bastante complexas. O objetivo a longo prazo da física é a construção de uma única grande teoria, capaz de abarcar todos os fenômenos conhecidos. Este processo de construção, que teve um grande impulso no século 16, continua nos dias de hoje. O nosso conhecimento atual, apesar de muito extenso, é, ainda assim, incompleto. Se, por um lado, essa situação é excitante por nos oferecer a possibilidade de participar da construção do conhecimento, por outro nos obriga a conviver com várias teorias diferentes, cada uma delas demarcando o seu próprio universo e portadora da sua própria visão de mundo.

Atualmente, coexistem na formação dos físicos três grandes modelos teóricos diferentes, conhecidos como clássico, relativístico e quântico. Como cada um desses modelos corresponde a um modo característico de enxergar o mundo material, é comum, também, falarmos de universos clássico, relativístico e quântico. O universo clássico representa uma síntese do conhecimento elaborado até o fim do século 19, tendo sido superado pelos outros dois, em revoluções ocorridas no século 20. Apesar disso, ele continua tendo um papel formador muito importante e tem papel fundamental nos cursos de física. Nessas três propostas para o universo, as noções de palco, diretor e atores estão presentes, como indicado no quadro esquemático abaixo.

universo físico	
<b>palco:</b>	espaço e tempo
<b>diretor:</b>	leis dinâmicas
<b>atores:</b>	matérias e campos

Em cada uma das concepções, clássica, relativística ou quântica, palco, atores e diretores adquirem significados diferentes, mas as características gerais do quadro são mantidas. A seguir, discutimos um pouco cada um dos universos.

## • o universo físico clássico

Do mesmo modo que o palco de um teatro permite a representação de diversas peças e o trabalho de diferentes atores, o palco dos eventos físicos comporta acontecimentos variados, envolvendo diferentes atores materiais. Na versão clássica do universo, o palco é constituído principalmente pelo *espaço* e pelo *tempo*, entidades que permitem descrever onde e quando um dado evento ocorre.

A ideia clássica de espaço tem cerca de cinco séculos, foi desenvolvida na Europa e corresponde a um conjunto de pontos, tridimensional e infinito. Ele não tem buracos e é contínuo, já que existem infinitos pontos na vizinhança de qualquer um de seus pontos. Este espaço é métrico, pois, nele existe a noção de distância entre dois pontos quaisquer. Além disso, as suas propriedades são as mesmas em qualquer região da sua extensão e ele não possui direções privilegiadas. Estas duas últimas características, conhecidas como homogeneidade e isotropia do espaço têm, como consequências muito importantes, as conservações *das quantidades de movimento linear e angular*, respectivamente.

Na física, portanto, a palavra espaço tem significado bastante diferente do empregado na linguagem cotidiana. Para obter uma lista dos significados possíveis desta palavra, consultamos o dicionário<sup>[2]</sup> e encontramos: “Espaço.[Do lat.spatiu.] S.m. **1.** Distância entre dois pontos, ou a área ou o volume entre limites determinados: O acidente com o pedestre resultou do espaço estreito da calçada; A casa foi construída num espaço pequeno. **2.** Lugar mais ou menos bem delimitado, cuja área pode conter alguma coisa: Na casa há espaço para cinco pessoas; O artigo não desenvolve bem o tema por falta de espaço. [...] **4.** A extensão onde existem o sistema solar, as estrelas, as galáxias; o Universo: as viagens pelo espaço são uma conquista do séc. XX [...]”. Vemos, portanto, que o significado **4** no dicionário se aproxima do empregado na física, mas os demais não.

Uma questão interessante associada ao uso da palavra espaço na física é saber se ela designa uma entidade real ou não. No âmbito da filosofia, existem várias visões alternativas e controversas, que não cabem neste curso. Entre os físicos, por outro lado, a atitude corrente consiste em trabalhar com o espaço como uma entidade real, ainda que não material. Assim, na física, o espaço é tratado como algo que “existe mesmo”.

A noção clássica de tempo físico, tal como a de espaço, nasceu na Europa há cerca de cinco séculos. A natureza do tempo é, se possível, ainda mais misteriosa que a do espaço. Na física, tal como na concepção cotidiana, o tempo está associado à ordenação de eventos ou acontecimentos no mundo natural. Ele é unidimensional, contínuo, e tem uma direção, indo do passado para o futuro, sem volta, linearmente. Na linguagem cotidiana, a palavra tempo é empregada com vários significados. Consultando um dicionário<sup>[2]</sup> encontramos:

Uma outra propriedade do tempo clássico é a sua uniformidade, ou seja, o fato de que ele flui em todas as épocas do mesmo jeito, com a mesma “velocidade”. Essa uniformidade é muito importante, pois dela decorre a conservação da *energia*. Esta entidade, que tem papel central na ciência contemporânea, foi introduzida há relativamente pouco tempo,

pouco mais de um século. A palavra energia remonta à Grécia antiga e relações do tipo  $mv^2 = 2mgh$  já eram conhecidas no século 17, mas elas não eram interpretadas como o fazemos atualmente. A visão moderna de energia<sup>[3]</sup> foi introduzida na década de 1840, através dos trabalhos de Mayer, em 1840 e 1842, e de Joule, em 1845, tendo-se tornado bastante difundida no âmbito da ciência apenas a partir da década de 1870. O conceito de energia foi, entre outras coisas, muito importante para ajudar a quebrar as fronteiras entre disciplinas diferentes.

A energia se conserva, ou seja, o seu valor permanece constante em qualquer sistema isolado. Como o mesmo acontece com os fluidos, no século 19 os cientistas discutiram vivamente acerca da natureza da energia, se ela também seria um fluido ou algum tipo de substância, capaz de se mover de um lado para outro no interior de um sistema físico. Entretanto, a quantidade de energia de um sistema é uma grandeza dependente do referencial usado para descrevê-la, o que torna complicado pensá-la como ente concreto. Num dado problema, o que interessa são as variações dos diversos tipos de energia, e não os seus valores absolutos.

Na física clássica, o tempo e o espaço são concebidos como entidades independentes, às quais estão associadas as grandezas conservadas energia, momento linear e momento angular. Por isso, o universo físico clássico pode, por enquanto, ser representado como no quadro abaixo.

universo físico clássico		
	momentos	
	linear e angular	energia
<b>palco:</b>	↑	↑
	espaço	tempo
<b>diretor:</b>	leis dinâmicas	
<b>atores:</b>	matérias $\longleftrightarrow$ campos	

Os *atores materiais* constituem uma outra classe importante de entes físicos. Eles correspondem aos personagens que participam de uma determinada peça e que se influenciam mutuamente no palco do espaço e do tempo, determinando os vários enredos. No universo físico clássico coexistem as interações *gravitacional* e *eletromagnética*. Apesar de operarem de maneiras bastante diferentes, essas duas interações têm em comum o fato de serem mediadas por campos. Os campos, por sua vez, são gerados por um tipo de “coisa” que, na física, é denominada genericamente de matéria ou “fonte” do campo. As matérias associadas a essas duas formas de interação são, respectivamente, a *massa* e a *carga elétrica* e os campos correspondentes são o *gravitacional* e o *eletromagnético*.

A relação entre as ideias de *campo* e *matéria* é circular pois, de modo bastante simpli-

ficado, podemos dizer que campo é algo que existe em torno da matéria e que matéria é a fonte ou causa do campo. Essa circularidade deriva do fato de não haver nem campo sem fonte nem fonte sem campo. Uma coisa não vem antes da outra. Campo e matéria são duas faces diferentes de uma entidade mais complexa, que poderia ser chamada de fonte-campo ou matéria-campo.

Em geral, os objetos materiais encontrados na natureza podem ser portadores de uma ou mais fontes de campo, simultaneamente. Assim, por exemplo, a Lua tem massa apenas, enquanto que um próton tem, ao mesmo tempo, carga e massa. Em muitos casos, as interações entre os diversos tipos de matéria dão origem a aglomerados, que podem ser tomados como evidências dessas próprias interações. No caso das interações gravitacionais, descritas pela lei da gravitação de Newton, cujas fontes são massas, os aglomerados característicos são galáxias, sistemas planetários, estrelas, planetas. Já no caso das interações eletromagnéticas, geradas pelas cargas, os aglomerados típicos são todos os corpos, sólidos, líquidos ou gasosos, encontrados à nossa volta. Um resumo dessas características das interações é apresentado no quadro abaixo. Ele é bastante esquemático e deve ser tomado apenas como referência básica.

interações clássicas			
fonte	campo	portadores	aglomerados
massa	gravitacional	Sol, Terra, Lua, próton...	galáxias, estrelas sistema solar, planetas...
carga	eletromagnético	prótons, elétrons ...	sólidos, líquidos gases, plasmas...

Quando colocamos cargas em presença de cargas ou massas em presença de massas, ocorrem interações, que se manifestam na forma de forças que agem nos vários corpos e dão origem a movimentos. No caso do universo físico clássico, a transformação de força em movimento é descrita pelas três leis dinâmicas de Newton, que tratam da inércia, da relação entre força e aceleração e da igualdade entre ação e reação. É esse conjunto de leis que determina os desempenhos dos atores no interior do palco. Elas correspondem, assim, a uma espécie de diretor da peça.

Juntando tudo o que discutimos, as principais características do universo físico clássico podem ser resumidas no seguinte quadro.



universo físico clássico			
<b>palco:</b>	momentos linear e angular		energia
	↑ espaço		↑ tempo
<b>diretor:</b>	leis dinâmicas de Newton:		inércia, ação e reação, aceleração proporcional a força,
<b>atores:</b>	massa carga	↔ ↔	campo gravitacional campo eletromagnético

## • os universos físicos relativístico e quântico

No século 20 aconteceram grandes revoluções na física, marcadas pelos surgimentos da relatividade especial, em 1905, da relatividade geral, em 1915, e da mecânica quântica, entre 1924 e 1927.

A *relatividade restrita* iniciou o processo de subversão da visão clássica do universo. Na física clássica, espaço e tempo são concebidos como grandezas absolutas, que não dependem do observador. Na relatividade, ao contrário, aparece uma relação entre espaço e tempo, que depende do referencial onde se coloca o observador. Observadores diferentes podem interpretar de modos diferentes o que é tempo e o que é espaço na relação entre dois eventos quaisquer. Assim, na relatividade, o espaço e o tempo se fundem numa nova entidade, conhecida como espaço-tempo. Do mesmo modo, a energia e o momento linear também se fundem numa única entidade, o momento-energia. Essas mudanças nas características do palco forçaram a revisão das demais partes do quadro, incluindo a substituição das leis dinâmicas de Newton. A relatividade restrita também contém uma outra novidade importante, a relação entre massa e energia  $E = mc^2$ . A proposta de universo físico englobada pela teoria de 1905 pode ser representada pelo quadro abaixo. Note, nele, a presença de duas setas horizontais, que não existiam no quadro anterior.

universo físico relativístico (1905)			
<b>palco:</b>	momento angular		
	momento linear	↔	energia
	↑		↑
	espaço	↔	tempo
<b>diretor:</b>	novas leis dinâmicas		
<b>atores:</b>	massa	↔	campo gravitacional
	carga	↔	campo eletromagnético

Colocar a relação  $E = mc^2$  neste quadro não é algo simples, uma vez que a energia é parte do palco, enquanto que a massa é um ator. O papel ambíguo desta relação na relatividade restrita indica que esta teoria não é totalmente coerente. Essa percepção motivou a formulação da *teoria da relatividade geral*, proposta por Einstein em 1915. Nesta nova versão da teoria, a massa é colocada no palco e ela passa a ser vista como algo capaz de influenciar o comportamento do espaço-tempo. Nesse novo contexto, o campo gravitacional, que na física clássica era visto como uma aura gravitacional que existiria em torno das massas, passa a ser associado a uma curvatura do espaço-tempo. Essa nova concepção pode ser representada pelo seguinte quadro.

universo físico relativístico (1915)			
	momento angular		
	momento linear	$\longleftrightarrow$	energia
<b>palco:</b>	↑		↑
	espaço	$\longleftrightarrow$	tempo
<b>diretor:</b>	novas leis dinâmicas		
<b>atores:</b>	carga	$\longleftrightarrow$	campo eletromagnético

A outra grande revolução na física do século 20 aconteceu com o surgimento da *mecânica quântica*, que associa características ondulatórias a todas as partículas microscópicas, tais como elétrons e prótons. Essas partículas podem, por exemplo, sofrer difração quando atiradas sobre cristais. Esse comportamento ondulatório não pode ser descrito no âmbito da mecânica newtoniana e, por isso, na mecânica quântica, as três leis da dinâmica clássica são substituídas por uma nova equação, proposta por Schrödinger. Na sua versão original, a equação de Schrödinger descreve apenas o comportamento de partículas não relativísticas. A sua extensão ao caso relativístico corresponde à *teoria quântica de campos*.

O uso da mecânica quântica e da teoria quântica de campos em um número muito grande de situações diferentes permitiu um conhecimento amplo e profundo dos fenômenos microscópicos. A teoria quântica de campos, em particular, atribui as interações entre partículas microscópicas a trocas de outras partículas, associadas a campos quânticos. Assim, por exemplo, na teoria quântica de campos, as interações eletromagnéticas entre dois elétrons são atribuídas a trocas de fótons entre eles.

Atualmente, estão bem estabelecidas duas formas de interações quânticas, eletrofracas e fortes, que coexistem na natureza. Ambas são formuladas em termos de atores materiais que se influenciam mutuamente no palco do espaço/tempo, por meio de trocas de quanta de campo. Como no caso clássico, essas duas interações operam de modos bastante diferentes, mas elas têm em comum o fato de serem mediadas por campos, gerados por algum tipo de entidade, chamado genericamente de matéria ou “fonte” do campo.

O eletromagnetismo, desenvolvido no século 19, trata das cargas elétricas e seus campos e corresponde à fusão de duas teorias ainda mais antigas, a eletricidade e o magnetismo.

Ele constitui o objeto principal deste curso e, por isso, será extensivamente discutido até o seu término. A teoria das *interações eletrofracas* foi formulada na década de 1970, como resultado da fusão de duas teorias mais antigas, o eletromagnetismo e a das interações fracas. As interações fracas, por outro lado, foram estudadas a partir da década de 1930 e são as responsáveis pelos decaimentos de algumas partículas e núcleos atômicos. Os campos básicos da teoria eletrofraca são o fóton ( $\gamma$ ) e os bósons de calibre  $W^\pm$  e  $Z$ .

As *interações fortes*, por sua vez, começaram a ser estudadas nos anos 1930, no contexto da física nuclear. Atualmente, sabemos que essas interações são as responsáveis tanto pela coesão dos prótons e nêutrons nos núcleos atômicos como pela própria existência dessas partículas. A teoria básica, desenvolvida na década de 1970, é chamada cromodinâmica quântica, abreviada como QCD, em inglês. Nela, os *quarks* correspondem à matéria e interagem por meio de campos chamados *glúons*. Quarks e glúons são portadores de uma propriedade característica, denominada *cor*. No caso dos quarks, essa palavra cor designa algo análogo à carga elétrica e nada tem a ver com a ideia conceito usual de cor.

Um dos grandes desafios da física é criar uma teoria única, capaz de unificar todas as interações. A tabela abaixo mostra os principais tipos de interação conhecidos atualmente, bem como alguns dos aglomerados correspondentes.

interações quânticas			
fonte	campo	portadores	aglomerados
carga eletrofraca	$\gamma, W^\pm, Z$	elétrons, neutrinos,	átomos, moléculas
“cor”	glúon	quarks	núcleos atômicos prótons, píons

Estas características do universo físico associado à mecânica quântica podem ser resumidas no seguinte quadro.

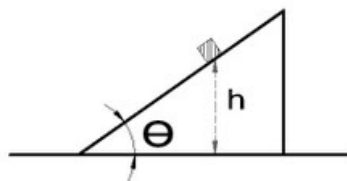
universo físico quântico			
<b>palco:</b>	momento angular		energia
	momento linear	$\longleftrightarrow$	
	$\uparrow$		$\uparrow$
	espaço	$\longleftrightarrow$	tempo
<b>diretor:</b>	equação de Schrödinger	e	teoria quântica de campos
<b>atores:</b>	carga eletrofraca	$\longleftrightarrow$	campo eletrofraco
	“cor”	$\longleftrightarrow$	campo gluônico

**• em resumo ...**

Nós vivemos num universo muito complexo. A parte material desse universo é o objeto de estudo da física e, nos últimos séculos, foi criado um certo consenso sobre como esse setor do universo, que chamamos de universo físico, pode ser compreendido. O estudo do mundo material é feito com o auxílio de conceitos, tais como tempo, espaço, massa, carga, dentre muitos outros. É importante perceber que os conceitos presentes num dado problema não são misturados ao acaso. Ao contrário, existem hierarquias entre eles e eles cumprem funções diferentes. Por isso, é útil pensar no universo físico como tendo “gavetas” diferentes, intituladas *palco*, *diretor* e *atores*. Ainda que os elementos das três “gavetas” se comuniquem entre si, cada uma delas possui uma especificidade. Como vimos, a noção de “gaveta” e o que deve ser guardado dentro dela depende do contexto teórico.

**• exercícios**

1. Para testar a sua compreensão da idéia de universo físico, considere um problema tradicional. Um corpo muito pequeno, é abandonado, em repouso, num ponto de altura  $h$  de um plano inclinado, sem atrito, como mostra a figura.



Quanto tempo o corpo leva para atingir a base do plano? Depois de obter a solução, numere as equações utilizadas, de acordo com a ordem em que elas foram sendo necessárias. Em seguida, considere o quadro do universo clássico e discuta a qual das suas “gavetas” cada uma das equações pertence.

2. Você acha que é viável definirmos o que é universo físico colocando a questão a vários físicos eminentes e, depois, “tirando uma média” das respostas obtidas? Neste caso, como se sabe se um físico é eminente?

3. Existe uma relação entre biologia e física? Você acha que a física é um ramo da biologia? Ou que a biologia é um ramo da física?

## • Referências

[1] T.S. Kuhn, A estrutura das revoluções científicas.

[2] FERREIRA, A.B.H. *Novo Dicionário da Língua Portuguesa*, 2a. ed. Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1986.

[3] Osvaldo Melo Souza Filho, Evolução da idéia de conservação de energia-um exemplo de história da ciência no ensino de física; dissertação de mestrado, IFUSP, 1987.



# Capítulo 2

## o eletromagnetismo

### • abrangência dos fenômenos

O eletromagnetismo está associado a uma quantidade muito grande de fenômenos físicos interessantes. A enorme maioria das propriedades da matéria na escala de tamanho dos seres humanos, que podem ser percebidas diretamente pelos nossos sentidos, são devidas a interações elétricas. Por exemplo, você consegue enxergar as letras deste texto porque elas foram capazes de refletir a luz emitida por alguma fonte e estimular o seu olho. A luz é uma onda eletromagnética e a sua geração, a sua interação com o papel e com a tinta depositada sobre ele, bem como a sua absorção pelo olho são fenômenos elétricos. Durante o processo de impressão deste texto, cada letra é fixada no papel por forças elétricas. O papel é constituído por fibras e ele não se desfaz porque estas estão presas entre si por forças de origem elétrica. Também a solidez da cadeira em que você se senta e de todos os objetos da sala em que você se encontra é devida a forças elétricas. O oxigênio do ar que você respira é incorporado ao seu sangue por meio de interações de natureza elétrica, que também estão presentes na transformação dos alimentos que você come, na transmissão de sinais nervosos, no funcionamento de cada célula de seu corpo, inclusive nas cerebrais, responsáveis por sensações, etc...

A força elétrica está presente nas interações que ocorrem no interior de cada uma das moléculas que constituem tanto os nossos corpos como a matéria que nos cerca. Como essas moléculas se agrupam em corpos macroscópicos ela é, também, responsável pelas propriedades desses corpos. Quando apertamos a mão de alguém, são forças elétricas que movem nossos músculos, impulsos elétricos que transmitem as sensações e forças elétricas que impedem que as mãos se esfaquem. Todos os nossos sentidos funcionam à base de forças elétricas. Todas as forças percebidas e sentidas por nós têm origem elétrica. Embora os nossos pesos sejam devidos à gravidade e, portanto, de natureza não elétrica, as sensações associadas a ele são de origem elétrica.

Para dramatizar a importância das forças elétricas no mundo que nos cerca, podemos

imaginar o que ocorreria à nossa volta em um cenário hipotético, no qual pudéssemos desligar a força gravitacional, deixando inalteradas as forças elétricas. Neste caso, devido à rotação da Terra em torno do próprio eixo, tudo o que existe nela, inclusive a atmosfera, as águas dos mares e os seres vivos, seria lançado tangencialmente e se dispersaria pelo espaço. A própria Terra perderia sua forma esférica e se desagregaria em cacos de pedras, grãos de areia, gotículas de água... Neste processo, se a interação elétrica fosse mantida, os corpos sólidos permaneceriam coesos, uma cadeira continuaria a ser uma cadeira, o mesmo acontecendo com canetas, carros ou computadores. Os líquidos se dispersariam na forma de gotas esféricas e os gases, como moléculas isoladas.

Alternativamente, se invertêssemos o jogo e desligássemos as forças elétricas mantendo a gravitação, os átomos e moléculas se quebrariam, pois são elas que prendem tanto os núcleos atômicos nos átomos como os vários átomos entre si, nas moléculas. Assim, não existiriam mais corpos sólidos, moléculas ou átomos. Os elétrons se desprenderiam completamente dos núcleos atômicos, mas estes continuariam a existir já que eles são mantidos coesos devido a um terceiro tipo de força, denominada forte. Como resultado, a Terra se tornaria uma grande “sopa”, contendo todos os prótons, nêutrons e elétrons provenientes dos vários elementos, mantidos juntos entre si pelas forças forte e gravitacional. A massa total do sistema estaria concentrada num volume de raio bem menor que o atual, acarretando uma diminuição de volume e uma conseqüente diminuição do momento de inércia da “Terra”, que passaria a girar mais rapidamente.

Esta é apenas uma caricatura de um jogo complicado, visando tão somente enfatizar os papéis dos dois tipos de interação no mundo que nos cerca. Se pudéssemos desligar, de verdade, as interações gravitacional ou elétrica, as formas finais dos vários sistemas somente poderiam ser conhecidas com precisão, mediante o uso de teorias físicas abrangentes e cálculos complexos.

## • tecnologia e ciência

A teoria eletromagnética é particularmente cara aos físicos. O eletromagnetismo clássico, formulado no século 19, por ser muito elegante e ter enorme potencial de aplicação, tornou-se o grande paradigma de teoria física do século 20. Ele descreve o comportamento das ondas eletromagnéticas e permite-nos compreender como elas são geradas, como elas se propagam e como elas são absorvidas. O seu estudo permite-nos, portanto, compreender e ter acesso aos mecanismos básicos de funcionamento de uma parte importante do universo, bem como explicar vários fenômenos muito interessantes, e produzir aplicações de grande utilidade. Atualmente sabemos que o eletromagnetismo clássico não inclui fótons e outros efeitos quânticos e precisou ser estendido para poder descrever interações entre partículas elementares. Mesmo assim, ele continua sendo o grande modelo para a construção de novas teorias e é comum em física de ponta, que efeitos novos sejam incorporados por meio de modificações do eletromagnetismo. Isso aconteceu no caso da eletrodinâmica quântica, criada para explicar o comportamento eletromagnético de elétrons no contexto da mecânica quântica relativística, na cromodinâmica quântica, que descreve as interações dos quarks e, também, na teoria eletrofraca, que trata de decaimentos dos constituintes



elementares da matéria.

O eletromagnetismo foi a primeira teoria que realizou, em parte, a meta da unificação de várias teorias físicas. Já no século 19, ela mostrou-se capaz de descrever processos elétricos, magnéticos e ópticos, que antes eram considerados de naturezas diferentes num único contexto teórico <sup>1</sup>. Por volta de 1970, aproximadamente um século depois da teoria de Maxwell para o eletromagnetismo, um processo semelhante de unificação voltou a ocorrer, desta vez com as teorias das interações fracas e eletromagnéticas, dando origem à teoria eletrofraca. A motivação de unificar as diferentes interações continua entre as metas dos pesquisadores em física. Entretanto, a importância histórica do eletromagnetismo não se esgota aí. No fim do século 19 ele contribuiu muito para a gênese da teoria da relatividade e, também, para o processo de desmecanização da matéria, que acabou levando ao desenvolvimento da mecânica quântica e à nossa concepção atual do universo. É bastante significativo que o título do trabalho de 1905 em que Einstein propôs a teoria da relatividade restrita fosse “Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento”.

Além da sua importância no âmbito da ciência, o conhecimento do eletromagnetismo vem sendo usado com propósitos tecnológicos de uma forma tão ampla desde o século 19, que hoje é difícil imaginar a nossa vida sem ele. A tecnologia baseada no eletromagnetismo está presente no cotidiano de grande parte das pessoas do planeta, iluminando dentre muitas outras, na forma da iluminação das nossas casas, permitindo o funcionamento dos nossos eletrodomésticos, aparelhos de TV, computadores e telefones celulares ... A indústria, a agricultura e a própria forma de organização de grandes setores da sociedade são, hoje, determinadas por essa tecnologia.

Os meios de comunicação e a informática envolvem aplicações intensivas do eletromagnetismo e têm forte relação com o estilo de vida das pessoas, com a organização das sociedades contemporâneas e com a própria formulação dos valores dessas sociedades. As tecnologias empregadas na informática têm relação direta com os conhecimentos de novos materiais e técnicas, onde o eletromagnetismo comparece de modo muito significativo.

## • campos

A teoria do eletromagnetismo clássico é, ao mesmo tempo simples e abrangente, bonita e profunda. Por isso, pode parecer surpreendente que ela seja formulada em termos de um número bastante pequeno de entidades físicas básicas. Ela envolve apenas o espaço e o tempo  $(\vec{r}, t)$ , a carga elétrica  $(q)$ , os campos elétrico e magnético  $(\vec{E}$  e  $\vec{B})$  e a força  $(\vec{F})$ . Todas as leis e resultados importantes da teoria envolvem apenas relações entre essas grandezas.

Nesta teoria, os atores são as cargas elétricas enquanto as suas interações são mediadas por campos. A ideia de campo surgiu no século 19, no contexto do eletromagnetismo e, atualmente, ele é um dos conceitos físicos de maior importância, como destacam Einstein

---

<sup>1</sup>Sobre a unificação entre eletricidade, magnetismo e óptica, há um livro interessante que conta, em forma de ficção, a história das obras de Faraday e Maxwell. <sup>[1]</sup>

e Infeld.<sup>[2]</sup>

*[Nos primórdios do século 19]“ o conceito de campo nada mais era do que um meio para facilitar a compreensão de fenômenos do ponto de vista mecânico. Na nova linguagem de campo, é a descrição do campo entre duas cargas, e não as cargas em si, o que é essencial para uma compreensão de sua ação. O reconhecimento dos novos conceitos cresceu consistentemente, até que a substância foi ocupada pelo campo. Percebeu-se que algo de grande importância havia aparecido em Física. Uma nova realidade foi criada, um novo conceito para o qual não havia lugar na descrição mecânica. Lentamente e com luta, o conceito de campo firmou para si um lugar de predominância em Física e permaneceu um dos conceitos físicos básicos. O campo eletromagnético é, para a Física moderna, tão real quanto a cadeira que sentamos.”*

Um campo é o ente responsável pela interação entre dois pedaços de matéria. Já os diversos tipos de matéria são fontes de diferentes tipos de campo. Há, portanto, uma relação circular entre os conceitos de campo e matéria. No caso do eletromagnetismo, a circularidade entre carga e campo não permite explicitar isoladamente o que é uma carga elétrica, qual a sua essência. Isso não significa que a questão não seja válida. De fato, ela é extremamente interessante! O problema é que, no contexto do eletromagnetismo, ela só pode ser respondida afirmando que carga elétrica é o que pode criar campos elétrico e magnético (este último, se a carga estiver em movimento). Os campos, por outro lado, são os efeitos das cargas. Por isso, é muito difícil, ou mesmo impossível, definir o que é carga elétrica. Felizmente, os físicos conseguem circunscrever este problema, sabendo muito bem o que uma carga faz e como ela se comporta em diferentes situações. A partir do conhecimento abrangente de suas propriedades, pode-se adquirir uma intuição do que seja uma carga elétrica.

Algumas das características dos campos produzidos por cargas elétricas são análogas às do campo gravitacional. Por isso, é interessante rever o caso do campo gravitacional clássico, com o qual estamos mais acostumados. Como discutimos na aula anterior, o universo físico é análogo a um palco, onde atuam atores que interpretam uma peça. No caso do eletromagnetismo, os atores são a carga elétrica e os campos elétrico e magnético.

No caso da gravitação clássica, esses atores são as massas e o campo gravitacional e a força peso constitui um indício da existência desse campo. O peso de uma maçã, por exemplo, é uma força devida à sua interação com a Terra. O conceito de campo fornece uma imagem de como se dá esta interação. A Terra, como qualquer outro corpo com massa, é concebida como possuindo em torno de si uma *aura*<sup>2</sup>, que é o campo gravitacional. É importante ressaltar que a palavra utilizada é *aura*, e não *áurea*, pois esta última refere-se a ouro. Utilizamos a palavra *auracom* o significado de algo sutil, ténue

<sup>2</sup>Segundo um dicionário [3]: **aura**. [Do lat. *aura*] S.f. 1.Vento brando; brisa, aragem, sopro: “Auras subtis das frescas madrugadas, / Feitas de aroma e quérulo cicio” (Luís Carlos, *Colunas*, p. 113). [...]

que envolve a massa, sem quaisquer conotações místicas, religiosas ou espiritualistas, Mas que é “*tão real como a cadeira que sentamos...*”. O campo gravitacional corresponde a uma parte real, mas não facilmente perceptível, do objeto com massa, que preenche todo o espaço que o circunda, como sugere a fig.2.1. Na teoria a interação gravitacional ocorre porque a maçã e todas as coisas que existem por aqui estão imersas no campo gravitacional que ela cria e campos gravitacionais agem sobre massas, dando origem a forças. No caso da maçã, essa força de origem gravitacional é o seu peso. De modo análogo, o peso de qualquer objeto, inclusive o do nosso próprio corpo, é devido à ação do campo gravitacional terrestre sobre massas.

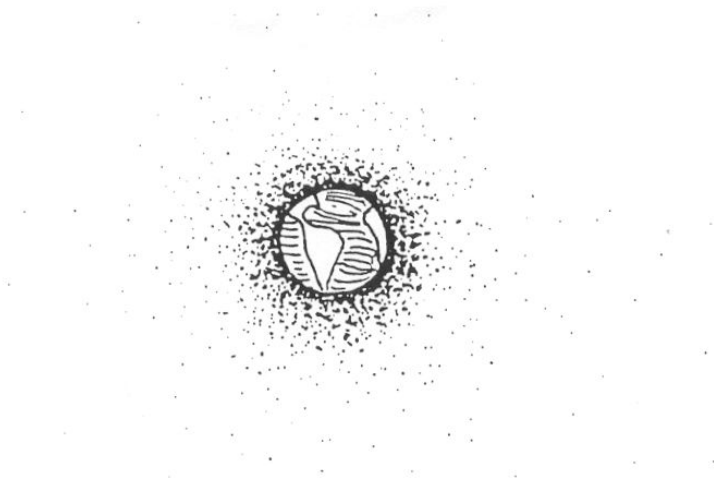


Figura 2.1: A Terra e uma representação do campo gravitacional devido à sua massa.

O campo gravitacional da Terra está em torno dela, independentemente de existirem outras massas por perto, que possam vir a ser influenciadas por ele. De modo geral, o campo gravitacional de um corpo qualquer é indissociável da sua massa; ela sempre traz o campo consigo, sendo impossível separar um do outro. Esta noção é válida tanto para o campo gravitacional da Terra como para o de uma maçã, cuja massa é muito menor que a da Terra. Não falamos muito de campos gravitacionais de maçãs apenas porque eles são muito fracos e, por isso, difíceis de serem percebidos. Entretanto, eles existem e podem ser observados em experimentos precisos.

Uma característica do campo gravitacional é que ele não pode ser barrado, atuando no interior de qualquer objeto. Uma evidência é que o campo gravitacional age no interior do nosso próprio corpo, pois o sangue desce para a nossa cabeça quando ficamos de cabeça para baixo. Além disso, a intensidade do campo num ponto não se altera quando um objeto é colocado ali; o campo *da Terra* numa dada região é completamente inalterado se nela houver, ou não, uma maçã.

O campo gravitacional da Terra é que mantém coisas presas a ela. É em razão desse campo que acompanhamos a Terra em seu movimento ao redor do Sol. É por causa dele que a atmosfera existe ao redor da Terra. Mesmo se a Terra não possuísse atmosfera, o campo gravitacional continuaria a existir e os objetos continuariam a ter peso. É, assim,

incorreta a ideia que o peso de um corpo é devido à atmosfera. Se colocarmos esse corpo no interior de uma campânula de vidro e retirarmos o ar do seu interior por meio de uma bomba de vácuo, o seu peso não se altera. Na verdade, o campo gravitacional da Terra se estende por distâncias muito maiores do que a espessura da atmosfera. Para nos convencer disso, basta lembrar que é esse campo que prende a Lua ao nosso planeta.

No caso da gravitação, massas interagem com massas, por meio de campos gravitacionais. Já no caso do eletromagnetismo, cargas interagem com cargas, por meio do campo eletromagnético. Em cada um dos casos existem especificidades, ou seja, o modo como duas massas interagem é diferente do modo como duas cargas o fazem. Por isso, as teorias da gravitação e do eletromagnetismo são diferentes, pois elas descrevem os comportamentos diferentes de entidades diferentes.

### • as entidades do eletromagnetismo clássico

Começamos o nosso estudo do eletromagnetismo discutindo alguns aspectos qualitativos da relação de cargas elétricas com seus campos. Uma carga possui sempre um campo em torno de si, campo e carga formam uma unidade indissociável. Carga e campo são, de fato, um único ente e, por isso talvez fosse mais correto designá-lo por um único nome tal como, por exemplo, carga-campo. Com isso, ficaria mais claro que carga e campo constituem facetas diferentes de uma mesma entidade.

Tal como no caso gravitacional, pode-se pensar no campo elétrico como uma entidade e carga real, que preenche todo o espaço que a circunda. O campo da carga, uma espécie de *aura*, que a envolve, é responsável por muitos efeitos importantes. Por exemplo, a energia associada a uma carga elétrica; como veremos mais adiante, está no seu campo e, portanto, na região do espaço que a envolve.

Carga e campo não podem ser separados. Se dermos um tranco em uma carga, não importa quão rápido e quão forte, fazendo com que ela se mova, o seu campo elétrico é arrastado junto com ela. Além disso, o campo elétrico de uma carga é eterno. Esta palavra forte foi utilizada para enfatizar que é incorreto pensar que uma carga emite um campo elétrico. Uma lâmpada emite luz, um corpo quente emite radiação infravermelha, mas uma carga *não* emite campo elétrico. Ou seja, esse campo *não* é a algo que sai continuamente da carga. Por isso, o campo da carga elétrica não gasta, não se enfraquece com o tempo. Ele simplesmente *está* sempre em volta da carga. Não há nada que se possa fazer, para modificar a relação de uma carga com o seu campo. Como veremos adiante no curso, se chacoalharmos uma carga elétrica, ela irradia energia, uma vez que toda carga acelerada o faz. Ao tomar contato com esta informação, podemos pensar que esta emissão de energia pode gastar o campo da carga. Entretanto, o que ocorre é que a energia irradiada não é suprida pela carga, mas sim, por quem a chacoalha.

Algumas das palavras empregadas para descrever a relação entre a carga e o seu campo têm motivações históricas e precisam ser tomadas com reservas. Por exemplo, é um costume muito difundido na comunidade da física, afirmar que uma carga *cria* um campo

elétrico ou, ainda, que a carga *gera* esse campo. Também é comum falarmos em cargas como *fontes* ou *sorvedouros* de campo. Essas palavras parecem dizer o oposto do que discutimos acima, já que as palavras *criar* e *gerar* sugerem que o criador existe antes da criatura, enquanto que as palavras *fonte* e *sorvedouro* sugerem a possibilidade de o campo ser expelido ou engolido pela carga. A razão pela qual palavras tão inapropriadas são comumente usadas para descrever a relação carga-campo é que, nos primórdios do eletromagnetismo, elas foram emprestadas da mecânica dos fluidos, onde elas descrevem bem as situações físicas. Para não ficarmos em desacordo com a prática habitual, nós também empregamos as palavras *criar*, *gerar*, *fonte* e *sorvedouro*. Isso não causa problemas, desde que estejamos conscientes do que ela realmente significam no contexto do eletromagnetismo.

No eletromagnetismo existem dois tipos de carga, denominadas *positiva* e *negativa*, enquanto que na gravitação existe apenas um tipo de massa. É costume representar cargas elétricas e seus campos por meio de desenhos. As figs.2.2(a)-(c) e 2.3(a)-(c) mostram possíveis representações dos campos elétricos de cargas positivas e negativas, de dimensões desprezíveis e em repouso. As figs.2.2(a) e 2.3(a), enfatizam o caráter de aura contínua e espacialmente distribuída do campo, bem como o decréscimo de sua intensidade, por meio de esmaecimento do sombreado. Um problema desse tipo de desenho é que ele não representa o caráter tridimensional da aura da partícula e, além disso, não deixa claro se a carga representada é positiva ou negativa. Nas figs.2.2(b) e 2.3(b), o campo é representado por meio de linhas, cuja tangente, em cada ponto, indica a sua direção, chamadas de linhas de campo ou linhas de força. Neste caso, o sinal da carga está associado ao sentido das setas: quando elas divergem da carga, ela é positiva; quando elas convergem para a carga, ela é negativa. Uma deficiência do uso de linhas de campo é que elas não cobrem todos os pontos da região em torno da carga. No desenho, entre uma linha e outra, existem espaços vazios, nos quais também há campo. Neste tipo de representação, a intensidade do campo é indicada pela densidade das linhas: linhas mais juntas indicam campo mais forte. Há, ainda, uma terceira possibilidade para representar o campo, através de flechas, como mostram as figs.2.2(c) e 2.3(c). Apesar das suas limitações, esses métodos de representação do campo elétrico são muito úteis.

## • interação e superposição

Suponhamos, inicialmente, um palco totalmente vazio. De acordo com a imagem do universo físico clássico, nessa região só existem o espaço e o tempo, como representa a fig.2.4, o tempo vai passando, independentemente de haver algo para perceber isso.

Se colocarmos uma carga elétrica positiva nessa região, ela e o seu campo passam a existir no espaço e no tempo. Entretanto, na concepção clássica do problema, a carga-campo não influi no comportamento do espaço e do tempo à sua volta, ou seja, uma régua não se deforma e o tempo, marcado por um relógio, continua a passar do mesmo modo. Por isso, dizemos que a carga elétrica e o seu campo estão *no* espaço, pois essas duas entidades não modificam as propriedades do palco. Essa situação está indicada na fig.2.5; onde a carga e suas linhas de campo se superpõem à retícula e ao tic-tac do relógio, sem

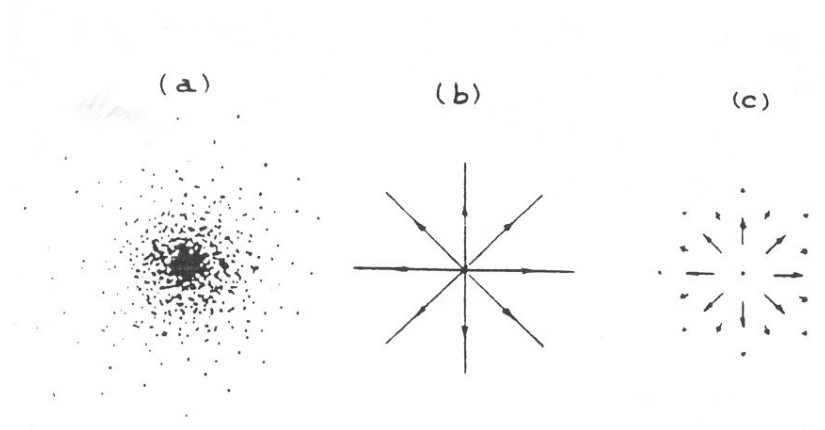


Figura 2.2: representações do campo elétrico de uma carga positiva.

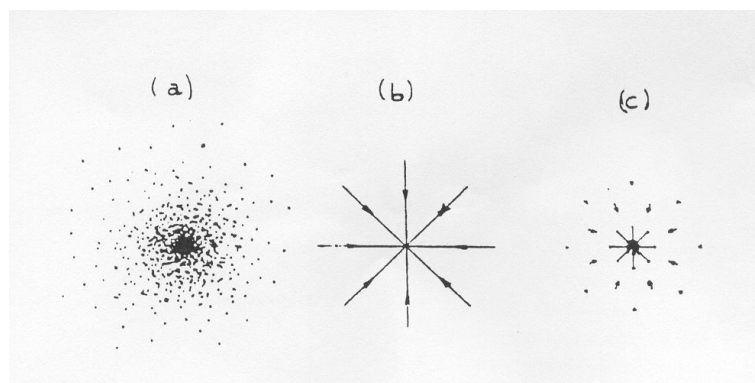


Figura 2.3: representações do campo elétrico de uma carga negativa.

modificá-los.

Se duas cargas de sinais opostos forem colocadas na mesma região do espaço, temos a situação da fig.2.6. Não só o palco continuaria inalterado, mas também o campo de uma carga não muda devido à presença da outra, pois o campo de uma carga é inalterável e transparente ao campo da outra. Assim, o campo de uma carga depende apenas dela e não, de outras que possam estar presentes no mesmo ambiente físico.

Quando duas cargas coexistem na mesma região do espaço, elas interagem. A carga positiva, por estar imersa no campo da negativa, sofre uma força. Com a carga negativa também acontece o mesmo, ou seja, ela sofre uma força por estar imersa no campo da positiva. De modo geral, sempre que aproximamos duas cargas, uma fica imersa no campo da outra, dando origem a *duas* ações recíprocas, *duas* forças, uma em cada carga, que correspondem a *uma* interação.

Essa situação ilustra um aspecto muito importante do eletromagnetismo clássico: são as cargas que interagem, e não, os campos. Os campos são os mediadores da interação, ou

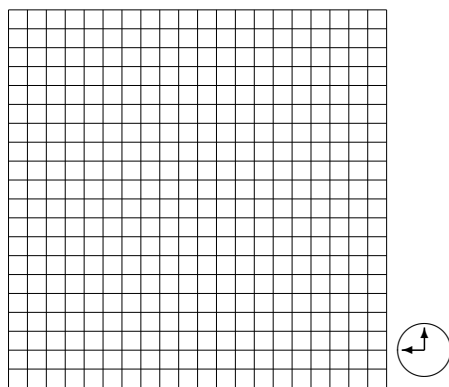


Figura 2.4: Uma representação do espaço e do tempo

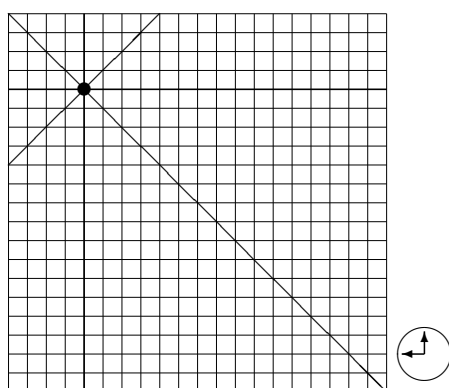


Figura 2.5: Representação de uma carga positiva (a) e negativa (b), colocada no palco

seja, eles são os meios pelos quais as cargas interagem. No eletromagnetismo clássico não há interação campo-campo<sup>3</sup> É a ausência desta interação campo-campo que é responsável pelo fato das linhas de força de uma carga não se alterarem na presença de outra carga. Por isso, quando numa região do espaço existem várias cargas, os seus campos se *superpõem*. Essa é a base física do *princípio da superposição*, que afirma que, se numa região do espaço existirem várias cargas puntiformes, existe um campo resultante, que é a soma vetorial dos campos das várias cargas individuais. Este princípio é extremamente importante no eletromagnetismo e será explorado continuamente no curso.

Na fig.2.7, ilustramos uma situação onde existem três cargas próximas entre si. Neste caso temos três interações, correspondentes a três pares de cargas. E o princípio da superposição permite-nos afirmar que a interação entre um dado par é a mesma, independentemente de a terceira estar presente ou não.

## • eletromagnetismo e mecânica quântica

Até o momento, discutimos as características de cargas e campos no contexto do ele-

---

<sup>3</sup>Na eletrodinâmica quântica, pode haver uma interação campo-campo, conhecida como espalhamento Delbrück, que é extremamente fraca.

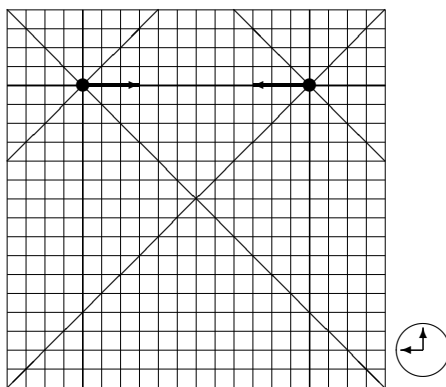


Figura 2.6: Duas cargas de sinais opostos no palco, suas linhas de campo e as forças de atração entre elas.

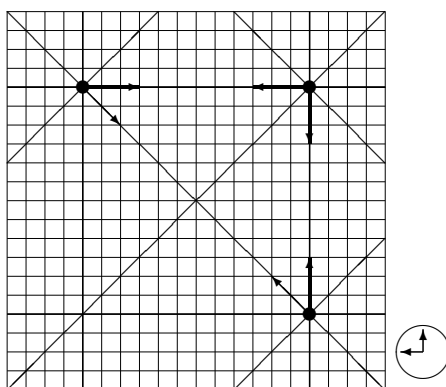


Figura 2.7: O palco e três atores.

tromagnetismo clássico. Entretanto, sabemos atualmente que as partículas microscópicas, tais como elétrons, prótons ou quarks, exibem comportamento quântico. Por isso, a teoria do eletromagnetismo clássico precisou ser modificada para incorporar esses efeitos quânticos, resultando na teoria conhecida como *eletrodinâmica quântica*. Na sequência, exemplificamos alguns efeitos quânticos para o caso do elétron, mas os resultados também se aplicam a outras partículas carregadas.

Existem dois tipos de efeitos quânticos que precisam ser considerados. Um deles refere-se ao caráter dual onda-partícula do elétron, incorporado na equação de movimento que ele obedece, conhecida como equação de Schrödinger. Nessa abordagem, o elétron é quântico, mas o seu campo é considerado como sendo clássico, e distribuído no espaço de modo contínuo. A discussão do átomo de hidrogênio encontrada nos livros-texto de mecânica quântica, por exemplo, é típica desse modo de pensar, já que envolve os estados estacionários de um elétron quântico num campo eletromagnético clássico. Em uma abordagem mais completa, o campo também é quantizado. Neste contexto mais geral, o campo de um elétron não é mais uma aura contínua e homogênea, feita sempre da mesma “substância eletromagnética”. Ela passa a ter uma estrutura, envolvendo fótons, os quanta do campo eletromagnético.



Para fixar ideias, pensemos em um elétron livre, com momento bem definido, viajando pelo espaço. Do ponto de vista quântico, existe uma probabilidade de esse elétron não ter aura nenhuma, como representa a fig.2.8(a). Entretanto ele pode, também, ter uma aura em torno de si, emitindo fótons e os reabsorvendo, como mostra a fig.2.8(b). Além disso, ele pode emitir dois fótons que são reabsorvidos, como na fig.2.8(c) ou, ainda, um fóton que decai num par  $e^+e^-$ , que se aniquila, emitindo um outro fóton que é reabsorvido pelo elétron original, fig.2.8(d). Existem muitas outras possibilidades, algumas das quais estão indicadas na fig.2-8, cada uma delas com uma probabilidade característica de ocorrer.

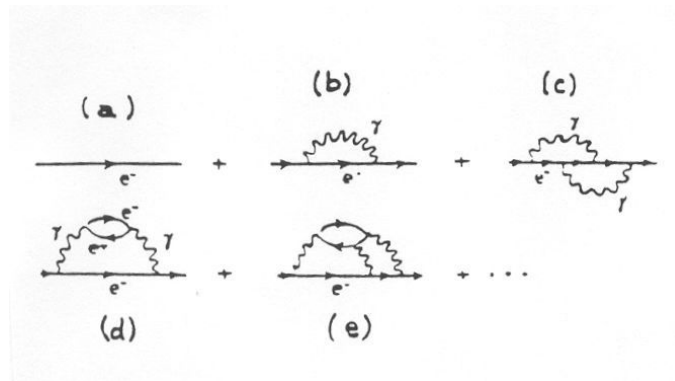


Figura 2.8: O elétron *vestido* e a estrutura de seu campo, constituído de fótons e pares elétron-pósitron; cada um dos processos da direita tem uma probabilidade característica de ocorrer; as linhas cheias são elétrons e as onduladas, fótons.

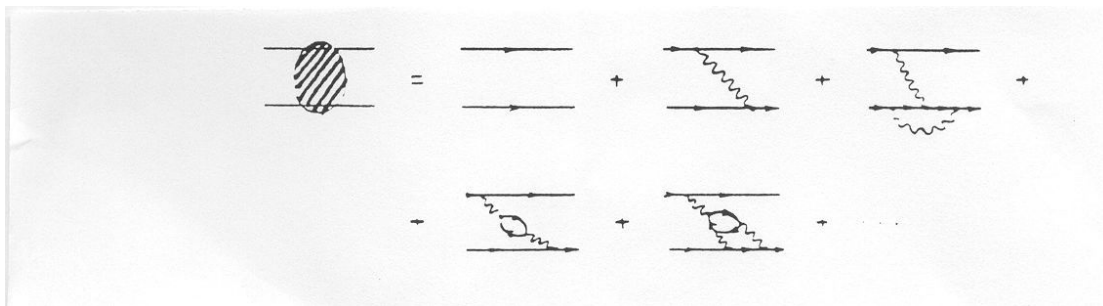


Figura 2.9: Interação entre dois elétrons.

A grande diferença entre os campos clássico e quântico é que, no primeiro caso, o campo é visto como uma “substância eletromagnética” contínua, enquanto que, no caso quântico, a estrutura do campo é especificada em termos de partículas. Costuma-se chamar um elétron cercado por um campo quântico de elétron *vestido*. É comum, também, dizer que este elétron está cercado por uma “nuvem” de fótons e outras partículas.

Para concluir, comparamos as descrições da interação entre dois elétrons nas eletrodinâmicas clássica e quântica. No caso clássico, essa interação é entendida pensando que um dos elétrons cria um campo contínuo, que ocupa todo o espaço; o segundo elétron está imerso no campo do primeiro e, por isso, sente uma força. No caso quântico, um dos elétrons está cercado por uma nuvem de fótons, que ele emite e pode reabsorver;

entretanto, o segundo elétron está imerso na nuvem do primeiro e, por isso, ele também pode absorver uma das partículas que o outro emite. Quando isto acontece, existe uma troca de informação entre os dois elétrons, o que corresponde aos efeitos de uma força. Algumas possibilidades de interação quântica estão indicadas na fig.2.9.

## • física e matemática

O objetivo da primeira parte deste curso é apresentar as bases da teoria eletromagnética clássica e, na seguinte, discutir algumas aplicações fundamentais e simples desta teoria. Ao longo dele, tratamos várias vezes dos conceitos de carga, de campo, e de forças eletromagnéticas; apresentamos ideias que, provavelmente, serão novas para você, com o intuito de produzir uma visão do mundo físico que inclua ???. O núcleo do eletromagnetismo está incorporado em uma teoria que dá forma ao conhecimento e é expressa na linguagem da física.

Na nossa vida cotidiana, estamos acostumados a ouvir, falar e pensar em português. Essa língua nos possibilita comunicar nossas vivências e ideias a pessoas que partilham o mesmo idioma. Mesmo em situações corriqueiras, o uso da linguagem é altamente complexo. Tomemos, por exemplo, a palavra *cadeira*. Quando a empregamos, ela faz uma mediação entre nossos pensamentos, a nossa razão e as nossas vivências com várias cadeiras diferentes, normalmente carregadas de emoções e subjetividade. A palavra é mediadora entre a ideia de cadeira e cada particular cadeira real.

No caso da física acontece algo análogo, pois também empregamos mediadores entre as ideias e a realidade. Entretanto, neste caso, a linguagem é mais objetiva, lógica e precisa, o que ajuda a reduzir ambigüidades. Essa linguagem tem caráter matemático e complementa a comunicação feita por meio de palavras. Situações físicas podem ser conceituadas por meio de palavras, de imagens e dos significados que elas carregam. Isto permite-nos pensar de modo "palpável" o que sejam, por exemplo, as cargas elétricas, os campos e as interações. Esse tipo conhecimento por meio de palavras de nosso vocabulário e imagens, complementado por nossas vivências, está por trás da nossa intuição acerca do mundo, da nossa cosmovisão. De modo complementar, o conhecimento físico é também baseado no uso da matemática, a linguagem própria e adequada à expressão das relações quantitativas entre as várias grandezas. Na física, os símbolos matemáticos e as operações efetuadas com eles estão relacionados com as coisas e processos da natureza. Da mesma forma que, para pensarmos ou nos comunicarmos com clareza, necessitamos ter um vocabulário vasto e bom domínio da sintaxe da língua portuguesa, quando se trata da expressão de conceitos e leis físicas, é preciso conhecer a linguagem matemática, sua estrutura e as técnicas de manipulação do formalismo.

É muito importante ressaltar, entretanto, que o pensar matemático e o pensar com base em palavras e imagens não são dissociados, pois eles correspondem a aspectos complementares da nossa relação uma com o mesmo mundo material.

O modo de se relacionar com a matemática envolve uma componente pessoal, que

varia muito de um físico para outro. Alguns trabalham num nível bastante matemático e formal, enquanto que outros privilegiam a interpretação do formalismo e as visões de mundo contidas nas operações e símbolos matemáticos. Historicamente, estes dois tipos de atitude produziram avanços importantes no nosso modo de conhecer o mundo. Por isso, é interessante buscar, sempre que possível, uma ponte entre as duas linguagens utilizadas na física. Existem muitas maneiras de conhecer o mundo que nos cerca. Platão, entre outros filósofos, defendia a ideia de que o conhecimento real tem caráter gnóstico, ou seja, que ele consiste em uma espécie de comunhão entre a mente e o objeto a ser conhecido. O objetivo da física é conhecer alguns aspectos da natureza, cabendo à matemática o papel de instrumento para atingir tal intento. A matemática é a “mão” com que o físico toca a natureza. Sobre o uso dos indispensáveis dedos dessa mão, que precisa trabalhar arduamente, cabe o que é dito num provérbio chinês:

*“O dedo serve para apontar a Lua.*

*O sábio olha para a Lua.*

*O ignorante olha para o dedo”.*

## • as leis básicas do eletromagnetismo

A teoria eletromagnética clássica descreve o comportamento de sistemas de cargas elétricas e suas interações. As ideias básicas dessa teoria são expressas por seis leis. Quatro dessas leis são as famosas *equações de Maxwell*, que descrevem como cargas e correntes elétricas criam campos elétricos e magnéticos. Uma outra corresponde à *força de Lorentz*, que descreve as forças que agem sobre cargas e correntes quando estas estão em presença de campos elétricos e magnéticos. Finalmente, a última lei corresponde à *equação da continuidade*, que exprime a impossibilidade de cargas elétricas serem criadas ou destruídas.

O sistema de quatro equações que descrevem a criação dos campos leva o nome de Maxwell porque foi ele quem estruturou e ampliou o conjunto de leis existentes anteriormente, produzindo uma teoria consistente. A versão mais conhecida destas equações, produzida por Heaviside e Hertz, envolve relações entre os campos elétrico  $\vec{E}$ , magnético  $\vec{B}$ , cargas elétricas  $q$  e correntes elétricas  $I$ . O sistema de Maxwell é formado pelas seguintes quatro leis, cada uma delas com um nome particular:

1. **Lei de Gauss da eletricidade:** cargas elétricas criam campos elétricos.
2. **Lei de Faraday:** variações temporais de campos magnéticos criam campos elétricos.
3. **Lei de Ampère-Maxell:** correntes elétricas e variações temporais de campos elétricos criam campos magnéticos.
4. **Lei de Gauss do magnetismo:** não existem cargas magnéticas.

De acordo com estas relações, qualquer campo elétrico existente na natureza só pode ter sido produzido por cargas elétricas ou variações temporais de campos magnéticos. Da mesma forma, apenas correntes elétricas e campos elétricos variáveis com o tempo são capazes de gerar campos magnéticos. Assim, qualquer processo de criação de campos eletromagnéticos pode ser compreendido a partir das equações de Maxwell. Por outro lado, campos elétricos e magnéticos podem agir sobre cargas e correntes, dando origem a forças, expressas pela equação de Lorentz.

Essa é a essência da física do eletromagnetismo. Para torná-la operacional é necessário vesti-la com a linguagem precisa da matemática. Fazer isto é o objetivo principal da primeira parte deste curso. Para concluir, apresentamos uma tabela com as leis e equações básicas do eletromagnetismo, para que você possa ter uma ideia do que vem pela frente.

equações de Maxwell			
nome	conceito	forma integral	forma diferencial
Gauss elétrica	$q \rightarrow \mathbf{E}$	$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$
Faraday	$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \leftrightarrow \mathbf{E}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
Ampère Maxwell	$I \leftrightarrow \mathbf{B}$ $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \leftrightarrow \mathbf{B}$	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \left[ \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
Gauss magnética	$\cancel{q}_{MAC}$	$\oiint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

## • Referências

- [1] CRUZ, F.F.S., Faraday & Maxwell - Luz sobre os campos, Odysseus Editora, 2005.
- [2] EINSTEIN, A. & INFELD, L., A evolução da Física, 2a. ed. Rio de Janeiro, Zahar, 1966.
- [3] FERREIRA, A.B.H. Novo Dicionário da Língua Portuguesa, 2a. ed. Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1986.

# Capítulo 3

## a matéria: condutores e dielétricos

A Terra, o sistema solar, as galáxias são aglomerados devidos à força gravitacional. Já os inúmeros tipos de matéria que fazem parte da nossa experiência cotidiana são mantidos coesos por meio de forças elétricas. Isso vale tanto para uma pequenina molécula diatômica de hidrogênio como para a enorme pedra do Pão de Açúcar, no Rio de Janeiro, passando por varias estruturas, compostos químicos, mostradores de telefones celulares, cães, gatos e seres humanos. O papel do eletromagnetismo no mundo que nos cerca e em nós mesmos é muito importante, pois todos os corpos e coisas que nele existem são constituídos por partículas portadoras de carga elétrica. Assim, as interações eletromagnéticas acabam por determinar muitas das propriedades desses corpos, atributos tão diferentes como suas durezas, condutividades, densidades e, mesmo, as suas cores. Do ponto de vista da compreensão da natureza, a onipresença do eletromagnetismo parece criar um problema. Como explicar porque as características observadas diferem tanto de um material para outro, se todas elas são baseadas no mesmo tipo de interação? A resposta está no fato de existirem muitas possibilidades diferentes de organização das cargas no interior dos vários materiais. O número de modos possíveis de organização de elétrons e núcleos atômicos nos corpos é muito grande e, por isso, é inviável sabermos tudo sobre todos os materiais. Felizmente, isso não é necessário, pois muitos materiais têm propriedades comuns e podem ser estudados em grupos. É isso que acontece com os gases, plásticos, cerâmicas ou os metais, por exemplo. Nós, aqui, nos limitamos apenas a uma descrição, muito esquemática, de alguns tipos de matéria que aparecerão com frequência no curso.

### • sistemas

Aglomerados e matéria constituem sistemas, ou seja, conjuntos de coisas ou entes que se relacionam entre si. O átomo de hidrogênio é um exemplo de sistema, e o mesmo acontece com o próton, que é feito de quarks. Na física, quase todos os tipos de matéria

estão organizados na forma de sistemas. As únicas exceções são as *partículas elementares* e é exatamente por isso que elas são tão estudadas. Como o próprio nome indica uma partícula elementar é algo que não é feito de outras coisas e, como consequência, ela não tem partes. Desse modo, elas podem fazer parte de sistemas, mas não são sistemas. Atualmente, no âmbito do modelo padrão, as únicas entidades elementares são os membros da família do elétron, os quarks e os bósons de calibre, mencionados na aula 1. Todo o resto são sistemas. O próton no interior do átomo de hidrogênio é um sistema dentro de outro sistema.

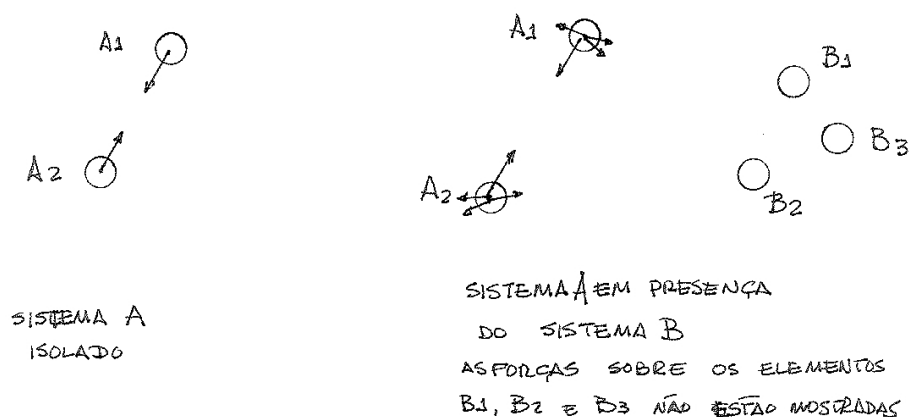


Figura 3.1: Sistemas e suas partes.

O fato de um sistema ser constituído por partes e essas partes se manterem de algum modo coesas, indica que existem forças entre elas. Tomemos, por exemplo, o sistema isolado A, mostrado na fig.3.1, constituído por apenas duas partes  $A_1$  e  $A_2$ , mantidas juntas por uma interação que dá origem a forças. Se este sistema for colocado em presença de um outro sistema, chamado de B, com três partes  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$ , cada um dos pedaços de A passa a interagir com cada um dos pedaços de B. As novas forças sobre os pedaços de  $A_1$  e  $A_2$  fazem com que o sistema A precise se reequilibrar. Para tanto, ele se deforma. Um sistema sempre se deforma quando colocado em presença de um outro. Essa propriedade decorre apenas do fato de ele ser constituído por partes, consequentemente, ela é muito geral. O chão se deforma quando você pisa nele. Uma ponte se deforma quando um carro, uma bicicleta ou uma formiga passam sobre ela. A Terra se deforma devido ao movimento da Lua. Uma régua se deforma quando a movemos da posição horizontal para a vertical. Uma molécula de oxigênio se deforma quando ela se choca com uma de nitrogênio no ar. Um próton se deforma quando é colocado no interior do núcleo atômico. O mesmo acontece quando ele é colocado no interior de um átomo de hidrogênio. Neste último caso, a deformação do próton é extremamente pequena e não pode ser observada experimentalmente com as técnicas disponíveis atualmente. Mas, de acordo com a mecânica quântica, ela existe.

- átomos e núcleos

A ideia de que a matéria é formada por átomos é muito antiga, mas firmou-se no interior da física apenas no início do século 20. Leucipo e Demócrito, filósofos gregos do século 5 a.C., acreditavam que tudo se compunha de um número infinito de átomos, entes indivisíveis, em movimento no vazio. Segundo esses filósofos, existiriam na natureza muitos tipos de átomos, que poderiam combinar-se de inúmeras maneiras, formando os diferentes objetos. A teoria atômica foi esquecida por muito tempo e somente voltou à cena no século 17. Atualmente, a ideia de *átomo* é parte fundamental da nossa compreensão da matéria. Ele é constituído por um núcleo carregado positivamente, cercado por elétrons, que têm carga negativa, como ilustra a fig.3.2. Estes átomos são eletricamente neutros, já que a carga positiva do núcleo é igual, em módulo, à soma das cargas dos elétrons. Isto explica porque, em geral, não se observa atração ou repulsão elétrica entre objetos existentes à nossa volta.

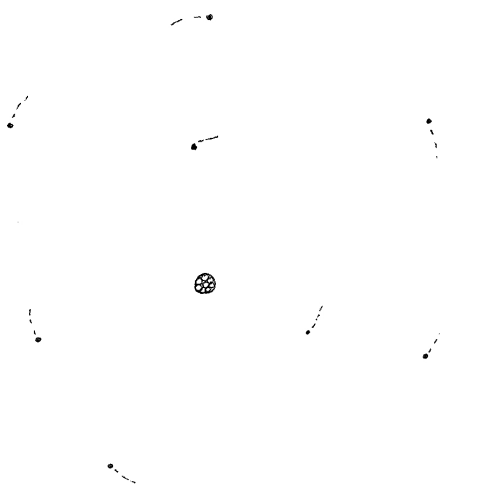


Figura 3.2: Ilustração de um átomo, fora de escala.

Na descrição das propriedades de um átomo, são necessárias duas escalas diferentes. A apropriada aos átomos é o angstrom, designada por  $\text{\AA}$ , sendo que  $1 \text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$ . Já a escala apropriada aos núcleos atômicos é o fentometro<sup>1</sup>, representada por fm, sendo  $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ . A relação  $1 \text{\AA} = 100.000 \text{ fm}$  indica, portanto, que o interior do átomo é predominantemente vazio. Ela mostra, também, que o desenho da fig.3.2 está completamente fora de escala.

Os *núcleos atômicos* são formados por prótons e nêutrons, designados pelo nome genérico de núcleons. Estas partículas, por sua vez, são estruturas formadas por quarks. Atualmente, são conhecidos seis tipos de quarks, designados pelas letras<sup>2</sup> *u*, *d*, *c*, *s*, *t* e *b*. Os prótons e os nêutrons são formados pelos quarks *u* e *d*. Um próton é constituído por dois *u* e um *d* e um nêutron, por dois *d* e um *u*. Os prótons são positivos, os nêutrons têm carga nula, e ambos têm raios da ordem de 0,8 fm. No interior do núcleo, a interação

<sup>1</sup>Essa unidade é, também, conhecida como *fermi*.

<sup>2</sup>Essas letras referem-se às iniciais das palavras, em inglês, *up*, *down*, *charm*, *strange*, *top* e *bottom*.

eletromagnética é responsável por uma força de repulsão entre os prótons. Apesar disso, o núcleo permanece coeso devido à interação forte, que tem curto alcance e atua entre todos os núcleons, fazendo com que os prótons e nêutrons fiquem muito próximos uns dos outros. Por isso, os núcleos atômicos têm raio da ordem de poucos fm. As características de um núcleo costumam ser descritas com o auxílio de três símbolos:  $Z$ , que representa o número de prótons e é denominado *número atômico*;  $N$  que corresponde ao número de nêutrons; e  $A$  o *número de massa*, que representa o número total de prótons e nêutrons, sendo  $A = Z + N$ .

As propriedades químicas de um elemento são determinadas pelo modo como os seus elétrons estão organizados. O número de elétrons que um átomo neutro possui é determinado pela carga total do núcleo, ou seja, pelo valor de  $Z$ . Os núcleos com mesmo número de prótons, mas número de nêutrons diferentes têm as mesmas propriedades químicas e são chamados isótopos. O núcleo atômico mais simples é o do hidrogênio  $H^1$ , com apenas um próton. O deutério  $H^2$ , contém um próton e um nêutron, e o trítio,  $H^3$ , um próton e dois nêutrons.  $H^1$ ,  $H^2$  e  $H^3$  são os três isótopos do hidrogênio. À medida que o número de prótons aumenta, os núcleos passam a conter mais nêutrons e se tornam cada vez mais complexos.

Uma característica importante de um átomo é que os elétrons existentes na sua eletrosfera não estão distribuídos ao acaso. Ao contrário, eles exibem padrões bastante rígidos de organização. O estudo da eletrosfera dos átomos ocupou a mente de muitos físicos e químicos do início do século 20 e levou ao desenvolvimento da mecânica quântica, na década de 1920. Segundo essa teoria, um elétron isolado é uma partícula que se propaga como uma onda e, não, por meio de trajetórias bem definidas, como propõe a mecânica newtoniana. Quando um elétron é colocado em presença de um núcleo atômico, ele continua a se comportar como uma onda que, agora, fica confinada à região próxima ao núcleo. Essa onda corresponde a uma distribuição de probabilidade de encontrar o elétron numa dada região. A distribuição de probabilidade eletrônica de um mesmo átomo pode ter várias configurações diferentes, cada uma delas correspondendo a uma energia bem definida. Como as energias dos processos atômicos são muito pequenas comparadas com as envolvidas em eventos macroscópicos, usamos uma unidade especial para medi-las, o *eletronvolt*, representado por eV. Ela é definida pela relação  $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$ .

O hidrogênio é o mais simples dos átomos, sendo constituído por apenas um próton e um elétron  $e$ , por isso, a sua eletrosfera também é relativamente simples. As energias das suas várias configurações, medidas em relação à situação em que o elétron e o próton estão infinitamente separados, são descritas pelo resultado

$$E_{(n-1)} = -\frac{1}{n^2} 13,6 \text{ eV}, \quad (3.1)$$

onde  $n$  é um número inteiro. A configuração de menor energia deste sistema, corresponde ao *estado fundamental*, com  $n = 1$ , enquanto que as demais configurações, para  $n$  entre 2 e  $\infty$ , têm energias maiores e representam estados excitados. Assim, segundo esta fórmula, a energia do estado fundamental do H é de  $-13,6 \text{ eV}$ , a do primeiro estado excitado de



$-3,4\text{ eV}$ , a do segundo de  $-1,5\text{ eV}$ , e assim por diante. Por isso, transições entre duas configurações quaisquer envolvem necessariamente a absorção ou a emissão de quantidades discretas de energia. No caso de átomos, essas quantidades de energia são carregadas por fótons, pacotes de energia ou *quanta*<sup>3</sup> de energia eletromagnética.

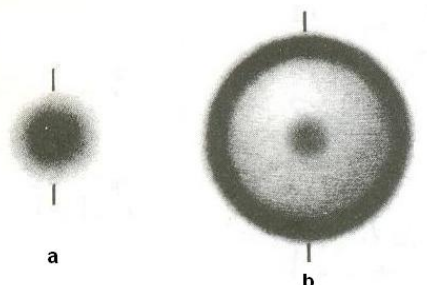


Figura 3.3: Representação da distribuição de probabilidade do átomo de H: (a) no estado fundamental e (b) no primeiro estado excitado.

A distribuição de probabilidade eletrônica do estado fundamental do átomo de hidrogênio pode ser representada como na fig.3.3(a), onde um sombreado mais forte indica uma probabilidade maior de encontrar o elétron naquela região. Já o primeiro estado excitado, cuja energia é  $E_1 = -3,4\text{ eV}$ , pode ter a distribuição de probabilidade indicada na fig.3-3(b). Um fóton de energia  $E_\gamma = 10,2\text{ eV}$ , atirado sobre um átomo no estado fundamental pode ser absorvido, fazendo-o passar para a configuração da figura (b). Alternativamente, um átomo na configuração da figura (b) pode, espontaneamente, emitir um fóton de energia  $E_\gamma = 10,2\text{ eV}$  e passar para o estado fundamental, representado pela figura (a).

Segundo a mecânica quântica, um átomo de hidrogênio no estado fundamental não pode absorver um fóton de energia menor que  $E_\gamma = 10,2\text{ eV}$ . Assim, por exemplo, se atirmos um fóton de  $8\text{ eV}$  sobre esse átomo, ele permanece no mesmo estado. Por outro lado, ele pode absorver uma energia igual a  $13,6\text{ eV}$ , passando para outro estado de energia  $E_\infty = 0$ , onde o próton e o elétron estão muito distantes um do outro e, portanto, já não formam mais um átomo. Essa é a energia mínima que permite a *ionização* do átomo no estado fundamental.

No caso de átomos com núcleos com valores de  $Z$  grandes, que contêm vários prótons, a eletrosfera é mais complexa e os elétrons estão dispostos em camadas, como em uma cebola. A mecânica quântica prediz que cada nível atômico pode conter, no máximo, um certo número de elétrons. Quando uma dada camada eletrônica está cheia, ou seja, contém o número máximo de elétrons permitido, ela é bastante estável e corresponde a uma configuração com simetria esférica, difícil de ser alterada. Por outro lado, elétrons localizados em camadas incompletas podem mudar facilmente de configuração. É essa estrutura de camadas que determina como um átomo interage com outros e, deste modo, as suas propriedades químicas e físicas. Em interações não muito violentas entre átomos,

<sup>3</sup>*Quantum* é uma palavra latina e *quanta* é o seu plural.

cada um deles pode ser pensado como sendo um caroço inerte, composto pelo núcleo e pelas camadas completas, cercado por elétrons desemparelhados.

átomo	H	He	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne	Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar
Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
camada 1	1d	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
camada 2	0	0	1d	2d	3d	4d	5d	6d	7d	8	8	8	8	8	8	8	8	8
camada 3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1d	2d	3d	4d	5d	6d	7d	8

Tabela 3.1: Estrutura eletrônica esquemática de alguns átomos.

Na tabela 22 fornecemos a estrutura eletrônica esquemática dos estados fundamentais dos 18 primeiros átomos, onde a letra d indica que existem elétrons desemparelhados naquela camada. A tabela indica como são as camadas eletrônicas dos vários átomos. Por exemplo, notamos que a primeira camada, onde cabem no máximo 2 elétrons, está completa no caso do He. A partir daí, os elétrons passam a se acumular na segunda camada, com 8 vagas disponíveis, até o Ne, quando uma nova camada, também com 8 vagas, começa a ser preenchida, até o Ar. Como os átomos de He, Ne e Ar têm todas as camadas completas, eles interagem muito pouco e, por isso, são chamados de gases nobres. Já os átomos de H, Li e Na têm um elétron desemparelhado cada um e, por isso, suas propriedades químicas são semelhantes. O mesmo ocorre com Be e Mg, B e Al, C e Si, ...

Quando dois ou mais átomos se juntam para formar um sistema maior, apenas as periferias das suas eletrosferas se modificam significativamente. Essa é a característica principal das ligações químicas. De modo geral, a configuração de um sistema formado por átomos é determinada pela operação conjunta das leis do eletromagnetismo e da mecânica quântica. A formação de aglomerados de átomos é determinada por dois tipos de mecanismos, conhecidos como ligações covalentes e iônicas. No primeiro caso, átomos partilham elétrons enquanto que, no segundo, ocorrem transferências de elétrons de um átomo para outro.

### • aglomerados covalentes

As ligações covalentes são responsáveis pelo agrupamento de átomos em moléculas. é este mecanismo que opera, por exemplo, na junção de dois átomos de H na molécula de hidrogênio, representada por  $H_2$ , na de dois O, na molécula de  $O_2$  e na de dois H

e um O, na molécula de água,  $H_2O$ . Esse mecanismo, que está presente em inúmeros outros casos, resulta de uma combinação de eletromagnetismo e efeitos quânticos. Estes últimos estão fora da abrangência deste curso e somente podem ser discutidos aqui de modo muito esquemático. Segundo a mecânica quântica, elétrons possuem *spin*<sup>4</sup>, uma característica semelhante ao momento angular e, por isso, comumente descrita como uma espécie de rotação intrínseca. Ainda que, do ponto de vista matemático, o spin possa ter uma direção e um sentido<sup>5</sup>, essa analogia é simples demais e não contempla outros aspectos do conceito. De fato, não há análogo clássico para o spin e é preciso seguir a teoria quântica.

Falarmos no spin do elétron sugere que o spin *é* dele, do mesmo modo que dizemos que a sua mão *é* sua. No caso da sua mão, isso continua sendo verdade quando você está no meio de uma multidão. No caso de elétrons, não! Quando dois elétrons coexistem no interior de um mesmo sistema, tal como na molécula de  $H_2$ , a mecânica quântica nos ensina que eles perdem parte de sua individualidade e que é preciso considerar os dois em conjunto para compreendermos o que acontece. Imaginemos, por um instante, dois elétrons falsos, sem cargas elétricas, mas com spins, colocados dentro de uma caixa. Segundo a mecânica quântica, dependendo das orientações dos seus spins, eles podem tender a se juntar ou se afastar. Se, agora, reintroduzirmos as cargas dos elétrons, os efeitos da repulsão elétrica se superpõem aos dos spins. A ligação covalente resulta desse tipo de combinação de efeitos.

A molécula de  $H_2$  pode ser pensada como um sistema formado por dois prótons, separados por uma distância da ordem de 1, em torno dos quais orbitam dois elétrons. Como esses dois elétrons ficam confinados nas vizinhanças das partículas positivas, a molécula de  $H_2$  é análoga a uma caixa e a discussão anterior torna-se relevante.

Na fig.3.4 mostramos esquematicamente as previsões teóricas para três situações diferentes. Na fig.3.4(a), dois átomos de H são colocados lado a lado, mas as interações do elétron e do próton de cada um deles com as partículas do outro são desprezadas. Nesse caso, os dois átomos estão apenas justapostos. Nas figuras (b) e (c), todas as interações elétricas entre cada uma das cargas com todas as demais são consideradas, bem como os efeitos dos spins dos elétrons. No caso (b), esses spins são paralelos e, no (c), antiparalelos. Como as figuras sugerem, o tipo de relação entre os spins dos elétrons influi na forma da nuvem eletrônica. Na situação (c), há um acúmulo de carga negativa na região entre os prótons e isso permite que os dois átomos se grudem, formando a molécula de  $H_2$ . Na situação (b), por outro lado, os dois átomos se repelem.

A molécula de água constitui um outro exemplo importante de sistema mantido coeso por ligações covalentes. O átomo de oxigênio contém 8 elétrons, 2 deles mais internos, organizados em uma camada completa e os outros 6 em uma camada mais externa, como indica a tabela 22. Os efeitos de spin ocorrem principalmente no sistema de 8 elétrons formado pelos dois provenientes dos átomos de H e pelos 6 localizados na camada externa

<sup>4</sup>A palavra spin vem do inglês e significa rotação, giro.

<sup>5</sup>No caso do spin do elétron, fala-se em módulo e direção, embora ele não seja um vetor....

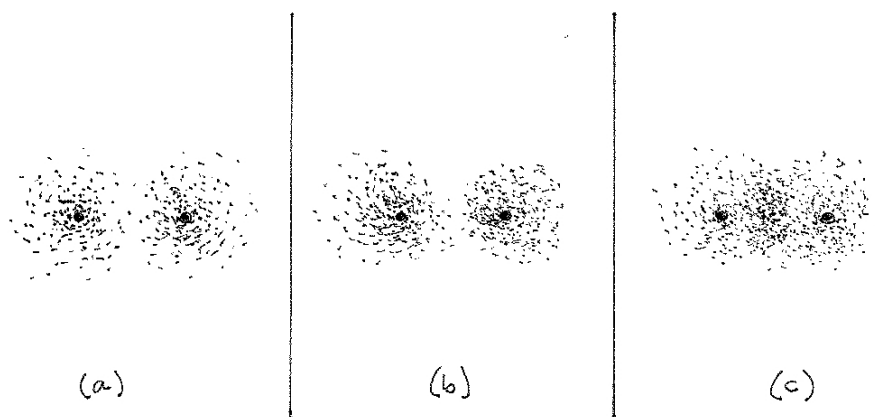


Figura 3.4: Dois átomos de H: (a) sem interagir; (b) interagindo e os elétrons têm spins paralelos; (c) interagindo e os elétrons têm spins antiparalelos.

do O. Como no caso do  $H_2$ , esses efeitos podem provocar um acúmulo de carga negativa na região fronteira entre os H e o O, o que dá origem a uma força elétrica que causa a coesão do sistema. Essa situação está indicada na fig.3.5, onde a região hachurada representa o caroço estável do O, formado pelo núcleo, com 8 prótons, envolto por 2 elétrons. Na molécula de água, os dois H estão separados por um ângulo de  $105^\circ$ , o que pode ser explicado pela mecânica quântica.

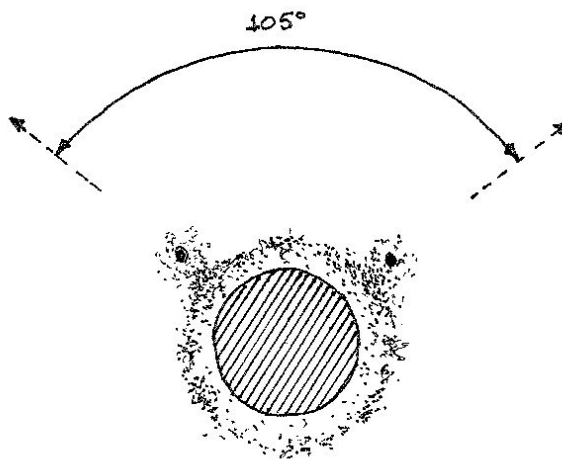


Figura 3.5: Molécula de  $H_2O$

No processo de ligação covalente que dá origem à água, as cargas dos H migram parcialmente em direção ao O. Deste modo, o lado da molécula onde estão os H tem excesso de carga positiva e o lado oposto, excesso de carga negativa. Mesmo sendo globalmente neutra, as cargas da molécula de água estão distribuídas de modo assimétrico. Isso permite

que, quando colocada em presença de outras moléculas, ela possa exercer forças intensas de natureza elétrica sobre as suas vizinhas. é por esse motivo que a água pode dissolver sais e outras substâncias, como o açúcar.

Moléculas também podem se aglomerar na forma de líquidos ou corpos sólidos, devido às chamadas forças de van der Waals, que também são de origem eletromagnética. Do ponto de vista microscópico, estas forças ocorrem porque muitas moléculas, embora sejam globalmente neutras, são formadas por cargas positivas e negativas que não estão uniformemente distribuídas. Isso faz com que existam, nas suas regiões extremas, pequenos acúmulos de carga que permitem que elas interajam com outras por meio de forças eletromagnéticas. Neste processo, as moléculas quase não perdem as suas identidades. As forças de van der Waals correspondem a interações intermoleculares e são importantes nas substâncias orgânicas, no comportamento da água e de outros líquidos, sendo responsáveis por efeitos tais como tensão superficial, atrito e transições de fase. O mecanismo covalente também é responsável pela existência de cristais. O diamante é um exemplo típico, sendo formado por átomos de carbono, que se ligam a seus vizinhos por meio de elétrons concentrados nas regiões intermediárias, por efeitos devidos aos spins.

### • aglomerados iônicos

Os aglomerados iônicos envolvem átomos de metais e o caso emblemático é o NaCl. Conforme mostra a tabela 1, o átomo de sódio (Na) contém 11 elétrons, 10 deles nas camadas 1 e 2, completas, e apenas 1 deles na terceira camada. O cloro (Cl), por outro lado, tem 17 elétrons, 10 deles completando as camadas 1 e 2 e 7 deles na terceira camada, que está quase completa. Assim, quando o Na e o Cl estão distantes um do outro, os seus elétrons estão distribuídos como sugerem os esquemas das figs.3.6(a) e (b). Por outro lado, quando os dois átomos estão próximos entre si, a mecânica quântica nos ensina que o sistema se torna mais estável quando o elétron da última camada do Na migra para o Cl. Desse modo, temos o íon positivo  $\text{Na}^+$  em presença do íon negativo  $\text{Cl}^-$ , que se atraem devido a forças elétricas. Esta situação é mostrada na fig.3.6(c). Este processo produz o cristal de sal de cozinha, formado pelos íons  $\text{Na}^+$  e  $\text{Cl}^-$ , provenientes da migração de um elétron do Na para o Cl. Neste tipo de cristal, cada íon interage simultaneamente com vários outros e o cristal não é, portanto, formando por uma aglomerado de moléculas.

### • metais

átomos com um, dois ou três elétrons na camada mais externa, que estão pouco ligados à parte interior, dão origem a metais. A tabela 22, fornece exemplos: Li, Be, B, Na, Mg e Al. átomos deste tipo podem ser ionizados muito facilmente. Quando vários deles estão bastante próximos uns dos outros, como no interior de um pedaço de um corpo metálico sólido, o sistema se organiza de modo bastante coletivo. Dentro do metal, devido à presença de muitas outras cargas à sua volta, um elétron em média, se desprende da

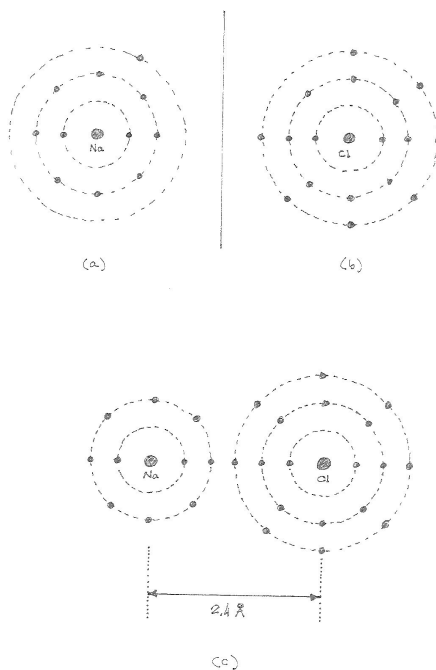


Figura 3.6: Átomos de (a) Na, (b) Cl e (c) sistema NaCl.

camada mais externa do átomo, passando a se mover livremente pelo interior do seu volume. Os íons positivos, por outro lado, se organizam em uma estrutura cristalina bastante rígida que é, também, muito regular, ou seja, se repete monotonicamente em todo o interior do metal. Por isso, um metal sólido pode ser pensado como sendo formado por uma estrutura cristalina constituída por íons positivos, embebida em um *gás* de elétrons, como indicado na fig.3.7.

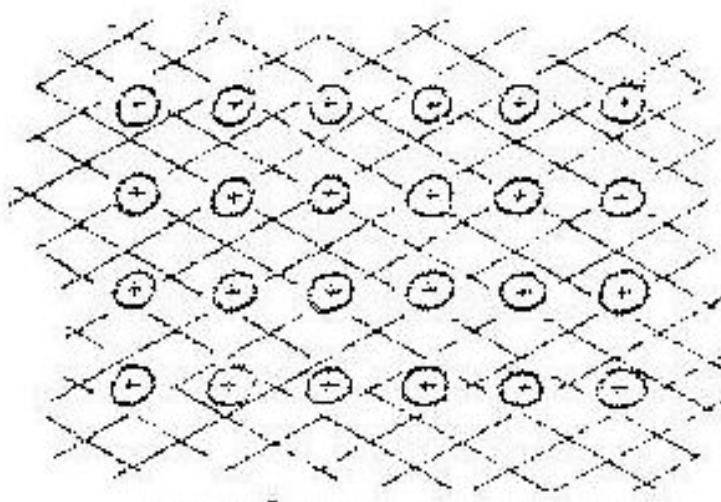


Figura 3.7: Substância condutora: os íons são representados por (+) e os elétrons, pela região sombreada.

A rede cristalina determina as principais propriedades mecânicas dos metais, tais como dureza e ductibilidade. Quando você segura um prego de ferro, você está, de fato, segurando a rede cristalina do metal. Se você martela este prego em um pedaço de madeira, você está martelando a sua rede cristalina. Se o prego entorta um pouco, é porque a sua rede cristalina se deforma.

Em um metro cúbico de metal existem, tipicamente,  $10^{29}$  elétrons livres, junto com o mesmo número de íons positivos<sup>6</sup>. Isto sugere que a distância média entre dois íons é da ordem de  $[(10^{-29})^{1/3}] \sim 5 \times 10^{-9}$  m, que é maior do que o raio de um íon. Cerca de 15% do volume do metal é ocupado pelos íons positivos e há, portanto, cerca de 85% de volume vazio no seu interior. Por estranho que possa parecer, do ponto de vista de ocupação do espaço, um corpo metálico se assemelha a uma caixa quase vazia, dentro da qual os elétrons livres se movem. Estes movimentos são bastante livres, alterados, de tempos em tempos, por choques<sup>7</sup> com os íons da rede e com outros elétrons livres.

Nos metais, os efeitos da temperatura são muito importantes. Para os íons, a temperatura está associada a um movimento de vibração em torno dos seus pontos de equilíbrio na rede cristalina enquanto que, para os elétrons, ela se manifesta como movimentos de translação, com direções aleatórias, no volume livre do metal. Para estimar a velocidade típica de um elétron livre no interior do metal, lembramos que a relação entre a temperatura de um sistema e a energia cinética média das suas partículas é dada por

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m_e \langle v_e^2 \rangle = \frac{3}{2} k T ,$$

onde  $k = 1,38 \times 10^{-23}$  J K<sup>-1</sup> é a constante de Boltzmann. Assim, para  $T = 27^\circ\text{C} \sim 300$  K,  $\sqrt{\langle v_e^2 \rangle} = \sqrt{3 k T / m_e} \simeq 100.000$  m/s. Esta velocidade, de 100 km/s, é razoavelmente grande e, devido à agitação térmica, existe uma probabilidade de um elétron ser atirado para fora do metal. Quando isto acontece, ele escapa um pouquinho e é atraído de volta para o seu interior por meio de forças eletrostáticas.

## • condutores e isolantes

Como a matéria pode se organizar de muitos modos diferentes, na natureza encontramos sistemas nos quais cargas elétricas podem ou não se mover, fazendo-o com maior ou menor facilidade. Sistemas nos quais as cargas podem se mover com facilidade são chamados de *condutores* de eletricidade e os demais, de *isolantes* ou *dielétricos*. Esses dois tipos de material podem existir na forma de sólidos, líquidos ou gases. Dentre os sólidos, os metais constituem o exemplo mais importante de condutores, e plásticos, vidro e louça, exemplos de isolantes. No caso de líquidos, soluções salinas são condutoras, enquanto a água pura é dielétrica. Gases à temperatura ambiente são isolantes, mas quando bastante

<sup>6</sup>Este número é próximo e compatível com o número de Avogadro expresso em metros cúbicos.

<sup>7</sup>Nesta caso, a palavra choque é usada em sentido figurado, para representar interações eletromagnéticas.

aquecidos, podem se transformar em plasmas, que são altamente condutores. O aquecimento dá origem a plasmas porque o aumento da energia cinética média das moléculas produz mais choques violentos e o número de íons cresce. **era: aumenta, mas coloquei cresce, para não repetir a palavra)** Quando este processo é intenso, o gás vira uma sopa eletricamente neutra, embora constituída por íons positivos e elétrons, o plasma. À nossa volta existem plasmas nas chamas, sejam elas produzidas por velas ou fogões, no interior de lâmpadas fluorescentes e em dias de tempestade, pois são eles que conduzem as cargas das nuvens ao solo.

Um cuidado que devemos ter ao classificar substâncias como isolantes ou condutores é lembrar que, na natureza, não existem condutores ou isolantes perfeitos. No caso de condutores metálicos, o movimento de carga elétrica em seus interiores é atrapalhado pelos sucessivos choques entre elétrons e íons da rede cristalina, o que dá origem à resistência elétrica. Em dielétricos, por outro lado, suas moléculas podem ser quebradas em íons positivos e elétrons quando colocadas em presença de campos elétricos muito grandes. Quando isso ocorre, a substância deixa de ser isolante, passando a conduzir eletricidade, tal como acontece com o ar nos dias de tempestade com raios. O ponto a partir do qual um dielétrico se transforma em condutor é caracterizado pela rigidez dielétrica da substância.

Condições ambientais também podem influir sobre a capacidade de um corpo conduzir ou isolar eletricidade. Por exemplo, o aumento da temperatura de um corpo metálico corresponde ao aumento da velocidade média dos íons e elétrons que o constituem, tornando mais difícil a movimentação de cargas em seu interior. No caso de corpos isolantes, a umidade e as condições de limpeza de sua superfície podem ser mais importantes que a temperatura. Isso porque a umidade pode dissolver sais existentes na superfície do corpo, recobrando-o com uma solução salina, que contém íons e é boa condutora de eletricidade. Assim, apesar de o corpo ser feito de substância isolante, a eletricidade pode ser conduzida por essa solução em sua superfície.

## • exercícios

1. Explícite dez diferenças entre um pedaço de vidro e um fio de cobre. Quais delas estão relacionadas com o eletromagnetismo?
2. O raio de um núcleo com  $A$  nucleons é dado aproximadamente por  $R = R_0 A^{1/3}$ , onde  $R_0 \approx 1,1$  fm. Sabendo que o raio  $r_N$  do nucleon é da ordem de 0,8 fm, estime a porcentagem de espaço vazio existente no núcleo de ouro ( $Z = 79, A = 197$ ).
3. Se o átomo tivesse um raio do comprimento de um quarteirão (cerca de 100 m), qual seria o raio do núcleo, mantidas as proporções?
4. A energia do enésimo nível do hidrogênio pode ser representada com boa aproximação por meio da eq.(3.1)
  - a) calcule as energias dos quatro primeiros níveis.
  - b) um átomo excitado no quinto nível pode decair para qualquer dos níveis mais baixos:



calcule as energias dos fótons emitidos em cada uma das transições possíveis.

5. A partir da tabela 1, determine um elemento com propriedades químicas semelhantes às do oxigênio. Justifique a sua resposta.

6. Por que os elétrons dos átomos não caem no núcleo, em decorrência da atração elétrica?

• **respostas**

2.  $(1 - \frac{r_N^3}{R_0^3}) \sim 62\%$

3. 1 mm.

4. a)  $E_0 = -13,6 \text{ eV}$ ;  $E_1 = -3,40 \text{ eV}$ ;  $E_2 = -1,51 \text{ eV}$ ;  $E_3 = -0,85 \text{ eV}$ .

b) Energia dos fótons: 12,75 eV; 12,09 eV; 10,20 eV.



# Capítulo 4

## a eletrização da matéria

Toda a matéria existente no mundo é uma mistura de prótons positivos e elétrons negativos que se atraem e se repelem com forças muito intensas e tão perfeitamente balanceadas que, entre dois corpos neutros, com um grande número de prótons e elétrons, não atuam forças elétricas. Em condições normais, a matéria, mantida coesa por forças eletromagnéticas e organizada em diferentes sistemas e aglomerados, é neutra. Mas existem situações em que essa neutralidade é quebrada e a matéria fica eletrizada. Corpos neutros ficam eletrizados quando ganham ou perdem elétrons, pois são eles, e não os prótons, que se transferem de um corpo a outro. Um objeto com mais elétrons que prótons está eletrizado negativamente e com menos, positivamente. É importante registrar que quando falamos em matéria eletrizada, ou mencionamos a carga total de um objeto, estamos nos referindo a excessos de carga em relação à neutralidade.

A transferência de elétrons de um corpo para outro pode ocorrer por diferentes processos e é responsável tanto pela eletrização quanto pela deseletrização da matéria.

### • eletrização por atrito

O fenômeno conhecido como eletrização por atrito, importante e corriqueiro, é explicado qualitativamente do seguinte modo: do ponto de vista microscópico, as superfícies dos objetos são bastante irregulares e, quando dois corpos são atritados entre si, há muitos pontos em que os átomos de um e de outro ficam bastante próximos, ocasionando forças muito intensas que agem sobre as suas cargas. Isso permite que alguns elétrons de átomos de um dos corpos passem para átomos do outro e, quando os objetos atritados são separados, eles podem ficar com elétrons a mais ou a menos. O sentido da transferência de elétrons depende do tipo de átomos envolvidos e um dos corpos acaba ficando negativo e o outro, positivo. Em geral, a explicação teórica para este tipo de processo é bastante difícil.

Na prática, costuma-se estudar experimentalmente a eletrização por atrito entre di-

versos materiais e compilar os resultados. Ao longo do tempo, a partir destes estudos, foram elaboradas várias séries empíricas, nas quais um material fica eletrizado positivamente quando atritado com outro que está depois dele na lista. Estas séries são chamadas triboelétricas e uma delas é apresentada a seguir: cabelo, vidro liso, poliamida sintética, algodão, seda, papel ou papelão, couro, porcelana, alumínio, madeira, rolha, isopor, plástico, acrílico rígido, PVC, borracha dura. Por exemplo, de acordo com esta série, o atrito entre papel e um tubo de PVC faz com que o papel fique positivo e o tubo, negativo. Na literatura, encontramos séries diferentes, pois a composição variada de um mesmo tipo de material, tais como vidros, plásticos, papeis, tecidos, madeiras ou borrachas, afeta sua capacidade de receber ou doar elétrons.

Não somente sólidos podem ser eletrizados por atrito, mas também líquidos e gases. Por exemplo, a eletrização das nuvens de chuva se dá pelo atrito entre gotículas de água e o ar. Outro exemplo é a eletrização da carroceria de um automóvel em movimento em um dia seco. O atrito do carro com o ar seco faz com que ele fique eletrizado e um passageiro, ao sair do automóvel e tocar nele, pode levar um choque.

O modo como o excesso de carga elétrica se distribui em um corpo macroscópico depende, essencialmente, de os elétrons poderem ou não se mover em seu interior. Nas substâncias chamadas isolantes ou dielétricas, a carga elétrica praticamente não consegue se deslocar de um ponto a outro. Por exemplo, se atritamos com papel uma das extremidades de um canudo plástico, a região atritada recebe elétrons que lá permanecem. Nos materiais condutores eletrizados, os elétrons livres têm mobilidade e o excesso de carga se distribui na superfície do corpo.

Nesta aula, paralelamente à discussão conceitual, sugerimos uma série de atividades simples que podem ajudar a compreensão dos fenômenos apresentados.

### atividade 1

Pendure duas bexigas de festa, cheias de ar, por fios de material isolante, tal como náilon, de forma que elas fiquem próximas uma da outra. Por estarem neutras, elas não se atraem nem se repelem e os fios pendem verticalmente como na fig.4.1(a). Em seguida, atrite cada uma das bexigas com um tecido de náilon. Isto faz com que elas fiquem eletrizadas com cargas de mesmo sinal e passem a se repelir, como mostra a fig.4.1(b).

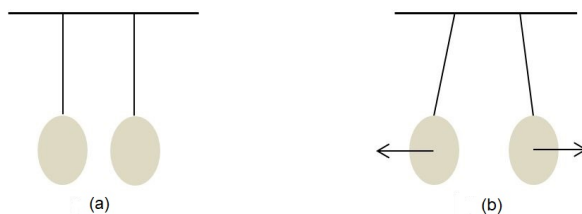


Figura 4.1: Duas bexigas de festa (a) neutras e (b) eletrizadas por atrito com náilon.

## • indução eletrostática

A indução eletrostática é um fenômeno que ocorre sempre que um corpo neutro é colocado na presença de outro eletrizado, mesmo sem contato direto. Isto acontece porque as cargas da matéria que constitui o primeiro corpo sentem forças causadas pela presença do segundo. Do ponto de vista microscópico, o que ocorre no interior de um corpo neutro na presença de cargas externas a ele é bastante diferente para condutores e dielétricos.

Consideremos, por exemplo, o caso de um bastão dielétrico carregado negativamente colocado nas vizinhanças de um condutor metálico. A carga negativa do bastão interage com todas as cargas do metal, repelindo seus elétrons e atraindo seus núcleos positivos. Como dentro do metal os elétrons livres podem se mover com grande facilidade, parte deles vai se concentrar na extremidade do condutor mais afastada do bastão, fazendo com que ela se torne negativa. Consequentemente, a falta de elétrons na extremidade mais próxima ao bastão produz uma concentração de carga positiva nessa região, como ilustra a fig.4.2(a). Estando as cargas positivas do condutor mais próximas do bastão do que as negativas, há uma força resultante de atração entre os dois corpos representada na fig.4.2(b). Se o condutor estiver eletricamente isolado, ele volta a estar descarregado em toda a sua extensão quando o bastão é afastado.

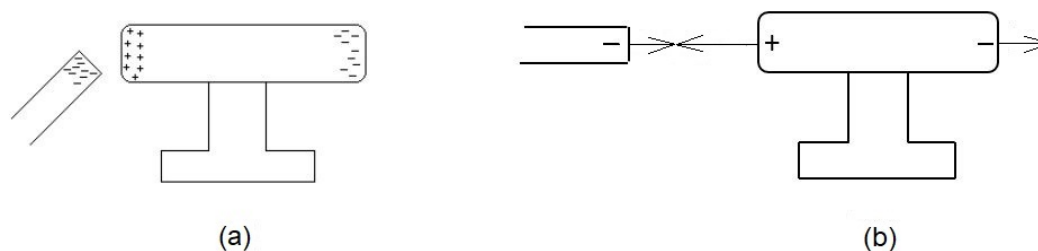


Figura 4.2: (a) Um bastão eletrizado provoca a indução eletrostática em um condutor neutro; (b) a força resultante entre os corpos é de atração.

Se o bastão carregado negativamente é colocado nas vizinhanças de um dielétrico, também há indução, mas o processo interno é diferente do caso de condutores. Nos dielétricos, os elétrons das moléculas do corpo também são repelidos e os núcleos atômicos, atraídos. Entretanto, como não há elétrons livres, ocorre uma deformação da molécula, conhecida como polarização. Este processo está esquematizado na fig.4.3.

Deste modo, quando o bastão carregado é colocado em presença de um corpo dielétrico, ocorre a polarização de suas moléculas. No interior do corpo, não há concentração de cargas porque os efeitos das polarizações de moléculas vizinhas se cancelam, como esquematizado na fig.4.4(a). O efeito global percebido consiste no acúmulo de cargas positivas no lado do corpo mais próximo ao bastão e de cargas negativa, no lado oposto, como mostra a fig.4.4(b). As diferentes distâncias dessas distribuições ao bastão dão origem a uma força resultante de atração, como ilustra a fig.4.4(c).

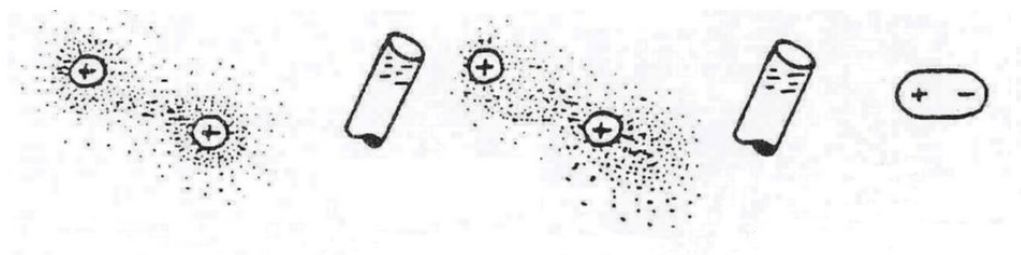


Figura 4.3: Polarização de moléculas: (a) molécula livre; (b) molécula deformada na presença do bastão eletrizado e (c) representação esquemática da situação (b).

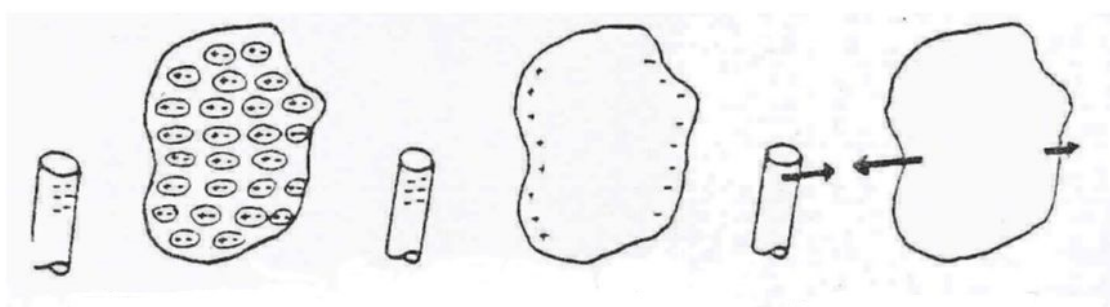


Figura 4.4: Um dielétrico na presença de um bastão carregado: (a) a carga do bastão polariza as moléculas do dielétrico; (b) efeito global no dielétrico e (c) força resultante de atração entre ambos.

### • atividade 2

Encoste um canudinho de plástico neutro em uma parede e solte. Como esperado, ele cai devido à força peso. Agora atrite o canudinho com um pedaço de papel toalha e o encoste novamente na parede. Você pode notar que ele gruda nela e não cai. Isso ocorre porque o canudinho, eletrizado negativamente por atrito com papel, provoca a polarização das moléculas da superfície da parede ao repelir seus elétrons e atrair seus núcleos atômicos. Assim, as cargas positivas das moléculas ficam mais próximas do canudinho do que as negativas e, como consequência, surge uma força resultante de atração entre o canudinho negativo e a superfície da parede.

### • atividade 3

Atrite uma régua de plástico com papel ou cabelo e, de acordo com a série triboelétrica, ela fica eletrizada negativamente. Ao aproximar a régua eletrizada de pequenos pedacinhos neutros de papel, você pode observar que ela os atrai. Isso ocorre porque a régua repele as cargas negativas do papel e atrai as positivas. Assim, há uma concentração de cargas positivas no lado do papel mais próximo da régua e de cargas negativas no lado oposto. As diferentes distâncias das distribuições de carga positiva e negativa à régua dão origem a uma força resultante de atração entre ela e os pedacinhos de papel. Essa situação

está ilustrada na fig.4.5. O efeito da força atrativa pode ser observado pelo movimento do papel.

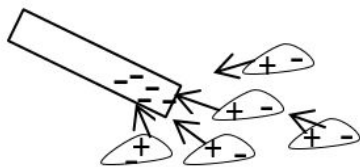


Figura 4.5: Uma régua de plástico eletrizada atrai pedacinhos neutros de papel.

#### • atividade 4

Um objeto eletrizado também pode atrair líquidos. Aproximando uma régua de plástico neutra de um filete de água de uma torneira, você pode perceber que a água continua a cair verticalmente, em linha reta, como mostra a fig.4.6(a). Em seguida, atrite a régua com papel ou com cabelo e aproxime-a da água. Você pode observar que o filete é desviado da vertical. A régua, eletrizada por atrito, polariza as moléculas de água porque exerce força sobre suas cargas e, conseqüentemente, passa a haver uma força atrativa resultante entre ela e a água, como ilustra a fig.4.6(b).

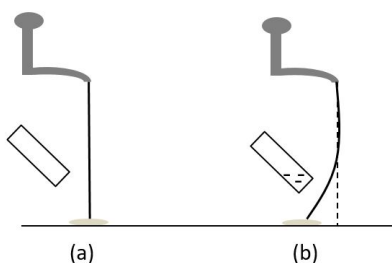


Figura 4.6: Um filete de água (a) cai verticalmente; (b) é desviado da vertical na proximidade de um corpo eletrizado.

#### • eletrização por contato

A eletrização por contato ocorre quando um corpo carregado toca em outro neutro. As cargas positivas e negativas do corpo neutro sofrem forças na presença do eletrizado e há transferências de elétrons de um corpo para outro. Ao final, ambos os corpos estão com cargas de mesmo sinal. O processo de eletrização por contato é bastante interessante e não é simples. Esquemáticamente, as seguintes etapas ocorrem quando um bastão negativo eletriza por contato um condutor inicialmente neutro:

a) antes que os corpos se toquem, a proximidade do bastão, provoca a polarização do condutor, como mostra a fig.4.7(a);

- b) quando os corpos se tocam, a concentração de cargas positivas do condutor atrai os elétrons do bastão e alguns deles passam para o condutor que fica eletrizado negativamente, como ilustra a fig. 4.7(b);
- c) com o bastão afastado, o excesso de cargas negativas do condutor se distribui em sua superfície, como indica fig.4.7(c).

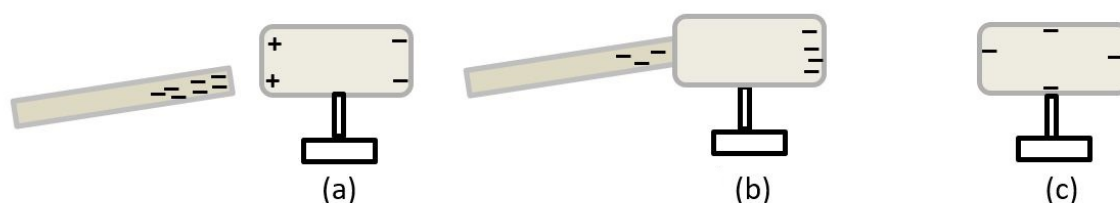


Figura 4.7: (a) O condutor neutro fica polarizado na presença de um bastão eletrizado negativamente; (b) elétrons migram do bastão negativo para o condutor; (c) o bastão é afastado e a superfície do condutor fica carregada negativamente.

Se o procedimento é repetido com um bastão positivo, o processo é análogo e o condutor fica eletrizado positivamente.

### • aterramento

O planeta Terra é um grande condutor e se um objeto metálico eletrizado é ligado a ele por outro condutor, os três corpos passam a constituir um sistema único, ocorrendo movimento de elétrons entre suas partes até que o equilíbrio seja alcançado. Se ligamos o objeto negativo da fig.4.7(c) à Terra por meio de um condutor, elétrons migram dele para a Terra e a situação de equilíbrio é atingida quando o objeto fica neutro. Esse processo é denominado aterramento do corpo. Ele ocorre porque os elétrons têm grande mobilidade no sistema e como se repelem, tendem a ficar o mais distante possível uns dos outros. No caso de aterramento de um condutor eletrizado positivamente, elétrons da Terra são por ele atraídos até que ele fique sem excesso de carga. As figs.4.8(a) e (b) ilustram, respectivamente, de forma esquemática, os processos de aterramento de um condutor negativo e de um condutor positivo. A fig.4.8(c) representa a situação final de equilíbrio, com o condutor neutro. Normalmente, para representar o aterramento, são utilizados pequenos traços paralelos, como na fig.4.8(d).

O corpo humano também é condutor de eletricidade e por isso, se tocamos em um objeto carregado, levamos um choque, que consiste na passagem de elétrons pelo nosso corpo. Um corpo eletrizado por atrito, em geral, adquire pouca carga, por isso podemos aterrar o corpo, tocando nele, sem levar choque.



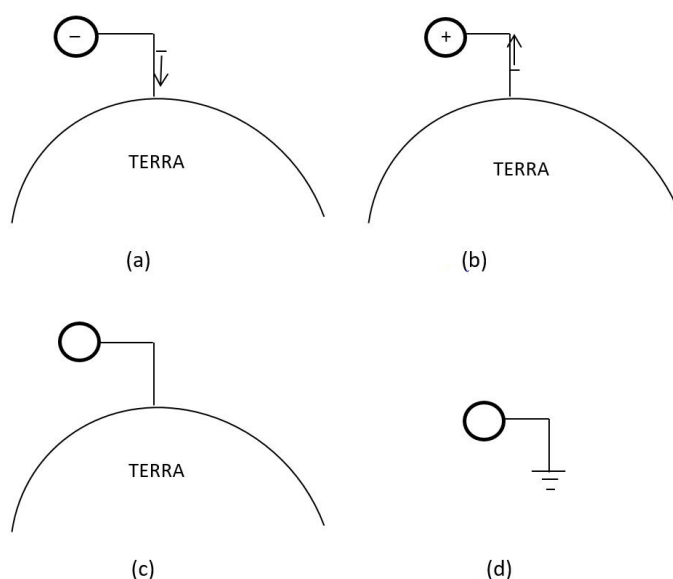


Figura 4.8: Aterramento de um objeto condutor (a) negativo; (b) positivo; (c) situação final de equilíbrio e (d) representação de um corpo aterrado.

### • eletrização por indução

Um objeto metálico pode ser eletrizado por indução e este processo está mostrado esquematicamente na fig.4.9. Inicialmente, um bastão dielétrico carregado negativamente induz a separação de cargas em um condutor que permanece neutro. Nesse processo de indução ilustrado na fig.4.9(a), um lado do condutor fica positivo e outro negativo. As quantidades de carga em cada lado do condutor são iguais entre si, mas menores que a carga do bastão dielétrico que provocou a polarização.

Em seguida, ao aterrarmos o corpo metálico, este e a Terra passam a ser um único e gigantesco condutor. Quando isso acontece, a carga negativa do bastão "empurra" os elétrons do metal para o mais longe possível e estes escoam para Terra, ficando o bastão carregado positivamente, como representado na fig.4.9(b). Interrompendo a ligação com a Terra e, em seguida, afastando o bastão, o condutor permanece carregado positivamente, com as cargas distribuídas em sua superfície, como mostra a fig. 4.9(c).

É muito importante notar que o resultado do efeito do processo de aterramento é o mesmo, independentemente da parte do corpo metálico que é conectada à Terra. Assim, se a situação mostrada na fig.9(b) for substituída pela da fig.10, na qual o lado positivo do condutor é ligado à Terra, a repulsão elétrica entre o bastão e os elétrons livres do condutor empurra elétrons para Terra. Como a carga negativa do bastão é, em módulo, maior que a positiva do condutor, o resultado final é que elétrons migram do condutor para a Terra como mostra a fig.4.10. Assim, é indiferente a posição no condutor em que é feito o aterramento, tanto na situação da fig.9(b), como na da fig.10, elétrons migram do condutor para Terra.

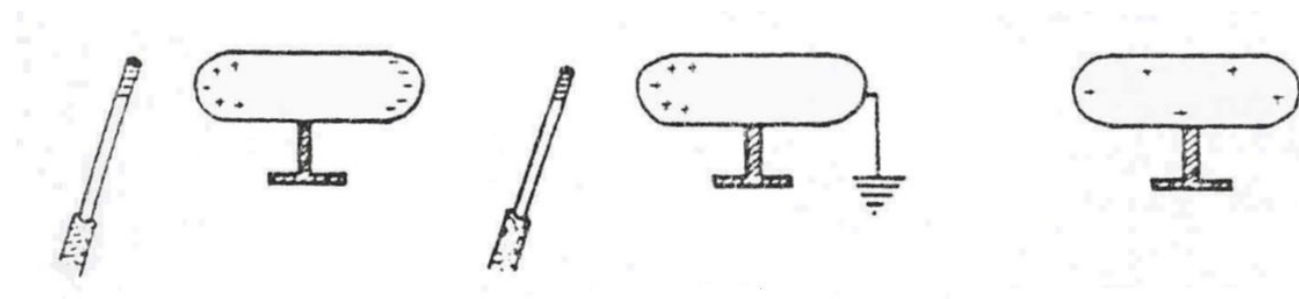


Figura 4.9: (a) Separação de cargas em um condutor provocada por um bastão dielétrico negativo próximo dele; (b) o condutor é aterrado e elétrons escoam do condutor para a Terra; (c) a ligação do condutor com a Terra é desfeita, o bastão é afastado e o condutor fica eletrizado positivamente.

No final do processo de eletrização por indução, o objeto eletrizado terá sempre carga de sinal oposto à do corpo utilizado para eletrizá-lo. Caso o bastão estivesse carregado positivamente, o condutor, no final do processo, estaria com excesso de carga negativa.

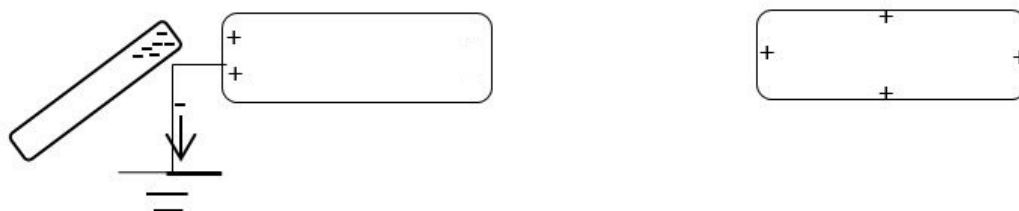


Figura 4.10: Um condutor eletrizado por indução estará, no final do processo, com carga de sinal oposto à do corpo que provocou a eletrização.

### • detecção de cargas elétricas: pêndulo e eletroscópio

De modo geral, a detecção de cargas é feita a partir da observação de forças elétricas. Não há como determinar se um objeto está eletricamente carregado a não ser através de sua interação com outras cargas elétricas. A seguir, apresentamos dois instrumentos, de construção bastante simples, que podem ser utilizados para verificar se um corpo está eletrizado. São eles o pêndulo elétrico e o eletroscópio, com os quais você pode realizar vários experimentos qualitativos.

#### • pêndulo elétrico

A fig.4.11 mostra um pêndulo elétrico que pode ser facilmente montado. Para isso, basta um suporte, dois canudinhos de plástico, um grampo de cabelo, um pedaço de fio de náilon ou de outro material isolante e um pequeno disco de papel alumínio. O suporte pode ser feito com um copinho descartável de café preenchido com gesso. Os canudos, presos um ao outro pelo grampo aberto, formam um ângulo de 90 graus e um deles é

fixado verticalmente no suporte. Uma extremidade do fio é presa na ponta do canudo horizontal e, na outra, é pendurado o disco de papel alumínio.

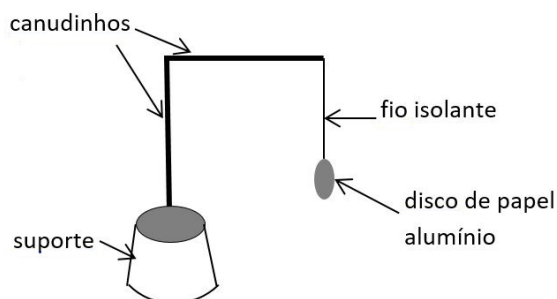


Figura 4.11: Exemplo de pêndulo elétrico.

### • atividade 5

Aproxime um canudinho neutro, de plástico, do disco de papel alumínio do pêndulo e você verá que o fio continua pendendo na vertical como na fig.4.12(a). Em seguida, atrite o canudinho com papel toalha e, de acordo com a série triboelétrica, ele fica carregado negativamente. Aproxime o canudinho negativo do pêndulo, sem que eles se toquem, e você vai observar que o disco de papel alumínio é atraído por ele e que o fio se inclina em relação à vertical, como ilustra a fig.4.12(b). Esse efeito acontece porque há indução de carga positiva no lado do disco metálico mais próximo do canudo e, de cargas negativas, no seu lado mais distante, analogamente ao que mostra a fig.4.2.

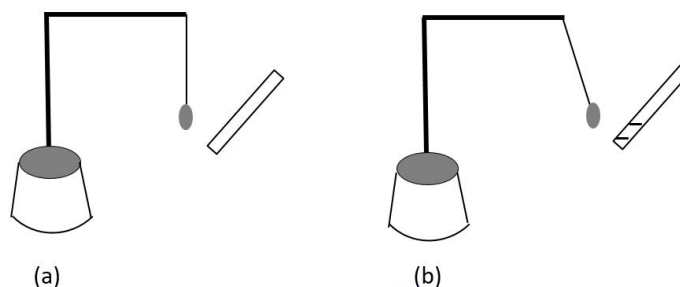


Figura 4.12: Um canudinho de plástico (a) neutro e (b) eletrizado próximo a um pêndulo elétrico.

Agora, permita que o disco de papel alumínio toque no canudinho, então passa a haver repulsão entre eles, como ilustra a fig.4.13, indicando que ambos estão com cargas de mesmo sinal. Isto acontece porque o lado positivo do disco encostou no canudinho negativo e provocou a transferência de parte do excesso de elétrons do canudinho para o disco que, por contato, fica eletrizado negativamente. O processo de eletrização por contato está ilustrado na fig.4.7.

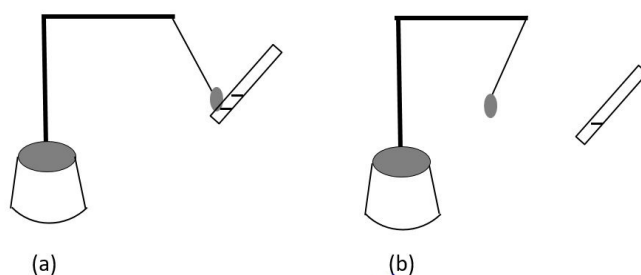


Figura 4.13: (a) O disco inicialmente neutro encosta no canudinho e (b) é repellido por ele.

• **atividade 6**

Eletrize um canudinho plástico atritando-o com papel. A seguir, encoste o canudinho no disco do pêndulo elétrico e o afaste dele. Isso faz com que os dois objetos fiquem com carga de mesmo sinal. Em seguida, aproxime o canudinho do pêndulo, e você vai observar que eles se repelem. Variando a distância entre ambos, vai constatar que a força de repulsão diminui com o aumento da distância, como mostra a fig.4.14. Isto indica, qualitativamente, que quanto maior a distância entre objetos carregados, menor a força elétrica entre eles.

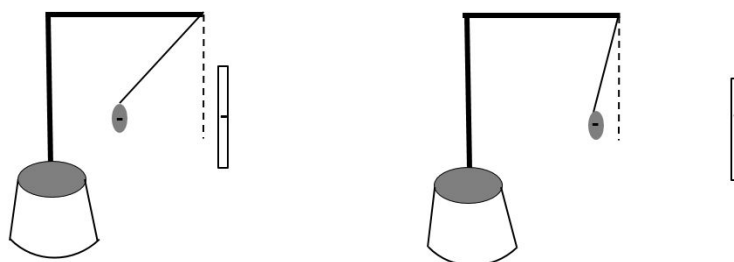


Figura 4.14: Quanto maior a distância entre o pêndulo e o canudinho eletrizados, menor a força de repulsão entre eles.

• **atividade 7**

Eletrize, por atrito com papel, dois canudinhos plásticos iguais. A seguir, toque um dos canudinhos no disco de um pêndulo elétrico e o afaste dele. Devido ao contato, os dois estão com carga do mesmo tipo. Com o canudinho a certa distância do disco, você pode observar que eles se repelem. Com os dois canudinhos, presos um ao outro, à mesma distância do disco, você pode notar que a força de repulsão é maior. A fig.4.15 ilustra este efeito. Isso acontece porque a força elétrica entre objetos eletrizados aumenta com a carga.

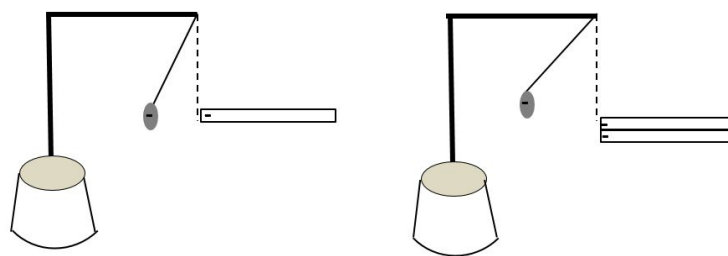


Figura 4.15: A força elétrica entre objetos eletrizados cresce com o aumento da carga.

## • eletroscópio

Existem vários tipos de eletroscópio. Basicamente, um eletroscópio é formado por um condutor isolado eletricamente que, em uma de suas extremidades, contém duas hastes articuladas, sendo ao menos uma delas móvel. Quando o eletroscópio está eletrizado, estas hastes se repelem e seu movimento pode ser observado. A fig.4.16 mostra esquematicamente um eletroscópio descarregado e eletrizado.



Figura 4.16: Esquema de um eletroscópio (a) descarregado e (b) eletrizado; no ponto A existe uma articulação que permite o movimento da haste da direita.

## • atividade 8: construindo um eletroscópio

Para construir um eletroscópio simples, precisamos dos seguintes materiais: um pote de vidro ou de plástico transparente com tampa de plástico, papel alumínio, um pedaço de fio de cobre rígido e encapado de aproximadamente 15 cm, um prego e cola. A montagem está descrita a seguir:

- com o prego, faça um furo na tampa do pote de tamanho suficiente para passar o fio;
- descasque as duas pontas do fio de cobre, deixando o restante encapado, e numa delas faça um gancho;
- corte duas tiras de papel alumínio de aproximadamente 1 cm por 6 cm e faça um pequeno furo em um dos lados de cada uma delas;
- pendure, pelos furos, as duas tiras no gancho do fio sem que fiquem grudadas uma na outra e de tal modo que suas extremidades, longe do fio, tenham liberdade de movimento;
- encaixe a outra ponta do fio na tampa do pote deixando uns 10 cm para fora e coloque

- um pingo de cola no furo para fixar o fio na tampa;  
 f) tampe o pote;  
 g) faça uma bola de papel alumínio e prenda na extremidade do fio fora do pote.

A fig.4.17 mostra um esquema e a foto de um eletroscópio construído com o procedimento acima descrito.

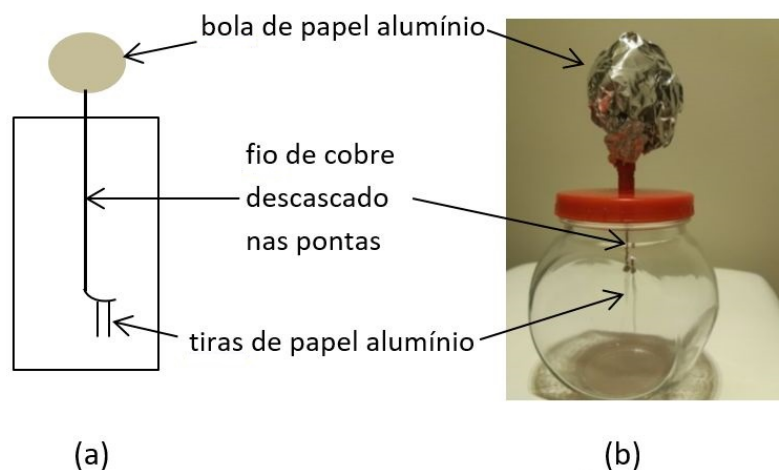


Figura 4.17: (a) Esquema e (b) foto do eletroscópio.

#### • atividade 9

Encoste um bastão de plástico, neutro, na bola de papel alumínio do eletroscópio. As duas tiras de papel alumínio permanecem próximas uma da outra como mostra o esquema da fig.4.18(a). Em seguida, atrite o bastão com papel toalha e, de acordo com a série triboelétrica, ele fica carregado negativamente. Encostando o bastão na bola de papel alumínio, o eletroscópio fica eletrizado, por contato, com carga negativa, e as duas tiras se repelem. As figs4.18(b) e (c) ilustram o processo. Note que as tiras de papel alumínio ficam mais afastadas quando o bastão está encostado na bola de papel alumínio do que após seu afastamento, como ilustram, respectivamente, as figs4.18(b) e (c). Isso acontece porque o bastão negativo próximo da bola repele os elétrons do eletroscópio para o mais longe possível dele fazendo com que de as tiras fiquem com mais elétrons. Quando o bastão é afastado, as cargas se redistribuem e as fitas de papel alumínio ficam menos carregadas.

#### • atividade 10

Atrite novamente o bastão com papel e eletrize por contato a bola de papel alumínio do eletroscópio. Afaste o bastão e em seguida o aproxime novamente da bola do eletroscópio, sem que haja contato direto. Você pode notar que a força de repulsão entre as folhas aumenta quando o bastão é aproximado e diminui quando ele é afastado. Isso mostra

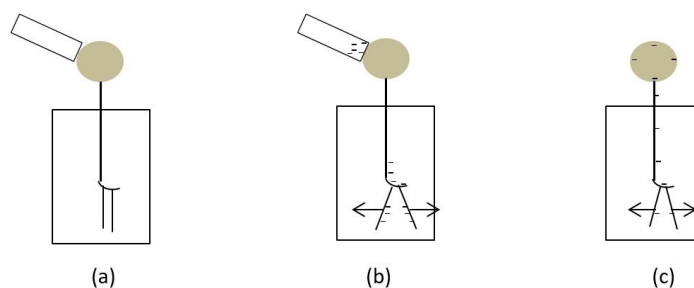


Figura 4.18: Esquema de um eletroscópio (a) neutro; (b) em contato com um objeto eletrizado negativamente e (c) eletrizado após o contato.

que o bastão e eletroscópio estão eletrizados com cargas de mesmo sinal. O processo está esquematizado na fig.4.19.

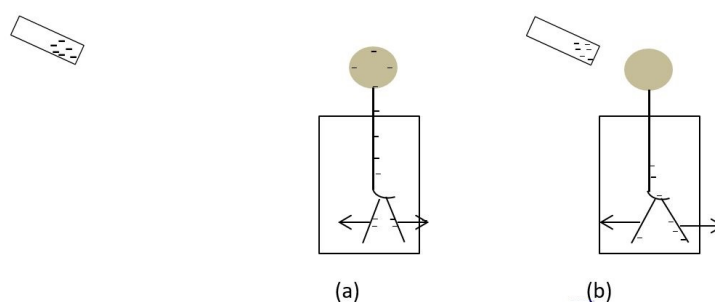


Figura 4.19: (a) Eletroscópio eletrizado negativamente com o bastão distante dele; (b) o bastão negativo próximo do eletroscópio provoca um maior afastamento das folhas.

### • atividade 11

Atrite o bastão com papel e ele fica negativo. O eletroscópio fica polarizado quando o bastão é aproximado dele, sem que haja contato entre ambos como mostra a fig.4.20(a). Mantendo o bastão e o eletroscópio próximos, encoste o dedo na bola de papel alumínio do eletroscópio. Você verá que as tiras se juntam, como se não houvesse carga no sistema como na fig.4.20(b). Em seguida, nesta ordem, afaste o dedo e depois o bastão. O eletroscópio ficará eletrizado por indução com carga de sinal diferente da do bastão, como representado na fig.4.20(c).

### • atividade 12

Atrite novamente o bastão com papel e o aproxime do eletroscópio eletrizado por indução. Você pode observar que a força de repulsão entre as folhas diminui e elas tendem a se aproximar, o que mostra que bastão e eletroscópio estão eletrizados com cargas de sinais diferentes. Na ausência do bastão, encoste o dedo no eletroscópio eletrizado e você pode observar que ele se descarrega devido ao aterramento.

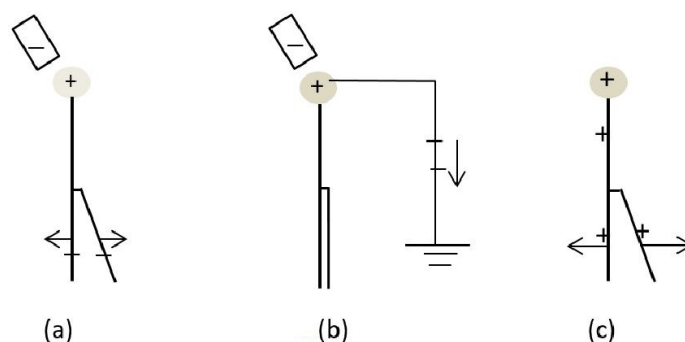


Figura 4.20: Esquema de um eletroscópio (a) polarizado, (b) perdendo elétrons por aterramento e (c) eletrizado por indução.

### • atividade 13

Segure diferentes materiais e os encoste em um eletroscópio eletrizado. Você vai observar que alguns fazem com que ele se descarregue e outros não. Os do primeiro grupo são os condutores e os do segundo, os isolantes. Você pode verificar que são condutores: corpo humano, metais, madeira, algodão, acrílico, rolha, alguns tipos de vidro, alguns tipos de papel. Se você aproximar uma chama de fogo do eletroscópio, verá que ele também se descarrega, pois o fogo é um plasma e também é condutor. São isolantes: plástico, PVC, seda, náilon, lã, isopor, fio de cabelo, óleo de soja, pó de café. Tente descobrir outros materiais condutores e outros isolantes.

### • descobrindo o sinal da carga de um corpo eletrizado

Elétrons escapam de um metal quando nele incide radiação ultravioleta. Este fenômeno é chamado efeito fotoelétrico. Para determinar o sinal da carga de um bastão de PVC atritado com papel, podemos eletrizar um eletroscópio por contato com o bastão. Observamos que o eletroscópio se descarrega quando iluminado por radiação ultravioleta. Assim, concluímos que o bastão atritado com papel fica carregado negativamente. O experimento pode ser repetido com o eletroscópio carregado por indução pelo mesmo bastão eletrizado por atrito com papel. Neste caso, observamos que o eletroscópio não se descarrega com a radiação ultravioleta e, portanto, está positivo. Como foi eletrizado por indução, concluímos que o bastão estava negativo. Caso você queira fazer este experimento, proteja seus olhos com óculos especiais que bloqueiam radiação ultra violeta.

### • exercícios

1. Um corpo é atritado a outro e fica com carga positiva. Isso é equivalente a dizer que o corpo perdeu todos os seus elétrons?
2. De acordo com a série triboelétrica, qual o sinal da carga das bexigas da atividade 1 atritadas com náilon?



3. Faça um desenho ilustrando as etapas do processo de eletrização por contato de um condutor neutro com um bastão positivo.
4. Faça um desenho com cargas ilustrando porque um canudinho eletrizado atrai o disco de papel alumínio neutro de um pêndulo elétrico.
5. É possível eletrizar por indução um corpo isolante?
6. Explique porque na atividade 10, as tiras de papel alumínio estão mais afastadas quando o bastão está mais perto da bola de papel alumínio.
7. Faça um desenho ilustrativo para explicar o comportamento do eletroscópio na atividade 12.
8. Descreva algum experimento que mostra a existência de dois tipos de carga.
9. Faça desenhos ilustrando todas as etapas dos processos de eletrização de um corpo a) por atrito; b) por contato e c) por indução.



# Capítulo 5

## densidades de carga

### • introdução

As cargas elétricas existentes em qualquer corpo material encontrado na natureza, seja ele um átomo ou um bastão eletrizado por atrito, encontram-se distribuídas nele de modo não uniforme.

No caso de um átomo, por exemplo, as cargas positivas estão concentradas no núcleo, enquanto que as negativas ocupam a região exterior, denominada eletrosfera. Dentro do próprio núcleo, as cargas elétricas ocupam, principalmente, as regiões onde estão os prótons, mas existem também no interior dos nêutrons. O estudo experimental das distribuições de cargas elétricas pelo interior de átomos, núcleos e sistemas menores, tais como prótons e nêutrons, tem sido feito desde o início do século passado e constitui, ainda hoje, uma das mais importantes fontes de informação acerca da estrutura interna destes sistemas.

Corpos macroscópicos são constituídos por núcleos e elétrons, que possuem cargas elétricas positivas e negativas. Em geral, os corpos à nossa volta são eletricamente neutros, pois contêm quantidades iguais de cargas positivas e negativas. Entretanto, existem processos, tal como o atrito, por exemplo, que transferem elétrons de um corpo para outro. Quando isto acontece, é costume dizer que os corpos ficam carregados eletricamente. Ao afirmarmos que um dado corpo está carregado positivamente, queremos dizer, de fato, que este corpo tem mais cargas positivas do que negativas. Ou seja, dizer que um corpo macroscópico tem carga positiva é um modo abreviado de dizer que ele tem um *excesso* de cargas positivas.

No caso de objetos tais como os bastões eletrizados e eletroscópios, vistos na aula anterior, o modo como as cargas elétricas fornecidas a eles ficam distribuídos depende de eles serem condutores ou isolantes. Em condutores, as cargas podem se mover com grande facilidade e tendem, por isso, a se distribuir pela superfície do corpo. Em dielétricos, por

outro lado, as cargas têm dificuldade em se deslocar, tendendo a permanecer na região do corpo onde foram colocadas, independente de esta estar em seu interior ou em sua superfície. Para conhecer de forma precisa como cargas estão distribuídas em corpos, sejam eles microscópicos ou macroscópicos, utilizamos o conceito de densidade de carga, que expressa a quantidade de carga  $dq$  contida em um pedacinho infinitesimal deste corpo. As densidades de carga podem ser *volumétricas*, *superficiais*, quando uma das dimensões do corpo é muito menor do que as outras duas, ou *lineares*, quando uma das suas dimensões é muito maior do que as outras duas.

Estes tipos de densidade são totalmente análogos aos usados em outras áreas. Existem, por exemplo, densidades de massa. Um prego jogado na água afunda porque ele é mais denso do que a água. Um balão cheio de gás hélio tende a subir porque este gás é menos denso do que o ar. No nosso corpo, as densidades dos músculos e dos ossos são diferentes. Quando envelhecemos, os ossos tendem a ficar menos densos e mais sujeitos a fraturas. Em todos estes casos, as densidades referem-se a massas distribuídas por volumes e podem ser medidas em  $\text{kg}/\text{m}^3$ . Uma folha de papel, apesar de ter três dimensões, é normalmente pensada como sendo bidimensional, pois uma das dimensões é muito menor do que as outras duas. Neste caso, é conveniente descrever a sua distribuição de massa por meio de uma densidade superficial, que pode ser expressa em  $\text{kg}/\text{m}^2$ . O mesmo se aplica às chapas metálicas usadas em aviões. Densidades superficiais são importantes, também, em geografia e economia. Atualmente, vivem no Brasil mais de 200 milhões de pessoas, que não estão distribuídas uniformemente sobre o território do país e que possuem rendas muito diferentes. Por isso, para quantificar estas distribuições, são usadas densidades superficiais de população e de renda, expressas em habitantes/ $\text{km}^2$  e  $\text{R}\$/\text{km}^2$ . Os cabos metálicos usados para conduzir eletricidade pelas ruas também são corpos tridimensionais mas, como uma das dimensões é muito maior do que as demais, para descrever as suas distribuições de massa, é conveniente empregar densidades lineares, que podem ser expressas em  $\text{kg}/\text{m}$ .

No caso de distribuições de carga, densidades volumétricas, superficiais e lineares podem corresponder a situações físicas reais. Por exemplo, um fio de cabelo carregado corresponde a uma distribuição linear, uma folha de plástico eletrizada pode ser tratada como uma distribuição superficial e uma nuvem de chuva é uma distribuição volumétrica de carga. Em alguns casos, como no do bastão eletrizado discutido na aula 4, corpos com volume podem ser portadores de distribuições superficiais de carga.

### • densidades lineares de carga

Consideramos, inicialmente, uma situação idealizada, onde um fio de cabelo de 10 cm de comprimento é atritado a um pedaço de plástico, ficando carregado eletricamente. Se desejarmos saber o que aconteceu com o fio, podemos medir a carga elétrica total contida nele e obter, por exemplo, 491 uc, onde uc indica uma unidade arbitrária de carga. Este dado nos fornece alguma informação sobre o fio, mas não nos permite saber se a carga está mais concentrada do lado da raiz do cabelo ou no outro extremo. Para obter mais informação, podemos dividir o fio em dois pedaços iguais, medir a carga em cada metade

e obter, por exemplo, os resultados mostrados na tabela 5.1. Para conhecer melhor o sistema, poder-se-ia dividir o fio de cabelo em 10 pedaços iguais e obter os resultados da tabela 5.2.

pedaço →	1	2
carga (em uc)	250	241

Tabela 5.1: Resultados para um fio dividido em duas partes iguais.

pedaço →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
carga (em uc)	12	29	53	77	79	95	64	47	28	7

Tabela 5.2: Resultados para um fio dividido em dez partes iguais.

Neste tipo de processo, é evidente que, quanto maior for o número de pedaços iguais em que o fio for dividido, tanto melhor será o conhecimento que teremos dele, desde que consigamos trabalhar com tabelas gigantescas. No limite em que tivermos um número muito grande de pedaços, correspondentemente pequenos, é conveniente descrever a distribuição de carga por meio de uma *densidade linear*. Ela costuma ser representada por  $\lambda$  e corresponde, como o nome indica, à quantidade de carga por unidade de comprimento do corpo, pensado como sendo unidimensional. Formalmente, a densidade linear é definida por

$$\lambda = \frac{dq}{d\ell}, \quad (5.1)$$

onde  $dq$  é a quantidade de carga contida no comprimento  $d\ell$  do corpo, expressa em C/m. A densidade  $\lambda$  é uma função escalar que ela pode assumir diferentes valores em diferentes pontos do corpo.

Para fixar ideias, consideramos o caso de um fio de cobre neutro, tocado no seu ponto central por uma pequena esfera metálica carregada negativamente e descrevemos, de modo qualitativo, as distribuições de carga antes e depois de ele ser tocado pela esfera metálica. Ao aproximarmos a esfera carregada da região central do fio, ocorre a indução de cargas, ficando seu centro carregado positivamente e as suas extremidades, negativamente. Assim, a densidade linear de cargas assume diferentes valores em diferentes pontos do fio, sendo negativa na extremidade esquerda, positiva no centro e novamente negativa na extremidade direita, como indica a fig.5.1(a). Quando a esfera toca o fio, parte da sua carga é transferida para ele. O excesso de carga negativa redistribui-se num intervalo de tempo muito pequeno e a repulsão eletrostática faz com que ele se concentre predominantemente nas pontas do fio, como mostra a fig.5.1(b).

## • exemplo 1

Calculamos a carga total de uma barra dielétrica estreita, de comprimento  $L$ , carregada com uma densidade linear de carga dada por  $\lambda = \alpha (1 - 3x/L)$ , sendo  $\alpha$  uma constante positiva e  $x$  a distância medida a partir da sua extremidade esquerda, como mostra a fig.5.2(a). No extremo esquerdo, que corresponde a  $x = 0$ , a densidade vale  $\lambda = \alpha$  e é

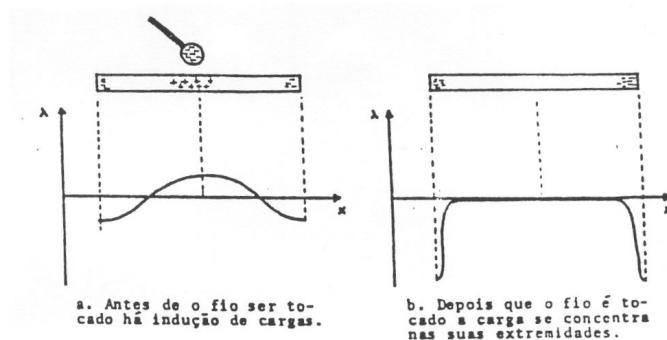


Figura 5.1: Densidade linear de cargas num fio de cobre: (a) antes de a esfera tocar o fio, há indução de cargas; (b) depois de a esfera tocar o fio, as cargas se concentram nas suas extremidades.

positiva, no extremo oposto, no ponto  $x = L$ ,  $\lambda = -2\alpha$  ela é negativa e, em  $x = L/3$ ,  $\lambda = 0$ . Como a variação de densidade com a distância é linear, podemos esperar que a carga total dessa barra seja negativa.

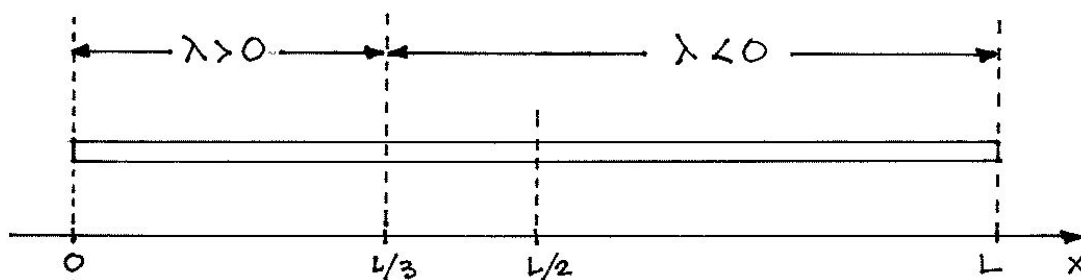


Figura 5.2: Representações das cargas da barra em função de  $x$ : (a) pictórica, onde a intensidade do sobreado sugere a quantidade de cargas; (b) gráfica.

A quantidade de carga contida num pedacinho de barra de comprimento  $dx$  é dada por

$$dq = \lambda dx \quad (5.2)$$

que, neste exemplo, tem a forma

$$dq = \alpha \left( 1 - \frac{3x}{L} \right) dx. \quad (5.3)$$

Esta expressão indica que a quantidade de carga em cada pedacinho depende da sua posição na barra. A carga total contida na barra é dada pela soma das contribuições de todos os elementos e vale

$$q = \int_{\text{barra}} dq = \int_0^L dx \alpha \left( 1 - \frac{3x}{L} \right) = -\frac{\alpha L}{2}. \quad (5.4)$$

Neste exemplo, podemos ainda nos perguntar os valores das cargas  $q_E$  e  $q_D$ , contidas nos lados esquerdo (E) e direito (D) da barra. Eles são dados por

$$q_E = \int_{(E)} dq = \int_0^{L/2} dx \alpha \left(1 - \frac{3x}{L}\right) = \frac{\alpha L}{8}, \quad (5.5)$$

$$q_D = \int_{(D)} dq = \int_{L/2}^L dx \alpha \left(1 - \frac{3x}{L}\right) = -\frac{5\alpha L}{8} \quad (5.6)$$

e, como esperado,  $q_E + q_D = -\alpha L/2$ . É importante notar que, neste tipo de cálculo, a informação acerca do trecho da barra considerado aparece nos extremos de integração já que, em todos os casos, o integrando é o mesmo. Isto também acontece quando pensamos em determinar os valores de  $q_+$  e  $q_-$ , as quantidades totais de carga positiva e negativa na barra. Nesse caso temos

$$q_+ = \int_{(+)} dq = \int_0^{L/3} dx \alpha \left(1 - \frac{3x}{L}\right) = \frac{\alpha L}{6}, \quad (5.7)$$

$$q_- = \int_{(-)} dq = \int_{L/3}^L dx \alpha \left(1 - \frac{3x}{L}\right) = -\frac{2\alpha L}{3} \quad (5.8)$$

e, novamente,  $q_+ + q_- = -\alpha L/2$ .

## • exemplo 2

Uma barra de material dielétrico, muito fina, em forma de uma anel de raio  $R$ , está carregada com uma densidade linear de carga  $\lambda = \alpha \cos\theta$ , onde  $\alpha$  é uma constante positiva e  $\theta$  é o ângulo medido em relação ao eixo  $x$ , como na fig.5.3. O gráfico da densidade de carga, mostrado na fig.5.3(b), indica que as cargas são positivas no trecho BAD e negativas no trecho BCD, sendo máximas, em módulo, nos pontos A e C. Neste exemplo, desejamos calcular as cargas contidas nos quatro quadrantes do anel.

Um elemento do anel tem comprimento  $R d\theta$  e a carga contida nele vale<sup>1</sup>

$$dq = \lambda R d\theta = \alpha \cos\theta R d\theta \quad (5.9)$$

e depende da porção do anel considerada. A carga total contida no trecho AB do anel é dada por

$$q_{AB} = \int_{AB} dq = \int_0^{\pi/2} d\theta R \alpha \cos\theta = \alpha R. \quad (5.10)$$

---

<sup>1</sup>Ver apêndice D para sistemas de coordenadas.

Figura 5.3: Representações das cargas da barra em função de  $\theta$ : (a) pictórica, onde a intensidade do sobreado sugere a quantidade de cargas; (b) gráfica.

As cargas nos demais trechos são calculadas de modo totalmente análogo e valem

$$q_{BC} = \int_{BC} dq = \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta R \alpha \cos\theta = -\alpha R, \quad (5.11)$$

$$q_{CD} = \int_{CD} dq = \int_{\pi}^{3\pi/2} d\theta R \alpha \cos\theta = -\alpha R. \quad (5.12)$$

$$q_{DA} = \int_{AB} dq = \int_{3\pi/2}^{2\pi} d\theta R \alpha \cos\theta = \alpha R. \quad (5.13)$$

Neste exemplo, também, a informação acerca do trecho do anel considerado é incorporada nos extremos de integração. Como esperado, a carga total  $q = q_{AB} + q_{BC} + q_{CD} + q_{DA}$  é nula.

### • densidades superficiais de carga

Uma distribuição superficial de carga pode ser obtida esfregando-se uma folha de plástico sobre uma mesa de fórmica. Neste processo, existirão excessos de cargas distribuídas sobre as superfícies da folha e da mesa. Para descrever as distribuições de carga resultantes podemos, como no caso unidimensional, empregar tabelas. Por exemplo, se a folha de plástico fosse retangular e tivesse 10 cm por 20 cm, poderíamos dividi-la em 50 pedaços iguais de 4 cm<sup>2</sup>, medir a carga de cada um deles e, em seguida, colocar os resultados numa tabela como a mostrada abaixo:

	coluna →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
linha 1	carga (em uc)	0	3	3	7	9	5	4	2	0	0
linha 2	carga (em uc)	1	9	13	27	19	19	16	5	7	2
linha 3	carga (em uc)	3	11	23	37	59	43	34	12	0	7
linha 4	carga (em uc)	4	13	13	27	49	25	14	11	5	1
linha 5	carga (em uc)	1	2	5	6	5	5	4	2	2	1

Como no caso unidimensional, uma descrição mais precisa poderia ser obtida, dividindo



a folha de plástico em pedaços menores. No limite em que esses pedaços fiquem muito pequenos, podemos pensar numa densidade superficial de carga. Para definir a densidade superficial de carga num ponto P de uma superfície, denotamos por  $dS$  um elemento dessa superfície contendo o ponto P e por  $dq$  a quantidade de carga localizada em  $dS$ , como mostra a figura 5.4. A densidade superficial de cargas no ponto P, geralmente representada por  $\sigma$ , é definida por

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad (5.14)$$

e, portanto, expressa em C/m<sup>2</sup>.

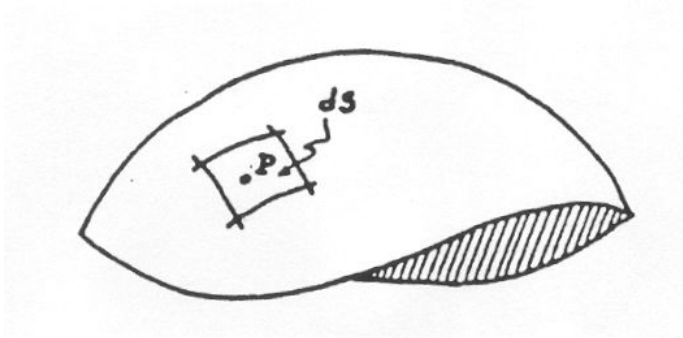


Figura 5.4: O elemento de superfície  $dS$ , em torno do ponto P, contém a carga  $dq = \sigma dS$ .

### • exemplo 3

A placa retangular de material dielétrico e lados  $a$  e  $b$ , mostrada na fig.5.5, está carregada com uma densidade superficial de carga  $\sigma = \alpha (1 + x/a)$ , sendo  $\alpha$  uma constante positiva. Calculamos a carga total contida na placa.

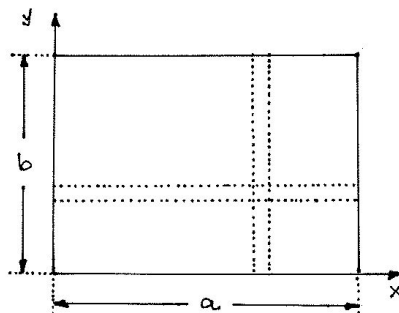


Figura 5.5: Representações das cargas da placa retangular em função de  $x$  e  $y$ : (a) pictórica, onde a intensidade do sobreado sugere a quantidade de cargas; (b) gráfica.

A distribuição de cargas descrita pela função  $\sigma$  é sempre positiva, independente de  $y$  e aumenta da esquerda para a direita, como sugere o sombreamento da fig.5.5(a). A carga contida em um elemento de área de lados  $dx$  e  $dy$  é dada por

$$dq = \sigma dx dy = \alpha \left(1 + \frac{x}{a}\right) dx dy \quad (5.15)$$

e depende de onde este elemento está localizado, como mostra a fig.5.5(b). No caso de uma distribuição bidimensional, a carga total  $q$  da placa pode ser escrita de dois modos alternativos e equivalentes,

$$q = \int_{\text{placa}} dq = \int_0^b dy \int_0^a dx \sigma \quad (5.16)$$

ou

$$q = \int_{\text{placa}} dq = \int_0^a dx \int_0^b dy \sigma, \quad (5.17)$$

que dependem da ordem em que as integrações são feitas. Em ambas as representações, a informação sobre a forma da placa aparece nos extremos de integração. No caso da eq.(5.16), efetuando a primeira integral, obtemos

$$q = \int_0^b dy \int_0^a dx \alpha \left(1 + \frac{x}{a}\right) = \int_0^b dy \left[\frac{3\alpha}{2}a\right]. \quad (5.18)$$

Nesta situação intermediária, a carga  $q$  é expressa como uma integral em uma dimensão e é importante notar que o fator  $[3\alpha a/2]$  no integrando corresponde à densidade *linear* de carga ao longo de uma fita *vertical* de comprimento  $b$ . A integração em  $y$  fornece a carga total, dada por

$$q = \frac{3\alpha}{2}ab. \quad (5.19)$$

Se a eq. (5.17) houvesse sido escolhida, a primeira integral seria

$$q = \int_0^a dx \int_0^b dy \alpha \left(1 + \frac{x}{a}\right) = \int_0^a dx \left[\alpha \left(1 + \frac{x}{a}\right) b\right]. \quad (5.20)$$

Neste caso, o fator  $[\alpha(1+x/a)b]$ , no integrando da situação intermediária, corresponde à densidade *linear* de carga de uma fita *horizontal* de comprimento  $a$ . A segunda integração fornece, novamente, o resultado (5.19).

#### • exemplo 4

Uma variação do exemplo anterior consiste em cortar a placa em dois pedaços, ao longo de uma das diagonais, e calcular a carga  $q'$ , contida no pedaço mostrado na fig.5.6.

Neste caso, a eq.(5.15) continua válida, mas as eqs.(5.16) e (5.17) precisam ser modificadas para incorporar a informação que as integrações devem ir de um dos lados da placa até o corte. A reta que descreve este corte é determinada pelas equações

$$y = -\frac{b}{a}x + b \leftrightarrow x = -\frac{a}{b}y + a. \quad (5.21)$$

e os equivalentes às eqs. (5.16) e (5.17) são

$$q' = \int_{\text{placa}} dq = \int_0^b dy \int_0^{-(ay/b)+a} dx \alpha \left(1 + \frac{x}{a}\right) = \int_0^b dy \alpha \left[\frac{ay^2}{b^2} - \frac{2ay}{b} + \frac{3a}{2}\right] \quad (5.22)$$

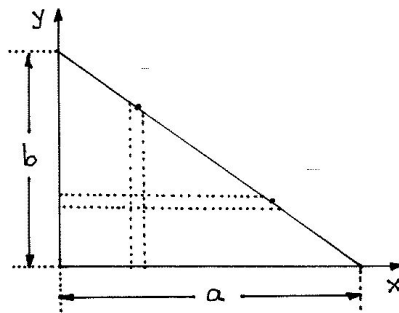


Figura 5.6: Representação da placa triangular, em função de  $x$  e  $y$ .

e

$$q' = \int_{\text{placa}} dq = \int_0^a dx \int_0^{-(bx/a)+b} dy \alpha \left(1 + \frac{x}{a}\right) = \int_0^a dx \alpha \left[-\frac{bx^2}{a^2} + b\right]. \quad (5.23)$$

Em ambos os casos, a integração fornece

$$q' = \frac{2\alpha}{3} ab. \quad (5.24)$$

### • exemplo 5

Uma placa de material dielétrico, plana, circular, de raio  $R$ , mostrada na fig. 5.7, está carregada com a densidade de carga  $\sigma = \alpha(1 - 2r/R)$ , onde  $\alpha$  é uma constante positiva e  $r$  é a distância medida a partir do centro. A densidade é nula para  $r = R/2$ , positiva para  $r < R/2$  e negativa para  $r > R/2$ , como sugere a 5.7(a), podemos esperar que a carga total desse sistema seja negativa.

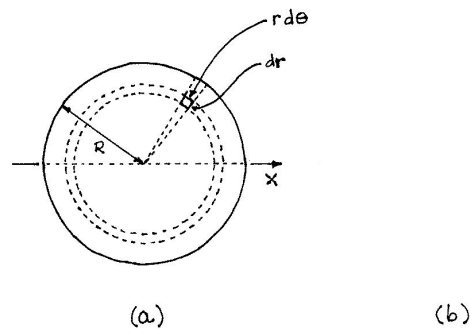


Figura 5.7: Representações das cargas da placa circular em função de  $r$  e  $\theta$ : (a) pictórica, onde a intensidade do sobreado sugere a quantidade de cargas; (b) gráfica.

Em coordenadas polares planas, a carga contida num elemento de área de lados  $dr$  e  $rd\theta$  é dada por

$$dq = \sigma r dr d\theta = \alpha \left(1 - \frac{2r}{R}\right) r dr d\theta \quad (5.25)$$

e varia sobre o disco. Ainda que a fig.5.7(b) mostre áreas iguais sob a curva, o elemento de área  $r dr d\theta$  da placa crescem com  $r$  e, por esta razão, a carga resultante é negativa. Esta carga total é calculada por meio de uma integral dupla, que pode ser feita de dois modos alternativos

$$q = \int_{\text{disco}} dq = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \alpha r \left(1 - \frac{2r}{R}\right) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr \alpha r \left(1 - \frac{2r}{R}\right). \quad (5.26)$$

Se efetuarmos inicialmente a integral em  $\theta$ , obtemos

$$q = \int_0^R dr \left[ 2\pi \alpha r \left(1 - \frac{2r}{R}\right) \right] \quad (5.27)$$

e o integrando remanescente representa a carga contida em um anel de espessura  $dr$ , situado à distância  $r$  do centro, como mostra a fig.5.7(a). Se começarmos pela integração em  $r$ , escrevemos

$$q = \int_0^{2\pi} d\theta \left( -\frac{\alpha R^2}{6} \right) \quad (5.28)$$

e o integrando representa a carga contida em um setor angular, como um pedaço de pizza com abertura  $d\theta$ . Ambos os casos correspondem à carga total

$$q = -\frac{\pi \alpha R^2}{3}. \quad (5.29)$$

Poderíamos, também, estar interessados em saber a quantidade de carga contida em regiões específicas do disco. Por exemplo, se desejarmos determinar a carga  $q'$  contida na região  $r > R/2$ , devemos calcular

$$q' = \int_{R/2}^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \alpha r \left(1 - \frac{2r}{R}\right) = -\frac{5\pi\alpha}{12} R^2. \quad (5.30)$$

Neste exemplo, também, a informação sobre a parte do disco a ser considerada em cada caso é incorporada nos extremos da integração.

## • exemplo 6

Para enfatizar o papel da forma do corpo na sua carga total, consideramos a mesma densidade de cargas  $\sigma = \alpha(1 - 2r/R)$  do exemplo anterior distribuída, agora, sobre o disco truncado mostrado na fig.5.8.

Neste caso, a carga total é expressa por

$$q' = \int_0^{R/2} dr \int_0^\phi d\theta \alpha r \left(1 - \frac{2r}{R}\right) + \int_0^R dr \int_\phi^{2\pi} d\theta \alpha r \left(1 - \frac{2r}{R}\right). \quad (5.31)$$

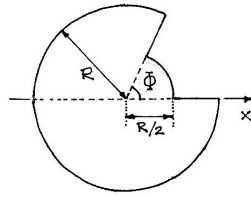


Figura 5.8: Representações das cargas da placa circular truncada em função de  $r$  e  $\theta$ : pictórica, onde a intensidade do sobreado sugere a quantidade de cargas.

Comparando este resultado com a eq.(6.18), notamos que ambas têm o mesmo integrando, mas diferem quanto aos extremos de integração. Efetuando os cálculos, encontramos

$$q' = \left[ \frac{\alpha\phi}{24} R^2 \right] + \left[ \frac{\alpha(2\pi - \phi)}{6} R^2 \right] = \alpha R^2 \left[ -\frac{\pi}{3} + \frac{5\phi}{24} \right]. \quad (5.32)$$

### • exemplo 7

Considere uma placa dielétrica plana, circular, de raio  $R$ , carregada com densidade de carga  $\sigma = \alpha (1 - 3r^2/R^2) \cos^2\theta$ , onde  $\alpha$  é uma constante positiva,  $r$  é a distância ao centro e  $\theta$  é o ângulo medido em relação ao eixo  $x$ . A intensidade desta distribuição é indicada na fig.5.9.

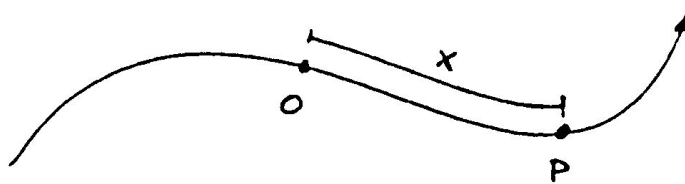


Figura 5.9: Representações pictórica das cargas da placa circular, em função de  $r$  e  $\theta$ .

Formalmente, escrevemos

$$q = \int_{\text{placa}} dq = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \alpha r \left( 1 - \frac{3r^2}{R^2} \right) \cos^2\theta. \quad (5.33)$$

A integral angular é efetuada usando a relação  $\cos^2\theta = [1 + \cos(2\theta)]/2$  e obtemos

$$q = -\frac{\alpha \pi R^2}{4}. \quad (5.34)$$

### • exemplo 8

Uma superfície  $S$  é obtida pelo corte de uma esfera de raio  $R$  e com centro na origem, pelo plano  $z = a$ , como mostra a fig.5.10. Esta superfície é dielétrica e está carregada com densidade  $\sigma = \alpha \cos\theta$ , onde  $\alpha$  é uma constante positiva e  $\theta$  é o ângulo medido a partir do eixo  $z$ . Desejamos determinar a carga total contida na superfície  $S$ .

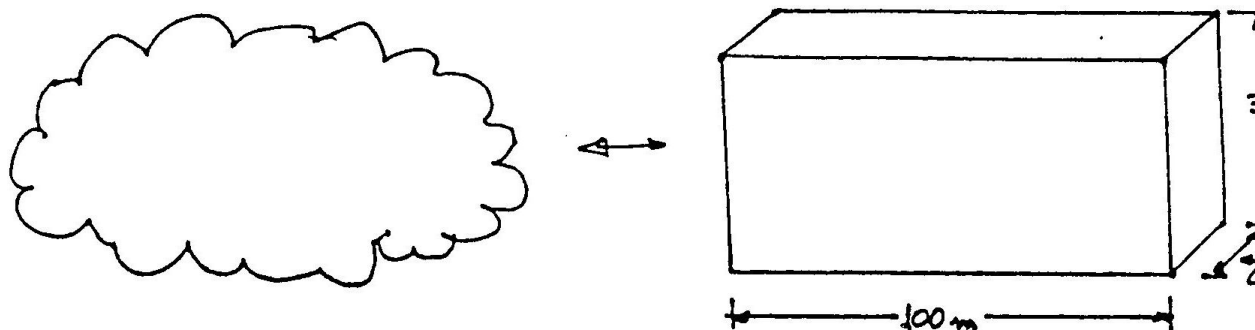


Figura 5.10: Representações pictóricas das cargas na superfície da calota esférica, em função de  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$ .

Em coordenadas polares, um elemento de área de uma esfera de raio  $R$  é dado por  $dS = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$  e a carga contida nesse elemento é dada por

$$dq = \sigma R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \alpha \cos\theta R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \quad (5.35)$$

e varia à medida que nos afastamos do ponto  $P$ . A carga total contida na superfície é calculada por meio de uma integral dupla, que pode ser escrita como

$$q = \int_{\text{superfície}} dq = \int_0^{\theta_{\max}} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \alpha R^2 \cos\theta \sin\theta, \quad (5.36)$$

onde  $\theta_{\max}$  é o valor de  $\theta$  na borda da superfície, determinado por  $\cos\theta_{\max} = a/R$ . Efetuando as integrações, obtemos

$$q = \int_0^{\theta_{\max}} d\theta \, 2\pi \alpha R^2 \cos\theta \sin\theta = \pi \alpha R^2 [1 - \cos^2\theta_{\max}] = \pi \alpha R^2 \left[1 - \frac{a^2}{R^2}\right]. \quad (5.37)$$

Neste exemplo, também, a informação sobre a parte da superfície a ser considerada é incorporada nos extremos da integração.

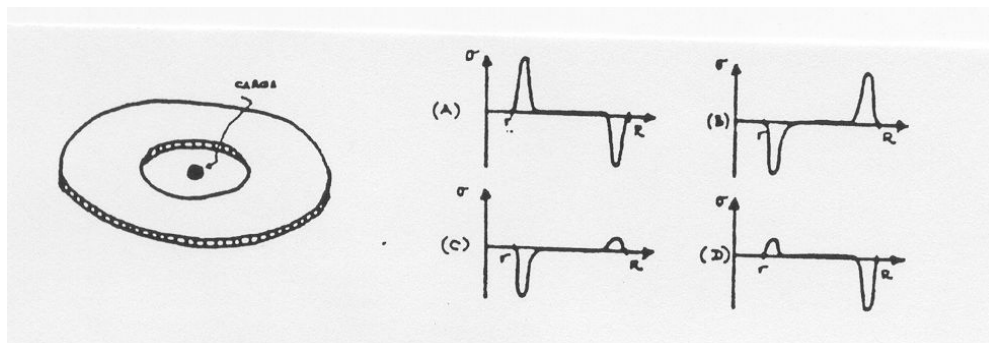
## • sistemas de coordenadas, o mundo e as representações do mundo

Para descrever matematicamente tanto as distribuições de carga como os seus efeitos, é comum utilizarmos vários tipos diferentes de sistemas de coordenadas: cartesiano, polar, cilíndrico e esférico. No apêndice D, apresentamos em seguida as principais características de cada um desses sistemas. Eles serão muito usados durante o curso e, por isso, é muito importante que você tenha familiaridade com eles.

Coordenadas servem para descrever o mundo mas não são o mundo. Um lobo conhece o mundo. Ele sabe como se alimentar, como procriar, como sobreviver. É por isso que a espécie dos lobos existe há tanto tempo. O mesmo vale para passarinhos e peixes... Os seres humanos também conhecem o mundo e, parte desse conhecimento, é semelhante ao dos lobos, passarinhos e peixes. Uma outra parte, entretanto, é bastante diferente, pois é fortemente baseada no emprego de linguagens complexas. A linguagem brasileira escrita é o que permite que você compreenda esse texto. No caso da física, o conhecimento do mundo material também é baseado no uso de linguagens, que são bastante específicas, diferentes da linguagem falada. Há bastante tempo, os físicos compreenderam que as linguagens da física, como todas as demais, possuem muitos elementos arbitrários. Se, por um lado, a linguagem permite o conhecimento do mundo, por outro, ela é uma invenção humana e, portanto, não é parte do mundo material. Em muitos casos, a descrição de sistemas físicos é feita com auxílio de elementos arbitrários, mas não pode depender da escolha desses elementos. O caso dos sistemas de coordenadas é um bom exemplo desse tipo de situação, já que a descrição de entidades físicas não pode depender da escolha da origem, da orientação dos eixos e do tipo de sistema adotados. Essas escolhas são apenas questão de conveniência.

## • exercícios:

1. a) Num ponto de ônibus existe uma fila com 25 pessoas. Neste caso, é possível pensar em uma densidade linear de massa ao longo da fila? Ou em densidade de dinheiro nas carteiras?  
b) Faz sentido tentar descrever a distribuição territorial de população do Brasil por meio de uma função  $\sigma$ , análoga à eq.5.14? Neste caso, o que seria equivalente a  $dq$ ?
2. Um anel de raio  $R$  está carregado com densidade de carga  $\lambda \sin\theta \cos(\theta/2)$ . a) é possível saber se a substância da qual o anel é feito é condutora ou isolante? b) Qual o valor de sua carga total?
3. Um disco metálico de raio  $R$  tem um orifício central de raio  $r < R$ , no centro do qual é colocada uma carga positiva que não toca a placa. Qual dos diagramas abaixo representa melhor a densidade superficial de carga do disco em função da distância ao centro?
4. No caso do exemplo 4, porque a carga de meia placa  $q'$  é diferente de  $q/2$ , a metade da carga total?



5. Represente a distribuição de cargas sobre um disco circular de raio  $a$ , cuja densidade de cargas, descrita em coordenadas polares, é  $\sigma$ , sendo  $\alpha$  uma constante positiva, para os casos

- $\sigma = \alpha$ , para  $0 < r < a/3$ ,  $\sigma = 0$ , para  $a/3 < r < 2a/3$  e  $\sigma = -\alpha$ , para  $2a/3 < r < a$ .
- $\sigma = \alpha(1 - r/a)$ .
- $\sigma = 0$ , para  $0 < r < a/2$  e  $\sigma = \alpha \cos\theta$ , para  $a/2 < r < a$ .
- $\sigma = 0$ , para  $0 < r < a/2$  e  $\sigma = \alpha(1 - r/a)\cos^2\theta$ , para  $a/2 < r < a$ .

6. No caso do exemplo 5:

- Qual a carga contida na região  $r < R/2$ ?
- Qual o valor  $r_0$  da distância ao centro para o qual toda a carga contida na região  $r < r_0$  é nula?
- Calcule explicitamente a carga total contida na região  $r > r_0$ .

- Calcule a carga  $q''$  da parte da placa *excluída* quando passamos da fig.5.7 para a 5.8
- Mostre que  $q' + q'' = q$ .
- Qual o valor de  $\theta_0$  para que a carga total seja nula?

8. Calcule a carga total de uma placa plana, circular, de raio  $R$ , carregada com densidade de carga  $\sigma = \alpha(1 - 3r^2/R^2)\cos\theta$ , sendo  $\alpha$  uma constante positiva,  $r$  a distância ao centro e  $\theta$ , o ângulo medido em relação ao eixo  $x$ .

9. Faça uma análise dimensional dos resultados dados pelas eqs. (5.4), (5.10), (5.19) e (5.37) e verifique se eles estão corretos.

### • respostas

2. b)  $\frac{8\alpha}{3}$ .

6. a)  $\frac{\pi\alpha R^2}{12}$

b)  $r_0 = \frac{3R}{4}$

c)  $q = -\frac{2\pi\alpha}{6}R^2$

7. a)  $q'' = -\alpha R^2 \frac{5\phi}{24}$ .

c)  $\phi = \frac{8\pi}{5}$

8.  $-\frac{\alpha\pi}{4}R^2$



# Capítulo 6

## cargas no átomo de hidrogênio e no núcleo de ouro

### • densidades volumétricas de carga

Em muitos sistemas físicos as cargas elétricas estão distribuídas pelo volume de um corpo material, como no caso de uma nuvem de chuva, de um átomo, de um núcleo atômico ou de um próton.

Como nas distribuições contínuas uni e bidimensionais, discutidas na aula 5, se subdividirmos um corpo, no qual as três dimensões são relevantes, em pedaços muito pequenos de volume  $dV$ , a distribuição de cargas pode ser descrita por meio de uma densidade volumétrica, que costuma ser representada por  $\rho$ . A densidade volumétrica de carga em torno de um ponto P é definida por

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad (6.1)$$

onde  $dV$  é um elemento de volume envolvendo este ponto e  $dq$  é a quantidade de carga contida nesse volume, como representado na fig.6.1.

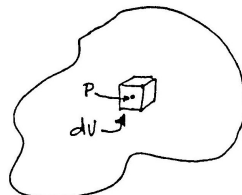


Figura 6.1: O elemento de volume  $dV$ , em torno do ponto P, contém a carga  $dq$ .

• exemplo 1

Cálculo da carga total de um cilindro dielétrico de raio  $a$  e altura  $b$ , cuja densidade volumétrica de cargas, descrita em coordenadas cilíndricas, é  $\rho = \alpha(1 - r/a)$ , sendo  $\alpha$  uma constante positiva.

A distribuição de carga tem simetria cilíndrica, pois depende apenas da distância  $r$  ao eixo do cilindro, caindo linearmente do valor  $\alpha$  no eixo ( $r = 0$ ) até se anular na superfície ( $r = a$ ). Assim, espera-se que a carga total seja positiva, como sugere a fig.6.2.

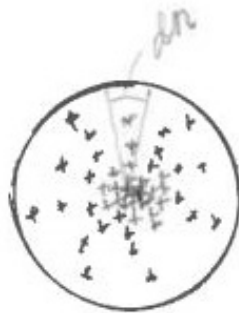


Figura 6.2: Representação da distribuição de cargas em uma seção reta do cilindro.

Em coordenadas cilíndricas, o elemento de volume é dado por  $dr(r d\theta) dz$  e, a carga  $dq$  é

$$dq = \rho r dr d\theta dz = \alpha \left(1 - \frac{r}{a}\right) r dr d\theta dz . \quad (6.2)$$

O valor da carga total no cilindro é a soma das cargas  $dq$  e é calculado pela integral tripla

$$q = \int_{\text{cilindro}} dq = \int_0^b dz \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\theta r \left[ \alpha \left(1 - \frac{r}{a}\right) \right] = \frac{\alpha \pi b a^2}{3} . \quad (6.3)$$

• exemplo 2

Uma esfera dielétrica oca de raio interno  $a$  e externo  $b$  está carregada com densidade volumétrica de carga  $\rho = \alpha (1 - r/b) \cos^2\theta$ , sendo  $\alpha$  uma constante positiva,  $r$  a distância ao centro da esfera e  $\theta$  o ângulo medido em relação ao eixo  $z$ .

Essa distribuição de carga não tem simetria esférica, pois depende de  $\theta$ . O seu valor no interior da esfera é positivo e, ao longo de um dado raio, é maior para  $r = a$ , diminuindo

gradativamente, até se anular na superfície externa. Além disso, o valor da densidade também depende da direção desse raio, sendo nula sobre o plano  $xy$  e máxima ao longo do eixo  $z$ .

O elemento de volume localizado no ponto descrito pelas coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  é escrito como

$$dV = (dr)(rd\theta)(r \sin \theta d\phi), \quad (6.4)$$

corresponde ao produto dos três lados de um cubo infinitesimal e contém a carga

$$dq = \rho (r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi) = \alpha \left(1 - \frac{r}{b}\right) \cos^2 \theta (r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi). \quad (6.5)$$

A carga total é calculada pela integral tripla

$$\begin{aligned} q &= \int_{\text{esfera}} dq = \int_a^b dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta \left[ \alpha \left(1 - \frac{r}{b}\right) \cos^2 \theta \right] \\ &= \alpha \int_a^b dr r^2 \left(1 - \frac{r}{b}\right) \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^2 \theta \int_0^{2\pi} d\phi. \end{aligned} \quad (6.6)$$

A integração em  $\phi$  fornece um fator  $2\pi$ . Para efetuar a integral em  $\theta$ , fazemos  $u = \cos \theta$ , temos

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^2 \theta = - \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi = \frac{2}{3} \quad (6.7)$$

e a carga total vale

$$q = \frac{\alpha \pi b^3}{9} \left(1 - 4 \frac{a^3}{b^3} + 3 \frac{a^4}{b^4}\right). \quad (6.8)$$

## • o átomo de hidrogênio

O átomo de hidrogênio é o mais simples dentre todos, sendo constituído por um elétron e um próton ligados entre si pela atração elétrica. O próton está localizado praticamente no centro do átomo, porque ele tem massa 1840 vezes maior do que a do elétron. Este por sua vez, ocupa predominantemente as regiões externas do átomo.

As propriedades do átomo de hidrogênio são muito bem descritas pela mecânica quântica. Essa teoria afirma que o elétron pode estar ligado ao próton de diversos modos diferentes, correspondendo a diversos estados do átomo. O estado em que o átomo tem *menor energia* é chamado de *estado fundamental* e os demais, de *estados excitados*.

De acordo com a mecânica quântica, a densidade de carga *negativa* do átomo de hidrogênio, no estado fundamental, tem simetria esférica e é dada por

$$\rho^-(r) = -\rho_0^- e^{-(2r/a_0)}, \quad (6.9)$$

onde  $a_0$  é uma constante conhecida como *raio de Bohr*. Apesar do nome, ela não representa a dimensão de nenhum objeto ou corpo. Ela corresponde a uma *escala* e é dada pela seguinte combinação de constantes mais fundamentais

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}, \quad (6.10)$$

sendo  $\epsilon_0$  a permissividade do espaço vazio,  $\hbar$  a constante de Planck,  $e$  a carga do elétron e  $m_e$  a massa do elétron, cujos valores são dados no apêndice A. Seu valor numérico é

$$a_0 = 0,529 \times 10^{-10} \text{ m}. \quad (6.11)$$

A densidade de carga dada pela eq.(6.9) está representada na fig.6.3.

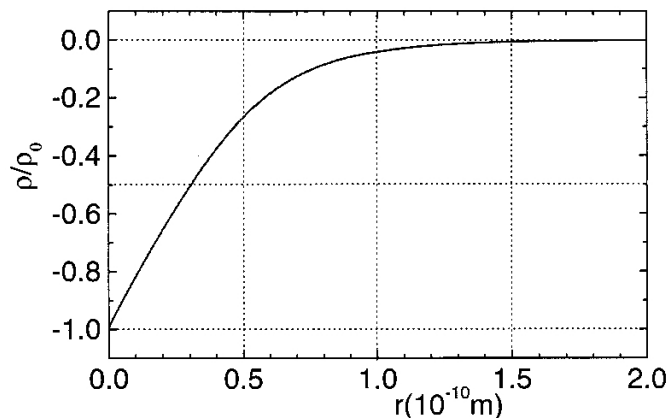


Figura 6.3: Distribuição da carga negativa do estado fundamental do átomo de hidrogênio em função da distância ao seu centro.

Assim, a mecânica quântica fornece a seguinte imagem da distribuição de carga do átomo de hidrogênio no estado fundamental: a carga positiva está praticamente no centro do átomo em uma região de raio da ordem de  $0,8 \times 10^{-15} \text{ m}$ , tamanho aproximado do próton. Em volta dele, há uma distribuição volumétrica de carga negativa com densidade  $\rho_0^-$  na origem, que cai a zero exponencialmente com a distância ao centro do átomo. Essa imagem do átomo pode parecer surpreendente, pois sua carga não está confinada em uma região finita, mas sim, distribuída no espaço. Como conciliar essa imagem com a ideia que o átomo é um pedacinho de matéria, concentrada numa pequena região do espaço? O que acontece é que o átomo *inteiro* está de fato distribuído por todo o espaço, entretanto, uma fração qualquer de sua carga negativa, 99% dela, por exemplo, está concentrada em uma região finita, de dimensões pequenas. Essa região corresponde ao *tamanho efetivo* do átomo. Para justificar estas afirmações, calculamos em seguida a constante  $\rho_0$ , impondo

que a carga total seja  $-e$  e estimamos o raio da esfera que contém 99% da carga negativa do átomo no estado fundamental.

### • cálculo da carga negativa total

A carga total do átomo é dada pela soma das cargas concentradas nos seus diferentes pontos. O valor de  $\rho_0^-$  é determinado lembrando que o cálculo da carga total deve fornecer o valor conhecido  $-e$ , a carga do elétron. A carga contida em um elemento de volume  $dV$  em coordenadas esféricas é dada por

$$dq^- = \rho^- dV = -\rho_0^- e^{-(2r/a_0)} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (6.12)$$

Já a carga total pode ser expressa como

$$q_0^- = -\rho_0 \int_0^\infty dr r^2 e^{-(2r/a_0)} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi. \quad (6.13)$$

Os extremos das integrais são tais que todos os pontos do espaço possam ser varridos. As integrações em  $\phi$  e em  $\theta$  produzem, respectivamente, fatores  $2\pi$  e  $2$ . Assim

$$q_0^- = -4\pi \rho_0^- \int_0^\infty dr r^2 e^{-(2r/a_0)}. \quad (6.14)$$

O resultado da integração em  $r$ , dado pela eq.(3) do apêndice B, permite escrever

$$q_0^- = -4\pi \rho_0^- e^{-(2r/a_0)} \left(-\frac{a_0}{2}\right) \left(r^2 + r a_0 + \frac{a_0^2}{2}\right) \Big|_0^\infty = -\pi \rho_0^- a_0^3. \quad (6.15)$$

Impondo  $q_0^- = -e$ , encontramos

$$\rho_0^- = \frac{e}{\pi a_0^3}. \quad (6.16)$$

### • esfera que contém 99% da carga negativa do átomo

No cálculo da carga negativa total apresentado acima, a variável  $r$  foi integrada de zero a infinito, uma vez que desejávamos varrer o espaço inteiro. A carga contida no interior de uma esfera de raio  $R$  é calculada de modo análogo, sendo que, agora, a variável  $r$  varia entre zero e  $R$ . Assim, essa carga é dada por

$$\begin{aligned} q^-(R) &= -4\pi \rho_0^- e^{-(2r/a_0)} \left(-\frac{a_0}{2}\right) \left(r^2 + r a_0 + \frac{a_0^2}{2}\right) \Big|_0^R \\ &= -4\pi \rho_0^- \left[ \frac{a_0^3}{4} - \frac{a_0}{2} \left( R^2 + R a_0 + \frac{a_0^2}{2} \right) e^{-(2R/a_0)} \right]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Usando as eqs.(6.16) e (6.17), obtemos

$$q^-(R) = -e \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2R}{a_0} + \frac{2R^2}{a_0^2} \right) e^{-(2R/a_0)} \right] \quad (6.18)$$

Essa expressão descreve a carga negativa contida no interior de uma esfera de raio  $R$ . Ela é igual a  $-e$  para  $R \rightarrow \infty$  e menor para outros valores de  $R$ , como esperamos intuitivamente. Para termos uma ideia da distribuição de carga no estado fundamental do átomo de hidrogênio, tabelamos alguns valores do raio da esfera e da carga contida em seu interior:

$R$	$a_0$	$2a_0$	$3a_0$	$4a_0$	$5a_0$	$\infty$
$q^-(R)$	$-0.323 e$	$-0.762 e$	$-0.972 e$	$-0.986 e$	$-0.998 e$	$-e$

Tabela 6.1: Quantidade de carga negativa na esfera de raio  $R$  no estado fundamental do átomo de H.

Essa tabela nos permite ver, por exemplo, que apenas 32,3% da carga negativa do átomo está no interior de uma esfera de raio  $a_0$ . Já no interior de uma esfera de raio  $3a_0$  se encontra 97,2% da carga. A tabela mostra, também, que pouco mais de 1% da carga negativa está fora de uma esfera de raio  $4a_0$ . Assim, o tamanho efetivo do átomo é dado por dimensões da ordem de  $4a_0$ , ou seja,  $2 \times 10^{-10}$  m. O átomo é, ao mesmo tempo, infinito e muito pequeno! A razão  $|q^-(R)/e|$  em função de  $r$  é apresentada na fig.6.4.

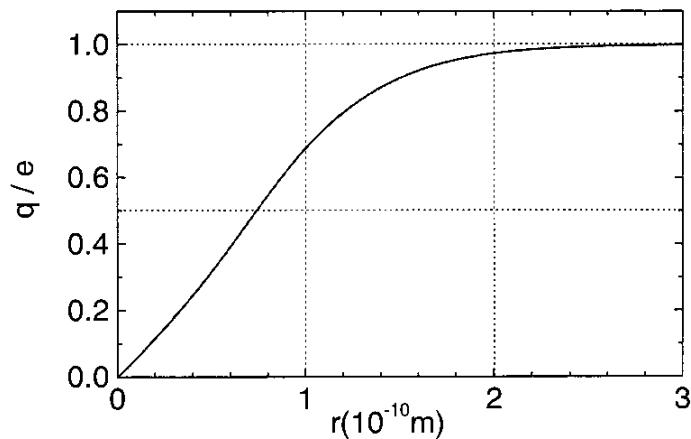


Figura 6.4: A fração da carga negativa do átomo de hidrogênio em função da distância ao seu centro.

## • o núcleo do ouro

As densidades de carga  $\rho(r)$  dos núcleos atômicos começaram a ser determinadas com precisão em experimentos realizados na primeira metade da década de 1950. Os resultados obtidos indicam que a forma da função  $\rho(r)$  depende do número de prótons. Para

núcleos leves, com poucos prótons, essa densidade é mais granular e varia bastante de um núcleo para o outro. Entretanto, à medida que o número de prótons vai aumentando, o comportamento do sistema vai se tornando mais coletivo e começam a aparecer regularidades.

Os resultados das medidas experimentais para o núcleo do ouro (Au), que contém 79 prótons e no isótopo mais abundante, 118 nêutrons<sup>1</sup> correspondem a uma densidade de carga dada por

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R_{1/2})/a}}, \quad (6.19)$$

sendo  $\rho_0 = 0.67 \text{ e/fm}^3$ ,  $a = 0.535 \text{ fm}$  e  $R_{1/2} = 6.41 \text{ fm}$ . A forma dessa densidade é mostrada na fig.6.5 e podemos observar que ela é praticamente constante e igual a  $\rho_0$  para distâncias menores do que 5 fm. A partir daí, a densidade começa a diminuir, sendo praticamente nula para  $r \sim 10 \text{ fm}$ .

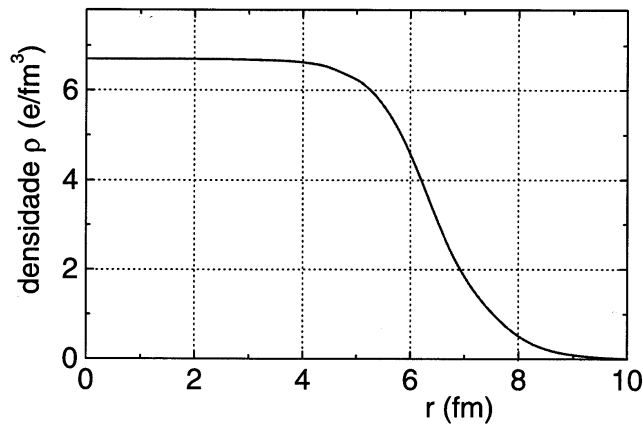


Figura 6.5: Densidade de carga positiva do núcleo de ouro em função da distância ao seu centro.

Medidas efetuadas para outros núcleos grandes produzem resultados parecidos. Foram elas que permitiram a construção da imagem moderna do núcleo atômico, como sendo constituído por um caroço de densidade constante e de uma região superficial, com densidade variável.

Como no caso do átomo de hidrogênio, podemos nos perguntar sobre o valor da carga contida no interior de uma esfera de raio R. A função  $q(R)$  é dada por

$$\begin{aligned} q(R) &= \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, r^2 \sin \theta \left[ \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R_{1/2})/a}} \right] \\ &= 4\pi\rho_0 \int_0^R dr \frac{r^2}{1 + e^{(r-R_{1/2})/a}} \end{aligned} \quad (6.20)$$

<sup>1</sup>Os dados utilizados nesta seção foram adaptados e ligeiramente arredondados a partir dos fornecidos em H. Schechter e C. A. Bertulani, *Introdução à Física Nuclear*, ed. UFRJ, 2007.

Não existe solução analítica para essa integral e, por isso, ela precisa ser efetuada numericamente. O resultado da integração quando  $R \rightarrow \infty$  é igual a 79, consistentemente. A fig.6.6 mostra a dependência em  $r$  da função  $4\pi r^2 \rho(r)$ , que resulta da integração da densidade de carga sobre as variáveis angulares. Ela pode ser entendida como a distribuição radial de cargas deste núcleo, tem um valor máximo em torno de 5,5 fm e indica que praticamente toda a carga está contida numa esfera de raio da ordem de 9 fm.

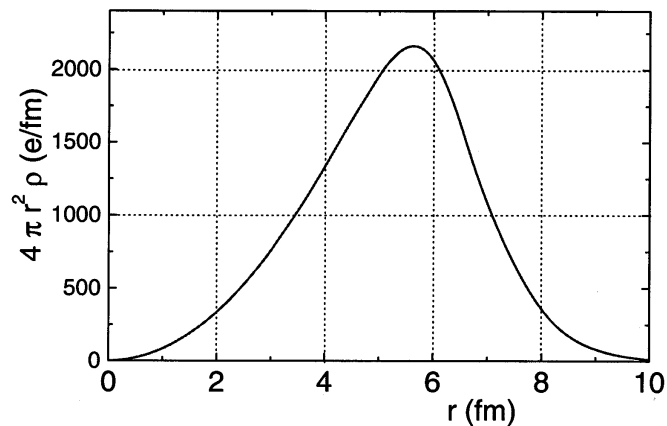


Figura 6.6: Densidade de carga positiva do núcleo de ouro em função da distância ao seu centro.

### • exercícios

1. Para a densidade de carga  $\rho$  dada no exemplo 2, represente por meio de desenhos, como as cargas estão distribuídas nos planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ .
2. Faça a análise dimensional dos resultados dados pelas eqs.(6.3) e (6.7) e verifique se eles estão corretos.
3. Represente, por meio de desenhos nos planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ , como estão distribuídas as cargas sobre um cilindro dielétrico de raio  $a$  e altura  $b$ , cuja densidade volumétrica de cargas, descrita em coordenadas cilíndricas, é  $\rho$ , sendo  $\alpha$  uma constante positiva para os casos
  - a)  $\rho = \alpha (1 - r/a) \cos\theta$ ,
  - b)  $\rho = \alpha (1 - r/a) (1 - r/b)$ .
 c) Determine a carga total das distribuições (a) e (b).
4. Uma esfera dielétrica oca de raio interno  $a$  e externo  $b$  está carregada com densidade volumétrica de cargas dada em coordenadas esféricas por  $\rho = \alpha \sin\theta \sin^2\phi$ , sendo  $\alpha$  uma constante positiva.
  - a) Represente, por meio de desenhos nos planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ , como estão distribuídas as cargas no sistema.
  - b) Determine a carga total.
5. Faça um desenho da distribuição de cargas no átomo de hidrogênio, de acordo com a densidade da eq.(6.9).



6. Faça dois gráficos para o átomo de hidrogênio: um, da densidade de carga negativa em função da distância ao centro do átomo e, outro, da carga contida no interior de uma esfera de raio  $R$ . Interprete a diferença entre os dois gráficos.
7. Qual seria o tamanho do átomo de hidrogênio se a densidade de carga negativa fosse constante e igual a  $\rho_0$  em toda a sua extensão? Compare o resultado com o tamanho efetivo do átomo.
8. Considere a densidade de cargas do núcleo de Au dado pela fig.6.5.
- Determine o número de prótons contidos em uma esfera de raio 5 fm.
  - Supondo que o raio do próton seja  $r_p = 0,8$  fm, qual é a porcentagem do volume da região  $r < 5$  fm efetivamente ocupado pelos prótons?
  - Usando os resultados do item anterior, estime a distância média entre dois prótons na região  $r < 5$  fm.

### • respostas

3. c) (a)  $\rightarrow q = 0$ ;      (b)  $\rightarrow q = \frac{\alpha \pi b a^3}{3} \left[1 - \frac{a}{2b}\right]$ .

4. b)  $q = \frac{\pi a (b^3 - a^3)}{3}$ .

7.

8. a) 35,08;    b) 14%;    c) 2,46 fm.



# Capítulo 7

## carga elétrica e campo de Coulomb

### • a conservação e os dois tipos de carga

A carga elétrica é uma entidade fundamental do eletromagnetismo e, atualmente, várias das suas propriedades são bem conhecidas, especialmente a existência de dois tipos, chamados de positivo e negativo, que explicam as forças de atração e de repulsão. A ideia de carga elétrica e a compreensão das suas propriedades, da maneira que temos hoje, têm uma longa história, que começou na Grécia antiga e foi retomada a partir do século 17. De acordo com alguns autores, Tales de Mileto (624-546 a.C.) foi o primeiro a observar a atração de pedacinhos de palha por âmbar<sup>1</sup> atritado. No entanto, o registro mais antigo relativo a fenômenos de eletrização está no *Diálogo de Timeu* de Platão (428-348 a.C.).

A primeira referência moderna a estudos metódicos de fenômenos eletrostáticos está no livro *De Magnete*, de 1600, escrito pelo médico inglês William Gilbert que mostra, experimentalmente, que vários outros materiais, além do âmbar, atraem objetos leves quando atritados. Um desenvolvimento importante ocorreu cerca de um século depois, em 1720, quando Stephen Gray, pesquisador inglês, ao estudar a eletrização por atrito, propõe o conceito de *virtude elétrica* para explicar as propriedades de corpos eletrizados<sup>[1]</sup>. Em 1735, o químico francês Charles Dufay, em uma carta publicada na revista *Philosophical Transactions of the Royal Society*, resume suas pesquisas e afirma que existem dois tipos de eletricidades, que chama de *vítrea* e *resinosa* e, também, relata que eletricidades do mesmo tipo se repelem e de tipos diferentes se atraem. Dez anos mais tarde, em 1745, o pesquisador francês Jean-Antoine Nollet propõe que os fenômenos elétricos poderiam ser explicados pelo movimento, em direções opostas, de duas correntes de um fluido elétrico que estaria presente em todos os corpos<sup>[2]</sup>.

Um passo importante na direção do entendimento atual da carga elétrica é dado por

---

<sup>1</sup>Âmbar é o nome dado a uma resina fóssil proveniente de árvores, utilizada desde a antiguidade para fazer objeto e ornamentos; em grego, o âmbar amarelo é chamado de *élektron*.

Benjamin Franklin (1706-1790), jornalista, político e estudioso estadunidense, que defende a existência de um único tipo de fluido elétrico. Segundo ele, um corpo com excesso deste fluido está carregado positivamente e, um com falta dele, negativamente. Essas ideias de Franklin, registradas em cartas a outros cientistas<sup>[3]</sup>, levam à explicação para os efeitos elétricos observados nos corpos atritados como excessos ou faltas desse fluido, o que constitui um importante avanço no entendimento dos problemas de eletricidade.

A ideia de um único fluido foi importante por associar a existência de dois tipos de carga à sua conservação, sendo consistente com o fato empírico de que cargas de um tipo têm a capacidade de anular ou neutralizar as de outro tipo. Por exemplo, na eletrização por atrito, dois corpos neutros são transformados em corpos eletricamente carregados, que passam a poder causar e sentir forças elétricas. Por outro lado, essa capacidade desaparece quando esses dois corpos são colocados em contato por algum tempo, pois a carga de um anula a carga do outro e ambos retornam ao estado anterior à eletrização. O entendimento deste problema sofre uma grande transformação quando, poucos anos antes de 1900, o físico inglês J.J. Thomson descobre experimentalmente o elétron, que porta carga negativa e, à época, foi considerado surpreendentemente leve e pequeno. Com isso, a ideia de fluido elétrico passa a ser substituída pela noção de que os processos de eletrização são devidos à migração de partículas com carga negativa, os elétrons, de um corpo para outro.

No eletromagnetismo atual, a *lei da conservação da carga elétrica* é muito importante. Ela afirma não ser possível a produção de uma certa quantidade de carga de um dado sinal sem a produção simultânea de igual quantidade de carga de sinal oposto. Ou, alternativamente, que a soma algébrica das quantidades de carga de um sistema fechado é constante. Essa lei de conservação representa uma das ideias mais fundamentais da física contemporânea, presente tanto no eletromagnetismo clássico, como nas suas versões quântica e relativística. Até hoje, nunca foi observada uma violação dessa lei.

A lei da conservação da carga elétrica define a possibilidade ou impossibilidade de ocorrerem os processos naturais. No estudo de partículas elementares, a carga do elétron costuma ser representada por  $-e$ , sendo  $e$  um número positivo, e as cargas das demais partículas são expressas em unidades de  $e$ . Deste modo, dizemos que elétrons, ( $e^-$ ), píons negativos ( $\pi^-$ ) e antiprótons ( $\bar{p}$ ) têm carga  $-1 e$ , enquanto que pósitrons ( $e^+$ ), píons positivos ( $\pi^+$ ) e prótons ( $p$ ) têm  $+1 e$ . Assim, a carga de um núcleo atômico com  $Z$  prótons é  $+Z e$ . Existem também partículas neutras, tais como o fóton ( $\gamma$ ), o neutrino ( $\nu$ ), o nêutron ( $n$ ) e o pión neutro ( $\pi^0$ ).

Em princípio, podemos considerar muitas reações envolvendo estas partículas, tais como

$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$	$(0 \rightarrow +1 - 1 + 0)$	permitida,
$n \rightarrow p + e^+$	$(0 \rightarrow +1 + 1)$	proibida,
$\gamma + n \rightarrow \pi^- + p$	$(0 + 0 \rightarrow -1 + 1)$	permitida,
$\gamma + p \rightarrow \pi^- + n$	$(0 + 1 \rightarrow -1 + 0)$	proibida,
$\gamma + Z \rightarrow Z + e^+ + e^-$	$(0 + Z \rightarrow Z + 1 - 1)$	permitida,
$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$	$(+1 - 1 \rightarrow 0 + 0)$	permitida.

As reações nas quais há variação da quantidade total de carga entre as situações inicial e final são proibidas e nunca foram observadas experimentalmente. De fato, não se conhece uma única evidência onde haja variação da quantidade de cargas de um sistema fechado, o que nos leva a pensar na lei da conservação da carga como uma lei absoluta.

### • a quantidade de carga elementar

Uma outra propriedade importante das cargas elétricas é a sua quantização. Até o presente, nunca foi observado experimentalmente um corpo ou uma partícula livre que tivesse carga elétrica, em módulo, menor do que  $e$ . Somente conhecemos corpos cujas cargas são múltiplos inteiros de  $e$ . Esses resultados experimentais sugerem que  $e$  é a menor quantidade de carga observável e, por isso, é considerada como a quantidade de *carga elementar*. Assim, a carga elétrica de um corpo qualquer não pode ser infinitamente pequena nem assumir valores arbitrários. Ela somente pode ser igual a um número inteiro de cargas elementares  $e$ . É isso que queremos expressar quando dizemos que a carga elétrica é *quantizada*.

O caráter discreto da carga fica mais evidente em sistemas envolvendo poucas cargas elementares. É esse, por exemplo, o caso dos átomos, nos quais núcleos que diferem por apenas uma unidade de carga, tais como os do nitrogênio e os do oxigênio, correspondem a sistemas com propriedades muito diferentes.

Quando estudamos corpos macroscópicos, mesmo os pequenos como um grão de areia, nos quais as menores dimensões consideradas correspondem a milhares de diâmetros atômicos e o número de partículas envolvidas é enorme, a natureza discreta da carga elétrica, ainda que presente, é difícil de ser percebida diretamente. Neste caso as quantidades de carga podem ser consideradas como sendo contínuas. Entretanto, ainda assim, o caráter discreto da carga elétrica continua a se manifestar de forma sutil. Em particular, a neutralidade da matéria macroscópica, constituída por quantidades enormes de prótons positivos e elétrons negativos, decorre do fato de as cargas dessas partículas serem, em módulo, *exatamente* iguais a  $e$ .

A menção frequente à carga do elétron torna razoável perguntar se o elétron é a carga negativa elementar ou se ele é apenas uma partícula *portadora* dessa carga elementar. Dois fatos sugerem que o segundo ponto de vista deve ser adotado. O primeiro é que existem muitas outras partículas que têm carga elétrica igual, em módulo, à do elétron, tais como

o próton, o pósitron, o múon, os mésons pi carregados etc. O segundo, é que o elétron carrega também outro tipo de carga, além da elétrica, conhecida como carga leptônica. Por razões como essas, o estudo das partículas elementares leva à ideia que o elétron é apenas um dos possíveis portadores da carga elétrica elementar, não se confundindo com ela.

Finalmente, ressaltamos que o fato de não terem sido observados objetos carregados com frações da carga do elétron não quer dizer que estes não possam existir. De fato, as partículas chamadas quarks, com cargas  $e/3$  e  $2e/3$ , foram introduzidas para explicar algumas características de grupos de partículas que sofrem interações fortes. O grande sucesso dessa teoria fez com que a enorme maioria dos físicos passasse a trabalhar com ela atualmente. Embora haja evidência experimental da existência de quarks confinados em sistemas, nunca foi observado um quark livre. Um dos maiores desafios da física de partículas contemporânea consiste em explicar porque isso ocorre.

Um outro grande problema aberto na física atual é explicar a quantização da carga elétrica. As propostas mais recentes são baseadas em argumentos topológicos: as cargas poderiam ser uma espécie de nós de campos, daí advindo a sua natureza discreta e enumerável.

### • cargas puntiformes

A ideia de *carga puntiforme* aparece com grande frequência no eletromagnetismo. É bastante difundida a ideia de que carga puntiforme é uma carga existente em um corpo cujas dimensões são muito menores do que as distâncias entre ela e outros objetos carregados. Ou, alternativamente, que uma carga puntiforme é uma carga que existe em um corpo que, por estar longe de outros, parece ser muito pequeno. Este tipo de abordagem, apesar de ser muito comum, não corresponde à noção presente na física contemporânea.

A noção atual do adjetivo puntiforme aplicado à carga elétrica foi emprestada da física de partículas e se aplica a um ente sem extensão nenhuma, ou seja, cuja dimensão corresponde à de um ponto matemático. Como tais partículas não têm tamanho, elas não podem ser constituídas por outras partes sendo, portanto, elementares. É por este motivo que os conceitos de partícula puntiforme e elementar são considerados como equivalentes. Exemplos de partículas puntiformes-elementares são elétrons, neutrinos e quarks. Neste texto, usamos o conceito de carga puntiforme da física contemporânea.

Se uma carga elétrica estiver localizada em um corpo que tem dimensões pequenas em comparação à distância que o separa de outros corpos carregados, seus efeitos sobre eles se aproximam aos de uma carga puntiforme. Por exemplo, duas moedas carregadas eletricamente podem ser consideradas aproximadamente como puntiformes se a distância entre elas for da ordem de 1 metro, mas a qualidade da aproximação piora se elas estiverem separadas por distâncias da ordem de poucos centímetros. Em experimentos, o uso

de corpos pequenos como portadores de cargas é conveniente porque isso permite que as posições dessas cargas elétricas possam ser conhecidas com boa precisão.

## • a eletrostática

Os efeitos físicos causados por cargas paradas ou em movimento em um dado referencial apresentam diferenças, que são tanto mais importantes quanto maiores forem as velocidades envolvidas. O comportamento de cargas restritas à condição de repouso é estudado no âmbito de uma teoria particular, a *eletrostática*, englobada na teoria mais geral do eletromagnetismo. Por ser mais simples e por si só interessante, ela costuma ser tratada como introdução ao eletromagnetismo.

Na prática, a condição de repouso das cargas somente é rigorosamente satisfeita em algumas poucas situações, normalmente em experimentos realizados em laboratório. Mesmo assim a eletrostática é muito importante, porque permite-nos compreender as características principais de muitos fenômenos físicos. Como exemplo podemos citar o estudo do átomo de hidrogênio, formado por um elétron que se move em torno de um próton. No átomo, o elétron está em movimento e, por isso, a sua interação com o próton não é rigorosamente eletrostática. Entretanto, esse movimento é relativamente lento, e o problema pode ser tratado como sendo aproximadamente eletrostático.

## • a lei de Coulomb

Na eletrostática, a *lei de Coulomb*, que descreve as forças entre duas cargas elétricas *puntiformes* e *em repouso*, é muito importante. A intensidade das forças entre essas cargas depende da distância entre elas. Na segunda metade do século 18, muitos cientistas procuraram medir a força entre duas cargas elétricas. A expressão matemática para a força eletrostática foi proposta, na década de 1780, por Charles Coulomb, físico francês, a partir de experimentos por ele realizados. Tal expressão não envolvia a carga elétrica como a concebemos hoje, mas a quantidade de fluido elétrico contida em cada corpo. A lei de Coulomb, como enunciada hoje, é uma reinterpretação da sua versão original.

Quando duas cargas puntiformes no vácuo são colocadas próximas uma da outra, ocorre *uma* interação entre elas. Como o prefixo *inter-* indica, entre outras coisas, reciprocidade, a palavra interação designa uma ação mútua e recíproca.

No caso de duas cargas  $q_1$  e  $q_2$  no vácuo, puntiformes e em repouso, a interação eletrostática se manifesta na forma de *duas* forças, cada uma delas agindo sobre uma das cargas, como mostra a fig.7.1. A carga  $q_1$  sofre a força devida a  $q_2$ , a carga  $q_2$  sofre a força devida a  $q_1$ . Estas forças satisfazem a igualdade entre ação e reação, de acordo com a terceira lei da dinâmica de Newton. Segundo a lei de Coulomb, essas forças, têm

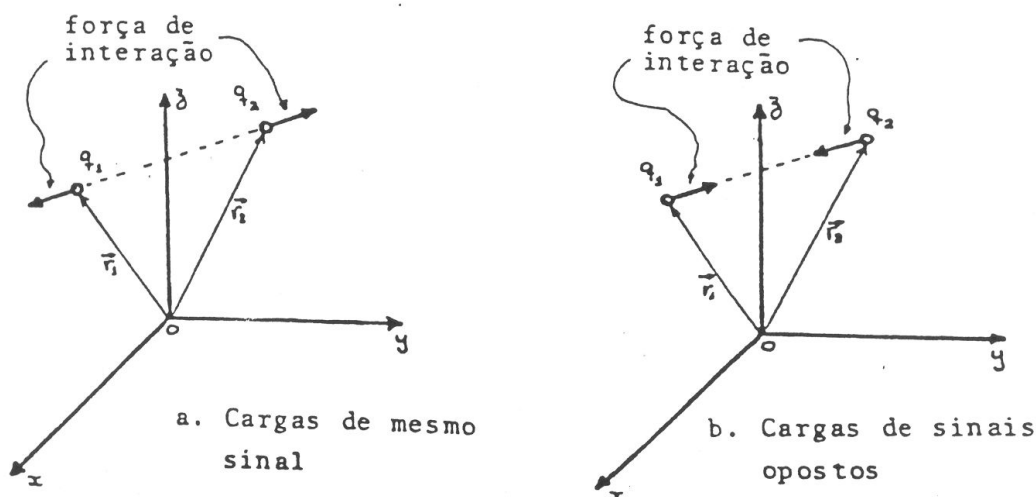


Figura 7.1: Forças representando a interação entre duas cargas puntiformes em repouso: (a) de mesmo sinal; (b) de sinais opostos.

as seguintes características:

**pontos de aplicação:** estas forças estão aplicadas, respectivamente, em  $q_1$  e  $q_2$ ;

**direção das forças:** a da reta que une as cargas;

**sentidos das forças:** repulsão para cargas de mesmo sinal e atração para cargas de sinais opostos;

**módulo das forças:** chamando este módulo de  $F$  e, de  $r$  a distância entre as cargas, temos

$$F = k |q_1 q_2| \frac{1}{r^2}, \quad (7.1)$$

onde  $k$  é uma constante, que discutimos adiante.

Essas propriedades das forças de interação entre duas cargas representam o conteúdo físico da lei de Coulomb. Como toda lei física, ela corresponde a uma determinada descrição da natureza, a um modo de ver o mundo. Para compreender melhor qual é a imagem da natureza implícita na lei de Coulomb, notamos que a carga elétrica  $q$  é uma grandeza *escalar*, ou seja, que não tem propriedades tais como direção e sentido. Além disso, o espaço onde as cargas estão localizadas é equivalente em todas as direções. Quando duas cargas estão dispostas como na fig.7.1, a reta que as une é um eixo de simetria. Por isso a direção da força entre as cargas tem necessariamente que ser a desse eixo.

Para justificar esta afirmação, notamos que a fig.7.1, nas duas situações consideradas, envolve cargas, que são objetos físicos, juntamente com sistemas de referência e vetores posição, que são instrumentos matemáticos construídos para auxiliar o nosso pensamento. Estes últimos não podem influenciar as características das forças, que também são entidades físicas. Quando pensamos apenas em cargas, o sistema formado por duas delas têm simetria cilíndrica, em torno do eixo que passa por elas. Como as cargas são grandezas



escalares, que não possuem direções, se girarmos o sistema em torno deste eixo, nada pode mudar. Por isso, a única possibilidade para as forças é que elas estejam orientadas ao longo deste eixo de simetria.

O sentido da força eletrostática é um resultado empírico, o mesmo acontecendo com a dependência da distância relativa. Uma interpretação interessante desta última é feita ao estudarmos a lei de Gauss elétrica, que é uma das quatro leis fundamentais do eletromagnetismo. Outra propriedade importante da lei de Coulomb é que as forças de interação dependem linearmente das cargas: se uma das cargas muda, os módulos das forças variam proporcionalmente.

## • universos hipotéticos

Um exercício muito interessante que pode ser feito com uma lei física e que nos permite compreender melhor a descrição da natureza contida nela, consiste em explorar o seu conteúdo negativo, ou seja, tentar compreender o que ela afirma que o mundo *não é*. No caso da lei de Coulomb, podemos especular a respeito de universos hipotéticos, em que as forças entre cargas elétricas fossem diferentes das do nosso universo.

Em um universo hipotético poderia acontecer, por exemplo, que as cargas elétricas de sinais opostos se atráíssem para separações maiores que uma certa distância e se repelissem para separações menores que essa distância. Já a lei de Coulomb, que descreve o nosso universo, diz que isso não acontece; se as cargas se atraem a distâncias grandes, elas também o fazem a distâncias pequenas. A força não muda de sentido quando variamos a distância entre as cargas.

A lei de Coulomb afirma ainda que a força eletrostática diminui com a distância, proporcionalmente a  $1/r^2$ . Num universo hipotético, por outro lado, poderia acontecer que a força diminuísse com a distância, proporcionalmente a  $1/r$  ou  $1/r^3$ . Podemos, também, imaginar algo ainda mais exótico, como um universo em que as forças de interação aumentassem com a distância. Nestes universos, átomos e moléculas seriam muito diferentes dos do nosso mundo.

## • as unidades de carga e a intensidade da força elétrica

Para podermos operar com a lei de Coulomb é preciso definir quantidade de carga de forma mensurável. No Sistema Internacional (SI), que adotamos, a unidade de carga, é o *coulomb*, cujo símbolo é C. Ela é definida a partir da unidade de corrente elétrica, o *ampère*, representada por A, como sendo a quantidade de carga que atravessa, durante 1 segundo, a seção transversal de um fio percorrido por uma corrente elétrica de intensidade constante e igual a 1 ampère. O ampère, por sua vez, é definido a partir da força entre

dois condutores percorridos por correntes elétricas.

Usando esta definição na eq.(7.1) e expressando os valores das duas cargas  $q_1$  e  $q_2$  em coulombs, distância  $r$  em metros e o módulo da força  $F$  em newtons, a constante  $k$  da eq.(7.1) vale  $k = 8.987\,552 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$ . No SI, a constante  $k$  é sempre colocada na forma

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} . \quad (7.2)$$

A constante  $\epsilon_0$  é chamada de *permissividade do vácuo* e seu valor é  $\epsilon_0 = 8,854\,188 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$ . A conveniência de definir a constante com o fator  $4\pi$  fica clara mais adiante.

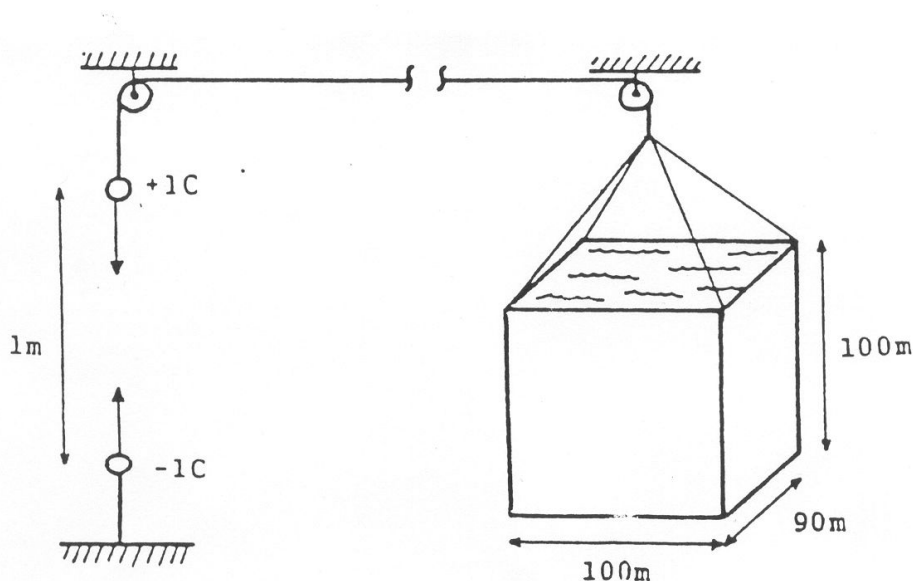


Figura 7.2: A força elétrica  $F$  entre duas cargas de 1 C, a 1 m de distância uma da outra, sustenta uma caixa com 900 mil toneladas de água.

Um coulomb é uma quantidade de carga bastante grande, não sendo, em geral, observada em experimentos de eletrostática. Para termos ideia de quão grande essa quantidade é, estimamos a força entre duas cargas, de 1 C cada, separadas por uma distância de 1 m. A lei de Coulomb nos diz que, neste caso, o módulo da força vale

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \simeq 9 \times 10^9 \text{ N} .$$

Este resultado representa uma força enorme. Por exemplo, corresponde aproximadamente ao peso de uma massa de 900 mil toneladas. Essa é a massa de água que caberia em um paralelepípedo de lados  $90 \text{ m} \times 100 \text{ m} \times 100 \text{ m}$ , como indica esquematicamente a fig.7.2.

### • a ideia de campo

O conceito de campo é um dos pilares da física atual e, no eletromagnetismo, os campos elétrico e magnético têm papel fundamental. No caso de cargas em repouso, existem apenas campos eletrostáticos, diretamente relacionados à lei de Coulomb.

No caso de um sistema formado apenas por duas cargas puntiformes  $q_1$  e  $q_2$ , esta lei especifica tanto a força que  $q_1$  *exerce* sobre  $q_2$  como a força a que  $q_1$  *está sujeita* devido a  $q_2$ . Essas forças têm módulos e direções iguais e sentidos opostos. Deste modo, a lei de Coulomb afirma que cada uma das cargas, ao mesmo tempo, *exerce* uma força sobre a outra e *sente* uma força causada pela outra.

No caso de duas cargas  $q_1$  e  $q_2$ , de mesmo sinal e localizadas respectivamente nos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , como representa a fig.7.3, a força  $\vec{F}_1$  é *exercida* pela carga  $q_2$  e *sentida* pela carga  $q_1$ , enquanto que a força  $\vec{F}_2$  é *sentida* pela carga  $q_2$  e causada pela carga  $q_1$ . Pela lei da ação e reação,  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ .

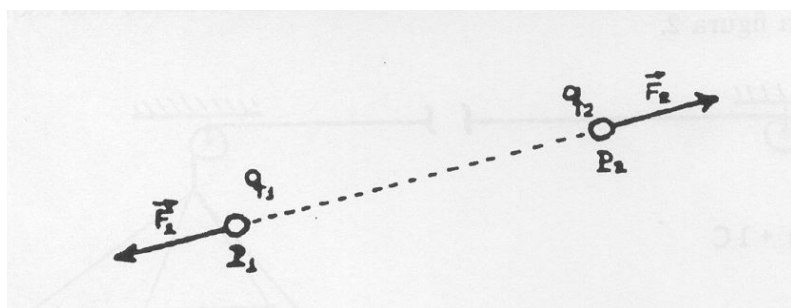


Figura 7.3: Interação eletrostática entre cargas de mesmo sinal.

O que acontece quando a carga  $q_2$  é substituída por uma carga  $q'_2 = 2q_2$ ? A lei de Coulomb afirma que as novas forças  $\vec{F}'_1$  e  $\vec{F}'_2$  têm direções e sentidos idênticos aos anteriores, mas seus módulos dobram. A interpretação física deste resultado é bastante interessante. A carga  $q_1$ , apesar de não ter sido alterada, passa a sofrer a força  $\vec{F}'_1$ , que é duas vezes mais intensa que  $\vec{F}_1$ , porque a *fonte* desta força tornou-se duas vezes mais intensa. Em outras palavras, a nova carga situada em  $P_2$  tem uma capacidade duas vezes maior de exercer forças que a anterior. Por outro lado, ao considerarmos a força  $\vec{F}'_2$  agindo sobre  $q'_2$ , vemos que ela dobra porque essa carga passa a ter uma capacidade duas vezes maior que  $q_2$  para *sentir* a força causada por  $q_1$ . Assim, vemos que o aumento da carga no ponto  $P_2$  corresponde tanto a um aumento da sua capacidade de *gerar* força no ponto  $P_1$  como a um aumento da sua capacidade de *sentir* força no próprio ponto  $P_2$ . Essa característica que as cargas elétricas têm de simultaneamente gerarem e sentirem forças elétricas é um dos seus aspectos fundamentais.

O conceito de *campo elétrico* explora essa dupla característica da carga. Ele permite escrever a força de Coulomb agindo na carga localizada em um certo ponto como o produto de dois fatores: um, representando a propriedade que a carga naquele ponto tem de *sentir* força elétrica e o outro, representando a propriedade que a outra carga tem de *gerar* força elétrica naquela carga.

Na situação da fig.7.3 vimos que, ao dobrarmos a carga no ponto  $P_2$ , o módulo da força agindo nela também dobra. Podemos descrever este fato escrevendo

$$\vec{F}_2 = [q_2] \times \left[ \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \right], \quad (7.3)$$

onde  $\hat{r}$  é o versor na direção da reta que une as cargas, no sentido de  $P_1$  para  $P_2$ . A grandeza

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \quad (7.4)$$

representa a capacidade que a carga  $q_1$  tem de gerar a força elétrica  $\vec{F}_2$  sobre a carga  $q_2$ , colocada no ponto  $P_2$ . Esse vetor  $\vec{E}_1$  é o *campo elétrico* da carga  $q_1$ .

Para ilustrar o significado físico do campo elétrico, comparamos três cenários diferentes:

1. Inicialmente, consideramos uma região onde existe apenas o espaço vazio, sem nenhuma carga elétrica.
2. Em seguida, uma carga  $q_1$  é colocada em um ponto  $P_1$  dessa região e, agora, o seu campo elétrico  $\vec{E}_1$  preenche todo o espaço, independente de existirem ou não outras cargas por perto.
3. Finalmente, uma carga  $q_2$  é colocada em um ponto  $P_2$ , onde já existe o campo  $\vec{E}_1$  da carga  $q_1$ . Como a carga  $q_2$ , tem a capacidade de sentir forças elétricas, quando ela é colocada em  $P_2$ , aparece sobre ela uma força.

## • o campo coulombiano

Costuma-se chamar de *campo coulombiano* o campo elétrico associado a uma carga puntiforme e em repouso, já que as suas características podem ser obtidas a partir da lei de Coulomb. Uma carga puntiforme  $q$ , fixa em um ponto caracterizado pelo vetor  $\vec{r}_q$ , tem uma aura eletrostática que preenche todo o espaço ao seu redor, representada pelo seu campo  $\vec{E}$ . Em um particular ponto P, caracterizado pelo vetor  $\vec{r}_P$ , o campo é um *vetor*, mostrado na fig.7.4, que tem as seguintes características:

**fonte de  $\vec{E}$**  : carga  $q$ ;

**ponto de aplicação de  $\vec{E}$** : ponto P;

**direção de  $\vec{E}$** : a da reta que une o ponto onde está a carga ao ponto P, onde se observa o campo, que é paralela ao vetor  $(\vec{r}_P - \vec{r}_q)$ ;

**sentido de  $\vec{E}$** : apontando para a carga se ela for negativa ou no sentido oposto, se ela for positiva;

**módulo de  $\vec{E}$** : é dado pela expressão

$$|\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|^2}. \quad (7.5)$$

Na caracterização do campo elétrico, o vetor  $\vec{r}_P - \vec{r}_q$  representa a posição do ponto P a partir da posição da carga  $q$ . Notando que o versor associado a este vetor é dado por  $(\vec{r}_P - \vec{r}_q)/|\vec{r}_P - \vec{r}_q|$ , podemos sintetizar as três últimas propriedades do campo  $\vec{E}$  escrevendo

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|^2} \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|^3}. \quad (7.6)$$

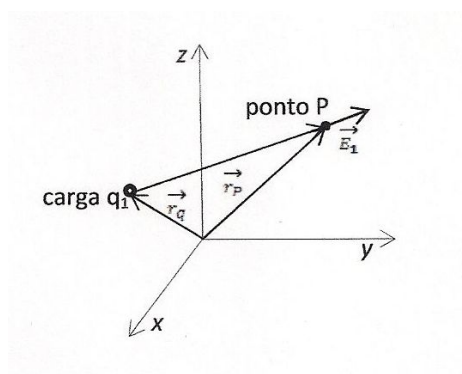


Figura 7.4: Campo elétrico  $\vec{E}$  em  $\vec{r}_P$  devido a uma carga puntiforme positiva  $q$  em  $\vec{r}_q$ .

## • linhas de campo

Em muitas situações, é conveniente empregar representações visuais qualitativas para descrever configurações de campos em problemas físicos. Uma representação muito útil é a baseada em linhas de campo, na qual o campo elétrico é representado por linhas tangentes a ele em cada ponto, complementadas por flechas, que indicam o seu sentido. As linhas de campo elétrico de uma carga puntiforme positiva divergem a partir do ponto onde a carga está e as de uma carga negativa convergem para a posição da carga. A fig.7.5 mostra linhas de campo de uma carga puntiforme positiva e de uma negativa, em repouso. Embora na figura haja espaço vazio entre as linhas, há campo elétrico em todos os pontos em volta da carga. O campo de uma carga puntiforme tem simetria esférica e na figura estão desenhadas apenas as linhas contidas no plano desta página. Além disso, as linhas não terminam no espaço vazio, mas se prolongam até o infinito. A intensidade do campo é indicada pela densidade de linhas: onde o campo é mais intenso, as linhas são mais próximas. Assim, em pontos distantes da carga, as linhas estão mais afastadas umas das outras, o que indica uma intensidade de campo menor.

## • o campo eletrostático, o espaço e o tempo

O campo elétrico é um conceito muito importante na física atual e aqui enfatizamos alguns dos seus aspectos, já discutidos na aula 2. No caso eletrostático, o campo corresponde a uma aura existente em torno da carga, que representa a sua zona de influência eletrostática. Por estarmos tratando apenas de cargas imóveis, estas auras permanecem

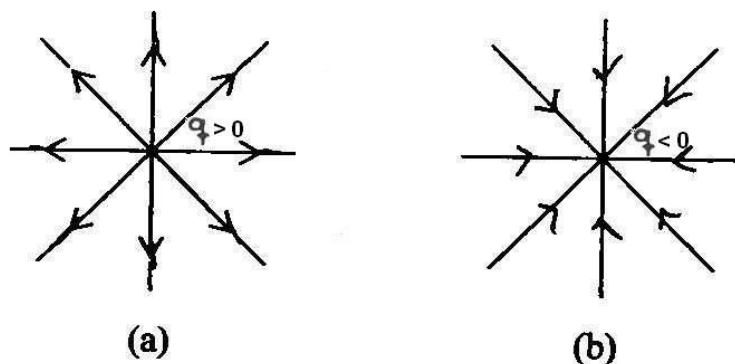


Figura 7.5: Linhas de campo elétrico de cargas pontiformes (a) positiva e (b) negativa, em repouso.

sempre iguais. Como estamos empregando a palavra espaço com o significado de um palco formado por pontos, que existe independentemente da matéria, não é apropriado afirmar que uma carga elétrica *modifica o espaço*. Ela e o seu campo apenas existem no palco, sem modificá-lo.

Uma segunda questão, semântica, diz respeito ao uso da palavra *criar* para descrever a relação entre uma carga e o seu campo. A palavra *criar* pressupõe que o criador existe antes da criatura. Por isso, quando se diz que uma carga *cria* um campo, pode-se estar sugerindo que a carga existe antes do seu campo. Entretanto, esta imagem não é correta, já que uma carga e seu campo sempre existem simultaneamente, são indissociáveis e uma entidade não pode preceder a outra. O mais correto é falarmos no campo *associado* à carga ou no campo *da* carga. Esta interpretação é reforçada pelo fato de a expressão (7.6) para o campo coulombiano não envolver o tempo, o que impede a interpretação incorreta que o campo emana da carga. Entretanto, o uso da palavra *criar* para descrever a relação entre carga e campo é bastante difundida na literatura e, por isso, nós também a empregamos de vez em quando.

## • física e matemática

A matemática é a linguagem da física... Mas a relação entre ambas não é simples. Na quase totalidade dos problemas, a matemática guia e conduz o nosso pensamento em direção ao entendimento do mundo natural. Entretanto, quando obtido, este entendimento inclui muitos outros elementos que não são de natureza puramente matemática.

Retomemos, por exemplo, as eqs.(7.3) e (7.4), que descrevem a força que a carga  $q_2$  da fig.7.3 sofre, devido à presença da carga  $q_1$ . A equação da força pode ser escrita de duas

maneiras alternativas

$$\vec{F}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}, \quad (7.7)$$

$$= [q_2] \times \left[ \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \right]. \quad (7.8)$$

Do ponto de vista matemático estas duas formas são totalmente equivalentes. Entretanto, isso não acontece com os seus conteúdos ontológicos pois, na primeira, as duas cargas são tratadas de modo simétrico enquanto que a segunda sugere que cada uma delas desempenha um papel diferente e, deste modo, induz uma interpretação física.

A equação para o campo também pode ser escrita de modos matematicamente equivalentes, como

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}_2}{q_2}, \quad (7.9)$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}. \quad (7.10)$$

O primeiro modo sugere que o campo é uma entidade que depende da força, enquanto que, no segundo, o campo é tratado de forma autônoma e independente. No passado, o campo elétrico costumava ser ensinado com base na eq.(7.9), onde a carga  $q_2$  deveria ser muito pequena e era chamada de carga de prova. A razão é que a força era considerada uma grandeza mais mensurável do que o campo, mas esta ideia é frágil pois, se a carga é mensurável, o campo também o é. Com o passar do tempo, esta visão foi superada por outra, baseada na eq.(7.10), na qual o campo é tratado como entidade autônoma, que existe de forma independente. Esta mudança de visão de mundo foi motivada tanto pelo estudo de ondas eletromagnéticas como por desenvolvimentos teóricos associados à teoria quântica de campos. Neste curso, os campos, sejam eles elétricos ou magnéticos, são tratados como entidades autônomas.

## • referências

[1] BOSS, Sergio Luiz Bragatto; ASSIS, André K. T.; CALUZI, João José. Stepheh Gray e a descoberta dos condutores e isolantes: tradução comentada de seus artigos sobre electricidade e reprodução dos seus principais experimentos. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012. (Coleção PROP Digital - UNESP). ISBN 9788579833748.

Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/109254>>.

[2] HEILBRON, John L. Nollet, Jean-Antoine. Vol. P, pp. 145-148, in: GILLISPIE, Charles Coulston (ed.). Dictionary of scientific biography. New York: Charles Scribner's Sons, 1981. Vol. 9.

[3] Cartas a Peter Collinson e outros, que podem ser lidas em *Experiments and Observa-*

tions on Electricity, publicado em 1751. **FALTA COMPLETAR**

### • exercícios

1. Identifique quais das reações abaixo são proibidas pelo princípio de conservação da carga elétrica.

a)  $p \rightarrow n + e^+ + \nu$ ,

b)  $p + e^- \rightarrow p + n + \nu$ ,

c)  $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + p + \bar{p}$ ,

d)  $\pi^+ + p \rightarrow \pi^0 + \pi^0$ ,

e)  $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n$ .

2. Como seria uma experiência de indução eletrostática em um universo em que a força entre cargas aumentasse com a distância relativa?

3. Considere um universo hipotético em que cargas elétricas de sinais opostos se atraem para separações maiores que a distância  $D$  e se repelem para separações menores que  $D$ . Descreva o movimento de duas cargas de sinais opostos, abandonadas em repouso neste universo hipotético, a uma distância de separação  $d > D$ .

4. Considere duas esferas idênticas, de raio  $R$ , cada uma delas contendo uma carga puntiforme  $q$  em algum ponto do seu interior. Usando a lei de Coulomb, calcule a incerteza no módulo da força  $F$  entre as esferas quando os seus centros estão separados por uma distância  $d$ . Mostre que as esferas se comportam como cargas puntiformes quando  $d$  é muito maior que  $R$ .

5. Um núcleo de hélio tem dois nêutrons e dois prótons. Os prótons se repelem eletrostaticamente, fazendo com que o núcleo tenda a explodir. A atração gravitacional, por outro lado, tende a manter as partículas juntas. É possível atribuir a estabilidade do núcleo à atração gravitacional? A lei de gravitação de Newton afirma que a intensidade da força de interação entre duas massas  $m_1$  e  $m_2$ , separadas pela distância  $d$ , é dada por  $F_{\text{grav}} = G m_1 m_2 / d^2$ , onde  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2$ . A massa do próton é  $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$  e sua carga é  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

6. São dadas duas cargas negativas  $q_1$  e  $q_2$ , localizadas respectivamente nos pontos descritos por vetores  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ . Escreva a expressão do campo elétrico  $\vec{E}_2$  da carga  $q_2$  no ponto  $\vec{r}_1$ . Usando esse campo, mostre que a carga  $q_2$  repele a carga  $q_1$ .

### • respostas

1. proibidos: b), d) .

4.  $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R+2d)^2} < F < \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R-2d)^2}$ .

5. Não, pois  $F_{\text{el}} \simeq 1,2 \times 10^{11} F_{\text{grav}}$ .



6. O campo  $\vec{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$  aponta *para* a carga  $q_2$ ; a força que age sobre  $q_1$  é  $\vec{F}_1 = q_1 \vec{E}_2$ , antiparalela a  $\vec{E}_2$  e, portanto, corresponde a uma repulsão.



# Capítulo 8

## campo de Coulomb: princípio da superposição

### • princípio da superposição

Uma carga puntiforme  $q_1$ , em repouso em um ponto  $\vec{r}_1$ , cria um campo elétrico que, observado em um ponto P determinado pelo vetor  $\vec{r}_P$ , é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_1|^3}. \quad (8.1)$$

Se, na mesma região do espaço houver uma segunda carga  $q_2$ , localizada em  $\vec{r}_2$ , o campo resultante no ponto P é dado pela soma vetorial das contribuições das duas cargas e escrito como

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \vec{E}_1(\vec{r}_P) + \vec{E}_2(\vec{r}_P) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_1|^3} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_2|^3}. \quad (8.2)$$

Esta expressão, apesar de simples, tem uma característica muito importante, a de que o campo de uma carga não se altera em presença de outra. Que a natureza seja assim não é óbvio e o contrário poderia acontecer. A independência dos campos nesta expressão fica evidente se notarmos que  $\vec{E}_1$  não se altera se o valor de  $q_2$  for aumentado ou diminuído.

De modo geral, quando em uma região do espaço há várias cargas, o campo elétrico resultante em um ponto P é dado pela soma vetorial dos campos de cada uma das cargas. Se houver N cargas  $q_j$ , cada uma delas na posição  $\vec{r}_j$ , o campo elétrico resultante  $\vec{E}(\vec{r}_P)$

é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \sum_{j=1}^N \vec{E}_j(\vec{r}_P) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_j|^3}. \quad (8.3)$$

Assim, no contexto do eletromagnetismo clássico, as cargas interagem, mas os campos não. O campo de uma carga não se altera na presença de outras. Os campos das várias cargas apenas se superpõem. Esta noção constitui o *princípio da superposição*, expresso matematicamente pela eq.(8.3).

O princípio da superposição é muito importante no eletromagnetismo. Do ponto de vista matemático, ele decorre do fato de que a expressão do campo de uma carga puntiforme é linear em  $q$ . Para perceber isto, imaginemos que a carga  $q_2$  na eq.(8.2) também esteja localizada no ponto  $\vec{r}_1$ . Neste caso, podemos escrever

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_1|^3} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_1|^3} = \frac{(q_1 + q_2)}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_1|^3}. \quad (8.4)$$

Ou seja, a soma dos campos é igual ao campo produzido pela soma das cargas. Resultados deste tipo só valem se o campo depender linearmente da carga.

## • campos e forças

A forma geral do campo de uma carga puntiforme, dada pela eq.(8.1), foi obtida a partir da lei de Coulomb, o que indica que forças e campos são entidades relacionadas. Quando várias cargas  $q_1 \cdots q_N$  coexistem em uma região do espaço, o campo resultante que elas produzem em um ponto P qualquer é dado pela soma vetorial das contribuições individuais, como indica a eq.(8.3). Se colocarmos uma nova carga  $q$  neste ponto P, ela passa a sofrer uma força resultante  $\vec{F}$ , dada por

$$\vec{F} = q \vec{E} = q \sum_{j=1}^N \vec{E}_j(\vec{r}_P) = \sum_{j=1}^N \left[ q \vec{E}_j(\vec{r}_P) \right] = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j, \quad (8.5)$$

sendo  $\vec{F}_j$  a força que a carga  $q_j$  exerce sobre  $q$ . Assim, a eq.(8.3) indica que a força resultante que atua sobre a carga  $q$  é a soma vetorial das forças entre cada carga  $q_j$  e ela. Cada par interage como se não houvesse outras cargas na região. A força entre duas cargas não é alterada pela presença de uma terceira carga. Este é o conteúdo do princípio da superposição.

Embora a lei de Coulomb seja válida apenas para cargas em repouso, o princípio da superposição vale também para os campos produzidos por cargas em movimento. O resultado (8.5), apresentado aqui no contexto particular da eletrostática, é parte de um outro, muito geral e importante. Quando uma carga  $q$ , não importa se em repouso ou em movimento, está em um ponto P, a força elétrica que age sobre ela é dada por

$$\vec{F} = q \vec{E}. \quad (8.6)$$

onde  $\vec{E}$  é o campo elétrico naquele ponto, que pode ser devido à superposição das contribuições tanto de cargas em repouso como de cargas com velocidades e acelerações.

### • exemplo 1: dipolo elétrico

Um dipolo elétrico é um sistema formado por duas cargas de sinais opostos e iguais em módulo. Considere o dipolo elétrico formado pelas cargas puntiformes  $q_1 = +q$  e  $q_2 = -q$ , em repouso, respectivamente, nas posições  $+(d/2)\hat{k}$  e  $-(d/2)\hat{k}$ , como mostra a fig.8.1. Desejamos calcular a expressão do campo elétrico  $\vec{E}$ , criado por este sistema, em todo o espaço.

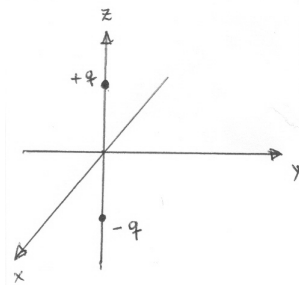


Figura 8.1: Dipolo elétrico.

O campo elétrico  $\vec{E}(\vec{r}_P)$  do dipolo, em um ponto P representado pelo vetor  $\vec{r}_P$  é dado, de acordo com o princípio da superposição, pela soma vetorial dos campos criados em  $\vec{r}_P$  pelas cargas  $q_1$  e  $q_2$ , representados respectivamente por  $\vec{E}_1(\vec{r}_P)$  e  $\vec{E}_2(\vec{r}_P)$ . Usando a expressão (8.1) para o campo de uma carga puntiforme, com  $\vec{r}_1 = \vec{d}/2$  e  $\vec{r}_2 = -\vec{d}/2$ , com  $\vec{d} = d\hat{k}$ , escrevemos

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \vec{E}_1(\vec{r}_P) + \vec{E}_2(\vec{r}_P), \quad (8.7)$$

sendo

$$\vec{E}_1(\vec{r}_P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_P - \vec{d}/2)}{|\vec{r}_P - \vec{d}/2|^3} \quad \text{e} \quad \vec{E}_2(\vec{r}_P) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_P + \vec{d}/2)}{|\vec{r}_P + \vec{d}/2|^3}. \quad (8.8)$$

Escrevendo o vetor  $\vec{r}_P$  em coordenadas cartesianas,

$$\vec{r}_P = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}, \quad (8.9)$$

obtemos

$$\vec{r}_P - \frac{\vec{d}}{2} = X\hat{i} + Y\hat{j} + \left(Z - \frac{d}{2}\right)\hat{k} \rightarrow \left|\vec{r}_P - \frac{\vec{d}}{2}\right|^2 = X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{d}{2}\right)^2 \quad (8.10)$$

$$\vec{r}_P + \frac{\vec{d}}{2} = X\hat{i} + Y\hat{j} + \left(Z + \frac{d}{2}\right)\hat{k} \rightarrow \left|\vec{r}_P + \frac{\vec{d}}{2}\right|^2 = X^2 + Y^2 + \left(Z + \frac{d}{2}\right)^2. \quad (8.11)$$

Em função das coordenadas  $X, Y, Z$ , o campo elétrico pode ser escrito como

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{X\hat{i} + Y\hat{j} + (Z - d/2)\hat{k}}{[X^2 + Y^2 + (Z - d/2)^2]^{3/2}} - \frac{X\hat{i} + Y\hat{j} + (Z + d/2)\hat{k}}{[X^2 + Y^2 + (Z + d/2)^2]^{3/2}} \right]. \quad (8.12)$$

O conteúdo deste resultado fica mais claro se o expressarmos em coordenadas cilíndricas, usando  $\vec{r} = X\hat{i} + Y\hat{j}$ . Neste caso, temos

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{r} + (Z - d/2)\hat{k}}{[r^2 + (Z - d/2)^2]^{3/2}} - \frac{\vec{r} + (Z + d/2)\hat{k}}{[r^2 + (Z + d/2)^2]^{3/2}} \right]. \quad (8.13)$$

Como esperado, este campo tem simetria axial e não depende do ângulo azimutal  $\theta$ .

Esta expressão, que descreve o campo elétrico do dipolo em um ponto genérico do espaço, torna-se mais simples em situações particulares. Por exemplo, sobre o plano  $xy$  a coordenada  $Z$  se anula e o campo resultante é dado por

$$\vec{E}(r, Z = 0) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\hat{k}}{[r^2 + d^2/4]^{3/2}} \quad (8.14)$$

e, em qualquer ponto, é antiparalelo ao eixo  $z$ .

Uma outra situação simples é a do campo sobre o eixo de simetria, onde  $\vec{r} = 0$ . Neste caso, temos

$$\vec{E}(r = 0, Z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(Z - d/2)}{|Z - d/2|^3} - \frac{(Z + d/2)}{|Z + d/2|^3} \right] \hat{k}. \quad (8.15)$$

Nos pontos  $Z = \pm d/2$ , o valor de  $\vec{E}$  diverge, pois eles estão sobre as cargas. Para interpretar o campo nos demais pontos, é preciso tomar cuidado em garantir que os denominadores sejam sempre positivos. Fazendo isso, obtemos

$$Z > d/2 \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Zd}{(Z^2 - d^2/4)^2} \hat{k}, \quad (8.16)$$

$$d/2 > Z > -d/2 \quad \rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2(Z^2 + d^2/4)}{(Z^2 - d^2/4)^2} \hat{k}, \quad (8.17)$$

$$-d/2 > Z \quad \rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Zd}{(Z^2 - d^2/4)^2} \hat{k}. \quad (8.18)$$

## • exemplo 2: duas cargas de mesmo sinal

A expressão do campo produzido no ponto P por duas cargas  $q_1 = q_2 = q$ , sejam elas positivas ou negativas, situadas nos pontos  $\vec{r}_1 = (d/2)\hat{k}$  e  $\vec{r}_2 = -(d/2)\hat{k}$ , pode ser obtida invertendo o sinal do segundo termo da eq.(8.13). Assim,

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{r} + (Z - d/2)\hat{k}}{[r^2 + (Z - d/2)^2]^{3/2}} + \frac{\vec{r} + (Z + d/2)\hat{k}}{[r^2 + (Z + d/2)^2]^{3/2}} \right]. \quad (8.19)$$

As características deste campo são bastante diferentes das do dipolo. Por exemplo, no plano  $xy$ , onde  $Z = 0$ , ele reduz-se a

$$\vec{E}(r, Z = 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{r}}{[r^2 + d^2/4]^{3/2}} \quad (8.20)$$

e aponta na direção radial. Na fig.8.2, mostramos as linhas dos campos resultantes no caso de um dipolo e de duas cargas positivas, juntamente com as contribuições individuais. Nesta figura, é importante notar que, em conformidade com o princípio da superposição, as linhas de campo de cada uma das cargas permanecem retilíneas e inalteradas pela presença da outra. Já as linhas curvas representam os campos resultantes, dados pelas somas vetoriais das contribuições individuais. Seria incorreto, portanto, interpretar estas figuras como indicando que uma carga pode deformar a linha de campo da outra.

Figura 8.2: Campos de duas cargas.

## • distribuições contínuas

Existem muitos sistemas, tais como os fios, placas ou esferas, discutidos nas aulas 5 e 6, nos quais cargas estão distribuídas em corpos extensos. Estes sistemas carregados produzem campos elétricos que podem causar efeitos físicos à sua volta. As expressões que descrevem estes campos podem ser determinadas usando o resultado (8.1), que só é válido para cargas puntiformes, por meio de uma estratégia matemática. Inicialmente, dividimos a distribuição de cargas em elementos  $dq$ , escrevendo  $dq = \lambda dl$ , ou  $dq = \sigma dS$ , ou  $dq = \rho dV$ , se ela tiver uma ou duas ou três dimensões. Em seguida, pensamos neste pedacinho de carga como sendo aproximadamente puntiforme e escrevemos sua contribuição  $d\vec{E}$  ao campo no ponto de observação P como

$$d\vec{E}(\vec{r}_P) = \frac{dq(\vec{r}_q)}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|^3}. \quad (8.21)$$

É importante notar que, nesta expressão, o fator que representa a quantidade de carga é representado por  $dq(\vec{r}_q)$  e inclui uma dependência em  $\vec{r}_q$ , já que a densidade de carga pode variar de um ponto a outro do corpo.

O campo resultante no ponto P é obtido pela soma das contribuições individuais e, formalmente, escrevemos

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \int_{\text{corpo}} d\vec{E}. \quad (8.22)$$

Este procedimento é empregado nos exemplos apresentados a seguir.

### • exemplo 3: fio uniformemente carregado

Um fio retilíneo, de comprimento  $L$ , carregado com uma densidade linear de carga  $\lambda$ , constante e positiva, está disposto ao longo do eixo  $z$ , como mostra a fig.8.3. Desejamos calcular o campo elétrico produzido por esta distribuição, em um ponto  $P = (X, Y, Z)$ , genérico e fora do fio.

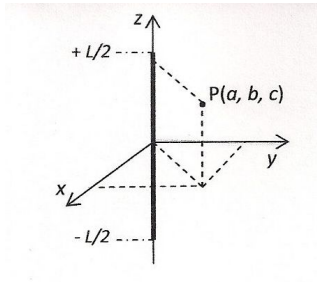


Figura 8.3: Fio retilíneo de comprimento  $L$ .

Como o sistema é unidimensional, inicialmente dividimos o fio em pequenos trechos de comprimento  $dz$ , e cada trecho do fio tem carga

$$dq = \lambda dz, \quad (8.23)$$

que pode ser considerada puntiforme. A posição  $\vec{r}_q$  do ponto onde se localiza este elemento de carga e o ponto  $\vec{r}_P$  onde se deseja calcular o campo são dados por

$$\vec{r}_q = z \hat{k}, \quad (8.24)$$

$$\vec{r}_P = X \hat{i} + Y \hat{j} + Z \hat{k}. \quad (8.25)$$

Assim, o elemento de campo elétrico  $d\vec{E}$  gerado pela carga  $dq$  é dado pelo vetor

$$d\vec{E} = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{[X\hat{i} + Y\hat{j} + (Z - z)\hat{k}]}{[X^2 + Y^2 + (Z - z)^2]^{3/2}}. \quad (8.26)$$

O fator  $\sqrt{X^2 + Y^2 + (Z - z)^2}$  representa a distância do ponto  $z$ , onde está o elemento de carga  $dq$ , ao ponto P, onde se observa o campo. Ela depende de  $z$  porque a carga



está distribuída ao longo do fio e, portanto, os diversos elementos da carga  $dq$  estão a diferentes distâncias do ponto P. Para calcular o campo total em P, usamos o princípio da superposição, somando as contribuições de cada pedacinho do fio, escrevendo

$$\vec{E} = \int_{-L/2}^{L/2} dz \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{[X\hat{i} + Y\hat{j} + (Z-z)\hat{k}]}{[X^2 + Y^2 + (Z-z)^2]^{3/2}}. \quad (8.27)$$

Para considerar todas as contribuições, a integração é feita no intervalo  $-(L/2) \leq z \leq (L/2)$ . Esta equação tem a estrutura

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k} \quad (8.28)$$

e corresponde a três equações escalares

$$E_x = \int_{-L/2}^{L/2} dz \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{X}{[X^2 + Y^2 + (Z-z)^2]^{3/2}}, \quad (8.29)$$

$$E_y = \int_{-L/2}^{L/2} dz \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{Y}{[X^2 + Y^2 + (Z-z)^2]^{3/2}}, \quad (8.30)$$

$$E_z = \int_{-L/2}^{L/2} dz \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Z-z)}{[X^2 + Y^2 + (Z-z)^2]^{3/2}}. \quad (8.31)$$

O cálculo dessas integrais fornece o campo em coordenadas cartesianas. Entretanto, devido à simetria axial do problema, convém utilizar coordenadas cilíndricas, onde a coordenada radial é definida pela relação  $\vec{r} = X\hat{i} + Y\hat{j}$  e o campo elétrico pode ser escrito como

$$\vec{E} = E_r \hat{r} + E_z \hat{z}, \quad (8.32)$$

$$E_r = \int_{-L/2}^{L/2} dz \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{[r^2 + (Z-z)^2]^{3/2}}, \quad (8.33)$$

$$E_z = \int_{-L/2}^{L/2} dz \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Z-z)}{[r^2 + (Z-z)^2]^{3/2}}. \quad (8.34)$$

sendo  $\hat{r}$  o versor da direção radial. A resolução das integrais está no apêndice ??, e seus resultados são

$$\int dz \frac{Z-z}{[r^2 + (Z-z)^2]^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (Z-z)^2}}, \quad (8.35)$$

$$\int dz \frac{r}{[r^2 + (Z-z)^2]^{3/2}} = -\frac{1}{r} \frac{Z-z}{\sqrt{r^2 + (Z-z)^2}}. \quad (8.36)$$

Assim, o campo elétrico criado pelo fio no ponto P é dado por

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \left( \frac{Z - L/2}{\sqrt{r^2 + (Z - L/2)^2}} - \frac{Z + L/2}{\sqrt{r^2 + (Z + L/2)^2}} \right) \hat{r} + \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + (Z - L/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (Z + L/2)^2}} \right) \hat{k} \right]. \quad (8.37)$$

Este resultado representa o campo elétrico criado pelo fio em todo o espaço e depende apenas da densidade de carga  $\lambda$ , do seu comprimento  $L$  e das coordenadas do ponto de observação.

### • o campo a grandes distâncias

Como a carga total contida no fio é não nula, quando o seu comprimento for muito menor do que a distância do ponto de observação a ele, a expressão do campo do fio deve se reduzir à de uma carga puntiforme. Podemos ser tentados a testar esta ideia tomando o limite  $L \rightarrow 0$  na eq.(8.37). Fazendo isso, entretanto, obtemos um resultado inconsistente, o que indica que é preciso proceder com mais cuidado. Para valores de  $L$  pequenos comparados à distância de observação, usamos as seguintes relações aproximadas, apresentadas no apêndice ?? e dadas por

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2 + (Z \pm L/2)^2} &\simeq \sqrt{r^2 + Z^2 \pm ZL} = \sqrt{r^2 + Z^2} \sqrt{1 \pm (ZL)/(r^2 + Z^2)} \\ &\simeq \sqrt{r^2 + Z^2} [1 \pm (ZL)/[2(r^2 + Z^2)]] , \end{aligned} \quad (8.38)$$

$$\frac{1}{1 \pm (ZL)/[2(r^2 + Z^2)]} \simeq 1 \mp (ZL)/[2(r^2 + Z^2)] . \quad (8.39)$$

Usando estes resultados na eq.(8.37), e definido  $R = \sqrt{r^2 + Z^2} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ , escrevemos

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{rR} \left( 1 - \frac{Z^2}{R^2} \right) \hat{r} + \frac{Z}{R^3} \hat{k} \right] = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \left[ \left( \frac{X^2 + Y^2}{r} \right) \hat{r} + Z \hat{k} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{X \hat{i} + Y \hat{j} + Z \hat{k}}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} , \end{aligned} \quad (8.40)$$

onde usamos  $q = \lambda L$ . Assim, de fato, a grandes distâncias do fio o seu campo tende ao de uma carga puntiforme, igual à total do fio.

### • o campo do fio infinito

Outro limite interessante é aquele no qual a distância de observação do campo é muito menor do que o comprimento do fio. Tomando o limite  $L$  muito maior do que as outras dimensões na eq.(8.37), obtemos

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r}, \quad (8.41)$$

que corresponde a um campo radial em coordenadas cilíndricas, que independe da coordenada  $Z$ . A razão desta característica é que um fio infinito é simétrico em relação a qualquer coordenada  $Z$ .

### • exercícios

1. Desenhe, em escala, o vetor campo elétrico do dipolo estudado no exemplo 1, nas posições:

$$\vec{r} = 0; \vec{r} = d\hat{k}; \vec{r} = -d\hat{k}; \vec{r} = (d/4)\hat{k}; \vec{r} = -(d/4)\hat{k}.$$

2. O campo elétrico de um fio uniformemente carregado, de comprimento  $L$ , foi calculado no exemplo 2. A partir do resultado obtido, mostre que

a) o campo é radial em pontos do plano de simetria do fio ( $Z = 0$ ). Escreva a expressão do campo e faça um desenho representando as linhas de campo nesse plano;

d) o campo em pontos do eixo  $z$ , fora do fio, é dado por

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{k}}{(Z^2 - L^2/4)}.$$

Sugestão: determine o limite da expressão (8.37) para  $r \rightarrow 0$ . Para mostrar que a componente radial do campo se anula, considere a expansão de  $[r^2 + (Z \pm L/2)^2]^{-1/2}$ , usando  $(1+x)^n \simeq 1 + nx$ , para  $x \ll 1$ .

3. Quatro fios retilíneo, de comprimento  $L$ , carregados com uma densidade linear de carga  $\lambda$ , constante e positiva, estão sobre o plano  $xy$ , dispostos na forma de um quadrado, com lados paralelos aos eixos  $x$  e  $y$  e com centro coincidente com a origem do sistema de coordenadas. Determine o campo elétrico produzido por esta distribuição, em um ponto  $P = (0, 0, Z)$  do eixo  $z$ , partindo do resultado (8.37).

### • resposta

$$3. \quad \vec{E} = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Z}{(Z^2 + L^2/4)\sqrt{Z^2 + L^2/2}} \hat{k}.$$



## Capítulo 9

# princípio da superposição: distribuições unidimensionais

### • exemplo 1 - anel uniformemente carregado

Neste exemplo, calculamos o campo elétrico  $\vec{E}$  criado por um anel de raio  $R$ , carregado com uma densidade de carga linear  $\lambda$ , constante e positiva, no ponto  $P = (0, 0, Z)$  do seu eixo. O anel está no plano  $xy$ , com centro na origem do sistema de coordenadas, como ilustra a fig.9.1.

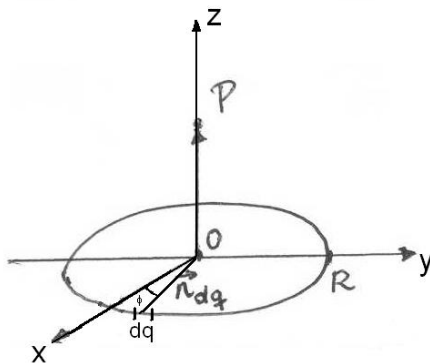


Figura 9.1: Anel carregado

Para calcular o campo criado por uma distribuição contínua de cargas a partir da expressão (8.1) para o campo de uma carga puntiforme, é preciso cortar matematicamente a distribuição em pedacinhos infinitesimais. No caso do anel, estes pedacinhos têm comprimento  $R d\theta$  e, portanto, a carga contida em cada um deles é

$$dq = \lambda R d\theta . \quad (9.1)$$

As posições  $\vec{r}_P$  do ponto P e  $\vec{r}_q$  do elemento de carga  $dq$  são dadas por

$$\vec{r}_P = Z \hat{k}, \quad (9.2)$$

$$\vec{r}_q = R \cos\theta \hat{i} + R \sin\theta \hat{j}. \quad (9.3)$$

Usando estes resultados na eq.(8.21), obtemos o campo  $d\vec{E}$  criado pelo pedacinho de anel no ponto P, dado por

$$d\vec{E} = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-R \cos\theta \hat{i} - R \sin\theta \hat{j} + Z \hat{k}}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \right]. \quad (9.4)$$

O campo elétrico  $\vec{E}$  criado por todos os pedaços do anel no ponto P, pelo princípio da superposição, é a soma de todos os  $d\vec{E}$  e escrito como

$$\vec{E} = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-R \cos\theta \hat{i} - R \sin\theta \hat{j} + Z \hat{k}}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \right], \quad (9.5)$$

que tem a estrutura

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}, \quad (9.6)$$

com

$$E_x = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \cos\theta = 0, \quad (9.7)$$

$$E_y = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \sin\theta = 0, \quad (9.8)$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R Z}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R Z}{(R^2 + Z^2)^{3/2}}. \quad (9.9)$$

Notando que a carga total do anel é  $q = 2\pi R \lambda$ , o campo elétrico em P pode ser escrito na forma compacta

$$\vec{E}(0, 0, Z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \hat{k}. \quad (9.10)$$

Este resultado indica que o campo elétrico ao longo do eixo  $z$  tem a direção do versor  $\hat{k}$  e é paralelo ao eixo para  $Z > 0$  e antiparalelo para  $Z < 0$ .

### • o papel da simetria

O resultado (9.10) corresponde a um campo sobre o eixo  $z$ , paralelo a ele. Isto decorre da simetria da distribuição de cargas em torno deste eixo. Para ilustrar este ponto,

calculamos novamente o campo elétrico, dividindo a distribuição de cargas em quatro setores: A  $\rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi/2$ , B  $\rightarrow \pi/2 \leq \theta \leq \pi$ , C  $\rightarrow \pi \leq \theta \leq 3\pi/2$ , D  $\rightarrow 3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$ . O cálculo dos campos elétricos produzidos por esses setores é totalmente análogo ao anterior, sendo a única diferença o intervalo de integração angular. Assim, por exemplo, o campo  $\vec{E}_A$ , criado pelo setor A, é determinado por equações correspondentes às (9.7)-(9.9) com  $\theta$  variando entre 0 e  $\pi/2$ , que produzem

$$E_{Ax} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{(R^2 + Z^2)^{3/2}}, \quad (9.11)$$

$$E_{Ay} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R^2 + Z^2)^{3/2}}, \quad (9.12)$$

$$E_{Az} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi Z R}{2(R^2 + Z^2)^{3/2}}. \quad (9.13)$$

O campo total tem a forma

$$\vec{E}_A = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \left[ -R\hat{i} - R\hat{j} + \frac{\pi Z}{2}\hat{k} \right] \quad (9.14)$$

Analogamente, as contribuições dos demais setores são dadas por

$$\vec{E}_B = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \left[ R\hat{i} - R\hat{j} + \frac{\pi Z}{2}\hat{k} \right], \quad (9.15)$$

$$\vec{E}_C = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \left[ R\hat{i} + R\hat{j} + \frac{\pi Z}{2}\hat{k} \right], \quad (9.16)$$

$$\vec{E}_D = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \left[ -R\hat{i} + R\hat{j} + \frac{\pi Z}{2}\hat{k} \right]. \quad (9.17)$$

Deste modo, o campo de cada um dos quadrantes tem componentes nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Entretanto, devido à simetria do problema, as componentes  $x$  e  $y$  têm sinais opostos e, na soma  $\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D$ , apenas a componente  $z$  sobrevive. Assim, recuperamos o resultado (9.10).

### • o campo a grandes distâncias

A distâncias muito grandes do anel, podemos usar a aproximação  $|Z| \gg R$  e a expressão (9.10) tende a

$$\vec{E}(|Z| \gg R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{|Z|^3} \hat{k}, \quad (9.18)$$

idêntica à do campo coulombiano. Ou seja, a grandes distâncias do anel, a sua forma torna-se irrelevante e apenas a carga total que ele contém é percebida.

• **exemplo 2 - dois anéis carregados**

Dois anéis de raio  $R$ , ambos com centro sobre o eixo  $z$  e paralelos ao plano  $xy$ , estão eletricamente carregados. O anel 1, com densidade linear  $\lambda$  constante e positiva, está situado no plano  $z = -b$  e o anel 2, com densidade linear  $-\lambda$  constante e negativa, está no plano  $z = b$ . Neste exemplo determinamos o campo elétrico  $\vec{E}$ , criado pelo sistema, ao longo do eixo  $z$ . Este problema pode ser resolvido a partir do resultado (9.10), pois o princípio da superposição permite escrever  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ , com

$$\vec{E}_1(0, 0, Z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z + b}{(R^2 + (Z + b)^2)^{3/2}} \hat{k}, \quad (9.19)$$

$$\vec{E}_2(0, 0, Z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z - b}{(R^2 + (Z - b)^2)^{3/2}} \hat{k}, \quad (9.20)$$

Efetuada a soma, obtemos

$$\vec{E}(0, 0, Z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Z + b}{(R^2 + (Z + b)^2)^{3/2}} - \frac{Z - b}{(R^2 + (Z - b)^2)^{3/2}} \right] \hat{k}. \quad (9.21)$$

No caso  $b \rightarrow 0$ , que corresponde aos dois anéis com cargas opostas estarem superpostos,  $\vec{E} \rightarrow 0$ , como esperado.

• **exemplo 3 - anel com densidade de carga variável**

Calculamos, agora, o campo elétrico criado por um anel de raio  $R$ , carregado com densidade linear de carga  $\lambda = \alpha \cos\theta$ , sendo  $\alpha$  uma constante positiva, em um ponto  $P = (0, 0, Z)$  do seu eixo. O anel está no plano  $xy$ , com centro na origem do sistema de coordenadas, como mostra fig.9.2.

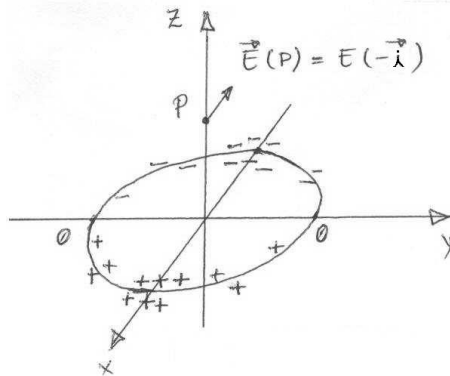


Figura 9.2: O campo aponta na direção  $-x$ , o que é coerente com a geometria da distribuição de cargas.



Para calcular o campo, dividimos o anel em pedacinhos matemáticos de comprimento  $R d\theta$ , que contêm carga

$$dq = \lambda R d\theta = \alpha R \cos\theta d\theta . \quad (9.22)$$

As posições do ponto P e do elemento de carga  $dq$  são dadas por

$$\vec{r}_P = Z \hat{k} \quad (9.23)$$

$$\vec{r}_q = R \cos\theta \hat{i} + R \sin\theta \hat{j} . \quad (9.24)$$

O campo  $d\vec{E}$  criado pela carga  $dq$  em P é obtido a partir da expressão coulombiana, dada por (8.21), e tem a forma

$$d\vec{E} = \frac{\alpha R \cos\theta d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-R \cos\theta \hat{i} - R \sin\theta \hat{j} + Z \hat{k})}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} . \quad (9.25)$$

O campo criado por todos os pedaços do anel é dado por

$$\vec{E} = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\alpha R \cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-R \cos\theta \hat{i} - R \sin\theta \hat{j} + Z \hat{k})}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \quad (9.26)$$

com as componentes

$$E_x = -\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \cos^2\theta = -\frac{\alpha \pi}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} , \quad (9.27)$$

$$E_y = -\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \cos\theta \sin\theta = 0 , \quad (9.28)$$

$$E_z = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \frac{R Z}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \cos\theta , \quad (9.29)$$

sendo que a integração em (9.27) foi feita usando  $\cos^2\theta = [1 + \cos(2\theta)]/2$ . Assim, obtemos

$$\vec{E}(0, 0, Z) = -\frac{\alpha \pi}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \hat{i} . \quad (9.30)$$

Este resultado indica que, no ponto P, o campo elétrico aponta na direção  $-\hat{i}$ . Para desenvolver uma intuição acerca deste resultado, veja o exercício 1.

#### • exemplo 4

Neste caso, consideramos novamente a distribuição de cargas do exemplo 3, com o propósito de determinar o campo elétrico criado no ponto P = (0, 0, Z) pela metade da distribuição situada à frente do plano  $yz$ , na região  $x > 0$ .

O cálculo do campo elétrico é totalmente análogo ao do exemplo anterior até a eq.(9.26), onde a integração deve ser feita no intervalo  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ . Neste caso, os resultados do apêndice ?? fornecem

$$E_x = -\frac{\alpha \pi}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{2(R^2 + Z^2)^{3/2}}, \quad (9.31)$$

$$E_y = 0, \quad (9.32)$$

$$E_z = \frac{2\alpha}{4\pi\epsilon_0} \frac{RZ}{(R^2 + Z^2)^{3/2}}. \quad (9.33)$$

e o campo resultante tem a forma

$$\vec{E}(0, 0, Z) = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \left[ -\frac{\pi R}{2} \hat{i} + 2Z \hat{k} \right]. \quad (9.34)$$

### • exercícios

1. Para a situação discutida no exemplo 3, faça um desenho em perspectiva mostrando as direções e sentidos dos campos criados em P por pedacinhos de carga contidos em cada um dos quatro quadrantes do anel. Convença-se que o campo resultante está, de fato, na direção  $-\hat{i}$ , como indica o resultado (9.31).
2. Considere a distribuição de cargas do exemplo 3 e calcule o campo elétrico criado no ponto P = (0, 0, Z) pela metade do anel situada à direita do plano  $xz$ .
3. Considere um anel de raio  $R$ , carregado com densidade linear  $\lambda = \alpha \sin \theta$ , sendo  $\alpha$  uma constante positiva.
  - a) Faça um desenho da distribuição de cargas.
  - b) Calcule o vetor campo elétrico no eixo do anel.

### • respostas

2.  $\vec{E} = -\frac{\alpha \pi}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{2(R^2 + Z^2)^{3/2}} \hat{i}$ .
3. b)  $\vec{E} = -\frac{\alpha \pi}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \hat{j}$ ; confronte o seu desenho do item a) com a fig.9.2 e convença-se que este resultado é razoável, quando comparado à eq.(9.31).

# Capítulo 10

## princípio da superposição: distribuições bi e tridimensionais

### • exemplo 1 - disco uniformemente carregado

Um disco de raio  $R$ , situado no plano  $xy$ , com centro na origem do sistema de coordenadas e mostrado na fig.10.1, está carregado com uma densidade de carga  $\sigma$ , constante e positiva. Desejamos calcular o campo elétrico criado pelo disco em um ponto  $P$  do eixo  $z$ , de coordenadas  $(0, 0, Z)$ .

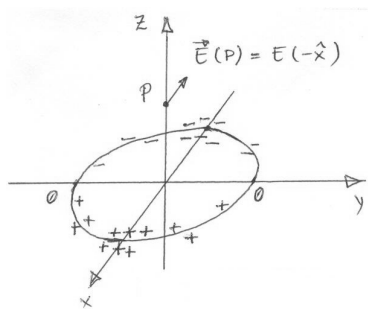


Figura 10.1: Disco carregado.

Devido à simetria axial da distribuição de cargas, trabalhamos em coordenadas cilíndricas. A carga  $dq$  em um elemento de superfície  $dS$  é dada por

$$dq = \sigma dS = \sigma r dr d\theta . \quad (10.1)$$

As posições do ponto de observação  $P$  e do elemento de carga são dadas pelos vetores

$$\vec{r}_P = Z \hat{k} , \quad (10.2)$$

$$\vec{r}_q = r \cos\theta \hat{i} + r \sin\theta \hat{j} . \quad (10.3)$$

Considerando  $dq$  como uma carga puntiforme, escrevemos o seu campo como

$$d\vec{E} = \frac{\sigma r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-r\cos\theta \hat{i} - r\sin\theta \hat{j} + Z \hat{k}}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} \right]. \quad (10.4)$$

O campo elétrico criado pelo disco é dado por

$$\vec{E} = \iint_{\text{disco}} d\vec{E} = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sigma r}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-r\cos\theta \hat{i} - r\sin\theta \hat{j} + Z \hat{k}}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} \right] \quad (10.5)$$

e tem a estrutura

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}, \quad (10.6)$$

com

$$E_x = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sigma r}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-r\cos\theta)}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} = 0, \quad (10.7)$$

$$E_y = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sigma r}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-r\sin\theta)}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} = 0, \quad (10.8)$$

$$E_z = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sigma r}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{|Z|} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/Z^2}} \right], \quad (10.9)$$

sendo que, na última expressão, a integração foi feita usando a variável  $u = r^2 + Z^2$ . Lembrando que a carga total do disco é  $q = \pi R^2 \sigma$ , obtemos o campo resultante, dado por

$$\vec{E}(0, 0, Z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2}{R^2} \right) \frac{Z}{|Z|} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/Z^2}} \right] \hat{k}. \quad (10.10)$$

Este resultado descreve o campo criado pelo disco em qualquer ponto do eixo  $z$ .

- **limite**  $|Z| \gg R$

Quando o ponto  $Z$  de observação do campo for muito maior do que o raio do disco, seu campo deve tender ao de uma carga puntiforme. De fato, para  $Z \gg R$ , podemos usar o resultado aproximado discutido no apêndice ??.

$$\frac{1}{\sqrt{1 + R^2/Z^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{Z^2}, \quad (10.11)$$

e reescrever a eq.(10.10) como

$$\vec{E}(0, 0, |Z| \gg R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2}{R^2} \right) \frac{Z}{|Z|} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{R^2}{2Z^2} \right) \right] \hat{k} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{Z^2} \frac{Z}{|Z|} \hat{k}; \quad (10.12)$$

que é o campo de uma carga puntiforme  $q$  em um ponto P do eixo  $z$ .

- **limite  $Z \rightarrow 0$**

Para pontos muito próximos do disco, no limite  $Z \rightarrow 0$ , é mais conveniente usarmos a eq.(10.9), para escrever

$$\vec{E}(0, 0, Z \rightarrow 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{Z}{|Z|} \hat{k}, \quad (10.13)$$

e o campo independe do raio  $R$ .

- **exemplo 2 - disco com densidade de carga variável**

Um disco de raio  $R$ , situado no plano  $xy$  e com centro na origem do sistema de coordenadas, está carregado com uma densidade de carga  $\sigma = \alpha(1 - r^2/R^2)$ , onde  $\alpha$  é uma constante positiva e  $r$  é a distância ao centro do disco. Nosso objetivo é calcular o campo elétrico num ponto P do eixo  $z$ , de coordenadas  $(0, 0, Z)$ .

A carga contida em um elemento de área  $dS$  é dada por

$$dq = \sigma r dr d\theta = \alpha \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr d\theta. \quad (10.14)$$

Os vetores  $\vec{r}_P$  e  $\vec{r}_q$  são dados pelas eqs.(10.2) e (10.3) e a contribuição de um elemento de carga para o campo é escrita como

$$d\vec{E} = \frac{\alpha(1 - r^2/R^2) r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-r\cos\theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + Z \hat{k}}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} \right]. \quad (10.15)$$

O campo resultante tem a forma

$$\vec{E} = \iint_{\text{disco}} d\vec{E} = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\alpha (1 - r^2/R^2) r}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-r\cos\theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + Z \hat{k}}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} \right] \quad (10.16)$$

e suas componentes são

$$E_x = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\alpha (1 - r^2/R^2) r}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-r\cos\theta)}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} = 0, \quad (10.17)$$

$$E_y = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\alpha (1 - r^2/R^2) r}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-r\sin\theta)}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} = 0, \quad (10.18)$$

$$\begin{aligned} E_z &= \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\alpha (1 - r^2/R^2) r}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} = \frac{2\pi\alpha Z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr \frac{(r - r^3/R^2)}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2\pi\alpha Z}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{\sqrt{r^2 + Z^2}} - \frac{1}{R^2} \left( \sqrt{r^2 + Z^2} + \frac{Z^2}{\sqrt{r^2 + Z^2}} \right) \right] \Big|_0^R, \end{aligned} \quad (10.19)$$

sendo que a integração em  $E_z$  sobre  $r$  foi efetuada com o auxílio da variável  $u = r^2 + Z^2$ .

Assim, o campo elétrico do disco sobre um ponto P do eixo  $z$  é dado por

$$\vec{E}(0, 0, Z) = \frac{2\pi\alpha}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{R^2} \left[ -2\sqrt{R^2 + Z^2} + \frac{2Z^2 + R^2}{|Z|} \right] \hat{k}. \quad (10.20)$$

Este resultado pode ser reexpresso em termos da carga total  $q$  do disco, que é dada por

$$q = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta r \alpha \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = \alpha \frac{\pi R^2}{2}. \quad (10.21)$$

Assim,

$$\vec{E}(0, 0, Z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Z}{R^2} \left[ -2\sqrt{R^2 + Z^2} + \frac{2Z^2 + R^2}{|Z|} \right] \hat{k}. \quad (10.22)$$

• **limite**  $|Z| \gg R$

Para analisar o limite  $Z \gg R$ , escrevemos  $\sqrt{R^2 + Z^2} = |Z| \sqrt{1 + R^2/Z^2}$  e expandimos a raiz quadrada da eq.(10.22) até terceira ordem, usando o resultado (??) do apêndice ??,

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, \quad (10.23)$$

com  $x = R^2/Z^2$ . Assim, o campo a grandes distâncias do disco é dado por

$$\vec{E}(0, 0, |Z| \gg R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{|Z|^2} \hat{k}, \quad (10.24)$$

que é o campo de uma carga puntiforme  $q$ .

• exemplo 3 - coroa circular

Uma coroa circular, situada no plano  $xy$ , com centro na origem e raios interno e externo iguais a  $a$  e  $b$ , respectivamente, está carregada com uma densidade superficial de carga  $\sigma = \alpha r \sin \theta$ , onde  $\alpha$  é uma constante positiva e  $\theta$  é o ângulo medido em relação ao eixo  $x$ . Nosso objetivo é calcular o campo elétrico criado por esta distribuição de cargas em um ponto  $P = (0, 0, Z)$  do eixo  $z$ .

A densidade de cargas é positiva no intervalo  $0 < \theta < \pi$  e negativa para  $\pi < \theta < 2\pi$ . A carga contida em um elemento de área  $dS$  é dada por

$$dq = \sigma dS = [\alpha r \sin \theta] r dr d\theta . \quad (10.25)$$

Os vetores  $\vec{r}_P$  e  $\vec{r}_q$  são dados pelas eqs.(10.2) e (10.3) e o campo de  $dq$  é escrito como

$$d\vec{E} = \frac{\alpha r^2 \sin \theta dr d\theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-r \cos\theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + Z \hat{k}}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} \right] . \quad (10.26)$$

O campo resultante é determinado pela soma das contribuições  $d\vec{E}$

$$\vec{E} = \int_a^b dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\alpha r^2 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-r \cos\theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + Z \hat{k}}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} \right] , \quad (10.27)$$

com as componentes

$$E_x = \int_a^b dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\alpha r^2 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-r \cos\theta)}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} = 0 , \quad (10.28)$$

$$\begin{aligned} E_y &= \int_a^b dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\alpha r^2 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-r \sin \theta)}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \pi \int_a^b dr \frac{r^3}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} = -\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \pi \left[ \frac{b^2 + 2 Z^2}{\sqrt{b^2 + Z^2}} - \frac{a^2 + 2 Z^2}{\sqrt{a^2 + Z^2}} \right] \end{aligned} \quad (10.29)$$

$$E_z = \int_a^b dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\alpha r^2 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} = 0 . \quad (10.30)$$

sendo que a integração de  $E_y$  em  $\theta$  foi feita usando  $\sin^2\theta = [1 - \cos(2\theta)]/2$  e a parte radial com o auxílio da variável  $u = r^2 + Z^2$ .

Estes resultados mostram que o campo elétrico da coroa circular sobre um ponto  $P$  do eixo  $z$  aponta na direção  $-\hat{j}$  e é dado por

$$\vec{E}(0, 0, Z) = -\frac{\alpha \pi}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{b^2 + 2 Z^2}{\sqrt{b^2 + Z^2}} - \frac{a^2 + 2 Z^2}{\sqrt{a^2 + Z^2}} \right] \hat{j} . \quad (10.31)$$

• exemplo 4 - meia superfície esférica

Uma superfície semi esférica de raio  $R$ , com centro na origem do sistema de coordenadas e situada na região  $z < 0$ , como mostra a fig.10.2, está carregada com densidade de carga  $\sigma$ , constante e positiva. Nosso objetivo é calcular o campo elétrico criado por esta distribuição na origem.

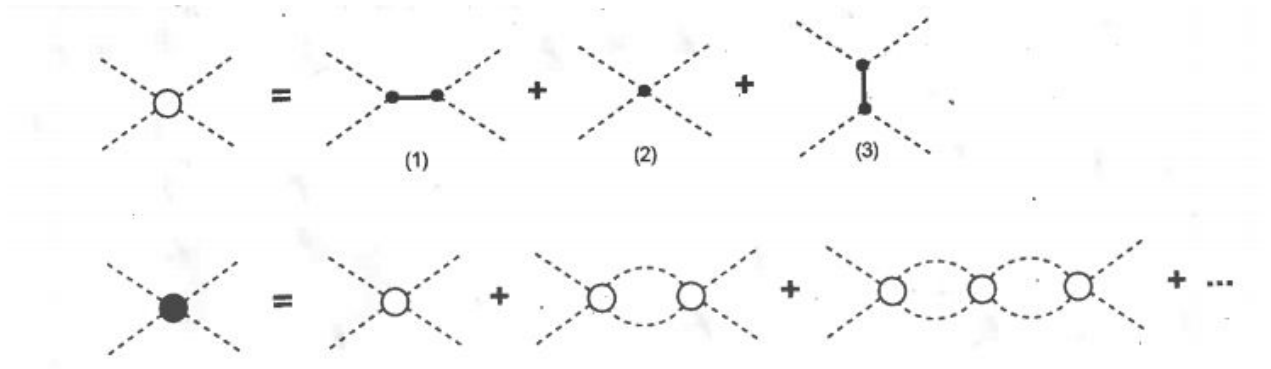


Figura 10.2: Meia superfície esférica carregada

A carga contida em um elemento de área  $dS$  é dada por

$$dq = \sigma dS = \sigma R^2 \sin \theta d\theta d\phi . \quad (10.32)$$

Os vetores do ponto P de observação e do elemento de carga são dados por

$$\vec{r}_P = 0 , \quad (10.33)$$

$$\vec{r}_q = R \cos \phi \sin \theta \hat{i} + R \sin \phi \sin \theta \hat{j} + R \cos \theta \hat{k} . \quad (10.34)$$

O campo de  $dq$  é dado por

$$d\vec{E} = \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-R \cos \phi \sin \theta \hat{i} - R \sin \phi \sin \theta \hat{j} - R \cos \theta \hat{k}}{R^3} \right] \quad (10.35)$$

e o campo total é

$$\vec{E} = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sigma \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} [-\cos \phi \sin \theta \hat{i} - \sin \phi \sin \theta \hat{j} - \cos \theta \hat{k}] , \quad (10.36)$$



com as componentes

$$E_x = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sigma \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} [-\cos\phi \sin \theta] = 0, \quad (10.37)$$

$$E_y = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sigma \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} [-\sin \phi \sin \theta] = 0, \quad (10.38)$$

$$\begin{aligned} E_z &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sigma \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} [-\cos\theta] \\ &= -\frac{2\pi \sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin(2\theta)}{2} = \frac{\pi \sigma}{4\pi\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Deste modo, o campo elétrico da meia superfície esférica na origem do sistema de coordenadas aponta na direção  $z$  e é dado por

$$\vec{E}(0, 0, 0) = \frac{\pi \sigma}{4\pi\epsilon_0} \hat{k} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R^2} \hat{k}, \quad (10.40)$$

onde usamos a carga total  $q = 2\pi R^2$ .

### • exemplo 5 - cilindro uniformemente carregado

Um cilindro de raio  $R$  e altura  $H$ , carregado com uma densidade de carga  $\rho$ , constante e positiva, tem sua base sobre o plano  $xy$ , com centro na origem do sistema de coordenadas, como mostra a fig.10.3. Desejamos calcular o campo elétrico em um ponto  $P = (0, 0, Z)$  do eixo  $Z$ , com  $Z > H$ .

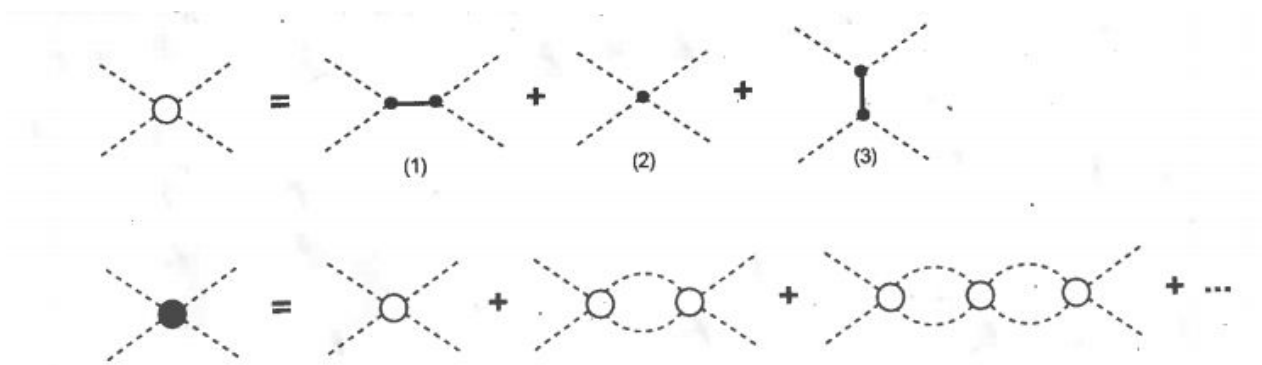


Figura 10.3: Cilindro carregado

A quantidade de carga contida em um elemento de volume  $dV$  é dada por

$$dq = \rho r dr d\theta dz \quad (10.41)$$

e as posições do ponto P e do elemento de carga são dadas por

$$\vec{r}_P = Z \hat{k} , \quad (10.42)$$

$$\vec{r}_q = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} + z \hat{k} . \quad (10.43)$$

O elemento de campo tem a forma

$$d\vec{E} = \frac{\rho r dr d\theta dz}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + (Z - z) \hat{k}}{[r^2 + (Z - z)^2]^{3/2}} \right] \quad (10.44)$$

e o campo resultante é dado por

$$\vec{E} = \int_{\text{cilindro}} d\vec{E} = \int_0^H dz \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho r}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + (Z - z) \hat{k}}{[r^2 + (Z - z)^2]^{3/2}} \right] , \quad (10.45)$$

com componentes

$$E_x = \int_0^H dz \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho r}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-r \cos \theta)}{[r^2 + (Z - z)^2]^{3/2}} = 0 , \quad (10.46)$$

$$E_y = \int_0^H dz \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho r}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-r \sin \theta)}{[r^2 + (Z - z)^2]^{3/2}} = 0 , \quad (10.47)$$

$$\begin{aligned} E_z &= \int_0^H dz \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho r}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Z - z)}{[r^2 + (Z - z)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{2\pi \rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^H dz \int_0^R dr r \frac{(Z - z)}{[r^2 + (Z - z)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{2\pi \rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^H dz \left[ -\frac{(Z - z)}{\sqrt{R^2 + (Z - z)^2}} + \frac{(Z - z)}{|Z - z|} \right] . \end{aligned} \quad (10.48)$$

Para calcular a integral de  $E_z$  em  $r$ , usamos a variável  $u = r^2 + (Z - z)^2$  e para a integração em  $z$ , empregamos  $v = R^2 + (Z - z)^2$ . Lembrando que estamos interessados apenas no caso  $Z > H$ , para o qual  $z$  é sempre menor do que  $Z$  entre os limites de integração, obtemos

$$\vec{E}(0, 0, Z > H) = \frac{2\pi\rho}{4\pi\epsilon_0} \left[ H + \sqrt{R^2 + (Z - H)^2} - \sqrt{R^2 + Z^2} \right] \hat{k} . \quad (10.49)$$

Este é o resultado para o campo do cilindro em um ponto P do eixo  $z$  acima dele. Como a densidade de carga  $\rho$  é uniforme, a carga total no cilindro é  $q = \rho(\pi R^2 H)$  e este campo pode ser reexpresso por

$$\vec{E}(0, 0, Z > H) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{R^2 H} \left[ H + \sqrt{R^2 + (Z - H)^2} - \sqrt{R^2 + Z^2} \right] \hat{k} . \quad (10.50)$$

- limite  $|Z| \gg R$

No limite  $Z \gg R$ , a eq.(10.41) deve se redizer à expressão de Coulomb para uma carga puntiforme. Para mostrar isto consideramos, inicialmente, o limite  $Z \gg R$ , escrevendo  $\sqrt{R^2 + (Z + H)^2} = |Z + H| \sqrt{1 + R^2/(Z + H)^2}$ ,  $\sqrt{R^2 + Z^2} = |Z| \sqrt{1 + R^2/Z^2}$ , expandimos as raízes quadradas até segunda ordem, usando o resultado (10.23), e o campo tem a forma

$$\vec{E}(0, 0, R \ll Z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{H} \left[ \frac{1}{|Z - H|} - \frac{1}{|Z|} \right] \hat{k}. \quad (10.51)$$

Em seguida, tomamos o limite  $Z \gg H$  e usamos a relação ??

$$\frac{1}{1 - x} \simeq 1 + x. \quad (10.52)$$

Lembrando que estamos considerando o caso  $Z > H$ , obtemos o resultado esperado

$$\vec{E}(0, 0, R \ll Z, H \ll Z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{Z^2} \hat{k}. \quad (10.53)$$

- **exercícios:**

1. Calcule o campo do disco do exemplo 1 considerando-o como uma superposição de anéis, usando o resultado (9.10).
2. É dado um cilindro de raio  $R$  e altura  $H$ , carregado com uma densidade volumétrica de carga  $\rho$ , constante e positiva, como o representado na fig.10.3. Mostre que o campo do disco, eq.(10.10), pode ser obtido a partir da eq.(10.50), no limite  $H \rightarrow 0$ .



# Capítulo 11

## fluxo do campo elétrico

### • introdução

As características dos campos elétricos de distribuições de cargas em repouso podem ser conhecidas por meio do princípio de superposição de campos, partindo da expressão do campo elétrico  $d\vec{E}$  no ponto  $P$ , devido ao elemento infinitesimal de carga  $dq$ , dada na eq. (8.1)

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|^3}$$

sendo  $\vec{r}_P$  e  $\vec{r}_q$  os vetores posição do ponto  $P$  e do elemento carga  $dq$ . Essa expressão foi obtida a partir da lei de Coulomb para a interação entre duas cargas puntiformes em repouso.

Embora a lei de Coulomb tenha um papel importante no eletromagnetismo, ela não aparece na descrição da estrutura da teoria eletromagnética apresentada na segunda aula. A razão é que a teoria descreve a relação entre campos e cargas, independentemente do seu estado de movimento, ou seja, tanto em repouso, como em movimento uniforme ou acelerado. Como a lei de Coulomb tem domínio limitado, mesmo sendo muito boa dentro desse domínio, ela não é uma das leis fundamentais do eletromagnetismo.

Como mencionado na aula 2, as leis básicas que descrevem os campos produzidos por cargas e correntes são quatro e estão reunidas nas equações de Maxwell, mostradas na tabela 11.1.

Lei	Conteúdo	Representação
Gauss elétrica	Cargas elétricas criam campos elétricos	$q \rightarrow \vec{E}$
Faraday	Variações temporais de campos magnéticos criam campos elétricos	$\frac{\vec{B}}{t} \rightarrow \vec{E}$
Ampère	Correntes e variações temporais de campos elétricos criam campos magnéticos	$I \rightarrow \vec{B}$
Maxwell		$\frac{\vec{E}}{t} \rightarrow \vec{B}$
Gauss magnética	não existem cargas magnéticas	$\nabla \cdot q_{mag}$

Tabela 11.1: As leis do eletromagnetismo e seus conteúdos.

A primeira equação de Maxwell que abordamos é a *lei de Gauss elétrica na forma integral*. Esta lei relaciona cargas elétricas a campos elétricos e é válida para qualquer sistema eletromagnético.

### • fluxo de um vetor

A lei de Gauss é formulada em termos do *fluxo do vetor campo elétrico sobre uma superfície fechada*. Por isso, antes de estudar esta lei, discutimos o conceito genérico de fluxo de um vetor sobre uma superfície.

A noção de fluxo de um vetor foi desenvolvida na mecânica dos fluídos, com o propósito de descrever, de modo preciso, a quantidade de líquido ou gás que passa sobre uma superfície. A ideia é análoga à que utilizamos para quantificar o número de pessoas que atravessam a porta de uma estação de metrô. Como sabemos, pessoas não atravessam superfícies materiais. Por isso, para contar o número de pessoas que atravessam a porta da estação, costumamos empregar uma *superfície matemática* apoiada nos batentes desta porta e contamos o número de pessoas que atravessam esta superfície. Na estação do metrô há, em geral, pessoas entrando e saindo ao mesmo tempo.

Para poder descrever este tipo de situação costumamos, também, associar um versor  $\hat{n}$  à superfície matemática, que pode tanto ser orientado para dentro como para fora da estação. Supondo que o tenhamos orientado para fora da estação, como na fig.11.1(a), pessoas que saem da estação se movem paralelamente a  $\hat{n}$  e dão origem a um fluxo positivo, enquanto que pessoas que entram correspondem a fluxos negativos.

Superfícies acopladas a vetores são chamadas de *superfícies orientadas*. Se a superfície for plana, basta grudar um versor  $\hat{n}$  a um dos seus lados, como na fig.11.1(b). Se ela for curva, o versor  $\hat{n}$  em cada ponto é escolhido como sendo perpendicular ao plano tangente à superfície naquele ponto, como na fig.11.1(c). Uma superfície orientada qualquer pode ser pensada como sendo constituída por elementos  $dS$ , planos, cada um deles associado a uma normal.

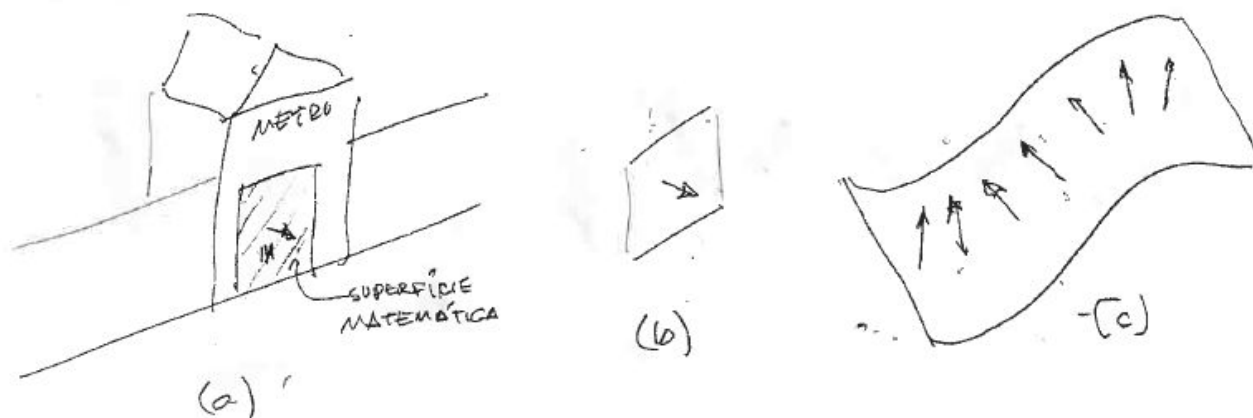


Figura 11.1: (a) Superfície matemática na porta do metrô e a sua normal orientada para fora; (b) Superfície plana orientada; (c) Superfície curva orientada e as normais em vários pontos.

No seu sentido comum, a palavra fluxo sugere que algo está passando de um lado para o outro de uma superfície matemática, e falamos em fluxo de pessoas, fluxo de água, fluxo de calor ou mesmo, em fluxo de conhecimento. No caso da física, entretanto, a palavra é usada de modo distinto, pois é aplicada a campos vetoriais. No caso de um campo qualquer descrito por um vetor  $\vec{\kappa}$ , seja ele gravitacional, elétrico ou magnético, o conceito de fluxo de um vetor sobre uma superfície visa descrever, quanto este vetor espeta uma superfície matemática colocada na região onde ele existe. Por isso, no eletromagnetismo, falamos de fluxo de um vetor *sobre* uma superfície e, não, *através* de uma superfície. Neste contexto, a palavra fluxo se desvia um pouco do seu significado coloquial, embora continue a ser empregada por razões históricas.

De modo geral, o fluxo de um vetor qualquer  $\vec{\kappa}$  sobre elemento de superfície  $dS$  é definido por

$$d\Phi_{\vec{\kappa}} = \vec{\kappa} \cdot \hat{n} dS \quad (11.1)$$

onde  $dS$  é a área do elemento de superfície e  $\hat{n}$  é o versor normal a ela. De acordo com ela, o fluxo de  $\vec{\kappa}$  sobre  $dS$  é nulo quando  $\vec{\kappa}$  e  $\hat{n}$  são ortogonais, o que ocorre quando  $\vec{\kappa}$  é paralelo à superfície. Isso corresponde à idéia intuitiva de que um vetor paralelo a uma superfície não a espeta. Por outro lado, o fluxo será tanto maior numericamente quanto mais próximo da perpendicular à superfície for o vetor  $\vec{\kappa}$ . É muito importante notar que, apesar de depender das orientações de  $\vec{\kappa}$  e  $\hat{n}$ , o fluxo é uma grandeza escalar positiva ou negativa, dependendo do ângulo entre  $\vec{\kappa}$  e  $\hat{n}$ .

O fluxo total de um vetor através de uma superfície  $S$  qualquer é dado pela soma dos fluxos sobre os elementos dessa superfície. Ou seja,

$$\Phi_{\vec{\kappa}} = \iint_S d\Phi_{\vec{\kappa}} = \iint_S \vec{\kappa} \cdot \hat{n} dS, \quad (11.2)$$

onde a integração deve varrer toda a superfície  $S$ .

• exemplo 1

Calculamos o fluxo do campo gravitacional  $\vec{g}$  na superfície da Terra, sobre uma superfície matemática horizontal de lados  $a$  e  $b$ , mostrada na fig.11.2.

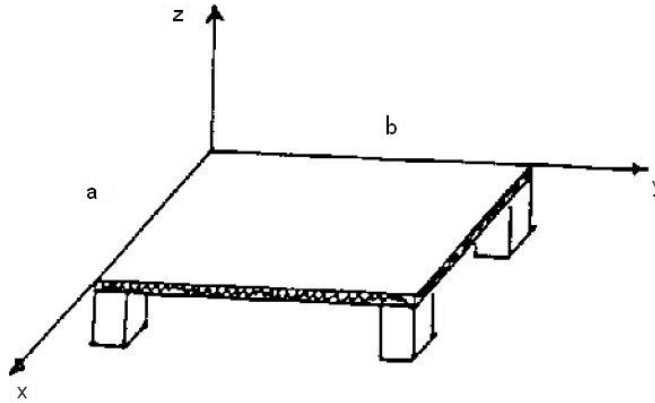


Figura 11.2: O referencial e a superfície matemática.

Usando o sistema de referência da figura, o campo gravitacional é descrito por

$$\vec{g} = -g \hat{k}. \quad (11.3)$$

Como a superfície é plana, a normal a cada um dos seus elementos é a mesma, sendo paralela ao vetor  $\hat{k}$ . Para uma superfície aberta, como a da fig.11.2, há duas escolhas possíveis para a normal:  $+\hat{k}$  e  $-\hat{k}$ . Escolhendo a normal no sentido  $+\hat{k}$  e notando que o elemento de superfície é dado por  $dS = dxdy$ , o elemento de fluxo de  $\vec{g}$  sobre a superfície  $dS$  é dada por

$$d\Phi_{\vec{g}} = (-g \hat{k}) \cdot \hat{k} dS = -g dxdy. \quad (11.4)$$

O fluxo total através da superfície da mesa vale, então,

$$\Phi_{\vec{g}} = \iint_S d\Phi_{\vec{g}} = \int_0^b dy \int_0^a dx (-g) = -g ab, \quad (11.5)$$

sendo que o sinal negativo indica que o campo gravitacional espeta a superfície no sentido oposto ao do escolhido para a normal à superfície. No SI, a unidade de fluxo de campo gravitacional é  $m^3/s^2$ .

• exemplo 2

Cálculo do fluxo do campo gravitacional  $\vec{g}$  na superfície da Terra, sobre uma superfície matemática plana e retangular, de lados  $a$  e  $b$ , inclinada do ângulo  $\alpha$  relativamente à horizontal, como na fig.11.3.



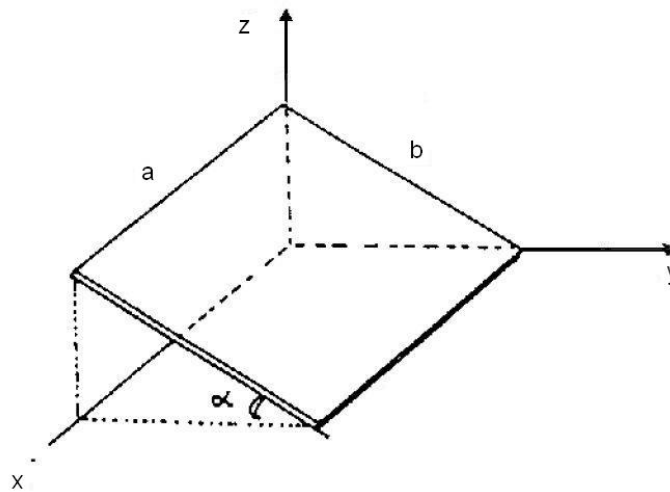


Figura 11.3: O referencial e a superfície inclinada.

O campo gravitacional é

$$\vec{g} = -g \hat{k} . \quad (11.6)$$

Escolhendo a normal para cima temos

$$\hat{n} = \text{sen } \alpha \hat{j} + \text{cos } \alpha \hat{k} \quad (11.7)$$

e sendo  $dS = dx dl$ , onde  $dl$  é um elemento de comprimento paralelo ao lado  $b$ , o elemento do fluxo sobre  $dS$  vale

$$d\Phi_{\vec{g}} = (-g \hat{k}) \cdot (\text{sen } \alpha \hat{j} + \text{cos } \alpha \hat{k}) dS = -g \text{cos } \alpha dx dl . \quad (11.8)$$

O fluxo total sobre a superfície inclinada é dado por:

$$\Phi_{\vec{g}} = \int_0^b dl \int_0^a dx [-g \text{cos } \alpha] = -g ab \text{cos } \alpha . \quad (11.9)$$

Note que, para  $\alpha = 0$  obtemos o resultado do exemplo anterior. Por outro lado, o fluxo se anula quando  $\alpha = 90^\circ$ , uma vez que, neste caso, o campo gravitacional não fura a superfície.

### • exemplo 3

Cálculo do fluxo do campo vetorial  $\vec{F} = \alpha x \hat{i} + \beta x \hat{j} + \gamma xy \hat{k}$ , onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes, sobre a superfície da fig.11.4, considerando as normais nos vários trechos apontando no sentido positivo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Neste particular problema é conveniente considerar separadamente as contribuições dos fluxos através de cada uma das superfícies, 1, 2 e 3 da figura e escrevemos

$$\Phi_{\vec{F}} = \Phi_{\vec{F}}^1 + \Phi_{\vec{F}}^2 + \Phi_{\vec{F}}^3 \quad (11.10)$$

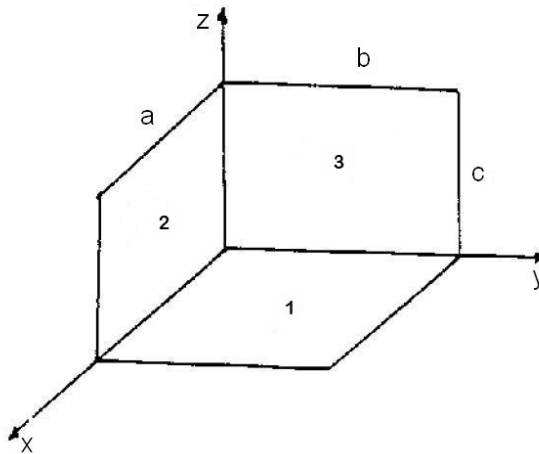


Figura 11.4: A superfície sobre a qual calculamos o fluxo.

Os elementos de superfície são  $dS^1 = dx dy$ ,  $dS^2 = dx dz$  e  $dS^3 = dy dz$  e as normais são  $\hat{n}^1 = \hat{k}$ ,  $\hat{n}^2 = \hat{j}$  e  $\hat{n}^3 = \hat{i}$ .

De modo geral, o fluxo é dado por  $d\Phi_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \hat{n} dS$  e, no presente caso, temos

$$d\Phi_{\vec{F}}^1 = \vec{F} \cdot \hat{n}^1 dS^1 = \gamma x y dx dy, \quad (11.11)$$

$$d\Phi_{\vec{F}}^2 = \vec{F} \cdot \hat{n}^2 dS^2 = \beta x dx dz, \quad (11.12)$$

$$d\Phi_{\vec{F}}^3 = \vec{F} \cdot \hat{n}^3 dS^3 = \alpha x dy dz. \quad (11.13)$$

Os vários fluxos são dados por

$$\Phi_{\vec{F}}^1 = \int_0^b dy \int_0^a dx [-\gamma xy] = \gamma \frac{a^2 b^2}{4}, \quad (11.14)$$

$$\Phi_{\vec{F}}^2 = \int_0^c dz \int_0^a dx [\beta x] = \beta \frac{a^2 c}{2}, \quad (11.15)$$

$$\Phi_{\vec{F}}^3 = \int_0^c dz \int_0^b dy [\alpha x] = 0. \quad (11.16)$$

Na eq.(11.16) usamos o fato que, ao longo da superfície 3,  $x = 0$ . Assim, o fluxo total é dado por

$$\Phi_{\vec{F}} = \gamma \frac{a^2 b^2}{4} + \beta \frac{a^2 c}{2} \quad (11.17)$$

#### • exemplo 4

Calculamos o fluxo do campo elétrico de uma carga  $q$ , puntiforme e positiva, situada na origem do sistema de coordenadas, sobre uma superfície circular de raio  $a$ , paralela ao plano  $xy$ , cujo centro está sobre o eixo  $z$  e dista  $h$  da origem, indicada na fig.11.5.

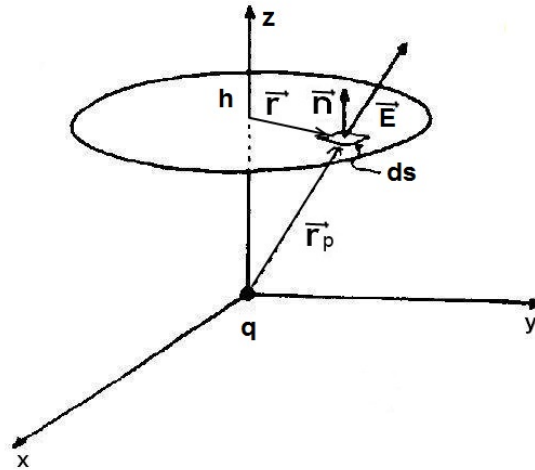


Figura 11.5: A carga  $q$  e a superfície circular com centro no eixo  $z$ , distante  $h$  da carga.

Como existe simetria em torno do eixo  $z$ , é conveniente o uso de coordenadas cilíndricas. Para calcular o fluxo dividimos a superfície em elementos de lados  $dr$  e  $r d\theta$ , com área  $dS = r dr d\theta$ . Escolhendo a normal no sentido positivo de  $z$ , temos  $\hat{n} = \hat{k}$ . Assim, um elemento de superfície orientada é descrito por

$$\hat{n} dS = r dr d\theta \hat{k}. \quad (11.18)$$

O campo elétrico da carga  $q$  em um ponto P genérico é dado por (eq.8.1)

$$\vec{E}_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|^3},$$

e neste caso específico a carga está na origem e  $\vec{r}_q = 0$ . O vetor posição de um ponto P sobre a superfície circular pode ser escrito na forma:

$$\vec{r}_P = \vec{r} + h \hat{k}, \quad (11.19)$$

sendo  $\vec{r}$  o vetor paralelo ao plano  $x, y$  que liga o eixo  $z$  ao ponto P. Assim,

$$\vec{E}_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} + h \hat{k}}{(r^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (11.20)$$

O fluxo sobre um elemento de superfície elementar é dado por

$$\begin{aligned} d\Phi_{\vec{E}} &= \vec{E} \cdot \hat{n} dS \\ &= \left[ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} + h \hat{k}}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \right] \cdot \left[ r dr d\theta \hat{k} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{hr dr d\theta}{(r^2 + h^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (11.21)$$

O fluxo total sobre a superfície circular vale

$$\Phi_{\vec{E}} = \iint_S d\Phi_{\vec{E}} = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{hr}{(r^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (11.22)$$

O integrando não depende de  $\theta$  e a integral nessa variável produz um fator  $2\pi$ . Assim,

$$\begin{aligned}\Phi_{\vec{E}} &= \frac{2\pi q h}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a dr \frac{r}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = \\ &= -\frac{2\pi q h}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r^2 + h^2)^{1/2}} \Big|_0^a = \\ &= \frac{q}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (a/h)^2}} \right].\end{aligned}\quad (11.23)$$

Este resultado tem várias características interessantes. O fluxo é positivo para uma carga positiva e negativo para carga negativa, condizente com o fato de o campo espetar a superfície no sentido da normal no caso de carga  $q > 0$ , ou no sentido oposto no caso de  $q < 0$ . Como esperado, o fluxo se anula quando  $a$  tende a zero, porque o fluxo sobre uma superfície de área nula é necessariamente nulo. Ele também se anula quando  $h$  é muito grande, porque a intensidade do campo elétrico diminui com a distância.

#### • exemplo 5

Cálculo do fluxo do campo elétrico de uma carga  $q$ , puntiforme e positiva, situada na origem do sistema de coordenadas, sobre uma calota esférica de raio  $R$ , cuja circunferência tem raio  $a$  e centro em  $z = h$ , como indica fig.11.6.

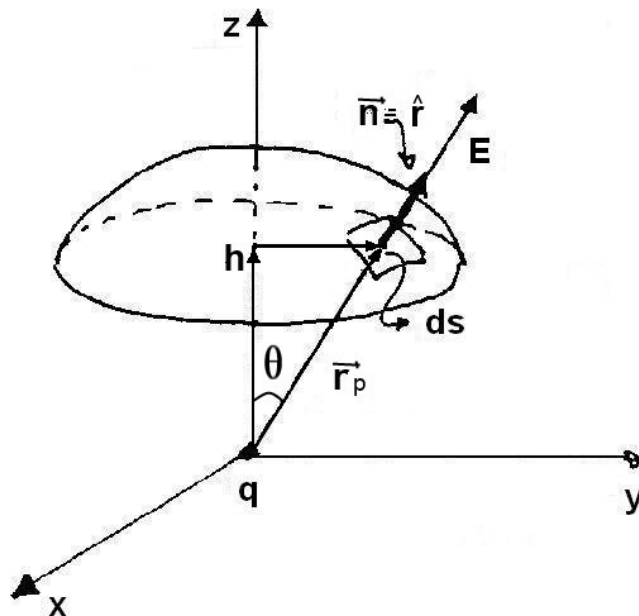


Figura 11.6: A carga puntiforme e a calota esférica.

Neste caso é conveniente usamos coordenadas esféricas. O elemento de área é  $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$  e o versor normal coincide com o da direção radial e temos  $\hat{n} = \hat{r}$ .

O campo elétrico da carga  $q$  é

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{R^2}, \quad (11.24)$$

onde usamos  $\vec{r}_q = 0$  e  $\vec{r}_P = R\hat{r}$ . O elemento de fluxo é dado por

$$\begin{aligned} d\Phi_{\vec{E}} &= \vec{E} \cdot \hat{n} dS \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{R^3} R^2 \sin\theta d\theta d\phi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (11.25)$$

e o fluxo total sobre a calota é

$$\Phi_{\vec{E}} = \int_0^{\theta_0} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 2\pi [1 - \cos\theta_0] = \frac{q}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{h}{R}\right], \quad (11.26)$$

onde o ângulo  $\theta_0$  foi determinado pela condição  $h = R \cos\theta_0$ .

Para poder comparar este resultado com o (4.26), do exemplo anterior, eliminamos o raio  $b$  da calota usando a relação  $R^2 = a^2 + h^2$  e reescrevem a eq.(11.26) como

$$\Phi_{\vec{E}} = \frac{q}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (a/h)^2}}\right]. \quad (11.27)$$

Este resultado é idêntico ao do exemplo anterior, e é muito importante compreender porque isto acontece.

## • tubos de campo

A identidade entre os resultados dos cálculos apresentados nos exemplos 4 e 5 não é uma coincidência. O fluxo do mesmo campo elétrico sobre as duas superfícies diferentes depende de  $a$  e  $h$ , apenas através do quociente  $a/h$ . Isso quer dizer que o fluxo não varia quando  $a$  e  $h$  são multiplicados por um mesmo fator. Por exemplo, o fluxo do campo elétrico sobre uma superfície circular situada a certa distância da carga é igual ao fluxo através de outra superfície circular de raio duas vezes maior e situada duas vezes mais longe da carga, como mostra a fig.11.7(a).

Esta característica de o fluxo não variar quando  $a$  e  $h$  são multiplicados por um mesmo fator pode ser explicada com o seguinte argumento intuitivo. As linhas de campo da carga elétrica são retilíneas e saem da carga positiva em todas as direções do espaço. Aquelas que se apoiam na borda do círculo de raio  $a$  definem uma superfície cônica, cujo vértice está na carga elétrica, como pode ser visto na fig.11.7(b). Como linhas de campo não se cruzam. As linhas que estão no interior da superfície cônica não podem passar para fora dela, ficando confinadas no seu interior. Assim, as mesmas linhas que furam uma

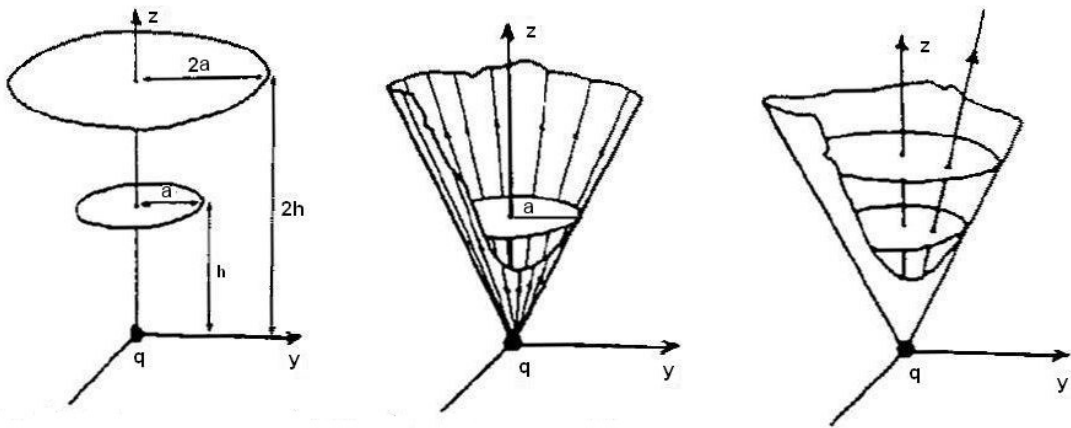


Figura 11.7: (a) Os fluxos de campo elétrico da carga puntiforme sobre as duas superfícies são iguais. (b) As linhas de campo apoiadas na borda da circunferência definem uma superfície cônica, o tubo de campo. (c) Linhas de campo nunca atravessam o tubo de campo.

superfície circular apoiada sobre a parede interna do cone vão furar outra, colocada mais adiante, como na fig.11.7(c). É esta a razão intuitiva pela qual o fluxo não se altera quando o disco de raio  $a$  do exemplo 4 é transformado na calota de circunferência de raio  $a$  do exemplo 5, pois as bordas de ambas estão apoiadas sobre o cone. Apesar de esta justificativa ser baseada em um argumento qualitativo, ela é respaldada por razões matemáticas muito sólidas.

Para compreender isto retomemos a eq.(11.25), que determina o fluxo do campo elétrico de uma carga puntiforme sobre um elemento de área  $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$  de uma superfície esférica, dado por

$$d\Phi_{\vec{E}} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \sin \theta d\theta d\phi.$$

A característica importante deste resultado é que o fluxo depende apenas dos ângulos e é completamente independente do raio  $R$ . Por isso, o fluxo sobre de uma superfície esférica não se altera quando um dos seus elementos  $dS$  é substituído por um outro  $dS' = R'^2 \sin \theta d\theta d\phi$ , determinado pelos mesmos ângulos, mas com raio diferente, como indica a fig.11.8(a).

O fluxo também não se altera se ligamos o elemento  $dS'$  à superfície original por meio das superfícies laterais, como na fig.11.8(b), já que o campo elétrico é ortogonal às normais a elas. Deste modo, os fluxos sobre a calota esférica da fig.11.8(a) e sobre a superfície deformada da fig.11.8(b) são iguais. Pelo mesmo raciocínio, podemos mostrar que o fluxo se mantém constante quando outras deformações do mesmo tipo são produzidas em outras partes da calota.

Este argumento mostra que, se realizamos sucessivas transformações infinitesimais

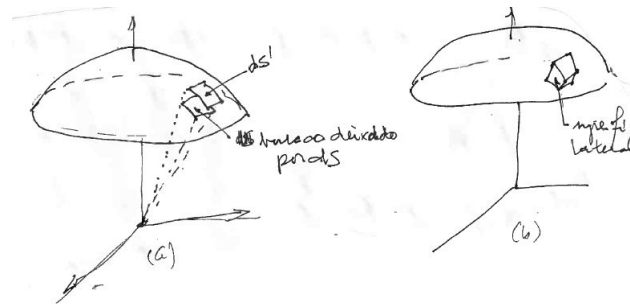


Figura 11.8: (a) Elemento superficial  $dS'$ , que substitui o elemento  $dS$  com os mesmos  $d\theta$  e  $d\phi$ , mas diferentes raios. (b) Calota deformada.

deste tipo, podemos transformar continuamente a calota em qualquer outra superfície, mantendo o seu fluxo constante. Esta situação é ilustrada na fig.11.9, na qual o fluxo do campo da carga  $q$  é o mesmo para todas as superfícies mostradas.

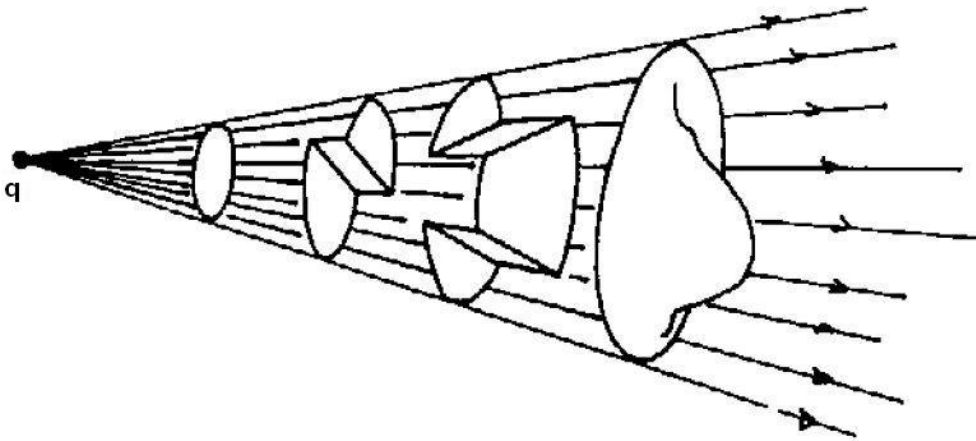


Figura 11.9: Várias superfícies apoiadas no tubo de campo da carga  $q$ . O fluxo de campo elétrico sobre todas elas é o mesmo.

### • exercícios

1. Desenhe um trecho de um plano cuja normal é  $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ .
2. No exemplo 2 qual é o valor do fluxo para  $\alpha = 135^\circ$ ?
3. O fluxo de água através de um cano é sempre o mesmo, independentemente do diâmetro ser o mesmo em toda a sua extensão. O fluxo do campo elétrico sobre qualquer superfície apoiada em um tubo de campo tem o mesmo valor. Há relação entre estes fatos? Explique.
4. (a) Se a superfície circular do exemplo 4 for dividida em 100 partes de igual área, o fluxo sobre cada uma delas será 100 vezes menor que o fluxo sobre a circunferência? Explique.  
(b) Se a calota do exemplo 5 for dividida em 100 partes de igual área, o fluxo sobre cada

uma delas será 100 vezes menor que o fluxo sobre a calota esférica? Explique.

5. Usando o resultado da eq.(11.27), calcule o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada que contém a carga elétrica. Sugestão: envolva a carga por meio de uma superfície esférica.
6. Usando o resultado da questão anterior, determine o fluxo através da face de um cubo que contém uma carga puntiforme  $q$  em seu centro.



# Capítulo 12

## lei de Gauss elétrica

### • introdução

A lei de Gauss elétrica, a primeira das equações de Maxwell a ser abordada neste texto, estabelece uma relação entre o fluxo do campo elétrico sobre uma superfície fechada e a carga elétrica no seu interior. Um relação direta entre carga e campo elétrico aparece na expressão do campo de Coulomb, mas há uma diferença muito importante entre os dois casos, envolvendo seus domínios de validade. Enquanto a expressão do campo de Coulomb vale apenas para cargas em repouso, a lei de Gauss se aplica a cargas com quaisquer tipos de movimento e, por isso, é geral.

### • a expressão da lei

A Lei de Gauss elétrica relaciona o fluxo  $\Phi_{\vec{E}}$  do campo elétrico  $\vec{E}$  sobre uma *superfície matemática fechada*  $S$  à carga elétrica total  $q_{\text{int}}$  contida no seu interior, por meio da expressão

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} . \quad (12.1)$$

Em casos nos quais a carga elétrica está distribuída de modo contínuo em uma região do espaço, é conveniente expressar a lei de Gauss por

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV , \quad (12.2)$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica de carga e  $V$  é o volume interno à superfície  $S$ .

Consideremos, por exemplo, o sistema físico que contém cargas distribuídas, como na fig.12.1. Para aplicar a lei de Gauss é preciso adotar uma superfície matemática fechada

qualquer, denominada *superfície gaussiana* e, em seguida, orientá-la. Por convenção, isto é feito escolhendo o vetor  $\hat{n}$  normal a cada elemento de área  $dS$  apontando para fora da superfície  $S$ .

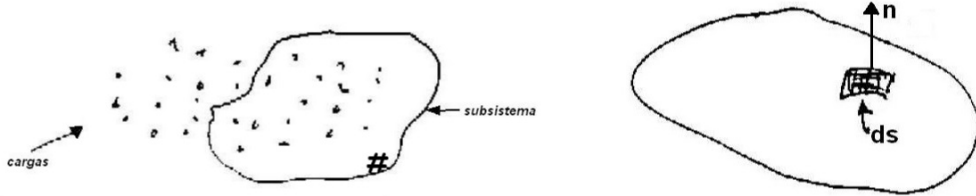


Figura 12.1: (a) Sistema de pequenas cargas e superfície matemática fechada; (b) um elemento de superfície e o seu vetor normal.

A lei de Gauss representada pelas eqs.(12.1) e (12.2) tem validade geral, independentemente de as cargas no interior da superfície  $S$  estarem paradas ou em movimento, terem distribuições volumétricas, assimétricas, ou de qualquer outro tipo. Pode parecer estranho que uma lei tão geral seja formulada com base em equações que envolvem uma superfície matemática fechada  $S$ , que pode ser escolhida arbitrariamente. É este fato, entretanto, que assegura a generalidade da lei pois, se tomarmos uma outra superfície, os lados esquerdo e direito das eqs.(12.1) e (12.2) mudam, mas as igualdades entre eles se mantêm.

## • a lei de Coulomb e a lei de Gauss

A lei de Gauss representa um postulado sobre o universo físico e não pode ser deduzida a partir de outras leis. Entretanto, no caso particular de sistemas com cargas estáticas, a lei de Gauss pode ser obtida a partir da lei de Coulomb, por meio de manipulações matemáticas, sem a necessidade de hipóteses físicas adicionais.

### • carga no centro de superfície esférica

Para discutir a relação entre as leis de Coulomb e Gauss elétrica, consideramos o caso de uma carga puntiforme  $q$  e calculamos o fluxo do seu campo elétrico sobre uma superfície esférica fechada, de raio  $R$ , com centro na carga, como mostra a fig.12.2.

O elemento da superfície em coordenadas esféricas é  $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$  e o vetor normal a ela, apontando para fora, é  $\hat{n} = \hat{r}$ , sendo  $\hat{r}$  o vetor da direção radial. O campo elétrico em um ponto qualquer dessa superfície é

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{R^2} \quad (12.3)$$

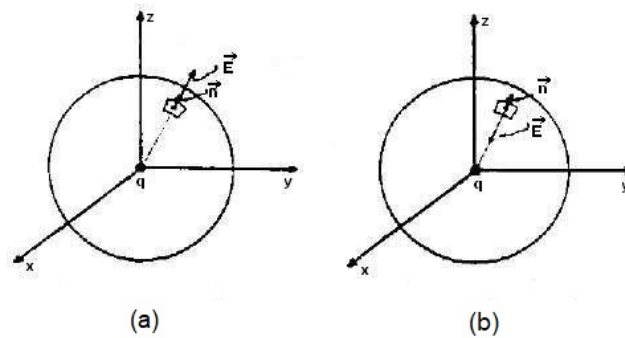


Figura 12.2: Carga puntiforme no centro da superfície matemática esférica: (a) positiva; (b) negativa.

e o seu fluxo sobre a superfície esférica é dado por

$$\begin{aligned}\Phi_{\vec{E}} &= \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, R^2 \sin\theta \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{q}{\epsilon_0} .\end{aligned}\quad (12.4)$$

Esse fluxo é positivo para uma carga positiva e negativo para carga negativa. Este resultado corresponde à lei de Gauss para o caso de uma carga puntiforme fixa no centro de uma superfície gaussiana esférica.

#### • carga no interior de superfície qualquer

A seguir, mostramos que a eq.(12.4) continua válida para uma carga puntiforme no interior de uma superfície fechada qualquer, deformando a superfície esférica da situação anterior.

Na aula 11, vimos que os fluxos de  $\vec{E}$  sobre superfícies que se apóiam nas paredes de um mesmo tubo de campo são iguais. Por isso, o fluxo de  $\vec{E}$  é o mesmo sobre as superfícies fechadas representadas nas figs.12.3(a) e (b). Efetuando sucessivas deformações infinitesimais deste tipo, podemos obter qualquer superfície fechada, sem que o fluxo total sobre ela se altere. Uma deformação possível de ser construída deste modo é a ilustrada pela superfície da fig.12.3(c).

Este argumento permite-nos concluir que, para uma carga puntiforme  $q$ , valem as relações

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \oiint_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \dots = \frac{q}{\epsilon_0} .\quad (12.5)$$

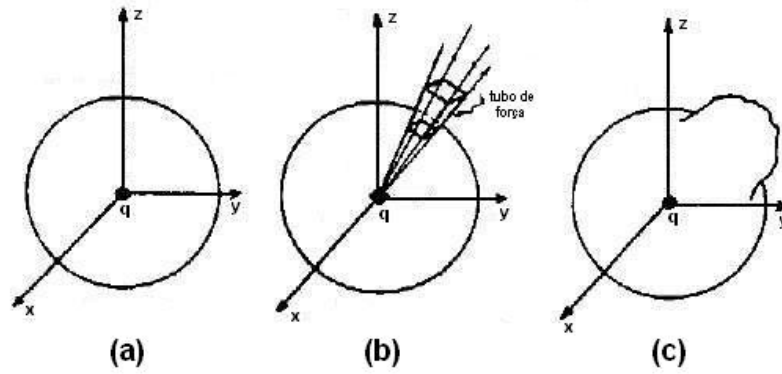


Figura 12.3: O fluxo do campo elétrico da carga puntiforme em repouso tem o mesmo valor quando a superfície fechada é deformada.

onde  $S_1, S_2, \dots$  são superfícies fechadas quaisquer que envolvem a carga  $q$ .

#### • carga fora da superfície gaussiana

Em casos em que a carga  $q$  está fora da superfície fechada  $S$ , o fluxo do campo elétrico sobre ela é nulo. Para mostrar isso, partimos do resultado anterior, eq.(12.5), considerando as superfícies  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4 + S_5$ , da fig.12.4, que podem ser obtidas umas das outras por meio de transformações contínuas.

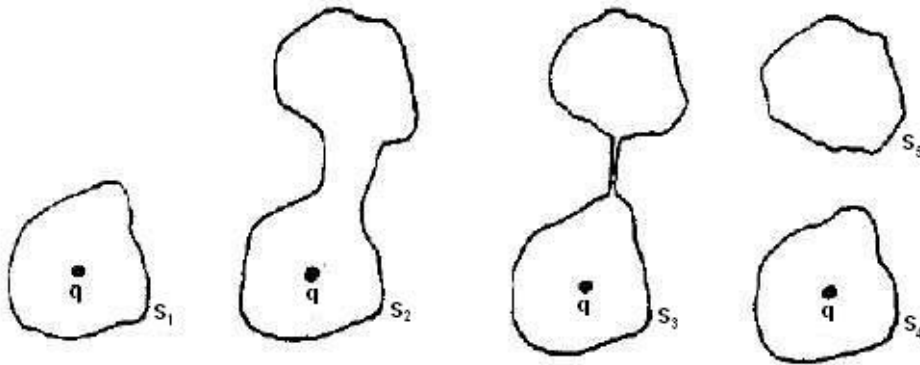


Figura 12.4: Os fluxos do campo elétrico de uma carga puntiforme em repouso através das superfícies  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4 + S_5$  são iguais.

Em particular, quando o pescoço que liga as duas partes da superfície  $S_3$  fica muito estreito, esta superfície torna-se equivalente às superfícies  $S_4$  e  $S_5$  juntas. Por isso, escrevemos

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \oiint_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \oiint_{S_3} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \oiint_{S_4+S_5} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (12.6)$$

A última igualdade pode, também, ser expressa por

$$\oiint_{S_4} \vec{E} \cdot \hat{n} dS + \oiint_{S_5} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0} . \quad (12.7)$$

Como, pela eq.(12.5), a integral sobre  $S_4$  sozinha já é igual a  $q/\epsilon_0$ , podemos concluir que

$$\oiint_{S_5} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 0 , \quad (12.8)$$

Este resultado indica que o fluxo do campo elétrico de uma carga puntiforme  $q$  sobre uma superfície fechada qualquer que não a envolve é nulo. Note que isso não significa que o campo  $\vec{E}$  seja nulo na superfície  $S_5$ .

### • várias cargas

No caso de um sistema de  $n$  cargas estáticas  $q_1, \dots, q_n$ , usamos o princípio da superposição, pois o campo elétrico total em qualquer ponto do espaço é dado pela soma vetorial dos campos das cargas individuais naquele ponto. Como  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \dots + \vec{E}_n$ , escrevemos

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \oiint_S \vec{E}_1 \cdot \hat{n} dS + \dots + \oiint_S \vec{E}_n \cdot \hat{n} dS . \quad (12.9)$$

Para cada uma das contribuições individuais, temos

$$\oiint_S \vec{E}_k \cdot \hat{n} dS = \frac{q_k}{\epsilon_0} \quad (12.10)$$

se  $q_k$  estiver dentro da superfície  $S$  ou

$$\oiint_S \vec{E}_k \cdot \hat{n} dS = 0 , \quad (12.11)$$

se  $q_k$  estiver fora de  $S$ . Assim, todos os resultados discutidos podem ser englobados na expressão

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} . \quad (12.12)$$

onde  $S$  é uma superfície *fechada qualquer* e  $q_{\text{int}}$  é a *carga total* encerrada por esta superfície. Esse resultado corresponde à *lei de Gauss na forma integral*.

### • a imagem da natureza associada à lei de Gauss elétrica

A lei de Gauss afirma que o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada é proporcional à carga elétrica contida no seu interior. Em particular, para o caso de

uma carga puntiforme, o fluxo do campo sobre uma superfície esférica com centro na carga independe do seu raio. Isto quer dizer que os fluxos sobre uma superfície com raio muito pequeno e outra, com raio muito grande, são iguais. Ou, o que é equivalente, que não é possível que uma linha de campo atravessasse apenas uma dessas superfícies; ela necessariamente atravessa as duas. Esta característica indica que não existem linhas de campo que nascem ou morrem no espaço contido entre as duas superfícies esféricas. Deste modo, o espaço vazio não gera nem sorve campo elétrico. No caso estático, o fato do fluxo não depender da superfície fechada que encerra a carga é consequência da força de Coulomb depender do inverso do quadrado da distância à carga.

Para tornar essa ideia mais clara, podemos especular o que aconteceria com o espaço em um universo fictício (uf) em que o campo elétrico dependesse do inverso da distância da carga ao cubo, sendo expresso por

$$\vec{E}_{\text{uf}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \hat{r}. \quad (12.13)$$

O fluxo através de uma superfície esférica de raio  $R$  com centro na carga seria dado por

$$\Phi_{\text{uf}} = \oiint_S \vec{E}_{\text{uf}} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} \right] [R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi] = \left[ \frac{1}{R} \right] \left[ \frac{q}{\epsilon_0} \right]. \quad (12.14)$$

Neste caso, o fluxo depende de  $R$ , diminuindo à medida que a superfície esférica cresce. Nesse universo fictício o espaço funcionaria como um sorvedouro de campo elétrico, pois existiriam linhas de campo que nascem na carga, atravessam uma superfície mais próxima a ela, mas não atravessam outra mais distante, como ilustra a fig.12.5(b).

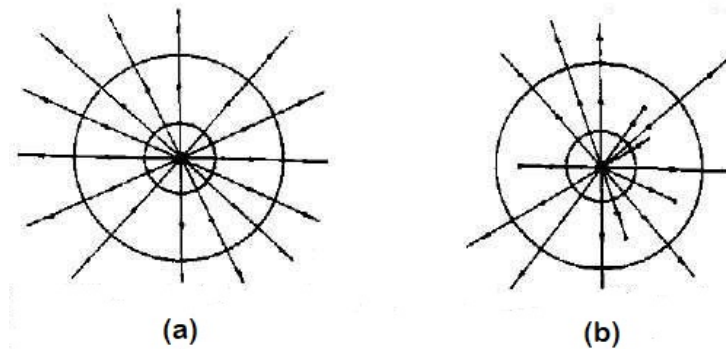


Figura 12.5: Linhas de campo de carga puntiforme: (a) no universo físico; (b) no universo fictício no qual o campo é proporcional ao inverso da distância ao cubo.

Voltando ao nosso universo físico, façamos de conta que nós conhecemos a lei de Gauss, mas ignoramos a lei de Coulomb. Neste caso, podemos deduzir a expressão do campo coulombiano. A carga elétrica é uma grandeza escalar e, necessariamente, a direção do seu campo em um ponto  $P$  é a da reta que une a carga a este ponto. Por isso, o campo de uma carga puntiforme colocada na origem do sistema de coordenadas tem a forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r}, \quad (12.15)$$

onde  $\hat{r}$  é o versor da direção radial e  $E(r)$  é uma função que depende apenas da distância do ponto considerado à carga. Para aplicar a lei de Gauss, escolhamos uma superfície matemática esférica  $S$ , de raio  $R$ , com centro na carga. O versor normal a esta superfície é  $\hat{n} = \hat{r}$  e o elemento de fluxo é dado por

$$d\Phi_{\vec{E}} = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS = E(R) dS . \quad (12.16)$$

Integrando sobre todos os elementos da superfície, a lei de Gauss fornece

$$E(R) S = \frac{q}{\epsilon_0} , \quad (12.17)$$

onde  $S = 4\pi R^2$  é a área total. Assim, obtemos

$$E(R) = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} . \quad (12.18)$$

Este resultado pode ser positivo ou negativo, dependendo do sinal de  $q$ . Juntando as eqs.(12.15) e (12.18), recuperamos a expressão vetorial para o campo coulombiano. A importância desta discussão é que ela joga luz sobre o fator  $1/R^\delta$ , com  $\delta = 2$ , da eq.(12.18). Em muitos textos, o fator  $\delta$  é tratado como um fator empírico, como algo a ser extraído da natureza por meio de medidas. Entretanto, o resultado (12.18), baseado na lei de Gauss, nos ensina que o fator  $\delta = 2$  se origina na expressão da área da superfície esférica e que tem, portanto, um caráter geométrico. Assim, o fator  $\delta = 2$  tem relação com o número de dimensões de uma superfície no nosso espaço tridimensional. Deste modo podemos, também, escrever  $\delta = N - 1$ , onde  $N$  corresponde ao número de dimensões do espaço no qual as linhas de campo podem se distribuir.

Esta perspectiva permite-nos pensar em uma lei de Gauss generalizada para um espaço de  $N$  dimensões, em que o campo elétrico fosse dado por

$$E_N(R) = \frac{1}{S_N} \frac{q}{\epsilon_0} , \quad (12.19)$$

onde  $S_N$  é a área da superfície de raio constante naquele espaço. Assim,  $S_3 = 4\pi R^2$  nos fornece a eq.(12.18), enquanto que

$$S_2 = 2\pi R \rightarrow E_2(R) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} , \quad (12.20)$$

$$S_1 = 2 \rightarrow E_1(R) = \frac{q}{2\epsilon_0} . \quad (12.21)$$

Podemos ter uma intuição sobre estes resultados pensando que as linhas de campo em um espaço com  $N$  dimensões se dispersam em  $N$  direções diferentes e que, quanto mais as linhas se dispersam, mais rapidamente o campo enfraquece com a distância.

## • além da lei de Coulomb

Na eletrostática, as leis de Gauss e Coulomb são equivalentes. Entretanto, a lei de Gauss vale também para o caso de cargas em movimento, situação para a qual a lei de Coulomb não vale. Cabe, então, a pergunta: o que acontece com o campo elétrico de uma carga em movimento, que permite que uma das leis continue válida e a outra, não? Esta questão é discutida em maior detalhe, mais adiante neste curso. No presente momento, somente podemos adiantar uma explicação bastante qualitativa, baseada na ideia de linhas de campo.

O campo coulombiano, eq.(12.15), é esfericamente simétrico como representado na fig.12.6(a). No caso de uma carga em movimento uniforme ao longo do eixo horizontal, as linhas de campo elétrico permanecem retas, mas ficam mais próximas umas das outras na direção perpendicular ao movimento, como ilustra a fig.12.6(b). Já quando a carga é acelerada, as linhas se encurvam e podem ter configurações semelhantes às mostradas na fig.12.6(c). Em todos os casos, o movimento provoca apenas uma redistribuição das linhas de campo no espaço e, por isso, o fluxo total do campo elétrico sobre qualquer superfície fechada que envolva a carga tem o mesmo valor. É deste modo que a lei de Gauss permanece válida.

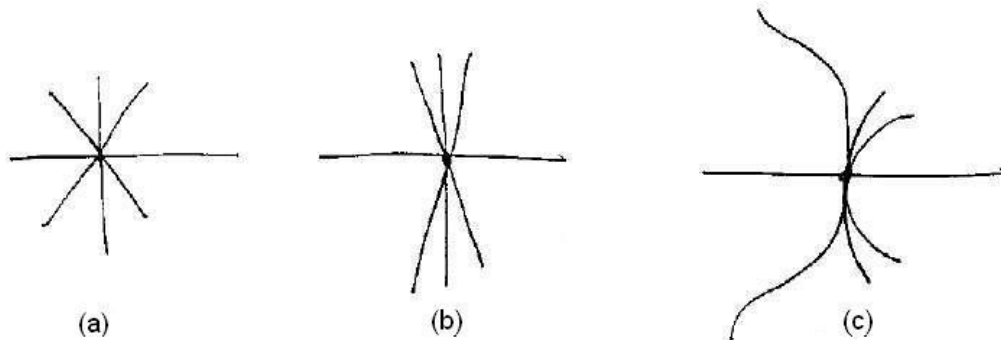


Figura 12.6: Linhas de campo elétrico de uma carga puntiforme (a) parada; (b) com velocidade constante na direção horizontal; (c) com aceleração na direção horizontal.

### • exemplo 1

Para ganhar familiaridade com os aspectos conceituais da lei de Gauss, aplicamos a expressão (12.12) ao dipolo elétrico formado por duas cargas puntiformes  $+q$  e  $-q$ , separadas pela distância  $d$  e dispostas simetricamente sobre o eixo  $z$ , discutido no exemplo 1 da aula 8. O campo elétrico deste sistema, dado pela eq.(8.13), tem a forma

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{r} + (Z - d/2)\hat{k}}{[r^2 + (Z - d/2)^2]^{3/2}} - \frac{\vec{r} + (Z + d/2)\hat{k}}{[r^2 + (Z + d/2)^2]^{3/2}} \right].$$

Como superfície gaussiana, escolhemos uma superfície cilíndrica de raio  $R$  e altura  $H > d$ , com tampas nos planos  $z = +H/2$  e  $z = -H/2$ , como mostra a fig.12.7



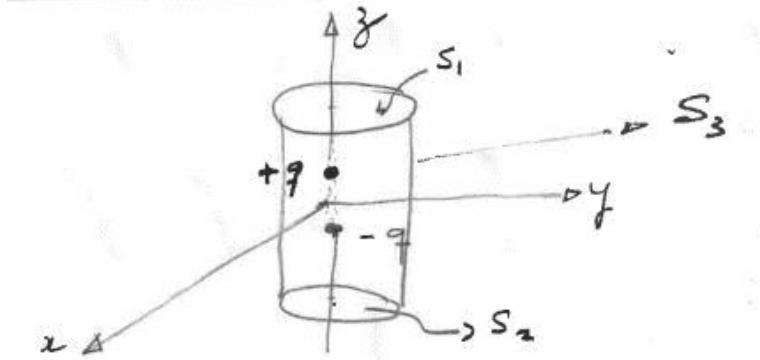


Figura 12.7: Dipolo elétrico e superfície gaussiana cilíndrica.

O fluxo do campo elétrico  $\Phi_{\vec{E}}$  sobre esta superfície fechada é dado pela soma das contribuições das três partes indicadas na figura. Os elementos de fluxo são

$$\begin{aligned} d\Phi_1 &= \vec{E} \cdot \hat{n}_1 dS_1 = \vec{E} \cdot \hat{k} r dr d\theta \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(H-d)/2}{[r^2 + (H-d)^2/4]^{3/2}} - \frac{(H+d)/2}{[r^2 + (H+d)^2/4]^{3/2}} \right] r dr d\theta \quad (12.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\Phi_2 &= \vec{E} \cdot \hat{n}_2 dS_2 = \vec{E} \cdot (-\hat{k}) r dr d\theta \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(-H-d)/2}{[r^2 + (H+d)^2/4]^{3/2}} - \frac{(-H+d)/2}{[r^2 + (H-d)^2/4]^{3/2}} \right] r dr d\theta \quad (12.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\Phi_3 &= \vec{E} \cdot \hat{n}_3 dS_3 = \vec{E} \cdot \hat{r} R d\theta dz \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{R}{[R^2 + (z-d/2)^2]^{3/2}} - \frac{R}{[R^2 + (z+d/2)^2]^{3/2}} \right] R d\theta dz \quad (12.24) \end{aligned}$$

A partir das eqs.(12.22) e (12.23), concluímos que  $d\Phi_2 = -d\Phi_1$ . Assim, o fluxo total é dado por

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{E}} &= \iint_{S_1} d\Phi_1 + \iint_{S_2} d\Phi_2 + \iint_{S_3} d\Phi_3 = \iint_{S_3} d\Phi_3 \\ &= \int_{-H/2}^{H/2} dz \int_0^{2\pi} d\theta \frac{q}{4\pi\epsilon_0} R \left[ \frac{R}{[R^2 + (z-d/2)^2]^{3/2}} - \frac{R}{[R^2 + (z+d/2)^2]^{3/2}} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 2\pi R^2 \int_{-H/2}^{H/2} dz \left[ \frac{1}{[R^2 + (z-d/2)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[R^2 + (z+d/2)^2]^{3/2}} \right] = 0. \quad (12.25) \end{aligned}$$

Para obter a última igualdade, usamos o fato que o integrando é uma função ímpar em  $z$  e que a integral de qualquer função ímpar em um intervalo simétrico é nula. Como a

carga interna à superfície é dada por  $q_{\text{int}} = +q - q = 0$ , a lei de Gauss expressa pela eq.(12.1) é satisfeita.

Um dos propósitos deste exemplo é mostrar que, na lei de Gauss, o valor de  $q_{\text{int}}$  é dado pela *soma algébrica* das cargas contidas no interior da superfície gaussiana. Um outro é deixar claro que um campo elétrico não nulo  $\vec{E}$  pode ter um fluxo nulo sobre uma superfície fechada. Intuitivamente, isto pode acontecer em casos, como o do dipolo, em que existem as mesmas quantidades de linhas de campo entrando e saindo da superfície fechada. Como a normal à superfície aponta para fora, linhas que entram correspondem a fluxos negativos enquanto que as que saem, a fluxos positivos. Assim, há também uma soma algébrica para os fluxos parciais e o fluxo total pode ser nulo.

### • as aplicações da lei de Gauss

A lei de Gauss, expressa pela eq.(12.1), pode ser aplicada a duas classes diferentes de problemas. Uma delas, representada simbolicamente por  $q \rightarrow \vec{E}$ , corresponde a determinar o campo elétrico a partir das cargas e é discutida nas aulas 13 e 14. A outra, do tipo  $\vec{E} \rightarrow q$ , envolve obter propriedades das distribuições de cargas a partir das características do campo elétrico. Em particular, este é o caso de condutores em equilíbrio eletrostático, discutido nos exemplos que seguem.

### • condutores metálicos em equilíbrio eletrostático

A estrutura de um corpo metálico envolve uma rede cristalina, formada por íons positivos, no interior da qual os elétrons livres têm apenas movimento térmico. Quando este corpo é colocado em presença de um campo externo, estes elétrons livres adquirem um outro movimento, coletivo, no sentido oposto ao campo. As situações mostradas na fig.12.8 envolvem uma carga puntiforme  $Q$ , positiva, no vácuo, com o seu campo coulombiano e a mesma carga em presença de um prego metálico.

A relação entre a carga  $Q$  e o campo  $\vec{E}_Q$  que ela produz é a mesma nos dois casos. Quando o prego é colocado em presença da carga  $Q$ , aparecem forças tanto nos íons da rede cristalina como nos elétrons livres. Os íons têm massa grandes, estão acoplados à rede cristalina e reagem muito pouco à presença da carga  $Q$ , enquanto os elétrons se movem até que o sistema se equilibre. Estes deslocamentos provocam acúmulos de cargas na superfície do corpo metálico, que também passam a criar um campo elétrico, indicado na fig.12.8(b). Este campo é chamado de *induzido* e costuma ser representado por  $\vec{E}_{\text{ind}}$ . Ele existe tanto dentro como fora do prego e o campo resultante  $\vec{E}$ , em todo o espaço, é dado por

$$\vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_{\text{ind}} . \quad (12.26)$$

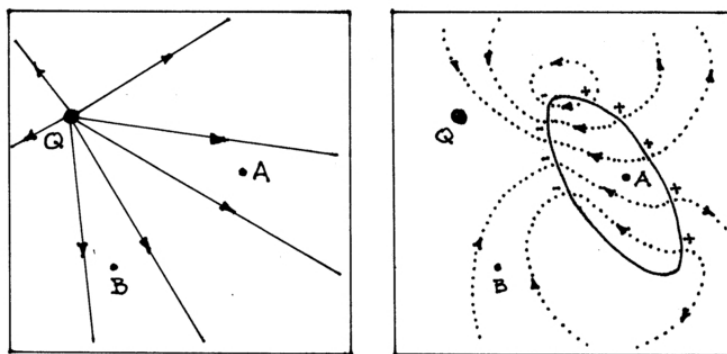


Figura 12.8: Linhas de campo elétrico (a) de carga puntiforme  $Q$ ; (b) das cargas induzidas em um prego pela presença de  $Q$ .

### • equilíbrio no interior do metal

O que caracteriza a situação de equilíbrio eletrostático em um corpo metálico é a ausência de movimentos coletivos dos seus elétrons livres, indicando que não há forças agindo sobre eles. Consequentemente, no equilíbrio eletrostático, o campo resultante  $\vec{E}$  no interior do condutor é nulo. Caso isso não acontecesse, os elétrons livres sofreriam forças  $\vec{F} = -e\vec{E}$  e se moveriam, o que corresponde a um desequilíbrio.

Este argumento vale tanto para os corpos globalmente neutros, como o prego do nosso exemplo, como para os carregados, com excesso ou falta de elétrons. Por isso, para um corpo metálico, seja ele neutro ou carregado, vale a equivalência

$$\text{equilíbrio eletrostático} \leftrightarrow \vec{E} = 0, \quad (12.27)$$

em todos os pontos do seu interior.

### • a localização das cargas

Usando a lei de Gauss, podemos mostrar que distribuições de cargas existentes em corpos metálicos em equilíbrio eletrostático estão necessariamente localizadas nas suas superfícies externas. Em um condutor em equilíbrio, tal como, por exemplo, um eletroscópio carregado, as distribuições de carga estão em repouso, indicando que  $\vec{E} = 0$  em qualquer ponto do seu interior. Assim, o fluxo deste campo é nulo sobre qualquer superfície gaussiana dentro do condutor e, pela lei de Gauss,  $\Phi_{\vec{E}} = 0 \rightarrow q_{\text{int}} = 0$ . Como isto vale para qualquer superfície  $S$ , fechada e totalmente contida dentro do metal, podemos concluir que a carga total é nula em todo o seu interior. Não estando os excessos de cargas no interior do condutor, eles estão necessariamente na sua superfície externa.

### • o equilíbrio na superfície

Cargas distribuídas em superfícies externas de corpos metálicos em equilíbrio permanecem em configurações estáveis. Por exemplo, quando transferimos uma certa quantidade de elétrons para um corpo metálico neutro, ela fica distribuída sobre a sua superfície externa e cada elétron repele todos os demais. A força resultante que age sobre um dado elétron na superfície, devida à repulsão de todos os demais, tem uma componente  $\vec{F}_n$ , normal a ela e outra,  $\vec{F}_t$ , tangencial.

Na situação de equilíbrio, a densidade superficial de carga pode variar de um ponto a outro do corpo, mas é independente do tempo. Como os elétrons, que poderiam se deslocar ao longo da superfície do corpo não o fazem, concluímos que a componente  $\vec{F}_t$  é nula sobre qualquer elétron, o que indica que o mesmo acontece com componente  $\vec{E}_t$  do campo elétrico. Já a força  $\vec{F}_n$  é não nula e aponta para fora da superfície, tendendo a expelir o elétron do metal, sendo contrabalanceada pela força que confina os elétrons livres no seu interior.

### • exemplo 2 - o poder das pontas

Tomemos novamente um corpo metálico com excesso de elétrons. Se ele for uma esfera de raio  $R$ , a simetria do problema determina que as cargas negativas fiquem uniformemente distribuídas na sua superfície externa, com densidade superficial constante, como mostra a fig.12.9(a). Entretanto, caso a forma do corpo seja outra, as cargas também ficam distribuídas na sua parte externa, mas a densidade de carga varia de um ponto a outro.

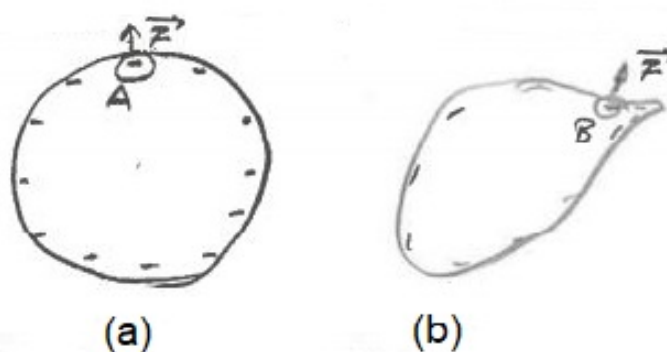


Figura 12.9: Condutores metálicos carregados: (a) esfera; (b) corpo com ponta.

Em particular, se o corpo possuir uma ponta, a densidade de carga tende a ser maior nesta região, como sugere a fig.12.9(b). Este efeito é conhecido como *poder das pontas* e ocorre porque a ponta é caracterizada por uma curvatura pronunciada da superfície do metal e a força tangencial  $\vec{F}_t$  que age em um dado elétron naquela região provém de

elétrons distribuídos de modos bastante assimétricos nas demais partes do corpo. Por exemplo, no caso do elétron B da figura (b), todas as cargas à sua esquerda o empurram para a direita e, para que possa haver equilíbrio, é preciso que existam muitos elétrons acumulados à sua direita.

De modo geral, o critério para que uma distribuição de cargas se estabilize sobre a superfície de um corpo metálico é que a força tangencial  $\vec{F}_t$  sobre cada carga seja nula. Nesta situação, ocorre também algo muito interessante. Como o campo  $\vec{E}_k$  de cada carga  $q_k$  na superfície do metal existe em todo o espaço, tanto dentro como fora dele, devemos ter  $\sum_k \vec{E}_k = 0$  em todos os pontos do interior do corpo.

### • exemplo 3

Uma casca esférica metálica eletricamente neutra, de raio interno  $a$  e externo  $b$ , envolve uma carga positiva  $q$ , no centro do sistema mostrado na fig.12.10. Nosso interesse é determinar as densidades de carga nas superfícies interna e externa da casca esférica.

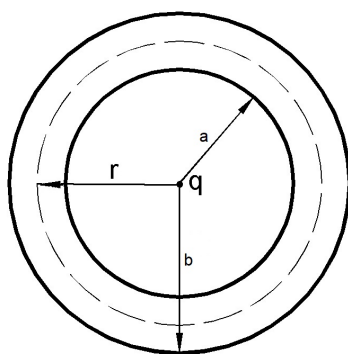


Figura 12.10: Casca esférica metálica neutra com carga puntiforme no centro da cavidade; a linha pontilhada representa uma superfície gaussiana no interior do metal.

O fato de o condutor estar em equilíbrio implica que o campo eletrostático em todo o seu interior é nulo. Por isso, para qualquer superfície gaussiana totalmente imersa no interior do metal, tal como a indicada por uma linha pontilhada na figura, o fluxo do campo elétrico é nulo e, pela lei de Gauss, a carga elétrica no seu interior também deve ser nula. Daí concluímos que há carga negativa induzida na superfície interna, de raio  $a$ , e que a carga total nessa superfície deve ser  $-q$ . Como o metal é globalmente neutro, deve haver carga positiva  $+q$  distribuída na superfície externa, de raio  $b$ .

Neste caso particular, em que o corpo metálico é uma casca esférica neutra com uma carga no centro da sua cavidade oca, a simetria do sistema permite afirmar que as cargas induzidas nas superfícies interna e externa estão uniformemente distribuídas, como mostra

a fig.12.11(a). Por isso, as densidades de carga nestas duas superfícies são dadas por

$$\sigma_{\text{int}} = -\frac{q}{4\pi a^2}, \quad (12.28)$$

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{q}{4\pi b^2}. \quad (12.29)$$

#### • exemplo 4

Uma variação do problema de uma carga envolta por uma casca esférica é mostrada na fig.12.11(b), na qual a carga é movida do centro do sistema. No equilíbrio eletrostático, o campo resultante continua nulo no interior do metal e podemos concluir que a carga total induzida na superfície interna de raio  $a$  vale  $-q$ . Agora, entretanto, não podemos inferir de modo simples a forma da densidade superficial de cargas  $\sigma_{\text{int}}$ , já que ela varia ao longo da superfície. Intuitivamente, podemos esperar que haja maior quantidade de cargas negativas induzidas na região da superfície interna mais próxima à carga e menor densidade de cargas na parte mais distante dela. Este rearranjo na distribuição de cargas na parte interna da casca quando passamos da situação (a) para a (b) da fig.12.11 acontece para que o campo no interior do metal permaneça nulo.

Neste tipo de problema, é importante que não sejamos induzidos a pensar no metal como um tipo especial de matéria capaz de fazer o campo elétrico desaparecer, pois não é isso o que acontece. Apenas, o metal possui elétrons livres, que podem se mover com facilidade e, se houver um campo elétrico no seu interior, estes elétrons se deslocam. Os casos das figuras (a) e (b) envolvem as mesmas quantidades de elétrons, que se movem de modos diferentes em direção à superfície interna da casca e se estabilizam em configurações diferentes, produzindo sobre ela densidades  $\sigma_{\text{int}}$  que diferem de um caso para outro.

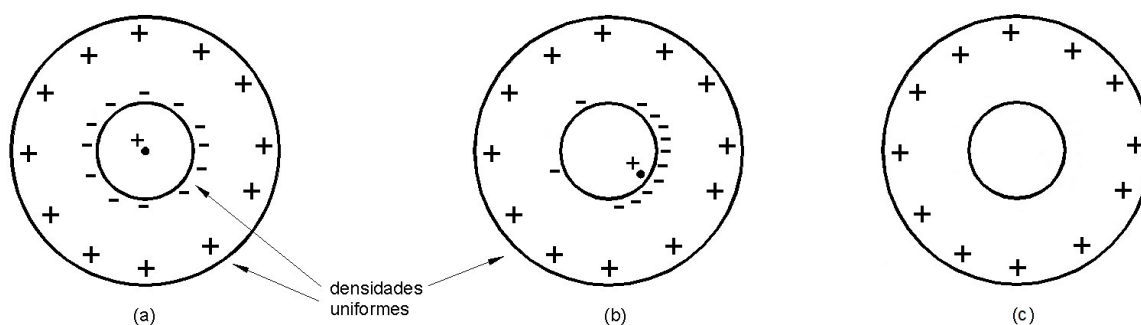


Figura 12.11: Casca esférica com carga  $q$  (a) no centro da cavidade; (b) fora do centro; (c) distribuída sobre a superfície externa.

Na parte externa da casca, as distribuições de cargas positivas nos casos (a) e (b) são idênticas. Como elas não podem ser influenciadas pelo interior do metal, onde o campo é nulo, a sua distribuição é determinada pelas interações coulombianas entre cada carga

na superfície e as demais. O critério para a estabilidade é que a força tangencial  $\vec{F}_t$  sobre cada carga seja nula e isto só depende da forma da superfície externa. Por isso, também na configuração (b), a densidade de cargas  $\sigma_{\text{ext}}$  é dada pela eq.(12.29).

Para completar esta discussão, notamos que se a carga  $q$  tocar o metal, a superfície interna se descarrega e o excesso de carga  $+q$  no condutor fica distribuído na superfície externa da casca esférica. Neste caso, a simetria do condutor permite concluir que o excesso de cargas se distribui uniformemente na superfície externa da casca, como mostra a fig.12.11 (c), e a densidade superficial de cargas continua a ser dada pela eq.(12.29).

### • exemplo 5: blindagem

Retomamos a situação mostrada na fig.12.11, para discutir o que ocorre quando a superfície externa da casca metálica é aterrada. Com o aterramento, elétrons da Terra, atraídos pelas cargas positivas, se movem até que a carga na superfície externa da casca se anule. O campo no interior do condutor continua sendo nulo e a distribuições de cargas negativas na superfície interna nos casos (a) e (b) permanecem inalteradas, como indicam as figs.12.12. Estas configurações descrevem tanto a situação em que a superfície externa está aterrada quanto a posterior à remoção do aterramento.

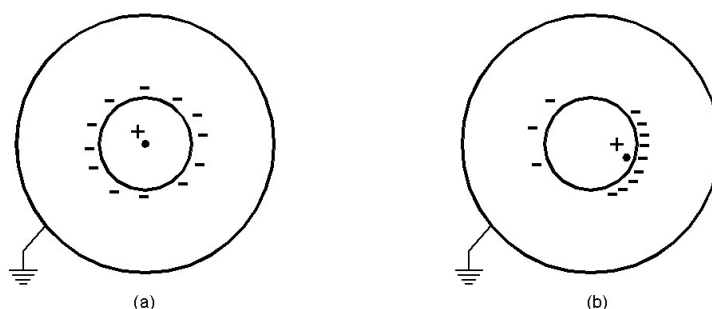


Figura 12.12: Casca metálica aterrada na superfície externa (a) com a carga  $+q$  no centro da cavidade; (b) com a carga da cavidade deslocada do centro.

As figuras evidenciam uma característica interessante das distribuições de cargas no interior do metal. Nos dois casos, depois que o sistema se estabiliza, cada um dos elétrons distribuídos sobre a superfície interna da casca cria um campo elétrico que se superpõe aos dos demais, dando origem a um campo  $\vec{E}_-$ . Este campo se soma ao campo  $\vec{E}_q$  da carga  $q$  e, em todos os pontos do espaço no exterior da superfície de raio  $a$  externa à casca, tanto os que estão no interior do metal quanto os que estão do lado de fora dele,  $\vec{E}_q + \vec{E}_- = 0$ . Deste modo, os efeitos elétricos de cargas existentes no interior de um condutor aterrado não podem ser percebidos fora dele. Este fenômeno é chamado de *blindagem elétrica*.

Um efeito relacionado foi observado em 1836 pelo físico inglês Michael Faraday, que

estudou experimentalmente o comportamento de campos elétricos no interior de metais. Neste processo, ele desenvolveu a ideia do que ficou conhecido como a *gaiola de Faraday*. No seu experimento, a gaiola era uma estrutura metálica, no interior da qual pessoas podiam ser colocadas. Desde que os seus pés estivessem isolados eletricamente da gaiola, essas pessoas não sofriam qualquer efeito de campos elétricos externos  $\vec{E}_{\text{ext}}$ , mesmo os de descargas muito intensas. Tais campos induzem cargas na superfície externa da gaiola, que produzem um campo  $\vec{E}_{\text{ind}}$ , sendo que a soma  $\vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{ind}}$  se anula em todos os pontos do seu interior.

Atualmente, gaiola de Faraday é o nome genérico dado a caixas feitas de placas ou telas metálicas, muito usadas na prática para proteger pessoas e equipamentos de campos elétricos indesejados, sejam eles produzidos no interior ou no exterior da gaiola.

### • exercícios

1. Considere um universo fictício no qual o campo elétrico de uma carga puntiforme seja dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \frac{\vec{r}}{r}.$$

- Continua sendo verdade que o fluxo do campo de uma carga sobre uma superfície fechada qualquer que *não* engloba a carga é nulo?
- O espaço neste universo é eletricamente neutro?

2. No caso do exemplo 1, desenhe as linhas de campo produzidas pelas cargas do dipolo e discuta

- os sinais dos fluxos  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ , sobre cada uma das tampas do cilindro gaussiano;
- a razão pela qual  $\Phi_3$  é nulo;
- se os fluxos  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  e  $\Phi_3$  permanecem os mesmos no caso da superfície cilíndrica de raio  $R$  ter suas tampas nos planos  $z = +H/2$  e  $z = -2H$ .

3. Uma casca esférica metálica, de raio interno  $a$  e externo  $b$ , carregada com carga  $+q$ , envolve uma carga puntiforme  $-2q$ , colocada no centro do sistema. No equilíbrio eletrostático, quais são:

- as quantidades de carga total nas superfícies interna e externa da casca metálica?
- as densidades superficiais de cargas nas superfícies interna e externa?

4. Uma casca condutora tem uma carga  $+q$  no seu interior, como mostra a fig.12.11. Trace as linhas de campo nas situações

- em que a carga está no centro da distribuição.
- em que a carga está fora do centro da distribuição.

5. Uma carga  $q$  está localizada no centro de um cubo de aresta  $L$ .

- Qual o valor do fluxo do campo elétrico sobre a superfície cúbica?
- Qual o valor do fluxo sobre uma das faces do cubo?
- Suas respostas aos itens anteriores se alteram se a carga for afastada do centro do cubo,



mas permanecer em seu interior?

• respostas

1. (a) não; (b) não.

2. (a)  $\Phi_1 > 0$  e  $\Phi_2 < 0$ ; (c)  $\Phi_1$ , sim;  $\Phi_2$  e  $\Phi_3$ , não; entretanto,  $\Phi_2 + \Phi_3$ , sim.

3. (a)  $+2q$ , na interna e  $-q$ , na externa.

(b)  $\sigma_{\text{int}} = \frac{q}{2\pi a^2}$  e  $\sigma_{\text{ext}} = -\frac{q}{4\pi b^2}$ .

5. (a)  $\frac{q}{\epsilon_0}$ ; (b)  $\frac{q}{6\epsilon_0}$ ; (c) em (a), sim e em (b), não.



# Capítulo 13

## lei de Gauss - exemplos com simetria esférica

A lei de Gauss, uma das leis básicas do eletromagnetismo, tem validade geral. Entretanto, nem sempre se pode calcular o campo elétrico de uma distribuição de cargas usando apenas essa lei. Este cálculo é possível em casos de distribuições de cargas de simetrias específicas, que permitam que a direção do campo elétrico seja conhecida a priori. Só nestes casos é possível escolher superfícies gaussianas adequadas à determinação da intensidade do campo.

### • exemplo 1: carga puntiforme

Voltamos ao caso do cálculo do campo elétrico de uma carga puntiforme  $q$ , usando a lei de Gauss. Este problema já foi discutido na aula anterior mas, aqui, enfatizamos a questão da escolha da superfície gaussiana.

A carga elétrica é uma grandeza escalar e seu campo deve ter a direção radial. Além disso, como todas as direções ao seu redor são equivalentes, a intensidade do campo deve depender apenas da distância do ponto considerado à carga.

A representação do campo de uma carga puntiforme por meio de linhas de campo evidencia esta simetria pois a sua distribuição é isotrópica, como ilustrado na fig.14.1. Assim, a natureza escalar da carga elétrica permite-nos escrever

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r} . \quad (13.1)$$

Entretanto, ela não permite conclusões acerca de  $E(r)$ , a intensidade do campo. Neste caso, para calcular a intensidade do campo elétrico da carga  $E(r)$  é possível usar a lei de Gauss.

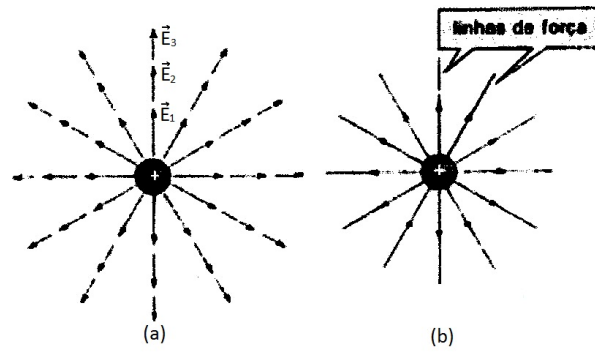


Figura 13.1: (a) O campo de uma carga puntiforme positiva e (b) suas linhas de campo.

De modo geral, o emprego da lei de Gauss para calcular campos elétricos envolve algumas sutilezas, que apontamos a seguir. Na expressão da lei para uma carga puntiforme, dada por

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0},$$

$\vec{E}$ ,  $q$  e  $\epsilon_0$  são grandezas físicas, enquanto que  $S$ ,  $\hat{n}$  e  $dS$  são entidades matemáticas. Além disso, a integração envolve uma somatória de elementos de fluxo  $d\Phi_{\vec{E}}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS$  sobre pontos em posições diferentes da superfície  $S$ , caracterizados pelo vetor  $\vec{r}$ . Se esta superfície fosse discretizada, escreveríamos  $\Delta\Phi_k = \vec{E}(r_k) \cdot \hat{n}_k dS_k$  e a lei de Gauss teria a forma

$$\vec{E}(\vec{r}_1) \cdot \hat{n}_1 dS_1 + \cdots + \vec{E}(\vec{r}_k) \cdot \hat{n}_k dS_k + \cdots = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (13.2)$$

O problema de calcular o campo elétrico por meio da lei de Gauss corresponde a obter o vetor  $\vec{E}(\vec{r}_n)$  em um particular ponto  $\vec{r}_n$  a partir da expressão (13.2). Para poder resolver um problema deste tipo, é preciso escolher com arte a superfície gaussiana, pois ela determina tanto  $\hat{n}$  como  $dS$ .

No caso da carga puntiforme, é conveniente escolher uma superfície gaussiana esférica, com centro na carga e o raio genérico  $r$ . Com isso, os versores  $\hat{n}$  normais à superfície gaussiana, tornam-se paralelos ao campo elétrico e temos  $\hat{n} = \hat{r}$ . Isto permite uma simplificação no lado esquerdo da expressão da lei, pois, usando a eq.(13.1) escrevemos

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \oiint_S E(r) dS. \quad (13.3)$$

Como a superfície gaussiana é esférica, o campo tem intensidade  $E(r)$  constante sobre ela e, por isso, temos

$$\oiint_S E(r) dS = E(r) \oiint_S dS = E(r)S, \quad (13.4)$$

com  $S = 4\pi r^2$ . Assim, com uma escolha adequada da superfície gaussiana, obtemos  $E(r)S = q/\epsilon_0$  e, conseqüentemente,

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}. \quad (13.5)$$

Este resultado para a intensidade do campo indica que o seu sinal é o mesmo de  $q$ .

É muito importante ressaltar que a estrutura matemática da lei de Gauss permite apenas a determinação da *intensidade*  $E(r)$  do campo. Para reconstruir o vetor campo elétrico, usamos a eq.(13.1), para escrever

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \vec{r}, \quad (13.6)$$

que é, como esperado, a expressão do campo coulombiano.

### • exemplo 2: esfera uniformemente carregada

Estudo do campo elétrico em todo o espaço criado por uma distribuição de carga esférica de raio  $R$ , com densidade volumétrica  $\rho$  constante.

O fato de a distribuição de cargas ter simetria esférica remete à conclusão que o seu campo elétrico deve ter a mesma simetria, sendo radial e com uma intensidade  $E(r)$  que depende apenas da distância ao centro do sistema. Isto acontece porque, se a esfera carregada sofrer uma rotação em torno de um eixo que passa pelo centro do sistema, a forma da distribuição de carga permanece a mesma e, portanto, o seu campo elétrico não pode mudar.

Por isso, no caso da esfera uniformemente carregada, o campo elétrico tem a forma genérica

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r} \quad (13.7)$$

e a lei de Gauss é usada para determinar a intensidade  $E(r)$ . Tal como no caso da carga puntiforme, escolhemos uma superfície gaussiana esférica de raio  $r$ , concêntrica com a distribuição de cargas, que é conveniente por dois motivos: a normal a ela é  $\hat{n} = \hat{r}$ , paralela ao campo e a intensidade de campo elétrico  $E(r)$  tem o mesmo valor sobre ela. Estas duas características e a eq.(13.7) permitem escrever o fluxo do campo elétrico como

$$\oiint \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \oiint E(r) dS = E(r)S, \quad (13.8)$$

com  $S = 4\pi r^2$ .

Para aplicar a lei de Gauss, existem duas situações a serem consideradas, pois o ponto onde calculamos o campo pode tanto estar fora como dentro da região com cargas.

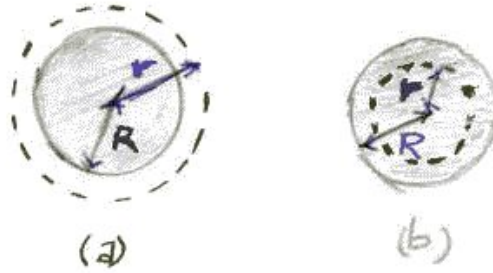


Figura 13.2: Superfícies gaussianas para determinar  $E(r)$  (a) fora ( $r \geq R$ ) e (b) dentro ( $r \leq R$ ) da região com cargas.

### • campo fora da distribuição

Neste caso, usamos uma superfície gaussiana  $S$  com  $r \geq R$ , a carga interna a ela vale

$$q_{int} = \rho \frac{4\pi}{3} R^3 \quad (13.9)$$

e, usando (13.8) a lei de Gauss fornece

$$E(r \geq R) 4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4\pi R^3}{3} \rightarrow E(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3r^2 \epsilon_0}. \quad (13.10)$$

### • campo dentro da distribuição

Para superfície gaussiana com  $r \leq R$ , a carga interna  $q_{int}$  depende do valor de  $r$ , e para densidade volumétrica constante temos

$$q_{int} = \rho \frac{4\pi r^3}{3}. \quad (13.11)$$

Usando (13.8) e a lei de Gauss, obtemos

$$E(r \leq R) 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4\pi r^3}{3} \rightarrow E(r \leq R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}. \quad (13.12)$$

Os resultados (13.12) e (13.10) fornecem as intensidades do campo elétrico dentro e fora da distribuição de cargas. Para obter o vetor campo elétrico em todo o espaço, empregamos a eq.(13.7) e escrevemos

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}, \quad (13.13)$$

$$\vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^3} \vec{r}. \quad (13.14)$$

Estes campos são radiais e têm o sentido saindo do centro da esfera para cargas positivas e, entrando neste para cargas negativas.

Para tornar este resultado mais transparente, é conveniente reexpressá-lo em termos da carga total  $q = \rho 4\pi R^3/3$  contida na esfera carregada. Assim, temos

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{R^3}, \quad (13.15)$$

$$\vec{E}(r \geq R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (13.16)$$

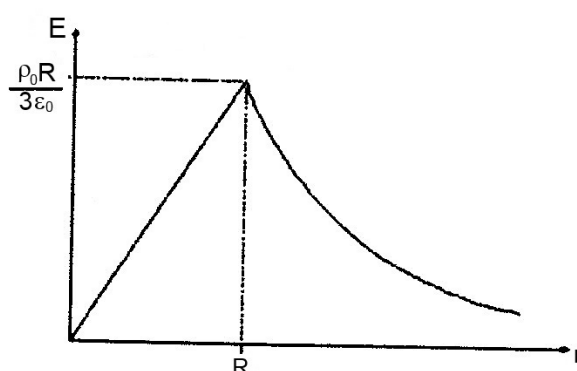


Figura 13.3: Módulo do campo elétrico de uma distribuição esférica de cargas com densidade volumétrica constante  $\rho$ .

O módulo deste campo é mostrado na fig.13.3 e tem várias características interessantes:

- O campo é nulo no centro da distribuição de cargas; isto ocorre porque ela é simétrica em relação aquele ponto e, ali, um vetor campo elétrico não nulo teria direção arbitrária.
- O campo no interior da esfera carregada cresce linearmente com o raio, até atingir o seu valor máximo na superfície.
- O campo no exterior da esfera é idêntico ao de uma carga puntiforme  $q$  no seu centro.

Esta última característica é muito geral nas distribuições de cargas com simetria esférica. Ainda que no seu interior a dependência da intensidade do campo com a distância ao centro tenha peculiaridades da distribuição, no seu exterior tudo se passa como se a carga total do sistema estivesse localizada no seu centro.

### • exemplo 3: superfície esférica uniformemente carregada

As cargas de uma esfera metálica carregada e em equilíbrio eletrostático estão uniformemente distribuídas sobre a sua superfície. Para determinar o campo elétrico criado por esta distribuição, consideramos uma superfície esférica de raio  $R$ , carregada com uma densidade superficial  $\sigma$ , constante.

Para aplicar a lei de Gauss, consideramos dois casos, os de pontos internos e externos à distribuição, mostrados na fig.13.4.

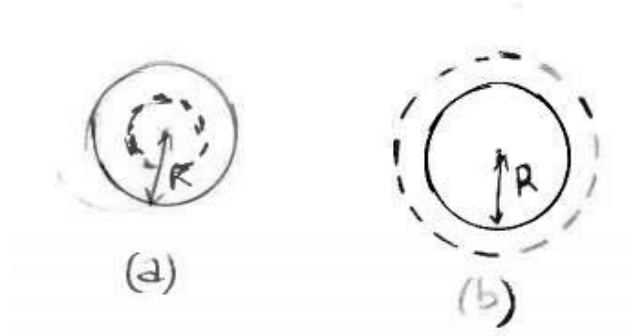


Figura 13.4: Superfície de raio  $R$  com distribuição uniforme de cargas e superfície gaussiana na região (a)  $r < R$ ; (b)  $r > R$ .

Devido à simetria da distribuição de cargas, o campo tem a forma genérica dada pela eq.(13.7). Por isso, escolhemos superfícies gaussianas esféricas, com versores normais que apontam para fora, dados por  $\hat{n} = \hat{r}$ . Esta escolha permite-nos escrever

$$\oiint \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \oiint E(r) dS = E(r)S, \quad (13.17)$$

sendo  $S = 4\pi r^2$ .

No caso de pontos  $r < R$ , internos à superfície, a carga encerrada pela superfície gaussiana é nula e a lei de Gauss fornece

$$E(r)4\pi r^2 = 0 \rightarrow E(r < R) = 0. \quad (13.18)$$

Já para pontos  $r > R$ , a carga no interior à superfície gaussiana é  $q = 4\pi R^2\sigma$  e temos

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow E(r > R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (13.19)$$

Como a lei de Gauss determina apenas a intensidade  $E(r)$ , o vetor campo elétrico precisa ser reconstruído usando a eq.(13.7) e temos

$$\vec{E}(r < R) = 0, \quad (13.20)$$

$$\vec{E}(r > R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (13.21)$$

Para determinar o campo elétrico sobre a superfície esférica, com  $r = R$ , é preciso empregar alguns resultados que somente serão apresentados na próxima aula. Aqui, apenas mencionamos a sua expressão, dada por

$$\vec{E}(r = R) = \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (13.22)$$



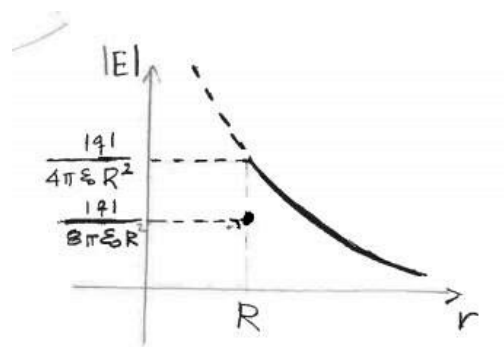


Figura 13.5: Módulo do campo elétrico de uma distribuição superficial de cargas em esfera de raio  $R$ .

O gráfico do módulo do campo é mostrado na fig.13.5 e é interessante compará-lo com a fig.13.3, obtida no caso da esfera uniformemente carregada. Em ambos os casos, os campos na parte  $r > R$ , externa à distribuição, são idênticos ao de uma carga puntiforme colocada na origem  $r = 0$ . Este é um resultado muito geral e vale para qualquer distribuição de cargas com simetria esférica. Já na região  $r < R$ , os resultados para as duas distribuições são muito diferentes. A eq.(13.18) mostra que o campo resultante no interior de uma superfície uniformemente carregada é nulo. Este resultado pode parecer surpreendente, pois cada elemento de carga da distribuição cria campo tanto dentro como fora da esfera. Entretanto, a soma de todas estas contribuições é nula em qualquer ponto do interior da esfera carregada. O fato do valor do módulo do campo em  $r = R$  parecer descontínuo decorre da aproximação de superfície carregada com espessura nula.

#### • exemplo 4

Cálculo do campo elétrico em todo o espaço criado por uma distribuição esférica de raio  $R$ , com densidade variável  $\rho(r) = \rho_0(1 - \alpha r/R)$ , sendo  $\rho_0$  e  $\alpha$  constantes positivas, e  $r$  a distância ao centro da esfera.

Neste exemplo, embora a distribuição de cargas varie com a distância  $r$  ao centro do sistema, continua havendo simetria esférica e também vale o argumento de que ela não muda quando o sistema sofre uma rotação em relação a qualquer eixo que passe pelo seu centro. Assim, o campo elétrico deve ter intensidade constante sobre superfícies esféricas concêntricas com o sistema, direção radial e ter a forma dada pela eq.(13.7).

A fig.13.6 mostra a função  $\rho(r)$  para diferentes valores de  $\alpha$ . No caso de  $\alpha = 0$ , recuperamos a situação do exemplo 2, com densidade constante. Dependendo do valor da constante  $\alpha$ , a distribuição de cargas pode mudar de sinal no interior da esfera. Para  $0 < \alpha \leq 1$  a carga é positiva na esfera toda. Se  $\alpha > 1$ , a densidade é positiva para  $r \leq R/\alpha$ , e negativa para  $r > R/\alpha$ . No centro da esfera a densidade é positiva para

qualquer valor de  $\alpha > 0$ .

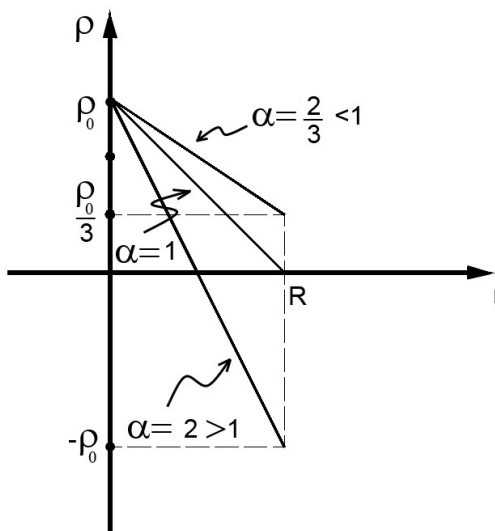


Figura 13.6: Densidade volumétrica em função da distância ao centro para diferentes valores de  $\alpha$  positivo.

Para aplicar a lei de Gauss, tomamos superfícies gaussianas  $S$  esféricas de raio  $r$ , com centro na distribuição e consideramos os casos  $r \leq R$  e  $r \geq R$ . Em ambos, a normal à superfície em cada ponto é dada por  $\hat{n} = \hat{r}$ , onde  $\hat{r}$  é o versor da direção radial. O fato de a eq.(13.7) se aplicar a este problema permite-nos escrever

$$\oiint \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \oiint E(r) dS = E(r)S = E(r)4\pi r^2. \quad (13.23)$$

Sendo o elemento de volume em coordenadas esféricas dado por  $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ , no caso  $r < R$ , que corresponde a pontos internos à distribuição, a carga  $q_{int}$  encerrada pela superfície  $S$  de raio  $r$  é

$$q_{int} = \int_0^r dr' \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho(r') r'^2 \sin\theta = 4\pi \int_0^r dr' \rho_0 \left(1 - \frac{\alpha r'}{R}\right) r'^2 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 \left(1 - \frac{3\alpha r}{4R}\right) \quad (13.24)$$

Assim, a intensidade do campo elétrico obtida a partir da lei de Gauss é dada por

$$4\pi r^2 E(r \leq R) = \frac{4}{3\epsilon_0} \pi \rho_0 \left(1 - \frac{3\alpha r}{4R}\right) r^3 \rightarrow E(r \leq R) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3\alpha r}{4R}\right) r. \quad (13.25)$$

Para pontos  $r \geq R$ , externos à distribuição, a carga interna à superfície gaussiana  $S$  é dada pela carga total da esfera

$$q_\alpha = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho(r) r^2 \sin\theta = 4\pi \int_0^R \rho_0 \left(1 - \frac{\alpha r}{R}\right) r^2 dr = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right) \quad (13.26)$$

e a lei de Gauss fornece

$$4\pi r^2 E(r \geq R) = \frac{4}{3\epsilon_0} \pi R^3 \rho_0 \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right) \rightarrow E(r \geq R) = \frac{R^3 \rho_0}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right) \frac{1}{r^2}. \quad (13.27)$$

Para obter o vetor campo elétrico, incorporamos a direção e o sentido usando a eq.(13.7) e escrevemos

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3\alpha r}{4R}\right) \vec{r}, \quad (13.28)$$

$$\vec{E}(r \geq R) = \frac{R^3 \rho_0}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right) \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q_\alpha}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}. \quad (13.29)$$

A intensidade deste campo para alguns valores de  $\alpha$  é mostrada na fig.13.7.

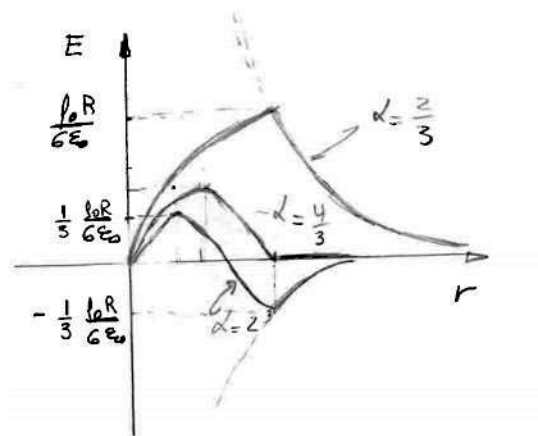


Figura 13.7: Intensidade do campo para diferentes valores da constante  $\alpha$ .

Um outro aspecto importante é que, na superfície da esfera, o valor do campo elétrico é

$$\vec{E}(R) = \frac{\rho_0 R}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right) \hat{r} \quad (13.30)$$

calculado nas duas eqs.(13.28) e (13.29); outro é que o campo é nulo na origem para qualquer valor de  $\alpha$ .

Na região externa à distribuição de cargas, o campo elétrico é, como nos exemplos anteriores, igual ao campo de uma carga puntiforme  $q_\alpha$  no centro da esfera. Mas os diferentes valores de  $\alpha$  definem situações fisicamente diversas. Quando  $\alpha < 4/3$ , a carga total  $q_\alpha$  é positiva e o campo elétrico na região externa à distribuição de cargas é radial, saindo da esfera. Se  $\alpha > 4/3$  a carga total é negativa e o campo radial tem sentido entrando na esfera. Para  $\alpha = 4/3$  a carga total é zero e, portanto, o campo é nulo na região externa à esfera carregada.

No interior da esfera carregada o campo elétrico tem direção radial saindo do centro para  $r < 4R/3\alpha$  e entrando para  $r > 4R/3\alpha$  e, é nulo em  $r = 4R/3\alpha$ .

**• exercícios**

**1.** Para quais das distribuições abaixo pode se conhecer de antemão a direção do campo elétrico? E para cada um destes casos, qual é a superfície gaussiana que permite o cálculo da intensidade do campo?

- (a) Esfera de raio  $R$  com distribuição  $\rho(r, \theta)$ , sendo  $r$  a distância ao centro da esfera e  $\theta$  o ângulo com o eixo  $z$ ;
- (b) Fio infinito com distribuição uniforme de cargas;
- (c) Cilindro infinito com distribuição  $\rho(r)$ , sendo  $r$  a distância ao eixo do cilindro;
- (d) Fio finito com distribuição uniforme de cargas;
- (e) Cilindro finito com distribuição superficial de cargas constante;
- (f) Anel de raio  $R$  com distribuição uniforme de cargas;
- (g) Disco de raio  $R$  com distribuição uniforme de cargas.

**2.** Um cubo de aresta  $L$  tem densidade volumétrica de carga  $\rho$  constante

- a) Determine o fluxo do vetor campo elétrico sobre uma superfície cúbica de aresta  $a$  contida no interior da distribuição de cargas;
- b) É possível calcular o campo elétrico desta distribuição de cargas usando a lei de Gauss?

**3.** Um nêutron é uma partícula eletricamente neutra, mas que possui carga elétrica distribuída em seu interior. Supondo que a distribuição de cargas discutida no exemplo 4 se aplique ao nêutron,

- a) Determine o valor de  $\alpha$  que descreve o nêutron;
- b) Determine o campo elétrico  $\vec{E}$  em todo o espaço;
- c) Faça um gráfico de  $E(r)$  em função de  $r$ ;
- d) Represente o campo elétrico do nêutron por meio de flechas.

**4.** Uma casca esférica de material dielétrico e com raio interno  $a$  e externo  $b$ , é carregada com densidade volumétrica de carga  $\rho$ , constante e positiva

- a) Determine o campo elétrico  $\vec{E}(r)$  em todo o espaço;
- b) Faça um gráfico  $E(r) \times r$ .

# Capítulo 14

## lei de Gauss - aplicações

A validade da lei de Gauss é geral. Entretanto, apenas para algumas situações ela permite o cálculo de campos elétricos produzidos por distribuições de cargas. Nestes casos é preciso que as distribuições de cargas tenham simetrias que permitam que a direção e o sentido do campo elétrico sejam conhecidos de antemão. Nestas situações é possível a determinação da intensidade do campo elétrico.

### • exemplo 1 - plano infinito

Estudamos o campo elétrico de um plano infinito carregado com uma densidade superficial de carga  $\sigma$ , constante e positiva, em um ponto P que dista  $d$  dele. Para situar o problema, supomos que este plano esteja apoiado sobre os eixos  $x$  e  $y$ .

Planos infinitos carregados não existem na natureza, ainda assim, eles constituem um limite muito útil para alguns problemas físicos. Por exemplo, as cargas em um condutor em equilíbrio eletrostático ficam distribuídas sobre a sua superfície, em camadas muito finas. Em pontos extremamente próximos do corpo, a sua superfície pode ser pensada como um plano infinito. A situação é semelhante ao que acontece com a Terra: para construir uma casa, a sua superfície pode ser bem aproximada por um plano.

Neste problema a simetria da distribuição de cargas permite-nos concluir que a direção de  $\vec{E}$  deve ser perpendicular ao plano. Isto ocorre porque todo eixo perpendicular a um plano infinito carregado com densidade uniforme é um eixo de simetria. Se a distribuição de cargas for rodada em torno deste eixo, a situação física não muda. Como o vetor  $\vec{E}$  é sempre perpendicular ao plano, todas as linhas de campo são paralelas entre si. Além disso, para uma distribuição positiva, as linhas se afastam do plano, como mostra a fig.14.1(a).

Assim, o campo elétrico tem a estrutura geral

$$\vec{E} = E\hat{k} \quad \text{para } z > 0, \quad (14.1)$$

$$\vec{E} = -E\hat{k} \quad \text{para } z < 0. \quad (14.2)$$

A lei de Gauss é empregada para determinar a intensidade  $E$  do campo e, para a sua aplicação, é conveniente escolher uma superfície gaussiana  $S$  na forma de um cilindro com superfície lateral  $S_3$  perpendicular ao plano e bases  $S_1$  e  $S_2$  de área  $A$ , paralelas a ele, como mostram as figs.14.1(b) e (c). Como em princípio, a intensidade do campo poderia depender da distância ao plano, tomando as duas bases equidistantes dele, podemos nos assegurar que o valor de  $E$  é o mesmo sobre elas.

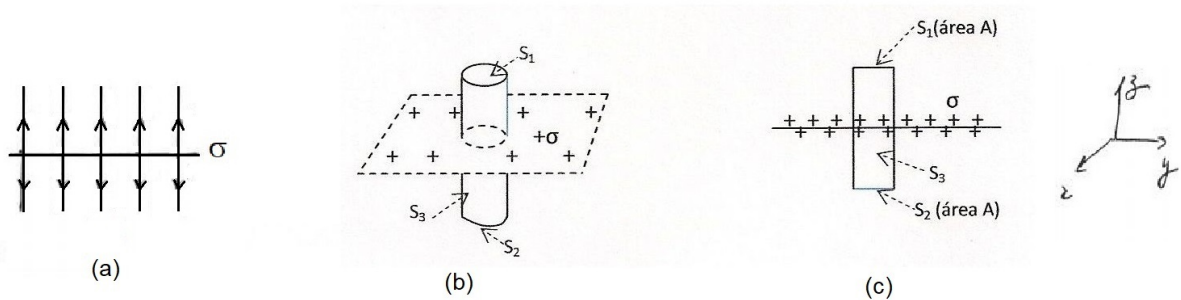


Figura 14.1: Plano carregado e superfície cilíndrica gaussiana

As normais às superfícies  $S_1$  e  $S_2$  são, respectivamente,  $\hat{n}_1 = \hat{k}$  e  $\hat{n}_2 = -\hat{k}$ , enquanto que a normal  $\hat{n}_3$  à superfície lateral do cilindro é uma combinação linear de  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ .

Para tal superfície fechada  $S$ , o lado esquerdo da lei de Gauss tem a forma

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS &= \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n}_1 dS_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n}_2 dS_2 + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \hat{n}_3 dS_3 \\ &= \iint_{S_1} E dS_1 + \iint_{S_2} E dS_2 = EA + EA, \end{aligned} \quad (14.3)$$

usando o fato que  $\vec{E} \cdot \hat{n}_3 = 0$  e que a intensidade do campo é a mesma em qualquer ponto das tampas do cilindro.

A carga interna à superfície gaussiana é

$$q_{int} = \sigma A, \quad (14.4)$$

portanto, a lei de Gauss fornece

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (14.5)$$

A intensidade do campo elétrico  $\vec{E}$  é independente da distância  $d$  à superfície carregada. Para construir o vetor campo, recorreremos às eqs.(14.1) e (14.2) e escrevemos

$$\vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}, \quad (14.6)$$

$$\vec{E}(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}. \quad (14.7)$$

É importante enfatizar que este resultado bastante simples corresponde ao campo elétrico criado em um ponto do espaço por todas as cargas contidas no plano infinito, tanto as que estão fora como as que estão dentro do cilindro gaussiano. É incorreto pensar que as expressões (14.6) e (14.7) representam o campo criado apenas pela carga  $q_{int}$  dada pela eq.(14.4).

### • exemplo 2

Duas placas planas de metal, quadradas, de lado  $L$ , são colocadas paralelamente uma a outra, separadas por uma distância fixa  $d$ . Uma delas tem carga positiva  $q$ , e a outra carga negativa  $-q$ . Nosso objetivo é determinar o campo elétrico do sistema em todos os pontos do espaço.

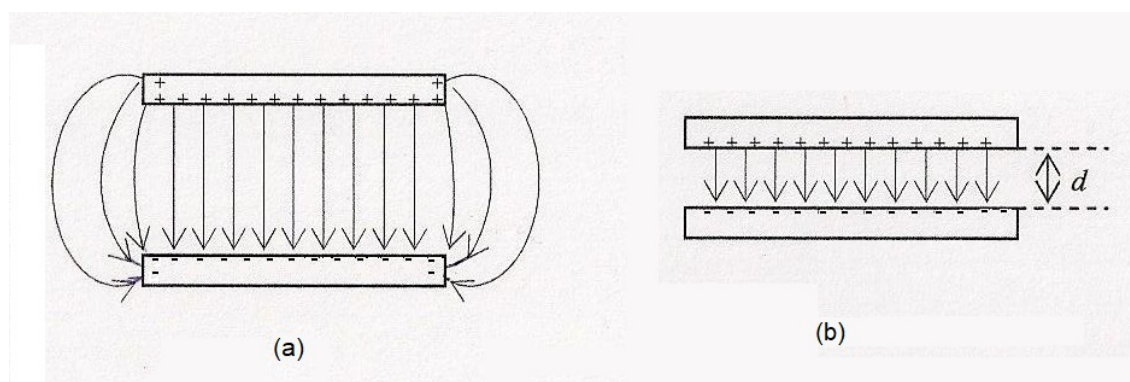


Figura 14.2: Duas placas planas quadradas de lado  $L$ , paralelas, separadas pela distância fixa  $d$ . (a) Linhas de campo quando  $L$  e  $d$  têm dimensões comparáveis; (b) linhas de campo quando  $d \ll L$ .

Este tipo de sistema, conhecido como capacitor, que aparece com bastante frequência no estudo do eletromagnetismo, acumula energia elétrica, como discutimos mais adiante. Na situação de equilíbrio eletrostático, as cargas estão distribuídas em cada placa predominantemente na superfície mais próxima da outra placa, de forma simétrica, devido ao efeito de indução. Para adquirir uma intuição de como estas cargas estão distribuídas, fazemos um exercício mental imaginando que, inicialmente, a distância  $d$  entre as placas seja muito maior do que a sua dimensão  $L$ . Neste caso, o sistema se assemelha a um dipolo elétrico, as linhas de campo estão espalhadas por todo o espaço, a indução mútua é pequena e as cargas estão espalhadas sobre todas as faces das placas, com concentrações maiores nas regiões mais pontudas.

À medida que as duas placas vão sendo aproximadas, os efeitos da indução aumentam e as cargas passam a se concentrar, predominantemente, nas faces internas das duas placas, como sugere a fig.14.2(a). Esta concentração aumenta à medida que a distância diminui mas, em qualquer caso, sobram cargas nas partes externas e nas bordas do capacitor.

Estas cargas distribuídas do lado de fora do capacitor criam campos que são responsáveis por efeitos físicos importantes. Contudo, elas também dificultam bastante o cálculo do campo elétrico produzido pelo sistema. Por isso costumamos considerar a condição  $d \ll L$ , na qual a distância entre as placas é muito menor do que as suas dimensões  $L$  pois, para o cálculo do campo elétrico podemos desprezar os efeitos de bordas e considerar os planos metálicos infinitos. Nesta aproximação é possível usar a lei de Gauss para calcular o campo elétrico. Discutimos duas soluções para este cálculo, pois a comparação entre elas é instrutiva.

### solução 1

Neste caso, usamos o princípio da superposição. Para isso, consideramos o sistema como dois planos infinitos, calculamos os campos  $\vec{E}_+$  e  $\vec{E}_-$ , respectivamente, dos planos com cargas positiva e negativa. Supondo que o plano com cargas negativas esteja apoiado sobre os eixos  $x$  e  $y$  e lembrando que as densidades de carga são  $\sigma = q/L^2$  e  $\sigma_- = -q/L^2 = -\sigma$ , as eqs. (14.6) e (14.7) fornecem

$$\vec{E}_+(z > d) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}, \quad (14.8)$$

$$\vec{E}_+(z < d) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}, \quad (14.9)$$

$$\vec{E}_-(z > 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}, \quad (14.10)$$

$$\vec{E}_-(z < 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}. \quad (14.11)$$

Note que os argumentos dos campos definem a região de validade de cada expressão.

Usando o princípio da superposição, determinamos o campo resultante em todo o espaço, escrevendo

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-. \quad (14.12)$$

Usando as eqs.(14.8)-(14.11), temos

$$\vec{E}(z > d) = \vec{E}(z < 0) = 0, \quad (14.13)$$

$$\vec{E}(0 < z < d) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k}. \quad (14.14)$$

Esta superposição de campos está indicada na fig.14.3.



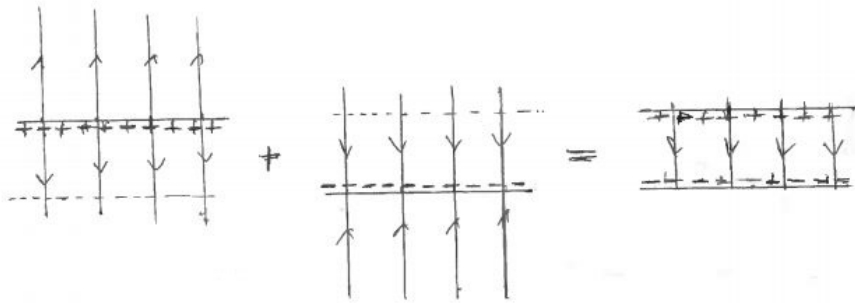


Figura 14.3: Linhas de campo (a) da placa com cargas positivas; (b) da placa com carga negativas; (c) das duas placas separadas pela distância  $d$ .

Os campos das distribuições de cargas positivas e negativas são uniformes, têm sentidos opostos e independem da distância entre as placas. Na região interna, eles se somam e a intensidade do campo resultante é  $\sigma/(2\epsilon_0) + \sigma/(2\epsilon_0) = \sigma/\epsilon_0$ , enquanto nas regiões fora das placas os campos antiparalelos se anulam.

### solução 2

Nesta segunda solução consideramos as duas placas de uma só vez.

Como as placas são consideradas infinitas, existe uma simetria em torno do eixo  $z$  e o campo elétrico em qualquer região do espaço deve ter a forma genérica

$$\vec{E} = E\hat{k}. \quad (14.15)$$

Na fig.14.4 apresentamos as duas placas metálicas carregadas e três superfícies gaussianas cilíndricas  $S_A$ ,  $S_B$  e  $S_C$ , cada uma delas com a superfície lateral  $S_{3x}$  perpendicular às placas com a base  $S_{2x}$  imersa no metal e com base  $S_{1x}$  no espaço vazio, sendo  $x$ , o índice usado para  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Para calcular o fluxo do campo elétrico sobre estas três superfícies e usando o índice  $x$  para  $A$ ,  $B$  e  $C$  escrevemos

$$\phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS_x = \iint_{S_{x_1}} \vec{E} \cdot \hat{n}_{x_1} dS_{x_1} + \iint_{S_{x_2}} \vec{E} \cdot \hat{n}_{x_2} dS_{x_2} + \iint_{S_{x_3}} \vec{E} \cdot \hat{n}_{x_3} dS_{x_3}. \quad (14.16)$$

Em todos os casos, a integral sobre  $S_{x_2}$  é feita na região do metal onde o campo é nulo e ela se anula. Além disso, no integrando sobre  $S_{x_3}$ , temos  $\vec{E} \cdot \hat{n}_{x_3} = 0$ , estas integrais também se anulam e apenas as integrais sobre  $S_{x_1}$  nos espaços vazios, sobrevivem. Para aplicar a lei de Gauss usamos  $\hat{n}_{A_1} = -\hat{k}$ ,  $\hat{n}_{B_1} = \hat{k}$  e  $\hat{n}_{C_1} = \hat{k}$ , juntamente com a eq.(14.13)

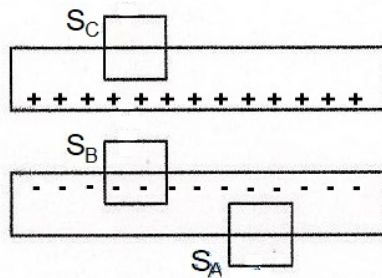


Figura 14.4: As duas placas carregadas e três superfícies gaussianas cilíndricas  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $S_C$ .

e escrevemos

$$\phi_{\vec{E}_A} = \iint_{S_{A_1}} \vec{E} \cdot (-\hat{k}) dS_{A_1} = -E_{A_1} S_{A_1} = \frac{q_{A_{int}}}{\epsilon_0} \quad (14.17)$$

$$\phi_{\vec{E}_B} = \iint_{S_{B_1}} \vec{E} \cdot \hat{k} dS_{B_1} = E_{B_1} S_{B_1} = \frac{q_{B_{int}}}{\epsilon_0} \quad (14.18)$$

$$\phi_{\vec{E}_C} = \iint_{S_{C_1}} \vec{E} \cdot \hat{k} dS_{C_1} = E_{C_1} S_{C_1} = \frac{q_{C_{int}}}{\epsilon_0} \quad (14.19)$$

onde  $E_{A_1}$ ,  $E_{B_1}$  e  $E_{C_1}$  são os valores das intensidades dos campos sobre as bases das respectivas superfícies gaussianas no espaço vazio. Inspeccionando a fig.14.4 vemos que as cargas internas a estas superfícies valem  $q_{A_{int}} = 0$ ,  $q_{B_{int}} = -\sigma S_{B_1}$  e  $q_{C_{int}} = 0$ . Podemos concluir, portanto, que  $E_{A_1} = E_{C_1} = 0$  e que  $E_{B_1} = -\sigma/\epsilon_0$ . Recorrendo à eq.(14.15) reconstruímos o vetor campo elétrico, que é dado por

$$\vec{E} = 0 \quad \text{fora das placas,} \quad (14.20)$$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k} \quad \text{entre as placas.} \quad (14.21)$$

Como esperado, estes resultados são idênticos aos das eqs.(14.13) e (14.14).

Esta segunda solução do problema envolve uma sutileza relativa à aplicação da lei de Gauss. A eq.(14.21) representa o campo *resultante* entre as duas placas e, portanto, envolve contribuições das cargas positivas e negativas. Entretanto, na segunda solução, o cálculo deste campo resultante foi efetuado considerando a superfície  $S_B$ , apoiada apenas na placa negativa. A pergunta que fica é de que modo as informações acerca da placa positiva foram incorporadas à solução global? Isto aconteceu quando usamos a informação que o campo elétrico é nulo no interior do metal da placa negativa. Na situação da fig.14.4, o campo nulo no interior do metal é resultado da superposição dos campos das duas placas. Desta forma a contribuição da placa positiva está implicitamente considerada.

### • exemplo 3 - fio infinito

O campo elétrico de um fio infinito, carregado com densidade linear uniforme  $\lambda$  de carga positiva, também pode ser calculado por meio da lei de Gauss. Isto acontece porque a simetria da distribuição de cargas permite-nos conhecer a direção do campo com antecedência. A direção do campo elétrico em qualquer ponto do espaço é perpendicular ao fio carregado, pois se girarmos o fio de  $180^\circ$  em torno deste eixo, a distribuição não se altera e o mesmo deve acontecer com o campo. Orientando o fio paralelamente ao eixo  $z$ , a estrutura geral do campo elétrico é dada por

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}, \quad (14.22)$$

onde  $\hat{r}$  é o versor da direção radial em coordenadas cilíndricas e a intensidade do campo elétrico  $E$  deve depender apenas da distância  $r$  ao fio. A direção e sentido do campo estão indicados na fig.14.5.

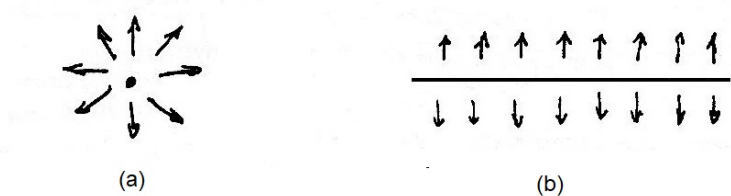


Figura 14.5: Representações do campo elétrico do fio infinito (a) o fio de frente; (b) o fio de lado.

Para calcular a intensidade do campo elétrico usando a lei de Gauss é preciso escolher uma superfície gaussiana conveniente. A simetria da distribuição sugere uma superfície cilíndrica  $S$ , com eixo coincidente com o fio carregado, como mostra a Fig.14.6, pois o campo elétrico é perpendicular à superfície cilíndrica lateral  $S_3$  e paralelo às bases  $S_1$  e  $S_2$ .

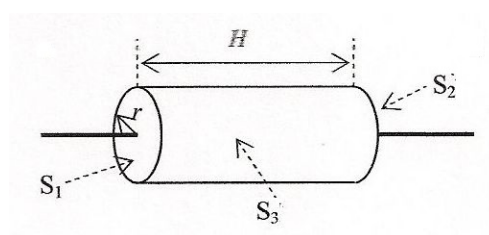


Figura 14.6: O fio infinito e uma superfície gaussiana cilíndrica.

O fluxo do campo elétrico sobre a superfície gaussiana é dado por

$$\phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n}_1 dS_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n}_2 dS_2 + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \hat{n}_3 dS_3 \quad (14.23)$$

A fig.14.6 indica que as normais à superfície gaussiana são dadas por  $\hat{n}_1 = -\hat{k}$ ,  $\hat{n}_2 = \hat{k}$  e  $\hat{n}_3 = \hat{r}$ . Usando a eq.(14.22) concluímos que as integrais sobre  $S_1$  e  $S_2$  se anulam e, portanto,

$$\phi_{\vec{E}} = \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \hat{n}_3 dS_3 = \iint_{S_3} E(r) dS_3 = E(r) S_3 = E(r) 2\pi r H. \quad (14.24)$$

Usando a lei de Gauss com  $q_{int} = \lambda H$ , obtemos

$$E(r) 2\pi r H = \frac{\lambda H}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}. \quad (14.25)$$

O vetor campo elétrico é determinado com o auxílio da eq.(14.22) e tem a forma

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}. \quad (14.26)$$

Esse resultado já foi obtido no exemplo ?? da aula ?? a partir da lei de Coulomb. A solução com uso da lei de Gauss é bem menos trabalhosa.

#### • exemplo 4 - cilindro infinito

É dado um cilindro infinito de raio  $R$ , comprimento infinito, carregado com densidade volumétrica  $\rho$  uniforme e positiva. Desejamos calcular o campo elétrico que ele produz em todo o espaço.

Este campo pode ser obtido por meio da lei de Gauss devido à simetria da distribuição, que permite conhecer de antemão a sua direção. Analogamente ao caso do fio infinito, a direção do campo elétrico em um ponto  $P$  qualquer do espaço é perpendicular ao eixo do cilindro, porque ele é simétrico em relação à perpendicular ao seu eixo. A distribuição de cargas não se altera se a rodarmos de  $180^\circ$  em torno deste eixo e o mesmo acontece com o campo, como indica a fig.14.7. Por isso, a sua forma genérica também é dada pela eq.(14.20).

Portanto, também neste caso, uma superfície gaussiana cilíndrica, com eixo coincidente com o do cilindro carregado, é conveniente para o cálculo da intensidade do campo elétrico usando a lei de Gauss.

Nas duas situações, os fluxos do campo sobre as superfícies gaussianas são dadas por

$$\phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n}_1 dS_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n}_2 dS_2 + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \hat{n}_3 dS_3, \quad (14.27)$$

com  $\hat{n}_1 = -\hat{k}$ ,  $\hat{n}_2 = \hat{k}$  e  $\hat{n}_3 = \hat{r}$  e, usando a eq.(14.22), obtemos

$$\phi_{\vec{E}} = \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \hat{n}_3 dS_3 = \iint_{S_3} E(r) dS_3 = E(r) S_3 = E(r) 2\pi r H. \quad (14.28)$$

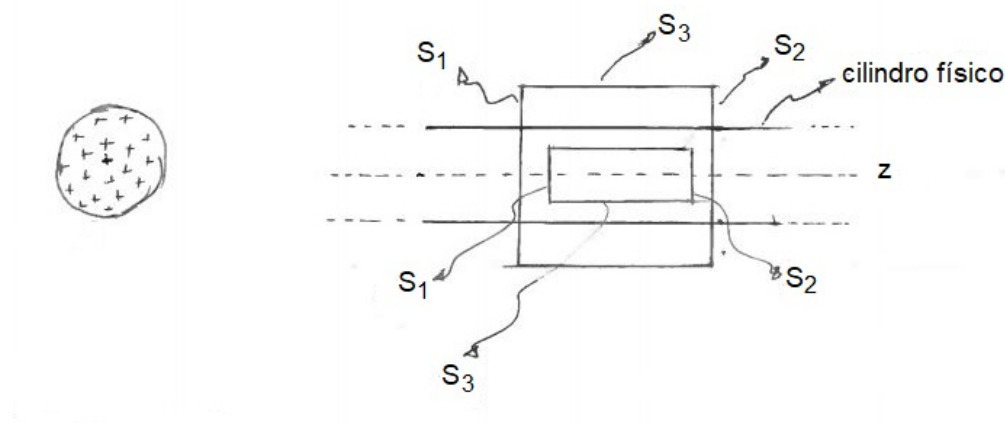


Figura 14.7: O cilindro físico e as superfícies gaussianas cilíndricas na região com cargas e fora dela.

Para pontos internos ao cilindro,  $r \leq R$ , a carga interna à superfície gaussiana é dada por

$$q_{int} = \rho \pi r^2 H \quad (14.29)$$

e a lei de Gauss fornece

$$E 2\pi r H = \frac{\rho \pi r^2 H}{\epsilon_0} \rightarrow E(r \leq R) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}. \quad (14.30)$$

Já para pontos  $r > R$ , externos ao cilindro carregado, temos

$$q_{int} = \rho \pi R^2 H$$

e, portanto,

$$E 2\pi r H = \frac{\rho \pi R^2 H}{\epsilon_0} \rightarrow E(r \geq R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}. \quad (14.31)$$

Os vetores campos elétricos são reconstruídos com o auxílio da eq.(14.20) e obtemos

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{\rho \vec{r}}{2\epsilon_0}, \quad (14.32)$$

$$\vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}. \quad (14.33)$$

A fig.14.8 mostra o gráfico da intensidade do campo elétrico em função da distância o eixo do cilindro. Ela cresce de zero no eixo, dada a simetria do sistema, até o valor  $\rho R/\epsilon_0$  na superfície do cilindro, e cai com o inverso da distância, como acontece com o campo elétrico do fio infinito, carregado com carga uniformemente distribuída.

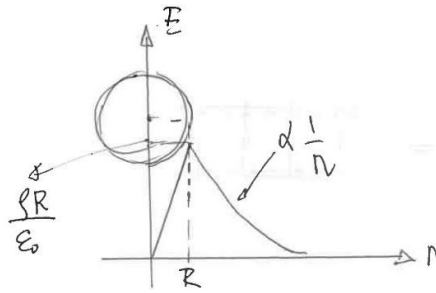


Figura 14.8: A intensidade do campo elétrico em função da distância ao eixo do cilindro.

### • exemplo 5

No exemplo 3 da aula 13, abordamos o caso de uma superfície esférica de raio  $R$  carregada com densidade superficial  $\sigma$  constante e calculamos o seu campo elétrico em pontos internos e externos a ela, dadas pelas eqs.(13.19) e (13.20). O campo sobre a superfície foi apenas mencionado mas, agora, o calculamos explicitamente.

Para determinar o campo sobre um ponto  $P$  da superfície da esfera, decompomos a distribuição de cargas em duas partes, mostradas na fig.14.9. Uma delas corresponde a um pequeno disco, de raio  $a$  com centro em  $P$  e a outra é o restante da distribuição. Esta última tem a forma de uma esfera com um pequeno buraco e é, portanto, semelhante a um olho com a sua pupila.

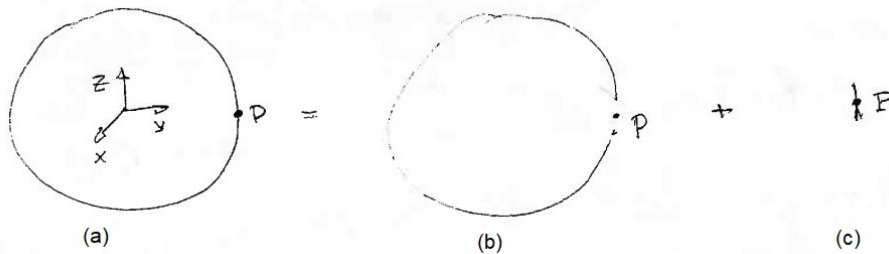


Figura 14.9: (a) A esfera e um ponto  $P$  sobre a superfície de raio  $R$ ; (b) e (c) decomposição da figura (a).

Usando um sistema de coordenadas com origem no centro da distribuição e chamando de  $(0, Y_P, 0)$ , com  $Y_P = R$  a coordenada do ponto  $P$ , os resultados (13.19) e (13.20) fornecem

$$\vec{E}(Y_P - \epsilon) = 0 \quad (14.34)$$

$$\vec{E}(Y_P + \epsilon) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{j}}{(Y_P + \epsilon)^2}, \quad (14.35)$$

onde  $\epsilon$  é um infinitésimo. Lembrando que  $q = \sigma 4\pi R^2$ , o resultado para o lado de fora da

esfera também pode ser rescrito como

$$\vec{E}(Y_P + \epsilon) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} + Q(\epsilon) \quad (14.36)$$

onde  $Q(\epsilon)$  indica contribuições da ordem de  $\epsilon$  e, portanto, muito pequenas.

O próximo passo consiste em calcular o campo  $\vec{E}_D$  produzido pelo disco na superfície da distribuição e com centro no ponto  $P$ . Para pontos muito próximos do disco, ele se torna equivalente a um plano infinito,  $\vec{E}_D$  pode ser obtido a partir das eqs.(14.6) e (14.7) e temos

$$\vec{E}_D(Y_P - \epsilon) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j}, \quad (14.37)$$

$$\vec{E}_D(Y_P + \epsilon) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j}. \quad (14.38)$$

Assim, o campo devido ao restante da distribuição, mostrada na fig.14.9(b) nas proximidades do ponto  $P$  é determinado pela diferença  $\vec{E}_P = \vec{E} - \vec{E}_D$  e dado por

$$\vec{E}_P(Y_P - \epsilon) = \vec{E}(Y_P + \epsilon) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j}. \quad (14.39)$$

ou seja, este campo é contínuo nas vizinhanças de  $P$  e, por isso, no ponto  $P$  temos

$$\vec{E}_P(Y_P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j}. \quad (14.40)$$

## • exercícios

**1.** Uma coroa esférica metálica de raio externo  $a$  e raio interno  $b$  está descarregada quando é colocada no seu centro uma carga elétrica puntiforme  $+q$ .

- Determine as densidades de carga nas superfícies interna e externa da coroa esférica.
- Determine, usando a lei de Gauss, o campo elétrico em todas as regiões do espaço.
- Faça um gráfico da intensidade do campo elétrico versus a distância ao centro da coroa.
- A coroa esférica tem alguma influência no campo da carga  $+q$  no seu centro?
- O que acontece com as distribuições de cargas se a casca esférica externa é aterrada?
- Usando a lei de Gauss determine o campo elétrico em todas as regiões do espaço.
- A coroa esférica tem alguma influência no campo da carga  $+q$  no seu centro, quando a superfície externa é aterrada?

**2.** Um cilindro metálico muito longo, de raio  $a$ , é carregado com carga positiva e densidade superficial  $\sigma$ . Uma casca metálica cilíndrica de raio  $2a$  é colocada coaxialmente com o cilindro maciço interno.

- Determine o campo elétrico das cargas deste sistema em todas as regiões do espaço.

- (b) Faça um gráfico da intensidade do campo elétrico em função da distância do eixo.  
 (c) Discuta o papel da casca cilíndrica de raio  $2a$  sobre o campo elétrico no espaço ao redor do sistema.

**3.** Um cilindro de raio  $R$  e comprimento infinito é carregado com carga positiva de densidade volumétrica  $\rho = \rho_0 r/R$ , sendo  $\rho_0$  é constante positiva, e  $r$  é a distância ao eixo do cilindro.

- (a) Determine o campo elétrico em todas as regiões do espaço.  
 (b) Faça um gráfico do módulo do campo elétrico  $E$  versus a distância  $r$  ao eixo.  
 (c) Você pode fazer alguma afirmação sobre o material deste cilindro?

**4.** Uma esfera isolante maciça de raio  $R$  possui uma densidade volumétrica de carga constante igual a  $\rho_0$ .

- (a) Usando a lei de Gauss mostre que o campo elétrico em qualquer ponto no interior da esfera é dado por:

$$\vec{E}(r < R) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

- (b) Uma cavidade esférica é produzida na esfera, com raio  $a < R$ . Usando o resultado acima e o princípio de superposição de campos elétricos mostre que o vetor campo elétrico nos pontos do interior da cavidade é dado por:

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{a}$$

**5.** Uma placa muito extensa de material dielétrico e espessura  $b$ , está carregada com carga e densidade uniforme  $\rho$ . Adote o plano da placa como  $(x, y)$ .

- (a) Usando a lei de Gauss determine o campo elétrico dentro da placa e fora dela.  
 (b) Faça um gráfico da intensidade do campo elétrico em função da distância ao plano que divide a placa em duas partes de igual espessura.  
 (c) Compare o resultado deste exercício com o do exemplo 1 e comente.

### • respostas

1.(a)  $\sigma(r = a) = -\frac{q}{4\pi a^2}$       $\sigma(r = b) = \frac{q}{4\pi b^2}$

(b)  $\vec{E}(0 < r < a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$       $\vec{E}(a < r < b) = 0$       $\vec{E}(r > b) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{n}}{r^3}$

(d) Não.

(e) A superfície externa fica descarregada,  $\sigma(r = b) = 0$ , e a interna continua com  $\sigma(r = a) = -q/4\pi a^2$ .

(f)  $\vec{E}(0 < r < a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$       $\vec{E}(r > a) = 0$



$$2.(a) \vec{E}(r < a) = 0; \quad \vec{E}(r > a) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}$$

$$3.(a) \vec{E}(0 \leq r \leq a) = \frac{\rho}{3\epsilon_0 R} r\vec{r}; \quad \vec{E}(r \geq a) = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}$$

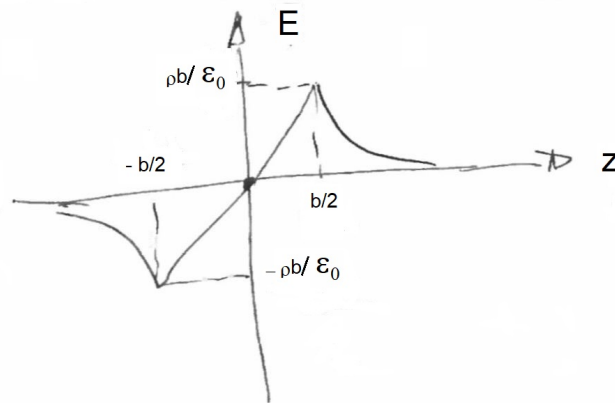
(c) Sim. É dielétrico.

$$5.(a) \vec{E}(-b/2 \leq z \leq b/2) = \frac{\rho^2}{\epsilon_0} z \hat{j} \quad (\text{dentro da placa})$$

$$\vec{E}(z \geq d/2) = \frac{\rho b}{\epsilon_0} \hat{j} \quad (\text{fora da placa})$$

$$\vec{E}(z \leq -d/2) = -\frac{\rho b}{\epsilon_0} \hat{j} \quad (\text{fora da placa})$$

(b)



(c) Levando em conta a espessura da superfície carregada, não há descontinuidade no valor do campo elétrico e os valores fora da placa coincidem com o do exemplo 1. 1



# Capítulo 15

## lei de Gauss - aplicações II

Nesta aula serão tratadas algumas situações físicas nas quais há simetrias “exatas” nas distribuições de cargas, o que permite o uso da lei de Gauss para o cálculo do campo elétrico gerado por elas.

- exemplo 6

**Cálculo do campo elétrico de um plano infinito carregado com uma densidade de carga  $\sigma$ , constante e positiva, num ponto  $P$  que dista  $a$  do plano.**

O primeiro passo para se calcular o campo elétrico usando a lei de Gauss é encontrar a superfície gaussiana conveniente para isso. Para tanto, analisemos a simetria da distribuição e notemos que:

- a direção de  $E$ , em qualquer ponto acima ou abaixo do plano, deve ser perpendicular ao plano. Isto porque há em qualquer ponto  $P$  elementos da superfície carregada que são simétricos em relação à perpendicular ao plano e que passa pelo ponto  $P$ . Tais elementos de carga geram campos elétricos cujas componentes em qualquer direção que não a perpendicular ao plano se anula.

- o módulo do campo elétrico  $E$  deve ser constante sobre qualquer plano paralelo à superfície carregada.

Assim, é conveniente escolher uma superfície gaussiana como mostra a Figura 15.1, ou seja, um cilindro com bases de dimensões infinitesimais  $A$ , paralelas ao plano de cargas, e equidistantes da superfície carregada (distância  $a$ ), e superfície lateral perpendicular à placa.

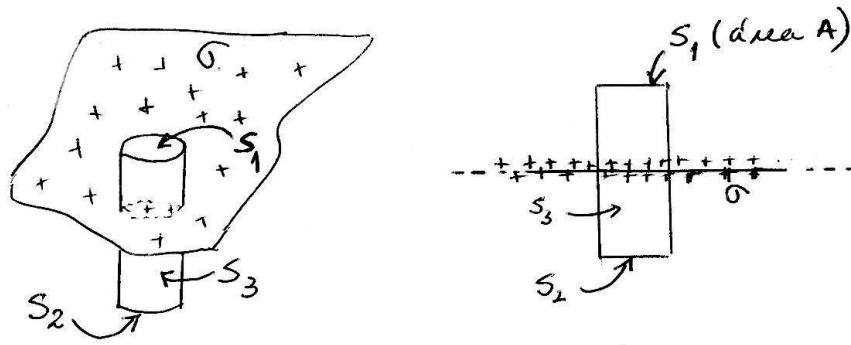


Figura 15.1: Plano carregado e superfície cilíndrica gaussiana

Podemos assim escrever a lei de Gauss para tal superfície fechada  $S$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS &= \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \\
 \Rightarrow \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n} dS &= \iint_{S_1} E dS_1 + \iint_{S_2} E dS_2 + \iint_{S_3} E dS_3 \cos \frac{\pi}{2} = \\
 = EA + EA &= \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad (15.1)
 \end{aligned}$$

Portanto a lei de Gauss fornece o módulo do campo elétrico  $E$  que é independente da distância  $a$  à superfície carregada. E como o campo é perpendicular à superfície em qualquer ponto  $P$ , como já argumentado, tem-se:

$$\begin{aligned}
 2EA &= \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \\
 \therefore \vec{E} &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{t} \quad (15.2)
 \end{aligned}$$

$\hat{t}$  é um versor perpendicular à superfície carregada, no sentido “saindo” da placa, pois a carga da placa é positiva.

É bom enfatizar que, apesar da carga  $q_{int}$  do cálculo do campo pela lei de Gauss ser a carga interior à superfície gaussiana cilíndrica adotada, o campo elétrico em qualquer ponto do espaço é devido a **todas** as cargas da superfície carregada.

**Pergunta:** Seria possível repetir o cálculo acima para o caso de um plano finito, tal como um disco de raio  $R$ , uniformemente carregado? Justifique.

#### • exemplo 7

Duas placas de metal, quadrada de lado  $L$ , são colocadas paralelamente uma a outra, separadas por uma distância  $d$ . Uma das placas planas recebe carga

positiva de valor total  $q$ , e a outra placa é aterrada. Calcule o campo elétrico devido ao sistema, em todos os pontos do espaço.

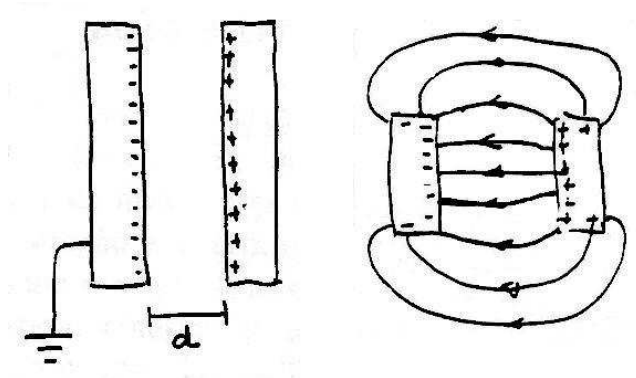


Figura 15.2: Duas placas quadradas de lado  $L$ , paralelas, separadas pela distância  $d$ . À direita: linhas de campo quando  $L$  e  $d$  têm dimensões comparáveis. À esquerda: linhas de campo quando  $d \ll L$ .

No caso geral, em que  $d$  e  $L$  têm dimensões comparáveis, existem linhas de campo em grande parte do espaço, como ilustra o desenho à direita da Figura 15.2, e a solução do problema é difícil.

Na condição da distância  $d$  ser muito menor do que a dimensão  $L$  das placas pode-se desprezar os efeitos das bordas delas, e considerar os planos metálicos infinitos. E nesta condição é possível usar a lei de Gauss para calcular o campo elétrico. Há até duas soluções possíveis.

**Solução 1.** Considera-se o sistema como dois planos infinitos, e calcula-se o campo para cada um dos planos exatamente como no exemplo anterior, sendo que o campo resultante é a superposição dos campos das duas placas.

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \quad (15.3)$$

Como na região do espaço entre as placas os campos das cargas positivas e negativas são paralelos e independem da distância, eles se somam resultando no dobro do seu módulo; enquanto em qualquer outra região do espaço, “fora” das placas, à direita ou à esquerda, os campos são antiparalelos e independem da distância e, portanto se anulam.

$$\vec{E}(\text{entre as placas}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{t} = \frac{q}{L^2 \epsilon_0} \hat{t}$$

$$\vec{E}(\text{“fora” das placas}) = 0 \quad (15.4)$$

$\hat{t}$  é um versor perpendicular às superfícies carregada, no sentido “saindo” da placa com carga positiva e “entrando” na placa com carga negativa.

**Solução 2.** Nesta segunda solução se considera o sistema completo, ou seja, quando uma das placas metálicas é carregada com carga positiva, tal carga se distribui uniformemente na sua superfície, e ocorre indução de cargas negativas na outra placa metálica.

Sendo a placa com cargas induzidas aterrada, as cargas nas placas se distribuem uniformemente nas superfícies internas, como mostra a Figura 15.2. Também por argumentos de simetria já feitos no caso de uma única placa, se pode concluir que o campo elétrico das placas deve ser perpendicular a elas, em qualquer região do espaço.

As superfícies de Gauss cilíndricas desenhadas na Figura 15.3 são tais que a superfície lateral do cilindro é perpendicular às placas, uma das bases está no interior do metal, e a outra em uma das regiões do espaço: entre as placas (ponto  $Q$ ), ou fora das placas, à direita (ponto  $R$ ) e à esquerda (ponto  $P$ ).

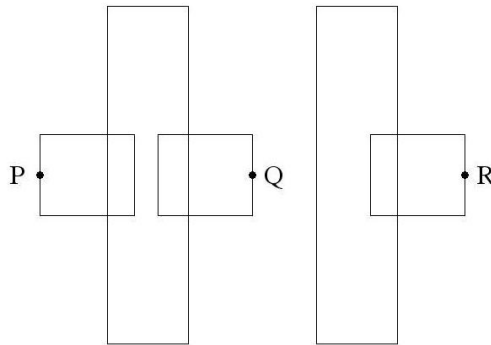


Figura 15.3: Par de placas paralelas e superfícies gaussianas.

Os cilindros com uma das bases com pontos  $R$  e  $P$  ( $S_1$ ) e a outra no interior do metal ( $S_2$ ) não contém cargas no seu interior, já que eles não englobam a parte interna da superfície de nenhuma das placas.

Já o cilindro que contém uma base ( $S_1$ ) com o ponto  $Q$  entre as placas e a outra base no interior da placa ( $S_2$ ) tem no seu interior carga negativa, da superfície mais interna da placa aterrada.

Neste exemplo também será chamada de  $S_3$  a superfície lateral do cilindro fechado, cuja normal é perpendicular ao campo elétrico.

Portanto, a lei de Gauss nestas três superfícies gaussianas pode ser escrita da seguinte forma:

$$P : \frac{0}{\varepsilon_0} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E_P A + 0 + 0 \Rightarrow E_P = 0$$

$$R : \frac{0}{\varepsilon_0} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E_R A + 0 + 0 \Rightarrow E_R = 0$$

$$Q : -\frac{\sigma A}{\varepsilon_0} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = -E_Q A + 0 + 0 \Rightarrow E_Q = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (15.5)$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\textit{entre as placas}) &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{t} = \frac{q}{L^2 \varepsilon_0} \hat{t} \\ \vec{E}(\textit{“fora“ das placas}) &= 0\end{aligned}\tag{15.6}$$

$\hat{t}$  é um versor perpendicular às superfícies carregada, no sentido “saindo” da placa com carga positiva e “entrando” na placa com carga negativa.

### exemplo 8

#### Cálculo do campo elétrico de um fio infinito, carregado com densidade linear uniforme $\lambda$ de carga positiva.

Para calcular o campo elétrico usando a lei de Gauss é preciso encontrar a superfície gaussiana conveniente. Para tanto, analisemos a simetria da distribuição:

- a direção do campo elétrico em qualquer ponto do espaço é perpendicular ao fio carregado. Isto porque há em qualquer ponto  $P$  do espaço, elementos do fio carregado que são simétricos em relação à perpendicular ao fio e que passa pelo ponto  $P$ . Tais elementos de carga geram campos elétricos cujas componentes em qualquer direção que não a perpendicular ao fio se anulam. Observe que isto só ocorre para fios infinitos (infinitamente longe das pontas do fio).

- o módulo do campo elétrico  $E$  deve ser constante sobre qualquer superfície equidistante do fio, ou seja,  $E(r)$  com  $r$  a distância do fio.

Portanto, uma superfície cilíndrica com eixo coincidente com o fio carregado, como mostra a Figura 15.4, é uma superfície gaussiana conveniente para o cálculo do campo elétrico usando a lei de Gauss. O campo elétrico das cargas do fio é perpendicular à superfície cilíndrica  $S_2$  da Figura 15.4, com módulo constante  $E(r)$ ; e o campo é perpendicular às bases do cilindro (superfícies  $S_1$  e  $S_3$  da mesma Figura 15.4).

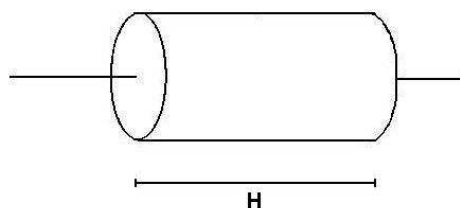


Figura 15.4: O fio infinito e uma superfície gaussiana cilíndrica.

Usando a lei de Gauss no cilindro da Figura 15.4:

$$\begin{aligned}
 \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} &= \frac{\lambda H}{\varepsilon_0} = \iiint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \\
 &= \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \\
 &= 0 + E 2\pi r H + 0 \implies E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \\
 \therefore \vec{E} &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} \tag{15.7}
 \end{aligned}$$



Figura 15.5: Representações do campo elétrico do fio infinito: à esquerda o fio de frente; à direita o fio de lado.

**Pergunta:** Seria possível repetir o cálculo acima para um fio de comprimento finito  $L$ ? Justifique.

### exemplo 9

**Cálculo do campo elétrico, em todo o espaço, de um cilindro infinito de raio  $R$ , muito longo (comprimento infinito), com cargas positivas de densidade volumétrica  $\rho$  uniforme.**

Também nesta situação física a lei de Gauss pode ser usada por o cálculo do campo elétrico. De forma análoga à discussão da simetria de cargas no fio com densidade uniforme, pode-se concluir que:

- a direção do campo elétrico em qualquer ponto do espaço é perpendicular ao eixo do cilindro. Isto porque há em qualquer ponto  $P$  do espaço, elementos volumétricos de cargas que são simétricos em relação à perpendicular ao eixo do cilindro, e que passa pelo ponto  $P$ . Tais elementos de carga geram campos elétricos cujas componentes em qualquer direção que não a perpendicular ao eixo do cilindro se anula. Observe que isto só ocorre para cilindros muito longos (comprimentos infinitos).

- o módulo do campo elétrico  $E$  deve ser constante sobre qualquer superfície equidistante do eixo do cilindro, ou seja,  $E(r)$ , com  $r$  a distância ao eixo.



Portanto, uma superfície cilíndrica com eixo coincidente com o do eixo do cilindro carregado, é uma superfície gaussiana conveniente para o cálculo do campo elétrico usando a lei de Gauss.

Usando uma superfície de Gauss cilíndrica de raio  $r \geq R$  e comprimento  $H$ :

$$\begin{aligned}\frac{q_{int}}{\varepsilon_0} &= \frac{\rho\pi R^2 H}{\varepsilon_0} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E2\pi r H \\ \Rightarrow E &= \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} \\ \therefore \vec{E} &= \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}\end{aligned}\quad (15.8)$$

Usando uma superfície de Gauss cilíndrica de raio  $r \leq R$  e comprimento  $H$ :

$$\begin{aligned}\frac{q_{int}}{\varepsilon_0} &= \frac{\rho\pi r^2 H}{\varepsilon_0} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E2\pi r H \\ \Rightarrow E &= \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \\ \therefore \vec{E} &= \frac{\rho \vec{r}}{2\varepsilon_0}\end{aligned}\quad (15.9)$$

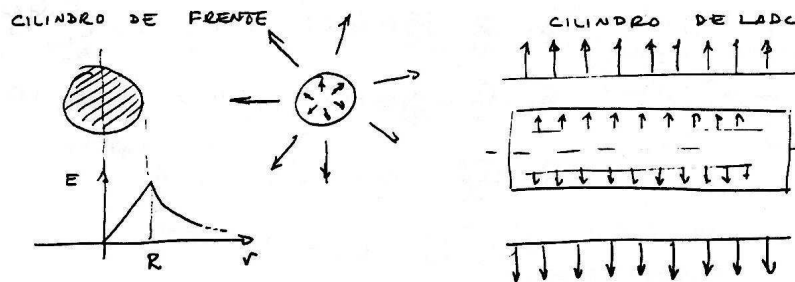


Figura 15.6: à esquerda: Gráfico de  $E(r)$ ; à direita: linhas de campo elétrico do cilindro infinito.

**Pergunta:** Este cilindro pode ser feito de qualquer material? Justifique.

**Pergunta:** Se o cilindro tiver um comprimento finito  $L$  pode ser usada a mesma solução para o cálculo do campo elétrico? Justifique.

• **exercícios**

1. Uma coroa esférica metálica de raio externo  $R_E$  e raio interno  $R_I$  está descarregada quando é colocada no seu centro uma carga elétrica puntiforme  $+q$ .

- Determine as densidades de carga nas superfícies interna e externa da coroa esférica.
- Determine, usando a lei de Gauss, o campo elétrico em todas as regiões do espaço.
- Faça um gráfico do campo elétrico versus a distância ao centro da coroa.
- A coroa esférica tem alguma influência no campo da carga  $+q$  no seu centro? Justifique.
- O que acontece com as distribuições de cargas se a casca esférica externa é aterrada?
- Usando a lei de Gauss determine o campo elétrico em todas as regiões do espaço.
- A coroa esférica tem alguma influência no campo da carga  $+q$  no seu centro, quando a superfície externa é aterrada? Justifique.

2. Um cilindro metálico de raio  $R_I$  e muito longo (comprimento infinito) é carregado com carga total  $Q$ . Uma casca metálica cilíndrica descarregada e de raio  $2R_I$  é colocada coaxialmente com cilindro interno.

- Discuta a distribuição de cargas no sistema.
- Determine o campo elétrico das cargas deste sistema, em todas as regiões do espaço.
- Faça um esboço das linhas de força do campo elétrico.
- Discuta o papel da casca cilíndrica externa descarregada sobre o campo elétrico do sistema no espaço ao seu redor.

3. Um cilindro de raio  $R$  e muito longo (comprimento infinito) é carregado com carga positiva de densidade volumétrica  $\rho = \rho_0 r/R$ , sendo  $\rho_0$  é constante positiva, e  $r$  é a distância ao eixo do cilindro.

- Determine o campo elétrico em todas as regiões do espaço.
- Faça um gráfico do módulo do campo elétrico  $E$  versus a distância  $r$  ao eixo.
- Você pode fazer alguma afirmação sobre o material deste cilindro? Justifique.

4. Uma esfera isolante maciça de raio  $R$  possui uma densidade volumétrica de carga constante igual a  $\rho_0$ .

- Usando a lei de Gauss mostre que o campo elétrico em qualquer ponto no interior da esfera é dado por:

$$\vec{E}(r < R) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

- Uma cavidade esférica é produzida na esfera, com raio  $a < R$ . Usando o resultado acima e o princípio de superposição de campos elétricos mostre que o vetor campo elétrico nos pontos do interior da cavidade é dado por:

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{a}$$

Sendo que  $\vec{a}$  é o vetor que une o centro da esfera ao centro da cavidade.

**5.** Duas placas de material dielétrico, quadradas de lado  $L$ , são colocadas paralelamente a uma distância  $d$  entre elas. A dimensão  $L$  da placa é muito maior do que a distância  $d$  entre elas.

(a) Usando a lei de Gauss determine o campo elétrico em todas as regiões do espaço quando as duas placas estão carregadas com densidade superficial constante  $+\sigma$ .

(b) Usando a lei de Gauss determine o campo elétrico em todas as regiões do espaço quando uma das placas tem uma densidade superficial constante de cargas  $+\sigma$  e a outra  $-\sigma$ .

(c) Compare as distribuições de cargas nas placas e o resultado do campo elétrico do item anterior, com as distribuições de cargas e campos elétricos do exemplo 7. Comente semelhanças e diferenças.



# Capítulo 16

## energia potencial - aplicações

De modo geral, a energia potencial de um sistema onde atuam forças conservativas está associada à distribuição espacial da matéria. A energia potencial é a energia associada à forma do sistema, representada pelas posições relativas entre as várias partes que o compõem. No caso particular de duas cargas puntiformes, a energia potencial do sistema é dada pela eq.(15.24) e a dependência da forma é representada pela distância relativa  $r$ . No caso de um sistema de cargas, consideramos as interações de cada par de elementos de cargas que o constitui.

### • exemplo 1: anel uniformemente carregado

Considere o sistema formado por um anel de raio  $R$ , carregado com uma densidade de carga  $\lambda$  constante e positiva, e uma carga  $Q$ , também positiva, situada no seu eixo, a uma distância  $h$  do seu centro, como mostrado na fig.16.1.

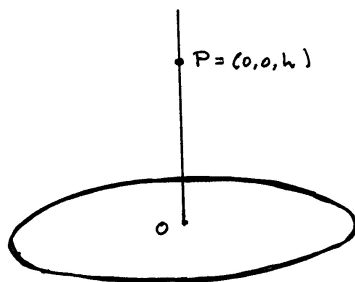


Figura 16.1: O anel de raio  $R$  e o ponto P.

Desejamos calcular a energia potencial de interação do sistema anel-carga e isto pode ser feito de dois modos diferentes.

## • solução 1

Usamos o fato de que a energia potencial do sistema carga-anel é dada pela soma das energias potenciais de todos os sistemas formados pela carga  $Q$  e pedacinhos do anel. Sendo  $dq = \lambda R d\theta y$ , a carga de um pedaço de comprimento  $R d\theta$  do anel, o elemento de energia potencial é dado por

$$dU = \frac{Q \lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}}. \quad (16.1)$$

A energia potencial total dada pela soma de todas as contribuições é

$$U = \int dU = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{Q \lambda R}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \frac{Q \lambda 2\pi R}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}}. \quad (16.2)$$

## • solução 2

A energia potencial do sistema carga-anel também pode ser obtida calculando o trabalho realizado para trazer a carga  $Q$  desde o infinito até o ponto  $P = (0, 0, h)$ , ao longo do eixo do anel. A força que o anel exerce sobre a carga  $Q$  em um ponto de coordenada genérica  $P' = (0, 0, z)$  é dada por  $\vec{F} = Q\vec{E}$ , sendo  $\vec{E}$  o campo calculado na aula 9, eq.(9.10), dada por

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (16.3)$$

onde,  $q = 2\pi\lambda R$  é a carga total do anel.

A energia potencial do sistema é determinada pelo trabalho necessário para trazer a carga  $Q$  desde o infinito até o ponto  $P$  usando os deslocamentos  $d\vec{c} = dz\hat{k}$ , dado por

$$\begin{aligned} U &= - \int_{\infty}^h \vec{F} \cdot d\vec{c} = - \int_{\infty}^h dz QE = \\ &= - \int_{\infty}^h dz \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \left[ \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]_{\infty}^h = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \end{aligned} \quad (16.4)$$

Como esperado, este resultado é idêntico a (16.2). É interessante notar que no limite em que o raio  $R$  do anel é muito menor do que a distância  $h$  que separa a carga  $Q$  do seu centro, temos

$$U \rightarrow \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h}, \quad (16.5)$$

o que indica que o anel se comporta como uma carga puntiforme.

## • exemplo 2 - esfera uniformemente carregada

Um sistema é formado por uma esfera de raio  $R$ , uniformemente carregada com densidade  $\rho$  positiva e uma carga puntiforme  $Q$ , no ponto  $P$ , distante  $d$  do centro da esfera. Determinamos a energia potencial  $U$  de interação entre a esfera e a carga  $Q$ , em função da distância  $d$ .

Podemos resolver problemas deste tipo de dois modos diferentes.

### • solução 1

Calculamos inicialmente o campo elétrico criado pela esfera e, em seguida o trabalho realizado para trazermos a carga  $Q$  desde o infinito até o ponto  $P$ .

O campo elétrico da esfera de carga total  $q$ , calculado na aula 13, eqs.(13.14) e (13.15), para pontos internos e externos à esfera, é dado por

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \hat{r}, \quad (16.6)$$

$$\vec{E}(r \geq R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}. \quad (16.7)$$

sendo  $q$ , a carga da esfera. A força entre a carga  $Q$  e a distribuição esférica é dada por  $\vec{F} = Q\vec{E}$ . Aproximando da esfera, a carga  $Q$  através de um caminho radial, com  $d\vec{c} = dr \hat{r}$ , a energia potencial do sistema carga-esfera é expressa por

$$U = - \int_{\infty}^P \vec{F} \cdot d\vec{c} = - \int_{\infty}^d Q\vec{E} \cdot \hat{r} dr = - \int_{\infty}^d Q E dr \quad (16.8)$$

Existem duas situações a serem consideradas, mostradas na fig.16.2

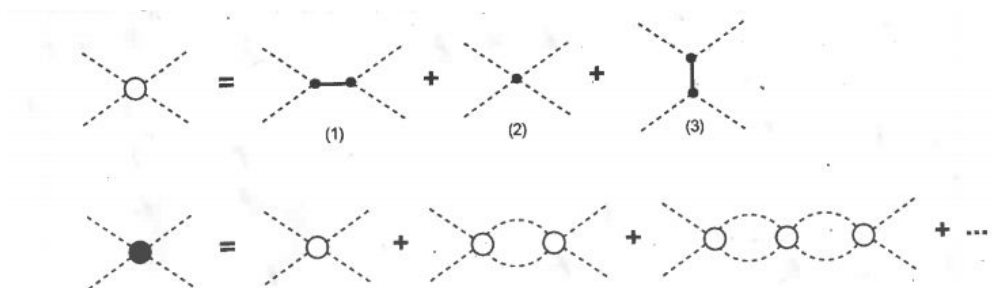


Figura 16.2: Esfera uniformemente carregada e uma carga puntiforme  $Q$  distante (a)  $d > R$  e (b)  $d < R$  de seu centro.

Para pontos fora da esfera, com  $d > R$ , a eq.(16.7) fornece

$$U(d > R) = - \int_{\infty}^d \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \quad (16.9)$$

Para trazer a carga  $Q$  até um ponto interno à esfera, com  $d < R$ , é preciso percorrer toda a parte exterior a ela e, em seguida, penetrar na distribuição. Por isso, a energia do sistema é

$$\begin{aligned} U(d < R) &= - \int_{\infty}^R \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr - \int_R^d \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} dr = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} - \left[ \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{2R^3} \right]_R^d \\ &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \left[ \frac{3}{2} - \frac{d^2}{2R^2} \right]. \end{aligned} \quad (16.10)$$

• solução 2

Nesta solução, decompomos a esfera em elementos de carga  $dq$  que podem ser considerados puntiformes e usamos a expressão (15.24) para a energia potencial  $dU$  do sistema formado por  $Q$  e pelo elemento de carga  $dq$  e em seguida somamos todas as contribuições  $dU$ , integrando sobre a esfera. A quantidade de carga  $dq$  contida em um elemento de volume  $dV$  é, em coordenadas esféricas,  $dq = \rho r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$ . Por conveniência, escolhamos o ponto P, onde está a carga  $Q$ , sobre o eixo  $z$ , como mostra a fig.16.3.

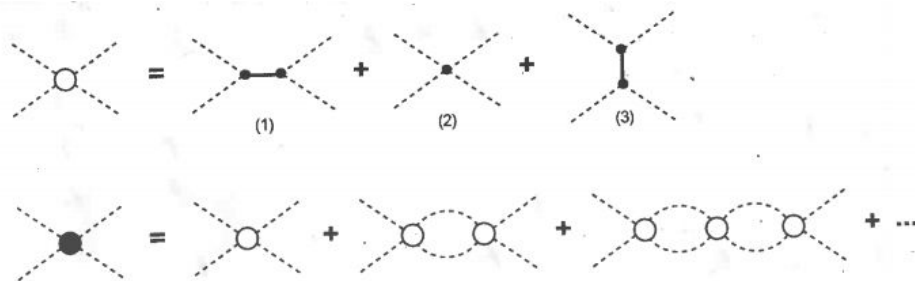


Figura 16.3: A esfera, o elemento de carga  $dq$  e o ponto P para (a)  $d > R$  e (b)  $d < R$ .

Tanto no caso de pontos  $d \geq R$ , externos à distribuição, como no de  $d \leq R$  internos, a energia potencial do sistema formado pela carga  $Q$  e pelo elemento  $dq$  é dada por

$$dU = \frac{Qdq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{s} \quad (16.11)$$

onde

$$s = \sqrt{d^2 + r^2 - 2dr \cos\theta} \quad (16.12)$$

é a distância de  $dq$  ao ponto P.



A energia potencial  $U$  é obtida integrando  $dU$  sobre toda a esfera e temos

$$\begin{aligned} U &= \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{Q\rho r^2 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2 - 2dr\cos\theta}} \\ &= \frac{Q\rho 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{r^2}{\sqrt{d^2 + r^2 - 2dr\cos\theta}} \end{aligned} \quad (16.13)$$

Fazendo a mudança de variável  $t = d^2 + r^2 - 2dr\cos\theta$ , temos

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q\rho 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr r^2 \left( \frac{1}{2dr} \right) \int_{(r-d)^2}^{(r+d)^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{Q\rho 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2d} \int_0^R dr r 2 \left[ \sqrt{d^2 + r^2 + 2dr} - \sqrt{d^2 + r^2 - 2dr} \right] \\ &= \frac{Q\rho 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \int_0^R dr r [(d+r) - |d-r|] \end{aligned} \quad (16.14)$$

Note a presença de um módulo neste resultado. Para concluir o cálculo, precisamos considerar os dois casos da relação entre  $r$  e  $d$ .

No exterior da esfera,  $d > R$ , temos

$$\begin{aligned} U &= + \frac{Q\rho 4\pi}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2d} \int_0^R dr r [(d+r - d+r)] \\ &= + \frac{Q\rho \frac{4\pi}{3} R^3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d}. \end{aligned} \quad (16.15)$$

Para determinar a energia potencial para  $d < r$ , é preciso considerar duas regiões distintas no processo de integração, escrevendo

$$\begin{aligned} U &= + \frac{Q\rho 4\pi}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2d} \left\{ \int_0^d dr r [d+r - d+r] + \int_d^R dr r [d+r + d-r] \right\} \\ &= + \frac{Q\rho 4\pi}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2d} \left\{ 2 \frac{r^3}{3} \Big|_0^d + 2d \frac{r^2}{2} \Big|_d^R \right\} \\ &= \frac{Q\rho \frac{4\pi}{3} R^3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{d^2}{2R^2} \right) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{d^2}{2R^2} \right) \end{aligned} \quad (16.16)$$

Estes resultados são idênticos aos obtidos através do outro método, eqs.(16.9) e (16.10).

A energia potencial  $U$  do sistema carga-esfera em função da razão  $d/R$  é mostrada na fig.16.4. Para pontos externos à distribuição, esta energia coincide com a de um sistema

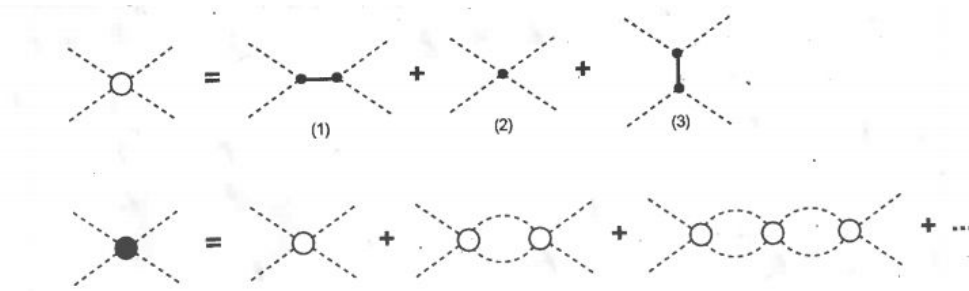


Figura 16.4: Energia potencial do sistema carga-esfera (linha cheia) e de duas cargas puntiformes (bolinhas) em função da razão  $d/R$ .

formado por duas cargas puntiformes  $q$  e  $Q$ . Já para pontos internos, as características da distribuição aparecem.

O maior valor possível para a energia potencial ocorre no centro da esfera, onde a força é nula. Isso pode parecer estranho à primeira vista, mas não o é. Consideremos, por exemplo, o caso em que as cargas  $Q$  e  $q$  têm o mesmo sinal.

$$|\vec{F}| = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (16.17)$$

$$U = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \quad (16.18)$$

Para levar a carga  $Q$  desde o infinito até o centro da distribuição é preciso realizar continuamente trabalho contra uma força repulsiva, tanto na região externa, como na interna à esfera. Por isso, quanto menor o valor de  $d$ , maior o trabalho realizado. Assim, o fato de a força ser nula em  $d = 0$  se manifesta na forma de uma energia potencial constante nas vizinhanças daquele ponto.

### • exemplo 3 - poço de energia potencial

Uma partícula puntiforme de massa  $m$  e carga negativa  $-Q$  é abandonada em repouso num ponto do eixo de um anel isolante de raio  $R$ , carregado com uma densidade linear de carga  $\lambda$ , constante e positiva e fixo no espaço. Nosso interesse é usar a conservação da energia para estudar o tipo de movimento executado por esta partícula. A energia potencial do sistema carga-anel calculada no exemplo 1 é dada por

$$U(z) = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (16.19)$$

onde  $q = 2\pi R\lambda$  é a carga total do anel e  $z$  é a distância genérica entre a carga e o centro dele.

Supondo que a partícula tenha sido abandonada em repouso a uma distância  $L$  do

centro do anel, a energia total  $E$  do sistema é

$$E = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2}}, \quad (16.20)$$

pois ele só possui energia potencial.

Para todos os pontos do eixo  $z$  tais que  $|z| \leq L$  vale a relação

$$-\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2}} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (16.21)$$

onde  $v$  é a velocidade da partícula no ponto considerado. A energia cinética da partícula é dada por

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2}} \right] \quad (16.22)$$

dever ser positiva ou nula, o que somente pode ocorrer no intervalo  $-L \leq z \leq L$ . Assim, o seu movimento é uma oscilação sobre o eixo  $z$ , com amplitude  $L$ , em torno do centro do anel. É importante notar que, apesar de oscilatório, este movimento não é do tipo harmônico simples.

A fig.16.5 representa a energia potencial  $U$  do sistema em função de  $z$  e tem a forma conhecida como poço de potencial. Também está indicada na figura, a energia total  $E$ .

A partícula se move entre  $z = +L$  e  $z = -L$ , presa neste poço. Sua energia cinética, dada pela diferença  $E - U$ , é nula em  $z = \pm L$  e máxima em  $z = 0$ .

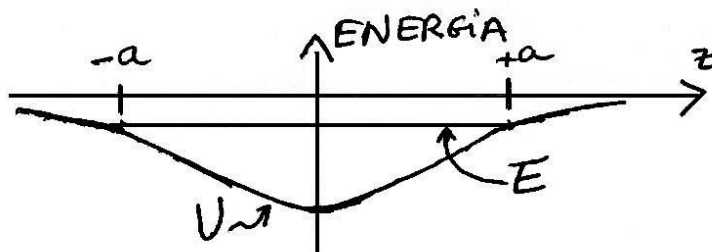


Figura 16.5: Energia potencial  $U$ , com forma de poço e a energia mecânica total  $E$  do sistema carga-anel.

Como as cargas do anel e da partícula têm sinais opostos e se atraem, logo depois de ser abandonada, a partícula passa a se mover em direção ao anel e a sua velocidade aumenta, até o ponto  $z = 0$ , onde sua energia cinética é máxima. Neste ponto, a velocidade vale em módulo

$$v(0) = \left[ \frac{2}{m} \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2}} \right) \right]^{1/2} \quad (16.23)$$

A partir daí, a velocidade passa a diminuir, pois a força agora é contrária ao movimento. Essa situação perdura até que o ponto  $z = -L$  seja atingido, onde a partícula pára instantaneamente. A partir daí ela volta a se mover em direção ao anel e assim por diante. Essas características fazem de  $z = 0$  um ponto de equilíbrio *estável*.

A interação entre a partícula e o anel é atrativa, o potencial do sistema é negativo e tem a forma de um poço. Na situação de força repulsiva entre carga e anel, o potencial é positivo e tem a forma de uma barreira, como vemos no próximo exemplo.

#### • exemplo 4 - barreira de energia potencial

Consideremos novamente o anel do exemplo 3 mas, agora, ele interage com uma partícula de massa  $m$  e carga positiva  $+Q$ , que pode se mover ao longo do eixo  $z$ .

A energia potencial do sistema com a partícula num ponto  $z$  genérico é dada por

$$U(z) = + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (16.24)$$

e, em problemas deste tipo, é interessante considerar situações diferentes.

Na primeira delas, a partícula é lançada contra o anel, ao longo do seu eixo, com velocidade  $v_0$ , a partir de uma distância  $z \rightarrow \infty$  do centro do anel. Neste caso, a energia potencial inicial do sistema é nula e a energia total da partícula é  $E = \frac{1}{2}mv_0^2$ . Depois de lançado contra o anel, a partícula vai sendo freada devido à força eletrostática, que é repulsiva. Assim, dependendo do valor de  $v_0$  ele pode, ou não, chegar até o centro do anel. Para que isto possa acontecer, é preciso que ela tenha uma energia total igual a um valor crítico  $E_c$ , dado por

$$E_c = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}, \quad (16.25)$$

para a qual, a partícula atinge o centro do anel com velocidade nula, onde o seu equilíbrio é *instável*. Se  $E > E_c$ , ela atravessa o anel, tendo no seu centro a menor velocidade, dada por

$$v(0) = \sqrt{\left[ \frac{2}{m} \left( E - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \right) \right]} \quad (16.26)$$

segue até o infinito, do lado oposto de onde partiu, até ter a mesma velocidade  $v_0$  inicial.

Se  $E < E_c$ , ela pára antes de chegar ao centro do anel, num ponto de coordenada  $z = b$ , onde

$$b = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{E}. \quad (16.27)$$

Na segunda situação, a partícula é abandonada em repouso no ponto  $z = a$ , e passa a se afastar continuamente do anel. A energia mecânica total  $E$  do sistema é dada por

$$E = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \quad (16.28)$$

e, em um ponto  $z > a$ , a partícula tem uma energia cinética dada por

$$\frac{1}{2} m v^2(z) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (16.29)$$

Sua velocidade é máxima no infinito, onde ela vale

$$v(\infty) = \sqrt{\left[ \frac{2}{m} \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right]} \quad (16.30)$$

As três situações consideradas são mostradas na fig.16.5, que representa uma barreira de potencial.

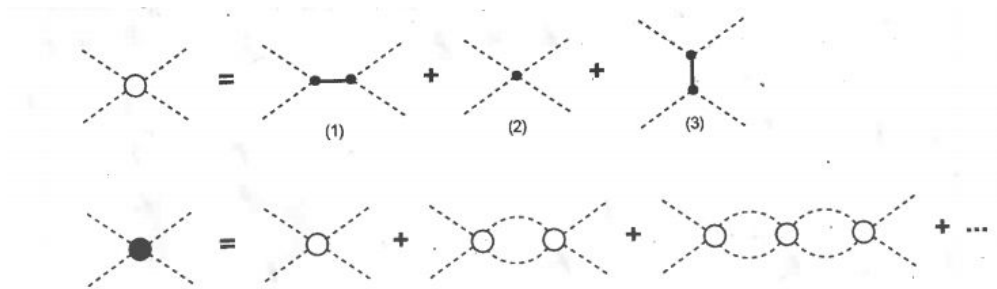


Figura 16.6: Energia potencial  $U$ , com forma de barreira, do sistema carga-anel e diferentes energias mecânicas  $E$ .

## • radiação

Uma das noções mais importantes da física é a que a energia total de um sistema fechado é conservada. Por exemplo, o comportamento de um sistema isolado formado por duas massas, presas por uma mola e que oscilam sobre um plano sem atrito, é caracterizado por sua energia total. À medida que as massas oscilam, os valores das energias cinética e potencial variam. A energia potencial varia porque as massas, por terem velocidades, alteram continuamente suas posições e, conseqüentemente, a configuração do sistema. Já a energia cinética, varia porque as forças, responsáveis pela energia potencial, causam acelerações nas massas. Assim, por meio de acelerações, as duas formas de energia vão se alternando.

O caso de um sistema formado por cargas elétricas é parcialmente semelhante ao de massas e molas. Um sistema de cargas também pode ter energia potencial e que se

transforma em energia cinética e vice-versa. A diferença com o sistema mecânico reside no fato de que cargas elétricas, quando aceleradas, irradiam energia eletromagnética. Como ocorrem oscilações, as energias cinética e potencial se transformam mutuamente. No caso eletromagnético a soma das energias cinética e potencial não é conservada e o balanço energético deve incluir também a energia irradiada.

Entretanto, em casos nos quais as acelerações não são muito grandes e os efeitos devidos à radiação podem ser desprezados, é uma boa aproximação considerar que as somas das energias cinéticas e potencial de um sistema eletromagnético é conservada.

Neste texto, consideramos apenas casos deste tipo e, em particular, isso já foi feito nos exemplos do poço e da barreira de potencial.

### • exercícios

1. É dada uma superfície esférica de raio  $R$ , carregada com uma densidade superficial  $\sigma$ , constante e positiva. Determine a energia potencial  $U$  do sistema formado por essa distribuição e uma carga  $Q$  puntiforme e positiva quando a distância  $d$  entre elas é

a)  $d > R$ ,

b)  $d < R$ ,

c) Faça um gráfico  $U(d) \times d$

### • respostas

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ Kg}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ no SI}$$

Conservação da energia:

$$\frac{1}{2} m V_\infty^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{min}}$$

$$V_\infty = \left[ \frac{2}{m} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{min}} \right]^{1/2} = \left[ \frac{2,20}{r_{min}} \right]^{1/2}$$

$$r_{min} = 10^{-10} \text{ m} \Rightarrow V_\infty = 1,48 \times 10^5 \text{ m/s}$$

$$r_{min} = 10^{-15} \text{ m} \Rightarrow V_\infty = 4,69 \times 10^7 \text{ m/s}$$

Efeitos relativísticos: devem ser considerados para velocidades próximas à velocidade da luz  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

# Capítulo 17

## potencial eletrostático

### • definição

O potencial eletrostático está diretamente relacionado ao campo elétrico produzido por cargas em repouso. Ele é uma função escalar que contém a mesma informação física incorporada no vetor campo elétrico e também é muito útil no estudo de condutores metálicos e circuitos elétricos.

Para motivar a definição do potencial, consideremos inicialmente um sistema formado por quatro cargas puntiformes  $q_1 \cdots q_4$ , fixas nos pontos  $\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_4$ . Como discutimos na aula 15, a energia acumulada neste sistema é dada por

$$U_{(4)} = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34} , \quad (17.1)$$

sendo

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} . \quad (17.2)$$

Imaginemos agora que, sem alterar a configuração das quatro cargas iniciais, acrescentemos ao sistema uma outra carga  $Q$ , localizada em  $\vec{r}_P$ . Neste caso, a energia potencial do novo conjunto de cargas passa a ser

$$U_{(Q+4)} = U_{(4)} + U_{Q1} + U_{Q2} + U_{Q3} + U_{Q4} , \quad (17.3)$$

com

$$U_{Qi} = \frac{Qq_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_i|} . \quad (17.4)$$

A variação  $\Delta U = U_{(Q+4)} - U_{(4)}$  da energia potencial devida à introdução da carga  $Q$  pode ser calculada somando as contribuições dos pares individuais dadas pela eq.(17.4).

Alternativamente, podemos relacionar  $\Delta U$  diretamente ao campo resultante  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \dots + \vec{E}_4$  das quatro cargas iniciais. Neste caso,  $\Delta U$  está associada ao trabalho necessário para trazer a carga  $Q$  desde o infinito até o ponto P através de um caminho  $C$  e escrevemos

$$\Delta U = - \int_{\infty}^P Q [\vec{E}_1 + \dots + \vec{E}_4] \cdot d\vec{c} = -Q \int_{\infty}^P [\vec{E}_1 + \dots + \vec{E}_4] \cdot d\vec{c}. \quad (17.5)$$

### • exemplo 1: carga puntiforme e esfera uniformemente carregada

Uma carga puntiforme  $Q$  e uma esfera de raio  $R$ , uniformemente carregada com densidade volumétrica de carga  $\rho$ , estão, inicialmente, muito distantes uma da outra. Calculamos a variação  $\Delta U$  da energia potencial do sistema quando a carga  $Q$  é trazida do infinito até o ponto P, distante  $r_P$  do centro da esfera, e o potencial elétrico  $V(r)$  da esfera.

Para determinar  $\Delta U$ , usamos a eq.(17.6)

$$\Delta U = -Q \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{c}, \quad (17.6)$$

onde  $\vec{E}$ , o campo elétrico da esfera, calculado no exemplo 2 da aula 13, é dado por

$$\vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad (17.7)$$

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r}. \quad (17.8)$$

Assim,

$$\Delta U(r \geq R) = -Q \int_{\infty}^{r_P} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \frac{Q \rho R^3}{3\epsilon_0 r_P}, \quad (17.9)$$

$$\Delta U(r \leq R) = \left[ \int_{\infty}^R \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \cdot d\vec{r} + \int_R^{r_P} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r} \cdot d\vec{r} \right] = \frac{Q \rho}{2\epsilon_0} \left[ R^2 - \frac{r_P^2}{3} \right]. \quad (17.10)$$

A partir deste resultado e usando a definição de potencial dada pela eq.(17.8), determinamos o potencial elétrico  $V(r)$  da esfera, expresso por

$$V(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0}, \quad (17.11)$$

$$V(r \leq R) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ R^2 + \frac{r_P^2}{3} \right]. \quad (17.12)$$



Este resultado pode ser generalizado. Para tanto, consideremos uma dada distribuição de cargas, que cria um campo  $\vec{E}$ . Quando uma carga  $Q$ , situada em  $\vec{r}_P$ , é acrescentada à distribuição, a energia potencial do sistema varia de uma quantidade  $\Delta U$ , dada por

$$\Delta U = -Q \int_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = -Q \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{c}, \quad (17.13)$$

onde  $C$  é um caminho matemático que vai do infinito ao ponto  $P$ . O potencial  $V$  da distribuição de cargas que  $\vec{E}$ , no ponto descrito pelo vetor  $\vec{r}_P$ , é definido como

$$V(\vec{r}_P) = - \int_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{c}, \quad (17.14)$$

e está relacionado a  $\Delta U$  por

$$\Delta U = Q V(\vec{r}_P). \quad (17.15)$$

## • unidades

No sistema internacional, a unidade de potencial eletrostático é o *volt* ( $V$ ) e ele está relacionada a outras utilizadas anteriormente. Por exemplo, *volt* = *joule/coulomb* e *volt* = *newton*  $\times$  *metro/coulomb*.

## • exemplo 1?

Página anexa:

## • campo conservativo

Na aula 15, mostramos que a força de Coulomb é conservativa, uma vez que o trabalho que ela realiza quando duas cargas puntiformes,  $Q$  e  $q$ , infinitamente separadas são aproximadas até uma distância  $d$ , não depende do caminho percorrido. Do ponto de vista formal, o caráter conservativo da força é expresso por

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{c} = 0 \quad (17.16)$$

onde  $C$  é um caminho fechado qualquer, percorrido pela carga  $Q$  e  $d\vec{c}$ , um elemento desse caminho, com  $\vec{F} = Q \vec{E}_q$ , onde  $\vec{E}_q$  é o campo da carga  $q$ . Se a carga  $Q$  estiver em presença de várias cargas  $q_i$ , o princípio da superposição garante que cada interação é conservativa e podemos escrever

$$\oint_C Q \vec{E} \cdot d\vec{c} = 0, \quad (17.17)$$

onde  $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$  é o campo resultante das contribuições das várias cargas.

Neste caso,

$$\Delta U = QV(\vec{r}) = Q \oint \vec{E} \cdot d\vec{c} = 0 \quad (17.18)$$

Por extensão do caso da força, podemos também falar em *campo conservativo*. A condição geral para que um campo seja conservativo é que

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = 0, \quad (17.19)$$

Aqui,  $C$  representa um caminho *matemático* fechado qualquer.

O resultado (17.19) é muito importante, mas a sua validade é restita a campos elétricos produzidos por sistemas de cargas que não se movem.

### • exemplo 1

Calculamos o potencial de uma carga puntiforme  $q$ , positiva e em repouso.

Se colocarmos esta carga na origem do sistema de referência, o seu campo no ponto descrito pelo vetor  $\vec{r}$ , é dado por

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}.$$

Para calcular o potencial, em um ponto P, definido pelo vetor  $\vec{r}_P$ , usamos a definição, escolhendo um caminho que termina no ponto P e escrevemos

$$V(\vec{r}_P) = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{c}.$$

Como o caminho  $C$  pode ser qualquer, o escolhemos ao longo da direção radial, para o qual  $d\vec{c} = dr \hat{r}$  e temos

$$V(\vec{r}_P) = - \int_{\infty}^{r_P} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} = - \int_{\infty}^{r_P} dr \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_P}, \quad (17.20)$$

com  $r_P = |\vec{r}_P|$ . Este resultado mostra que a função escalar  $V(r_P)$  depende apenas da distância da carga ao ponto considerado. Por isso, ela tem o mesmo valor sobre uma superfície esférica com centro na carga e raio  $r_P$ . Superfícies para as quais  $V(\vec{r})$  tem valor constante são chamadas de *superfícies equipotenciais*.

No caso da carga puntiforme, portanto, as equipotenciais são superfícies esféricas com centro na carga, como mostra a fig.17.2.

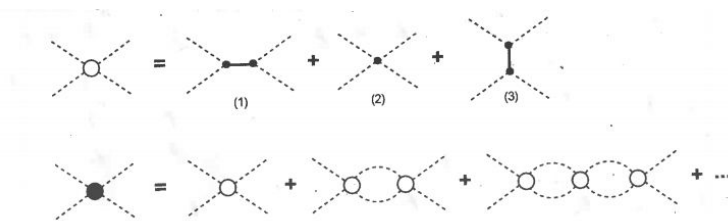


Figura 17.1: Superfícies equipotenciais da carga puntiforme.

## • potencial $\times$ energia potencial

Existe uma relação bastante simples entre o potencial da carga  $q$  e a energia potencial de um sistema formado por essa carga e uma outra  $Q$ , colocada no ponto  $P$ , dada por

$$U(r_P) = Q V(\vec{r}_P). \quad (17.21)$$

Nesta equação a carga  $Q$  aparece explicitamente, o que poderia sugerir que  $U$  é a energia da carga  $Q$ . Entretanto, essa interpretação não é correta. Como vimos anteriormente, somente tem sentido falarmos na energia potencial de um sistema. Neste caso, o sistema é o formado pelas duas cargas e os seus papéis são totalmente simétricos. Entretanto, a eq.(17.4) apresenta um conteúdo simétrico sob uma forma bastante assimétrica.

No caso de duas cargas puntiformes  $q$  e  $Q$ , separadas por uma distância  $d$ , essa assimetria pode ser percebida escrevendo

$$U(d) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} = q \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \right) = qV_Q. \quad (17.22)$$

Alternativamente, podemos também escrever

$$U(a) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} = Q \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \right) = QV_q. \quad (17.23)$$

Assim, a energia potencial desse sistema, onde  $q$  e  $Q$  desempenham papéis simétricos, pode ser colocada sob duas formas assimétricas,  $qV_Q$  ou  $QV_q$ .

Se no espaço há duas cargas,  $F$  e  $Q$ , elas interagem mediante uma força e o sistema tem energia potencial dada, por exemplo pela eq.(17.16). Se no espaço há apenas a carga puntiforme  $Q$ , não há força, mas há o campo elétrico da carga  $Q$ ; não há energia potencial de interação, mas há o potencial  $V_Q$  da carga  $Q$ .

## • exemplo 2: fio uniformemente carregado

Um fio retilíneo, de comprimento  $L$  e densidade de carga linear  $\lambda$ , constante e positiva, está disposto ao longo do eixo  $z$ , com o seu centro sobre a origem do sistema de coordenadas. Calculamos o potencial desta distribuição em um ponto  $P = (x, y, z)$ , genérico e fora do fio.

O campo elétrico deste sistema foi calculado no exemplo 3 da aula 9 e o potencial pode ser obtido a partir da definição (17.1). Aqui, entretanto, adotamos uma alternativa menos trabalhosa, baseada no princípio da superposição. Um elemento do fio, localizado no ponto  $z$  e com carga  $dq = \lambda dz$  pode ser pensado como uma carga puntiforme cuja distância ao ponto P é dada por

$$|\vec{r}_P - \vec{r}_q| = \sqrt{x^2 + y^2 + (Z - z)^2}.$$

Assim, a contribuição deste elemento para o potencial é escrito, usando o resultado (17.5), como

$$dV = \frac{\lambda dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (Z - z)^2}}. \quad (17.24)$$

O potencial total é determinado pela soma das várias contribuições

$$V = \int_{-L/2}^{L/2} dz \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (Z - z)^2}}. \quad (17.25)$$

Esta integral é efetuada com o auxílio do resultado (xx.xx) do apêndice X e temos

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} h \left[ (z - Z) + \sqrt{x^2 + y^2 + (Z - z)^2} \right] \Big|_{-L/2}^{L/2} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} h \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (Z - L/2)^2} - (Z - L/2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (Z + L/2)^2} - (Z + L/2)} \end{aligned} \quad (17.26)$$

Como o problema tem simetria cilíndrica, é conveniente usar a variável  $v = \sqrt{x^2 + y^2}$ , a distância ao eixo  $Z$ . Neste caso,

$$V(r, Z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} h \frac{\sqrt{r^2 + (Z - L/2)^2} - (Z - L/2)}{\sqrt{r^2 + (Z + L/2)^2} - (Z + L/2)}. \quad (17.27)$$

No caso em que a dimensão  $L$  do fio é pequena em relação às coordenadas  $r$  e  $Z$ , usamos

$$\sqrt{r^2 + (Z \pm L/2)^2} - (Z \pm L/2) \cong (\sqrt{r^2 + Z^2} - Z) \left( 1 \pm \frac{L}{2\sqrt{r^2 + Z^2}} \right), \quad (17.28)$$

para escrever

$$V(r \gg L, Z \ll L) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ h \frac{1 + L/(2\sqrt{r^2 + Z^2})}{1 - L/(2\sqrt{r^2 + Z^2})} \right] = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + Z^2}}. \quad (17.29)$$

Lembrando que  $\lambda L = q$  e que  $r^2 + Z^2$  é a distância ao centro do sistema de coordenadas, recuperamos o resultado (17.14), válido para uma carga puntiforme.

### • exemplo 3 - fio infinito

Desejamos calcular, em um ponto P descrito pelo vetor  $\vec{r}_P$ , o potencial de um fio retilíneo infinito, disposto sobre o eixo Z, carregado com densidade  $\lambda$ , positiva. O seu campo elétrico do fio foi calculado no exemplo 3 da aula 14 e, em coordenadas cilíndricas, é dado por

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r} \quad (17.30)$$

Usando a definição (17.1), com um caminho radial com elementos  $d\vec{c} = dr\vec{r}$ , temos

$$V(\vec{r}_P) = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{c} = - \int_{\infty}^{|\vec{r}_P|} dr \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} h r \Big|_{\infty}^{r_P}. \quad (17.31)$$

Aqui encontramos um problema, pois  $h_{r \rightarrow \infty} hr \rightarrow \infty$ .

Deste modo, a eq.(17.15) fornece um valor infinito para o potencial do fio, qualquer que seja o ponto P considerado. Para compreender este resultado, é preciso lembrar que não existem fios infinitos na natureza. Quando pensamos em um fio infinito estamos usando uma aproximação. Isto quer dizer que o resultado (17.25) representa uma aproximação para o campo do fio, válida para pontos próximos a ele, e não descreve bem o campo para valores muito grandes de  $r$ . O uso da eq.(17.25) na definição do potencial produziu uma aberração física, o potencial infinito, que decorre do fato de não poder mover um ponto distante de um objeto infinito.

Em situações como esta, o problema com os valores infinitos pode ser contornado calculando diferenças de potencial entre dois pontos. Assim a diferença de potencial entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$  pode ser escrita como

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = - \left[ \int_{\infty}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{c} - \int_{\infty}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{c} \right] = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{c}. \quad (17.32)$$

Deste modo, o caminho a ser percorrido começa em  $P_1$  e termina em  $P_2$ , sem ter de passar pelo infinito. Efetuando os cálculos, obtemos

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} h \frac{r_2}{r_1}. \quad (17.33)$$

Assim, os pontos a uma mesma distância do eixo do cilindro pertencem a uma superfície equipotencial.

### • exemplo 4 - plano infinito

O campo elétrico de um plano infinito carregado com uma densidade de carga  $\sigma$ , constante e positiva, disposto sobre o plano  $xy$ , foi determinado no exemplo 1 da aual 14, sendo dado por

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}, \quad (17.34)$$

para valores positivos de  $Z$ . Pelas mesmas razões discutidas no exemplo anterior, devemos considerar apenas diferenças de potencial entre dois pontos. Usando a eq.(17.17) com  $d\vec{c} = dZ\hat{k}$ , obtemos

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = - \int_{P_1}^{P_2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dZ = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (Z_2 - Z_1), \quad (17.35)$$

ou seja, a diferença de potencial entre dois pontos é linear na separação entre eles.

Assim, os planos paralelos ao plano carregado são superfícies equipotenciais.

### • condutores em equilíbrio eletrostático

Considere um corpo metálico de forma qualquer, carregado com carga total  $q$ , positiva ou negativa, em equilíbrio eletrostático. A condição de equilíbrio corresponde a um campo elétrico  $\vec{E} = 0$  em todos os pontos do interior do corpo. Por isso, a diferença de potencial entre dois pontos  $P_1$  e  $P_2$ , no interior ou na superfície do corpo é nula já que na eq.(17.17), estes pontos podem ser conectados por um caminho matemático passando apenas por pontos onde  $\vec{E} = 0$ . Deste modo, o potencial é o mesmo em todos os pontos de um corpo metálico em equilíbrio eletrostático, tanto os do interior como os da superfície.

Suponhamos, agora, que este corpo metálico seja uma esfera de raio  $R_1$ , carregado com uma carga positiva  $Q$ . O potencial sobre todos os pontos do corpo é constante e dado por

$$V_1 = - \int_{\infty}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{c} = - \int_{\infty}^{R_1} dr \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1}. \quad (17.36)$$

Imaginemos, agora, uma segunda esfera, de raio  $R_2 < R_1$ , carregada com a mesma carga  $Q$ . Se ela estiver longe da primeira, podemos desprezar os efeitos de um corpo sobre o outro e o seu potencial é dado por

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2}. \quad (17.37)$$

Se as duas esferas forem ligadas por um fio metálico, o conjunto forma um único condutor, que não está em equilíbrio eletrostático, já que  $V_1 \neq V_2$ . Isto faz com que haja

transferência de carga de um corpo para outro, até que os novos potenciais  $V'_1$  e  $V'_2$  de ambas sejam iguais. Chamando de  $q$  a quantidade de carga transferida de um corpo para outro, a condição de equilíbrio deste sistema é dada por

$$V'_1 = V'_2 \leftarrow \frac{(Q - q)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1} = \frac{(Q - q)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2}. \quad (17.38)$$

Assim,

$$q = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} Q. \quad (17.39)$$

Como  $q < 0$  há passagem de carga do corpo 2 para o corpo 1 e a estabilidade se dá com os valores

$$Q'_1 = \frac{2R_1}{R_1 + R_2} Q > Q \quad \text{e} \quad Q'_2 = \frac{2R_2}{R_1 + R_2} Q < Q. \quad (17.40)$$

Já as densidades de carga são dadas por

$$\sigma'_1 = \frac{Q'_1}{4\pi R_1^2} = \frac{Q}{2\pi R_1(R_1 + R_2)} \quad \text{e} \quad \sigma'_2 = \frac{Q'_2}{4\pi R_2^2} = \frac{Q}{2\pi R_2(R_1 + R_2)}. \quad (17.41)$$

Assim, embora  $Q_1 > Q_2$  a densidade  $\sigma_2$  é maior do que a  $\sigma_1$ . Este resultado é consistente com o chamado poder dos pontos, segundo o qual, no equilíbrio eletrostático, a densidade de cargas é maior em regiões com menor curvatura.

## • exercícios

1. Se  $E$  é nulo num ponto, deverá também  $V$  ser nulo neste ponto? Dê alguns exemplos que justifiquem sua resposta.

2. Considere uma distribuição esférica de carga, de raio  $R$ , cuja densidade volumétrica é dada por

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) & , \quad r \leq R \\ 0 & , \quad r > R \end{cases}$$

onde  $\rho_0$  é uma constante positiva e  $r$  é uma distância medida em relação ao centro da esfera.

- Calcule o potencial eletrostático  $V$  em todo o espaço. Faça um gráfico  $V \times r$ . Adote  $V(\infty) = 0$ .
- Abandona-se uma carga puntiforme negativa  $-q$  a uma distância  $\ell > R$  da distribuição de carga. Supondo que tanto a carga  $q$  como a distribuição tenham a mesma massa  $m$  e possam mover-se livremente, determine a velocidade de cada um dos corpos no instante em que eles colidem.

3. É dado um anel circular de raio  $R$  carregado com densidade de carga  $\lambda > 0$ , ( $\lambda$  constante).

- Calcule  $\vec{E}$  sobre o eixo do anel.
- Calcule o potencial  $V$  no eixo, por meio do trabalho de  $\vec{E}$ .
- Calcule  $V$  sobre o eixo, usando o potencial de uma carga puntiforme e o princípio da superposição.
- Faça um gráfico do potencial ao longo do eixo do anel.
- Qual é a expressão para o potencial quando se toma o centro do anel como referência?
- Uma partícula com carga  $q > 0$  é atirada ao longo do eixo, a partir do infinito, com velocidade  $v$ . Qual é a condição para que a partícula atravesse o anel?

4. Considere o seguinte sistema de dois condutores metálicos: o condutor 1 é uma esfera maciça de raio  $R_1$ , que se encontra carregada com uma carga positiva  $Q_1$ ; o segundo condutor é uma camada esférica de raio interno  $R_2$  e raio externo  $R_3$ , e está carregado com uma carga positiva  $Q_2$ . O condutor 1 está no interior da cavidade do condutor 2 e ambos são concêntricos.

- Determine os valores das cargas nas superfícies interna e externa da camada esférica.
- Calcule o campo elétrico em todo o espaço.
- Determine o potencial em todo o espaço.
- Liga-se o condutor 2 à terra por um fio. Depois de atingido o equilíbrio, qual a diferença de potencial entre os condutores 1 e 2?

5. O espaço entre duas esferas concêntricas de raios  $R_1$  e  $R_2$  encontra-se preenchido com um material não condutor de densidade de carga uniforme,  $\rho$ . Determine o potencial elétrico  $V$ , em função da distância  $r$  ao centro das esferas, considerando as regiões:

- $r > R_2$ ; (b)  $r_2 > r > R_1$ ; (c)  $r < R_1$ ;
- essas soluções concordam em  $r = r_2$  e em  $r = r_1$ ?
- calcule  $\mathbf{E}$ , a partir de  $V$ , em todo o espaço.

### • respostas

1. Não.

2.

$$(a) \begin{cases} V(r) = \frac{\rho_0 R^3}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right) \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & , \quad r \geq R \\ V(r) = \frac{\rho_0 R^2}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} \right) \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{r^2}{6} - \frac{\alpha r^2}{12R} \right) & , \quad r < R \end{cases}$$

$$(b) v = \left[ \frac{qQR}{4\pi\epsilon_0 m} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\ell} \right) \right]^{1/2} \quad \text{sendo } Q \text{ a carga total da distribuição esférica.}$$



$$3. (a) \left\{ E = E_z = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \right.$$

$$(b) V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

$$(e) \left[ \frac{R}{(R^2+z^2)^{1/2}} - 1 \right] \frac{\lambda}{2\epsilon_0}$$

$$(f) v > \left( \frac{q\lambda}{m\epsilon_0} \right)^{1/2}$$

4. (a) Na superfície interna:  $Q_i = -Q_1$ . Na superfície externa:  $Q_e = Q_2 + Q_1$ .

$$(b) \text{ Para } r < R_1, E = 0; \text{ para } R_1 < r < R_2, \vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\text{ para } R_2 < r < R_3, E = 0; \text{ e, para } r > R_3, \vec{E} = \left[ \frac{(Q_1 + Q_2)}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$(c) \text{ Para } r \leq R_1, V(r) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\text{ para } R_1 < r \leq R_2, V(r) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right);$$

$$\text{ para } R_2 < r \leq R_3, V(r) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3};$$

$$\text{ para } r > R_3, V(r) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r};$$

$$(d) \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$5. (a) \left\{ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( \frac{r_2^3 - r_1^3}{r} \right); \right.$$

$$(b) \left( \frac{\rho}{3\epsilon_0} \right) \left( \frac{3}{2} r_2^2 - \frac{r_2^2}{2} - \frac{r_1^3}{r} \right);$$

$$(c) \left( \frac{\rho}{2\epsilon_0} \right) (r_2^2 - r_1^2);$$

(d) Sim.



# Capítulo 18

## densidade de energia eletrostática

Qualquer sistema contendo cargas possui energia potencial que pode ser calculada a partir do resultado de duas cargas puntiformes, usando o princípio de superposição. Existe, entretanto, uma estratégia alternativa para o cálculo da energia eletrostática acumulada em sistemas carregados, que é apresentada nesta aula, a partir da análise de um capacitor, que é um dispositivo capaz de armazenar energia elétrica.

Nas aplicações práticas, os capacitores podem ser contruídos de muitos modos diferentes. Já no caso de discussões pedagógicas é conveniente considerarmos situações nas quais os cálculos sejam simples. Deste ponto de vista, o capacitor mais elementar é o formado por duas placas metálicas, planas e paralelas.

### • cargas e campos no capacitor

Consideremos um capacitor formado por duas placas metálicas, planas e circulares, de raio  $R$ , paralelas entre si e separadas pela distância  $a$ . Supomos que as duas placas estejam inicialmente descarregadas, como na fig.18.1(a). Se ligarmos uma bateria de tensão  $V$  ao sistema, as cargas fluem para as placas, até que a diferença de potencial entre elas também seja  $V$  e as cargas nas placas sejam  $+Q$  e  $-Q$ , como indica a fig.18.1(b). Neste processo a bateria perde energia, sendo que parte dela é dissipada por efeito Joule e a restante fica armazenada no capacitor. Se retirarmos a bateria, as cargas permanecem nas placas metálicas, como mostra a fig.18.1(c), e a energia permanece no sistema.

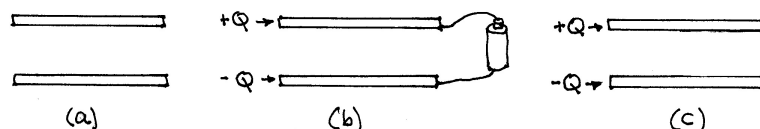


Figura 18.1: Um capacitor de placas paralelas (a) descarregado; (b) acoplado a uma bateria; (c) isolado e carregado com carga  $Q$ .

Nas situações reais, o campo elétrico é perpendicular às placas em grande parte do espaço entre elas, com efeitos de borda, indicados na fig.18.2(a), que podem ser desprezados quando a separação entre as placas  $a$  é muito menor do que as suas dimensões  $R$ , porque as cargas ficam concentradas predominantemente nas superfícies internas da placas como sugere a fig.18.2(b).



Figura 18.2: O campo elétrico de um capacitor de placas paralelas: (a) situação real; (b) modelo adequado quando  $R \gg a$ .

Quando os efeitos de borda podem ser desprezados, o capacitor pode ser identificado com dois planos infinitos e paralelos, com densidades de carga  $+\sigma$  e  $-\sigma$ , sendo

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}. \quad (18.1)$$

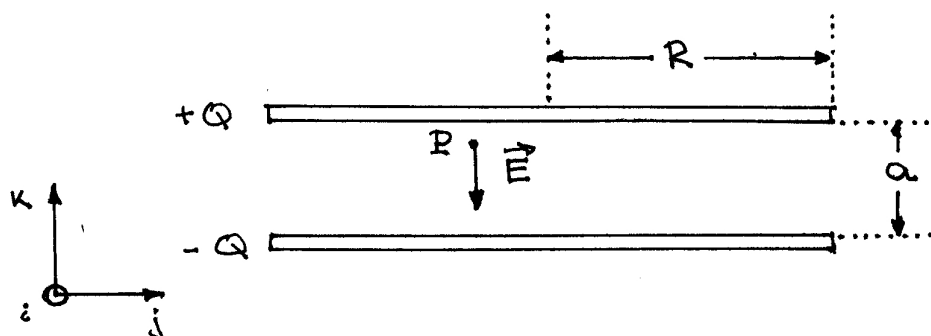


Figura 18.3: O perfil do capacitor de placas circulares paralelas.

O campo elétrico em um ponto  $P$  qualquer entre as placas foi calculado no exemplo 3 da aula 14 e, usando o sistema de coordenadas indicado na fig.18.3 temos

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k} = -\frac{Q}{\pi R^2 \epsilon_0} \hat{k}. \quad (18.2)$$

Como o capacitor é plano, o campo não depende da separação entre as placas, sendo uniforme e tendo o mesmo valor em qualquer ponto. Neste caso, a diferença de potencial entre as duas placas é dada por

$$\Delta V = -\int_0^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{\pi R^2 \epsilon_0} a. \quad (18.3)$$

O interesse deste resultado é que  $\Delta V$  é uma grandeza mensurável, o que permite conhecer a quantidade de carga  $Q$  no capacitor a partir de suas características geométricas.

• **exemplo 1**

Estimamos a quantidade de carga  $Q$  acumulada em um capacitor de placas circulares, de raio  $R = 10$  cm, separadas pela distância  $a = 1$  mm, quando ele é ligado a uma pilha de 1,5 V, como na fig.18.2(b).

Usando o valor de  $\epsilon_0$  dado no apêndice A e a eq.(18.3), obtemos  $Q = 4,2 \times 10^{-10}$ C, que corresponde a  $\sigma = 1,3 \times 10^{-8}$ C/m<sup>2</sup>.

Este resultado permite-nos conhecer a densidade superficial de elétrons na placa negativa. Usando o valor do apêndice A para a carga do elétron, a densidade superficial de elétrons é dada por  $\sigma/e \cong 0,83 \times 10^{11}$  elétrons por m<sup>2</sup>.

Para termos uma ideia do significado deste número, notamos que um metal típico, como o cobre, tem cerca de  $8,5 \times 10^{28}$  átomos por m<sup>3</sup> o que corresponde a uma densidade superficial de cerca de  $(8,5 \times 10^{28})^{2/3} \cong 1,9 \times 10^{19}$  átomos por m<sup>2</sup>. Isto indica que a razão entre as densidades de elétrons e de átomos é de  $(0,83 \times 10^{11})/(1,9 \times 10^{19}) \sim 4 \times 10^{-9}$ . Ou seja, que existem apenas 4 elétrons em excesso para cada 1 bilhão de átomos na superfície metálica interna do capacitor. Pensando na população do Brasil, este valor corresponderia a cerca de 1 pessoa, comparada ao número total de habitantes do país.

• **cálculo da energia do capacitor**

Como as cargas do capacitor estão em repouso, a sua energia é do tipo potencial e pode ser obtida por meio do cálculo do trabalho necessário para carregar o sistema. Por isso consideramos o sistema, inicialmente descarregado e calculamos o trabalho realizado para carregá-lo, gradualmente, até a configuração final, transportando quantidades infinitesimais de carga  $dq$ , positivas, da placa inferior à superior, sucessivamente.

Neste processo de carregamento, em cada viagem de uma quantidade de carga  $dq$ , o trabalho realizado é diferente. Na primeira viagem, não há realização de trabalho, já que não há campo no interior do capacitor descarregado. Na segunda viagem, a carga  $dq$  é levada em presença do campo criado pela primeira, e já há um pequeno trabalho realizado. Na terceira viagem o trabalho é ainda maior pois, agora, o campo entre as placas ficou mais intenso. Numa situação intermediária, em que as cargas nas placas superior e inferior têm os valores  $+q$  e  $-q$ , com  $q < Q$ , o campo é dado por

$$\vec{E}_q = -\frac{q}{\pi R^2 \epsilon_0} \hat{k}. \quad (18.4)$$

Neste caso, a força elétrica sobre  $dq$  vale

$$d\vec{F}_E = dq \vec{E}_q = -\frac{dq q}{\pi R^2 \epsilon_0} \hat{k}. \quad (18.5)$$

O movimento de carga de uma placa para outra não é espontâneo e somente ocorre se houver uma segunda força,  $d\vec{F}_c$ , que empurre as cargas  $dq$  *contra* o campo. É esta força  $d\vec{F}_c$  que, ao realizar trabalho, bombeia energia para o interior do sistema. O menor valor de  $d\vec{F}_c$  para que um elemento de carga possa ser transportado corresponde a  $d\vec{F}_c = -d\vec{F}_E$ . Neste caso, o trabalho realizado em um deslocamento  $dz$  vertical é dado por

$$d^2\tau = d\vec{F}_c \cdot (dz \hat{k}) = \frac{dq q}{\pi R^2 \epsilon_0} dz \quad (18.6)$$

e o trabalho realizado em uma viagem corresponde a

$$d\tau = \int_0^a \left[ \frac{dq q}{\pi R^2 \epsilon_0} \right] dz = \frac{dq q}{\pi R^2 \epsilon_0} a. \quad (18.7)$$

Por isso  $U$ , a energia potencial do sistema, fornecida a ele durante todo o processo de carregamento, vale

$$U = \tau = \int d\tau = \int_0^Q \frac{dq q}{\pi R^2 \epsilon_0} a = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\pi R^2 \epsilon_0} a. \quad (18.8)$$

Esta expressão descreve a energia potencial acumulada no capacitor quando ele está carregado com carga  $Q$ . É importante notar que este resultado é quadrático em  $Q$ , diretamente proporcional à separação  $a$  entre as placas e inversamente proporcional à área de cada uma delas. O resultado (18.8) corresponde ao valor total da energia potencial do sistema, mas não informa onde ela está localizada. Esta questão é discutida a seguir.

### • a localização da energia potencial e a densidade volumétrica de energia

Estabelecer a localização da energia potencial de um sistema é muito interessante e, também muito importante, por evidenciar o papel do campo elétrico. Para discutir o que acontece com o nosso capacitor de placas circulares, consideramos, inicialmente, a situação em que ele está carregado com carga  $Q$ , mas as placas estão separadas por uma distância  $\delta$ , muito pequena, como na fig.18.5(a). Neste caso, a eq.(18.18) nos mostra que a energia potencial  $U$  acumulada no sistema é

$$U_\delta = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\pi R^2 \epsilon_0} \delta \cong 0, \quad (18.9)$$

pois  $\delta$  é muito pequeno.

Em seguida, mantendo a placa inferior fixa, puxamos a placa superior para cima, por meio de uma força externa  $\vec{F}$ . À medida que a placa se move, a força  $\vec{F}$  realiza trabalho, pois o seu ponto de aplicação se desloca. Concomitantemente, a energia potencial do sistema vai aumentando, pois ela é proporcional à distância entre as placas. Se paramos quando elas estiverem separadas pela distância  $a$ , a energia potencial do sistema será a dada pela eq. (18.8).

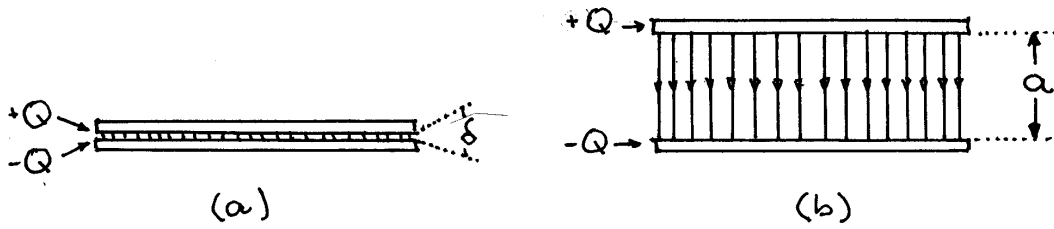


Figura 18.4: Capacitor carregado com carga  $Q$  com separação entre as placas (a)  $\delta$  muito pequeno e (b)  $a$ .

O valor mínimo de  $\vec{F}$  para que as placas possam ser separadas é o que corresponde a um movimento com velocidade constante e, portanto igual, em módulo, à força  $\vec{F}_{IS}$ , que a placa inferior produz na placa superior. O campo elétrico *criado pela placa inferior* na região em que a placa superior se encontra é dado por

$$\vec{E}_I = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} = -\frac{1}{2} \frac{Q}{\pi R^2 \epsilon_0} \hat{k}. \quad (18.10)$$

Por isso, a força que este campo causa em um elemento de carga  $dq$  da placa superior vale

$$d\vec{F}_{IS} = -dq \frac{1}{2} \frac{Q}{\pi R^2 \epsilon_0} \hat{k}, \quad (18.11)$$

o que dá origem a uma força total

$$\vec{F}_{IS} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\pi R^2 \epsilon_0} \hat{k}. \quad (18.12)$$

O valor mínimo da força  $\vec{F} = -\vec{F}_{IS}$  independe da distância entre as placas, pois o mesmo acontece com o campo. O trabalho realizado para separar as placas, desde a distância  $\delta$  até a distância  $a$ , vale

$$\tau = \int_{\delta}^a \vec{F} \cdot dz \hat{k} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\pi R^2 \epsilon_0} (a - \delta). \quad (18.13)$$

No caso em que  $\delta$  é extremamente pequeno, obtemos novamente a energia potencial do sistema, dada pela eq. (18.8).

Este resultado indica que, para calcular a energia potencial do sistema, podemos tanto considerar, inicialmente, placas descarregadas e totalmente separadas e, em seguida, transportar as cargas aos poucos, como considerar, inicialmente, placas totalmente carregadas quase juntas e separá-las aos poucos. Apesar de os dois procedimentos serem formalmente equivalentes, o segundo permite-nos saber onde está a energia potencial do sistema. No segundo caso utilizamos, diretamente o campo elétrico da configuração final e apenas o cálculo baseado diretamente no campo propicia uma imagem detalhada de onde a energia do sistema está localizada.

O capacitor, antes e depois de a distância entre as placas ter sido aumentada, é mostrado na fig.18.4. Quando passamos de uma configuração para a outra, nada acontece com as placas do capacitor, já que suas cargas permanecem as mesmas e não se movem durante o processo. Isto indica que a energia potencial do sistema não pode estar no *interior* de cada uma das placas. A única diferença entre as duas configurações é o volume da região *entre* as placas, preenchido pelo campo elétrico. Na configuração inicial, esse volume é  $\pi R^2 \delta \sim 0$  enquanto que, na final, ele vale  $\pi R^2 a$  e a energia potencial, dada pela eq.(18.8), está localizada nele. Como o campo elétrico é uniforme na região entre as placas, podemos pensar em uma *densidade volumétrica de energia*

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 a / (\pi R^2 \epsilon_0)}{\pi R^2 a} = \frac{1}{2 \epsilon_0} \left[ \frac{Q}{\pi R^2} \right]^2. \quad (18.14)$$

Usando a eq. (18.2) podemos relacionar este resultado diretamente ao módulo do campo elétrico

$$\frac{dU}{dV} = u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2. \quad (18.15)$$

Este resultado é muito importante, pois mostra que há uma densidade de energia diretamente relacionada ao campo elétrico. Aqui, ele representa a densidade de energia potencial que existe no interior de um capacitor plano, mas ele é muito mais abrangente. De modo geral, no ponto onde houver um campo elétrico  $\vec{E}$ , existe uma densidade de energia  $u$ , dada pela eq.(18.15). Isto acontece, por exemplo, na luz do sol que ilumina a Terra.

### • cálculo alternativo de energia do capacitor

O conceito de energia elétrica distribuída no espaço permite um cálculo alternativo da energia do capacitor. Como a densidade volumétrica de energia é dada pela eq.(18.15), a energia total é dada por uma integração em todo o espaço

$$U = \iiint \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV. \quad (18.16)$$

No caso do nosso capacitor plano, supomos que existe campo elétrico apenas na região entre as placas, onde  $E = \sigma / \epsilon_0$ . Assim, a densidade de energia do sistema é dada por

$$\frac{dU}{dV} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad \text{no interior do capacitor,} \quad (18.17)$$

$$\frac{dU}{dV} = 0 \quad \text{fora do capacitor.} \quad (18.18)$$

Como a densidade de energia no interior do capacitor é uniforme, a energia total é dada por

$$U = \iiint_{\text{capacitor}} \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dV = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \iiint_{\text{capacitor}} dV = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \pi R^2 a = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\pi R^2 \epsilon_0} a. \quad (18.19)$$



Este resultado coincide com o da eq.(18.8), obtido através de um procedimento alternativo.

## • trabalho e campo

Discutimos duas maneiras de calcular a energia acumulada em um capacitor plano. Uma delas é baseada no cálculo do trabalho necessário para carregar o sistema efetuando transportes graduais de elementos de carga  $dq$ . É importante notar que neste processo, os transportes de carga são instrumentos de pensamento e têm, portanto, natureza matemática. Eles são uma espécie de faz-de-conta e não precisam descrever com precisão o modo real como o capacitor foi carregado. Em particular, em aplicações práticas, é extremamente raro que haja transporte de carga através da região interna ao capacitor. Em geral este transporte é feito por meio de circuitos, ligados ao exterior do capacitor. O método de cálculo baseado no trabalho permite determinar a energia total acumulada no sistema, mas não fornece informações acerca da localização desta energia.

A outra maneira de calcular a energia do capacitor é baseada na densidade de energia, que é uma grandeza local. A eq.(18.15) representa a relação direta entre a densidade de energia em um ponto do espaço e o quadrado do campo elétrico naquele ponto. Por isso, ela corresponde à ideia que o campo é o portador da energia, que a energia está no campo.

Estas duas abordagens permitem interpretações bastante diferentes sobre o que vem a ser a energia potencial do sistema. Evidentemente, elas não se excluem, mas se complementam. Essas diferenças ficam claras quando se coloca a questão: por que a energia potencial dobra quando a distância entre as placas dobra?

Um adepto da solução baseada no transporte gradativo de carga  $dq$  diria que como  $\vec{E}$  não varia, o trabalho para carregar as placas dobra porque o deslocamento de cada elemento  $dq$  é duas vezes maior. No caso da solução ali baseada na energia do campo, o aumento de  $U$  é atribuído ao fato de haver a mesma densidade de energia espalhada por um volume duas vezes maior.

## • exemplo: capacitor cilíndrico

É dado um capacitor cilíndrico formado por um cilindro de raio  $a$ , comprimento  $h$ , coaxial com uma casca cilíndrica de raio  $b > a$  e comprimento  $h$ , sendo  $h \gg b$ , mostrado na fig.18.5. O capacitor está carregado com carga  $Q$  e desejamos calcular a energia acumulada nele.

Temos dois procedimentos à disposição, baseados no trabalho e na densidade de energia. Em ambos é preciso usar a expressão do campo elétrico na região vazia entre as partes metálicas, que foi calculado usando a Lei de Gauss, no exemplo 4 da aula 14. Supondo que o cilindro interno esteja carregado com carga  $+q$ , este campo é dado por

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 h r} \hat{r}, \quad (18.20)$$

onde  $\vec{r}$  é o vetor posição do ponto considerado, em *coordenadas cilíndricas*, portanto,

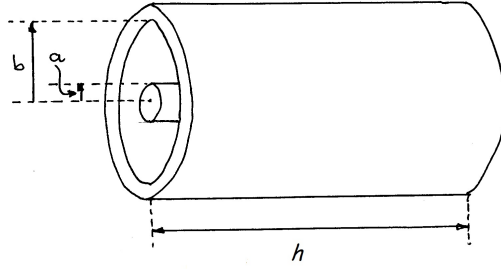


Figura 18.5: Capacitor cilíndrico coaxial.

medido a partir do eixo de simetria.

#### • cálculo baseado no trabalho

Neste procedimento consideramos, inicialmente, o capacitor sem cargas e o carregamos gradualmente, levando elementos de carga  $dq > 0$ , da casca externa até o cilindro interno. Supondo que numa situação intermediária, a carga do cilindro interno seja  $q < Q$ , a força sobre o elemento de carga  $dq$  quando está em trânsito vale

$$d\vec{F}_E = dq \frac{q}{2\pi \epsilon_0 h r} \hat{r} \quad (18.21)$$

e o trabalho realizado por ela em uma viagem é dado por

$$d\tau_E = \int_b^a d\vec{F}_E \cdot dr \hat{r} = \int_b^a \frac{dq q}{2\pi \epsilon_0 h r} dr = -\frac{dq q}{2\pi \epsilon_0 h} \ln \frac{b}{a}. \quad (18.22)$$

Como  $a < b$ , este trabalho é negativo, porque a carga se move contra a força elétrica, devido a uma força  $d\vec{F} = -d\vec{F}_E$ , que bombeia energia para dentro do capacitor. O trabalho realizado por  $d\vec{F}$  durante uma viagem vale  $d\tau = -d\tau_E$  e, portanto, a energia acumulada no capacitor durante todas as viagens necessárias para carregá-lo com carga total  $Q$  vale

$$U = \tau = \int_0^Q d\tau = \int_0^Q \frac{dq q}{2\pi \epsilon_0 h} \ln \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{2\pi \epsilon_0 h} \ln \frac{b}{a}. \quad (18.23)$$

#### • cálculo baseado na densidade de energia

Nesta abordagem, consideramos o capacitor na situação final, já com carga  $Q$ . Como a densidade de energia do sistema está relacionada diretamente ao seu campo, o campo dado na eq.(18.20) para escrevê-la

$$\frac{dU}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 h r} \right]^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0 h^2 r^2}. \quad (18.24)$$

A energia total é dada pela integral deste resultado sobre todo o volume interno ao capacitor e temos

$$\begin{aligned}
 U &= \iiint_{\text{capacitor}} \frac{dU}{dV} dV = \int_0^h dz \int_a^b dr r \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0 h^2 r^2} = \\
 &= \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 h^2 r^2} \int_0^h dz \int_a^b dr = \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 h^2} \int_0^h dz \ln \frac{b}{a} = \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 h} \ln \frac{b}{a}, \quad (18.25)
 \end{aligned}$$

idêntica à do resultado (18.23).

### • capacitância

Reescrevendo a expressão (18.3) como

$$Q = \frac{\pi R^2 \epsilon_0}{a} \Delta V, \quad (18.26)$$

podemos perceber que a quantidade de carga que a pilha consegue fornecer ao capacitor depende da sua geometria. Por exemplo, a quantidade de carga  $Q$  aumenta quando a separação  $a$  entre as placas diminui. Esta característica levou à definição da *capacitância*  $C$  de um capacitor pela relação

$$C = \frac{Q}{\Delta V}. \quad (18.27)$$

Esta grandeza é bastante útil na prática e indica quanta carga o capacitor aceita para uma dada diferença de potencial. No caso particular do capacitor de placas planas e paralelas, temos

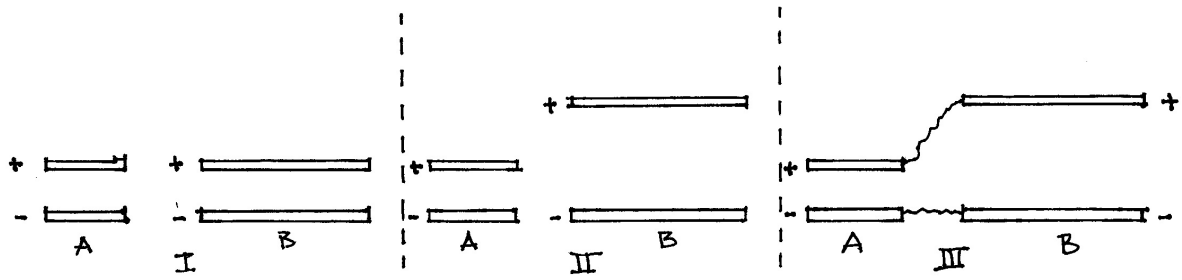
$$C = \frac{\pi R^2 \epsilon_0}{a}. \quad (18.28)$$

A capacitância de qualquer capacitor depende apenas da sua geometria e de  $\epsilon_0$ .

### • exercícios

**1.** Considere o capacitor plano carregado, mostrado na fig.18.2(c). Se ligarmos as placas metálicas por um fio condutor, o capacitor se descarrega e, portanto, o sistema deixa de ter energia potencial. O que aconteceu com a energia que estava armazenada nele inicialmente?

**2.** São dados dois sistemas  $A$  e  $B$ , cada um deles formado por duas placas circulares, paralelas, carregadas com cargas iguais em módulo e de sinais opostos. As placas dos sistemas  $A$  e  $B$  têm, respectivamente, raios  $R_A = R$  e  $R_B = 2R$  e cargas  $Q_A = Q$  e  $Q_B = 2Q$ . As figuras I, II e III mostram três situações diferentes. Na situação I, as distâncias entre as placas valem  $d_A = d$  e  $d_B = d$  e os dois sistemas estão desconectados. Na situação II, as distâncias entre as placas valem  $d_A = d$  e  $d_B = 3d$  e os dois sistemas



estão desconectados. Na situação III, as distâncias entre as placas valem  $d_A = d$  e  $d_B = 3d$  e os dois sistemas estão ligados por fios condutores, longos e finos. Em todos os casos,  $d \ll R$ .

Considere, inicialmente, apenas as situações I e II e determine

- os módulos dos campos elétricos entre as placas;
- as diferenças de potencial entre as placas;
- a razão  $U_B/U_A$  entre as energias potenciais acumuladas nos dois sistemas.

Considere, agora, a situação III, na qual as placas estão ligadas por fios metálicos finos, o que permite a redistribuição das cargas no sistema formado pelos dois capacitores. Na situação de equilíbrio existem dois critérios, equivalentes, para determinar as cargas em cada um dos capacitores. O primeiro deles é impor que as diferenças de potencial entre as placas dos sistemas A e B sejam iguais. O segundo é impor que a energia total do sistema seja a menor possível. Em ambos os casos, o ponto de partida para a solução do problema consiste em supor que a carga do capacitor A, por exemplo, tenha um valor  $Q_A = q$ , desconhecido, enquanto que a carga do outro capacitor deve valer  $Q_B = (3Q - q)$ .

- Obtenha as cargas  $Q_A$  e  $Q_B$  impondo que as diferenças de potencial  $V_A$  e  $V_B$  entre as placas dos capacitores sejam iguais.
- Obtenha as cargas  $Q_A$  e  $Q_B$  minimizando a energia total do sistema.
- Na situação de equilíbrio, qual é o valor da razão  $U_B/U_A$  entre as energias acumuladas nos dois sistemas?

**3.** Considere as capacitâncias  $C_a$  e  $C_b$ , de dois capacitores formados por placas planas, paralelas e circulares, com raios  $R_a$  e  $R_b$ ,  $R_a < R_b$ , separadas pela mesma distância  $a$ . Explique, porque  $C_a < C_b$ , usando argumentos físicos e a eq.(18.28).

### • respostas

1. Foi transformada em calor, por efeito Joule, durante o transporte de carga de uma placa para outra.

2.a) Nas duas situações,  $E_A = \frac{Q}{\pi R^2 \epsilon_0}$ ,  $E_B = \frac{Q}{2\pi R^2 \epsilon_0}$ .

b) situação I:  $V_A = \frac{Qd}{\pi R^2 \epsilon_0}$ ,  $V_B = \frac{Qd}{2\pi R^2 \epsilon_0}$ ; situação II:  $V_A = \frac{Qd}{\pi R^2 \epsilon_0}$ ,  $V_B = \frac{3Qd}{2\pi R^2 \epsilon_0}$ .

c) situação I:  $U_B/U_A = 1$ ; situação II:  $U_B/U_A = 3$ .

d) e e)  $Q_A = \frac{9}{7} Q, Q_B = \frac{12}{7} Q$ .

f)  $U_B/U_A = 4/3$ .



# Capítulo 19

## auto-energia

### • coisas e sistemas

No nosso modo de pensar o mundo baseado em palavras, uma carga é uma coisa, duas cargas são duas coisas. E um sistema, formado por duas cargas em repouso e separadas por uma certa distância, tem energia potencial. Uma pergunta que podemos nos fazer é se este sistema pode ser dividido em duas partes, cada uma delas contendo uma carga e metade da energia potencial. Esta ideia não tem sentido, porque a energia potencial não é composta por duas partes, ela precisa das duas cargas de uma vez só. Assim, quando há interação, um sistema é conceitualmente diferente do que a soma de suas partes.

Esta característica se aplica a qualquer sistema, com qualquer número de partes. Por isso, para descrever um sistema devíamos, em princípio, partir de suas propriedades gerais. Na prática, este procedimento torna-se muito árduo quando o número de componentes é grande e é conveniente tentar abordar os problemas identificando seus subsistemas principais. Neste caso, é comum pensarmos a energia potencial do sistema como sendo dada pela soma das energias *internas* de cada subsistema com a energia de *interação* de um subsistema com o outro. Neste contexto, a *auto-energia* é o nome usual da energia interna de um subsistema autônomo.

### • exemplo 1

Determinação da auto-energia de uma superfície esférica de raio  $R$ , carregada com uma carga total  $Q$ , positiva.

Apresentamos três soluções para este problema e, em todas elas partimos do campo elétrico na região externa à esfera. No estudo da lei de Gauss, vimos que o campo elétrico criado por uma distribuição esfericamente simétrica de cargas em um ponto fora da distribuição é equivalente ao criado pela mesma carga concentrada no seu centro. Por conveniência, o centro da superfície esférica é escolhido como origem do sistema de

coordenadas.

• **solução 1**

Uma possibilidade para obter a auto energia da casca esférica consiste em carregá-la pouco a pouco, por meio de sucessivas viagens de elementos de carga  $dq$ . Em uma configuração intermediária em que a carga da esfera tem o valor  $q$ , o campo elétrico em um ponto externo a ela, descrito pelo vetor  $\vec{r}$ , é dado por

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (19.1)$$

Usando um caminho radial para trazer um elemento de carga  $dq$  desde o infinito até a superfície da esfera, temos  $d\vec{c} = dr\hat{r}$  e o potencial nela é dado por

$$V(R) = - \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{c} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}. \quad (19.2)$$

A energia potencial  $dU$  do sistema formado pela superfície carregada com carga  $q$  e o elemento de carga  $dq$  colocado sobre ela é dada por

$$dU = dq V(R) = dq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}. \quad (19.3)$$

Nesta expressão,  $dU$  representa a energia acrescentada à esfera quando um elemento de carga  $dq$  é trazido desde o infinito e depositado nela. Esta energia é fornecida pelo agente externo que transporta  $dq$ . Depois que todas elas foram agregados à esfera, a auto-energia do sistema com carga total  $Q$  é dada por

$$U = \int dU = \int_0^Q dq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}. \quad (19.4)$$

• **solução 2**

Uma possibilidade alternativa para o cálculo desta auto-energia consiste em considerar a esfera carregada com carga  $Q$  como tendo, inicialmente, raio infinito e comprimí-la, pouco a pouco, até a configuração final, com raio  $R$ . Assim, diferentemente do caso anterior, agora mantemos a carga da esfera fixa e variamos o seu raio. Este processo de compressão deve ser realizado por um agente externo, que fornece energia ao sistema. Ele está esquematizado na fig.19.1.



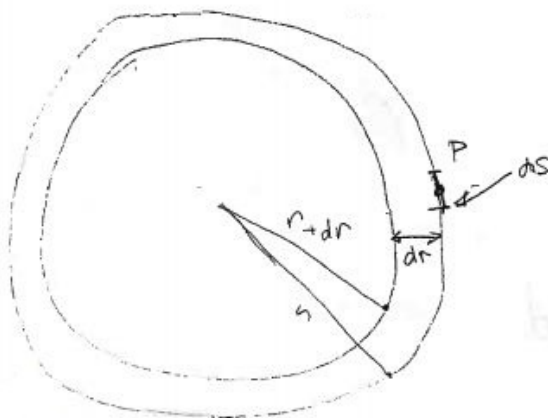


Figura 19.1: Compressão da carga  $Q$  por agente externo, sobre uma superfície esférica de raio  $r$ , para outra de raio menor  $r + dr$  ( $dr < 0$ ).

Em uma dada configuração intermediária, na qual a distribuição tem raio  $r$ , as cargas distribuídas na superfície se repelem mutuamente, sendo sua densidade superficial dada por

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi r^2}. \quad (19.5)$$

Para determinar esta força de repulsão, consideramos um ponto  $P$  sobre a superfície da esfera e um elemento de área  $dS$  em torno deste ponto, como mostra a fig.19.1. A carga  $dq$  contida neste elemento de área é

$$dq = \sigma dS = \frac{Q}{4\pi r^2} dS. \quad (19.6)$$

A força  $d\vec{F}_E$  que age sobre o elemento  $dS$  da superfície da esfera é dada por

$$d\vec{F}_E = dq \vec{E}, \quad (19.7)$$

onde  $\vec{E}$  é o campo elétrico criado por todas as demais cargas no ponto  $P$ . Este campo foi calculado no exemplo 5 da aula 14 e é dado por

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{r}. \quad (19.8)$$

Assim, a força que empurra o elemento  $dS$  em direção ao infinito é dada por

$$d\vec{F}_E = dS \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{r}. \quad (19.9)$$

Para comprimir a esfera, é necessário deslocar o elemento  $dS$  em direção ao centro, através de um caminho matemático  $d\vec{c} = dr \hat{r}$ . Note que neste caso,  $dr$  é uma grandeza

negativa, já que o seu sinal é determinado por uma integral que vai de infinito até  $R$ . Deste modo,  $d\vec{c}$  aponta para a origem do sistema. A tendência espontânea da esfera carregada é se expandir. Por isso, para que possa haver uma compressão, é necessário um agente externo que realize uma força  $d\vec{F}_{ext} = -d\vec{F}_E$  sobre o elemento  $dS$ .

O trabalho realizado por  $\vec{F}_{ext}$  no elemento  $dS$  é dado por

$$d^2\tau = d\vec{F}_{ext} d\vec{c} = -dS \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dr = \frac{-1}{2\epsilon_0} \left( \frac{Q}{4\pi r^2} \right)^2 dS dr. \quad (19.10)$$

Para que toda a esfera seja comprimida na direção radial, é necessário o trabalho

$$d\tau = -4\pi r^2 \frac{1}{2\epsilon_0} \left( \frac{Q}{4\pi r^2} \right)^2 dr = \frac{-1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr. \quad (19.11)$$

Finalmente, o trabalho total realizado pelo agente externo para comprimir a superfície desde o infinito até a configuração final de raio  $R$  vale

$$\tau = - \int_{\infty}^R \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}. \quad (19.12)$$

Portanto, a auto-energia do sistema vale

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}, \quad (19.13)$$

e é idêntica à eq.(19.4).

### • solução 3

O terceiro método de cálculo é baseado no fato de que a densidade volumétrica de energia eletrostática é dada por

$$\frac{dU}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2, \quad (19.14)$$

onde  $\vec{E}$  é o campo elétrico da esfera na sua configuração final, com raio  $R$  e carga  $Q$ .

Nos pontos externos à esfera, o campo elétrico vale

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}, \quad (19.15)$$

e a densidade de energia tem a forma

$$\frac{dU}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \right)^2. \quad (19.16)$$

O elemento de volume é

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi, \quad (19.17)$$

e a auto-energia é obtida integrando a densidade em todo o espaço

$$\begin{aligned} U &= \int \frac{dU}{dV} dV = \int_V \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 dV = \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 4\pi \int_R^\infty dr r^2 \frac{1}{r^4} = - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_R^\infty. \end{aligned} \quad (19.18)$$

Assim, novamente, obtemos

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}. \quad (19.19)$$

## • exemplo 2

É dado um sistema formado por uma esfera metálica de raio  $R$ , com carga negativa  $Q$ , envolta por uma casca metálica esférica, neutra, de raio interno  $a$  e raio externo  $b$ , como mostra a fig.19.2. Desejamos determinar a auto-energia deste sistema.

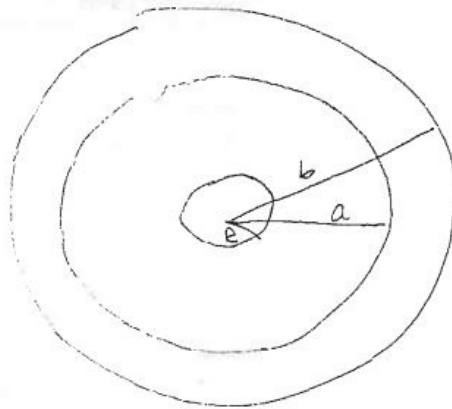


Figura 19.2: Esfera metálica, com carga total  $Q$ , concêntrica com uma casca esférica neutra.

Neste tipo de problema, o método baseado na densidade de energia é muito mais apropriado. O campo elétrico deste sistema, determinado por meio da lei de Gauss, é dado por

$$\vec{E} = 0 \quad \text{para } r < R \text{ e } a < r < b, \quad (19.20)$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{para } R < r < a \text{ e } b < r. \quad (19.21)$$

Usando a densidade de energia dada pela eq.(19.4) e o elemento de volume  $dV$  pela eq.(19.17), a auto-energia do sistema é

$$\begin{aligned}
 U &= \int dU \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 E^2 \\
 &= 4\pi \int_R^a dr r^2 \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \right]^2 + 4\pi \int_b^\infty dr r^2 \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \right]^2 \\
 &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \Big|_R^a - \frac{1}{r} \Big|_b^\infty \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]. \tag{19.22}
 \end{aligned}$$

Este resultado corresponde a uma auto-energia positiva, independentemente do sinal da carga  $Q$ . No limite  $a = b$ , ele se reduz à eq.(19.19), como esperado.

### • exemplo 3

São dadas duas esferas condutoras de raios  $R_1$  e  $R_2$ , separadas por uma distância  $d$  muito maior do que os seus raios, ambas carregadas com cargas  $Q$ . Esta hipótese permite-nos desprezar a influência de uma esfera sobre a outra. Em seguida, as esferas são ligadas por um fio condutor muito longo. Nosso interesse é determinar a carga em cada esfera quando ocorre o equilíbrio eletrostático. Esta questão já foi discutida no exemplo 5 da aula 17, usando o conceito de potencial e, aqui, ela é reformulada em termos de energias.

Antes de mais nada, é preciso estabelecer a relação entre equilíbrio eletrostático e energia potencial. Tal como na mecânica, a noção de equilíbrio está associada à ausência de movimento, o que corresponde à energia total do sistema ser igual à energia potencial mínima  $U_0$ . A ideia é que se a energia potencial  $U$  do sistema for maior do que  $U_0$ , a diferença  $U - U_0$  pode se transformar em energia associada a movimento e o sistema não está em equilíbrio.

Assim, para determinar a quantidade de carga na situação final, é preciso minimizar a energia potencial  $U$  em função da quantidade de carga  $q$  que migra de uma esfera para a outra.

Na situação inicial, a energia potencial do sistema é dada pela soma das auto-energias das duas esferas.

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2}. \tag{19.23}$$

Na situação em que uma quantidade de carga  $q$  passou de uma esfera para a outra, a energia vale

$$U(q) = \frac{1}{2} \frac{(Q - q)^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2} \frac{(Q + q)^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2}. \tag{19.24}$$

Para minimizar esta energia, calculamos

$$\frac{dU}{dq} = -\frac{(Q-q)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1} + \frac{(Q+q)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2} = 0, \quad (19.25)$$

o que fornece

$$q = +\frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} Q. \quad (19.26)$$

Na situação de equilíbrio, as cargas nas duas esferas são dadas por

$$Q_1 = \frac{2R_1}{R_1 + R_2} Q \quad \text{e} \quad Q_2 = \frac{2R_2}{R_1 + R_2} Q, \quad (19.27)$$

enquanto que as densidades de cargas valem

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2\pi R_1(R_1 + R_2)} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \frac{Q}{2\pi R_2(R_1 + R_2)}. \quad (19.28)$$

Como esperado, os resultados (19.26)-(19.28) são idênticos aos (17.24)-(17.26).

O caso de duas esferas condutoras ligadas por um fio se aplica à situação de aterramento. Supondo que  $R_2$  seja o raio da Terra, que é muito maior do que  $R_1$ , temos  $Q_1 \rightarrow 0$  e  $Q_2 \rightarrow 2Q$ . Assim quando  $R_2 \gg R_1$ , toda a carga da esfera menor migra para a maior, a menor fica descarregada.

### • balanço energético e conservação da energia

A energia inicial do sistema é  $U$ , dada pela eq.(19.23), enquanto que, na situação de equilíbrio, a energia potencial do sistema vale

$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2} = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{R_1 + R_2}{(R_1 + R_2)^2}, \quad (19.29)$$

que é menor do que  $U$ .

Neste tipo de problema, a energia diminui porque é necessária uma corrente elétrica através do fio para que a carga de uma esfera possa migrar para a outra. Como há resistência no fio, a passagem da corrente dissipa energia por efeito Joule e a diferença  $U - U_0$  se transforma em calor.

Neste cenário, podemos nos perguntar o que aconteceria no caso hipotético de a resistência do fio ser nula. Esta hipótese impediria que a energia do sistema formado pelas duas esferas e pelo fio escape dele. Nestas condições, o sistema oscila e o excesso de carga passaria continuamente de uma esfera para a outra, como discutido no exercício

4. Entretanto, em cada oscilação o sistema irradia energia na forma de ondas eletromagnéticas. Para discutir em detalhes estes efeitos é preciso conhecer melhor a teoria do eletromagnetismo.

### • energia e massa

Em 1905, Einstein propôs uma equação que relaciona a massa  $m$  de um corpo à sua energia  $E$ , que acabou sendo muito conhecida na forma  $E = mc^2$ , onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Nesta forma, ela vale em um sistema de referência no qual o corpo está em repouso<sup>[1]</sup> e, por isso, o importante físico russo Lev Okun<sup>[2]</sup> recomendou que ela fosse escrita como  $E_0 = mc^2$ . Reescrito como

$$m = \frac{E_0}{c^2}, \quad (19.30)$$

o resultado nos informa que a massa de um corpo é determinada pelo seu conteúdo energético em repouso.

Tomemos, agora, um elétron, uma partícula que tem massa. Atualmente, o valor empírico desta massa é conhecido com grande precisão, mas não se sabe de que matéria ela é feita e o bóson de Higgs pode ser parte da explicação. O elétron é uma partícula que tem carga  $-e$  e, conseqüentemente, um campo elétrico à sua volta e uma auto-energia. Para fazer um modelo tosco para o elétron, podemos supor que ele seja uma esfera de raio  $R$  e que sua carga esteja distribuída na sua superfície. Ao fazer isto podemos usar o resultado (19.19) para a sua auto-energia eletrostática e escrever a massa  $m_e$  do do elétron como

$$\begin{aligned} m_e &= m_x + m_U \\ &= m_x + \frac{U}{c^2} = m_x + \frac{1}{2c^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}, \end{aligned} \quad (19.31)$$

onde  $m_x$  é a parte da massa de origem desconhecida e  $m_U = U/c^2$  é a contribuição da auto-energia eletrostática à massa.

Essa energia depende de constantes conhecidas e, também, do raio  $R$ , que é desconhecido. Por isso, é conveniente definir um parâmetro  $\alpha$  como

$$\alpha m_e = m_U = \frac{U}{c^2} = \frac{1}{2c^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}. \quad (19.32)$$

O parâmetro  $\alpha$ , cujo valor está entre 0 e 1, representa a percentagem de  $m_e$  que é devida à auto-energia eletrostática. Isto nos permite escrever

$$R = \frac{1}{\alpha} \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m_e c^2}. \quad (19.33)$$

Usando os valores do apêndice A para as constantes numéricas, temos  $R = 1,41 \times 10^{-15} \text{ m}/\alpha$ . Como  $0 < \alpha < 1$ , obtemos um raio para o elétron no intervalo

$$1,41 \times 10^{-15} m \leq R < \infty, \quad (19.34)$$

sendo que o limite inferior corresponde a toda a massa do elétron ser de origem elétrica. Este intervalo, obtido por meio de um modelo muito simples, dá uma ideia do tamanho do elétron.

Este modelo é claramente contraditório com a ideia do elétron como partícula elementar. Entretanto a compreensão da natureza envolve modelar e analisar com liberdade os resultados.

O interessante do modelo é a sua implicação ontológica. De fato, o raciocínio desenvolvido aqui indica que parte, se não toda a massa do elétron, está fora da bolinha em que costumamos pensar, já que localizada no campo elétrico à sua volta. Se pudéssemos pesar o elétron em uma balança seu peso seria  $p_e = m_e g$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade. Isso significa que a parte do seu peso dada por

$$\alpha p_e = m_U g = \frac{U}{c^2} g, \quad (19.35)$$

corresponde ao peso de uma energia<sup>[3]</sup>. Assim, a energia potencial sofre a ação do campo gravitacional. E este é apenas um pedacinho do novo tipo de conhecimento físico desenvolvido depois da relatividade.

## • referências

- [1] F.B. Kneubil, Revista Brasileira de Ensino de Física, (40), e 4305 (2012).  
 [2] Lev Okun - The concept of mass. Physics Today, 1989.  
 - The concept of mass (mass, energy, relativity) Soviet Phys. Uspekhi, 1989.  
 - Mass versus relativistic and rest mass, Am. Jour. Phys. 2009.  
 [3] F.B. Kneubil,  $E = mc^2$  and the weight of energy, Eur. Jour. Phys. (40) (2019) 015604.

## • exercícios

- 1.(a) O que acontece com o valor da auto-energia de uma casca esférica carregada uniformemente com uma carga  $Q$  quando a comprimimos desde um raio  $a$  até um raio  $b < a$ ?  
 (b) Onde se localiza a variação de energia?
2. Considere a situação descrita no exemplo 2. Qual o valor da auto-energia  $U$  do sistema quando a casca metálica esférica é aterrada?
3. No caso do exemplo 3, demonstre que a energia potencial  $U$  eq.(19.23), é maior que a energia  $U_0$  no equilíbrio eletrostático, eq.(19.29).

4. Considere a situação descrita no exemplo 3, com carga total  $2Q$ . De modo geral, o desequilíbrio eletrostático é caracterizado pela existência de *duas* configurações de carga, passa a mesma energia potencial, enquanto que, para o equilíbrio, esta configuração é única. Determine a outra configuração de cargas que corresponde à energia potencial dada pela eq.(19.23).

5. São dadas duas esferas metálicas 1 e 2, de raios  $R_1$  e  $R_2$ , separadas por uma distância  $d$  muito maior do que estes raios. Inicialmente, a esfera 1 está carregada com carga  $Q$  e a 2, descarregada. Em seguida, elas são ligadas por um fio muito longo. Na situação de equilíbrio, determine

- (a) as cargas em cada esfera;
- (b) as densidades de carga em cada esfera;
- (c) a auto-energia do sistema;
- (d) a variação  $\Delta U$  da energia potencial do sistema;
- (e) a relação entre  $R_1$  e  $R_2$  para que  $\Delta U$  seja máximo.

### • respostas

1.(a) ela aumenta;    b) entre as esferas de raios  $a$  e  $b$ .

$$2. U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right]$$

$$4. Q_1 = \frac{3R_1 - R_2}{R_1 + R_2} Q \quad \text{e} \quad Q_2 = \frac{3R_2 - R_1}{R_1 + R_2} Q$$

$$5. (a) Q_1 = Q \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad Q_2 = Q \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$(b) \sigma_1 = \frac{Q}{4\pi R_1(R_1 + R_2)} \quad \sigma_2 = \frac{Q}{4\pi R_2(R_1 + R_2)}$$

$$(c) U_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1 + R_2}$$

$$(d) \Delta U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{(R_1 + R_2)}$$

(e)  $R_1 = R_2$ .



# Capítulo 20

## auto-energia: duas cargas puntiformes

Nesta aula, consideramos a energia de um sistema muito simples, formado apenas por duas cargas puntiformes em repouso, com o propósito de descrever em maior profundidade a imagem da natureza pelo eletromagnetismo clássico.

Um sistema formado de duas cargas,  $q$  e  $Q$ , separadas pela distância  $d$ , possui uma energia potencial dada por

$$U = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d}, \quad (20.1)$$

obtida a partir do trabalho necessário para aproximar as duas cargas, desde o infinito, até a configuração final. Por outro lado, sabemos que onde há campos, há energia e que a densidade volumétrica de energia eletrostática é dada por

$$\frac{dU_E}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2. \quad (20.2)$$

A seguir, mostramos que estas duas abordagens são consistentes, reproduzindo a eq.(20.1) a partir da (20.2).

### • auto-energias e energia de interação

Para efetuar os cálculos, adotamos o sistema de referência mostrado na fig.20.1 e supomos que as duas cargas estejam sobre o eixo  $z$ , equidistantes da origem a uma distância  $d/2$  nas posições  $\vec{r}_q = \frac{d}{2}\hat{k}$  e  $\vec{r}_Q = -\frac{d}{2}\hat{k}$ . Os seus campos em um ponto P genérico, determinado

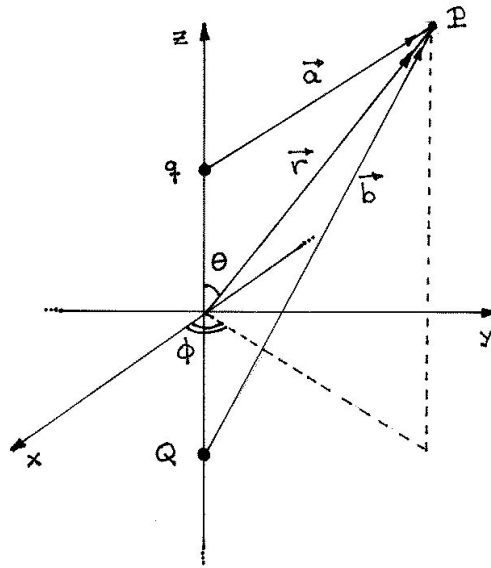


Figura 20.1: Sistema de referência adotado no cálculo da energia potencial de duas cargas puntiformes  $q$  e  $Q$ .

pelo vetor  $\vec{r}$ , são dados por

$$\vec{E}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{d}/2)}{|\vec{r} - \vec{d}/2|^3} \quad (20.3)$$

$$\vec{E}_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} + \vec{d}/2)}{|\vec{r} + \vec{d}/2|^3} \quad (20.4)$$

De acordo com o princípio da superposição, o campo resultante no ponto P é determinado pela soma das duas contribuições e vale

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_Q. \quad (20.5)$$

A densidade de energia no ponto P pode ser expressa por

$$\frac{dU_E}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}_q + \vec{E}_Q)^2. \quad (20.6)$$

Desenvolvendo o lado direito, encontramos três termos diferentes

$$\frac{dU_E}{dV} = \left[ \frac{\epsilon_0}{2} E_q^2 \right] + \left[ \frac{\epsilon_0}{2} E_Q^2 \right] + \left[ \epsilon_0 \vec{E}_q \cdot \vec{E}_Q \right], \quad (20.7)$$

e a interpretação física desse resultado é muito interessante.

O primeiro termo depende apenas da carga  $q$  e ignora completamente qualquer informação acerca da outra. Por isso ele é sempre o mesmo, independentemente de a carga  $Q$  estar próxima ou distante ou, mesmo, de ela existir ou não. Por esse motivo, ele é

chamado de *densidade de auto-energia da carga q*. O segundo termo é completamente análogo, e corresponde à densidade de auto-energia da carga  $Q$ .

O terceiro termo é bastante diferente e envolve os campos das *duas* cargas, com pesos iguais. Ele representa a densidade de auto-energia que o *sistema* possui pelo fato de uma carga estar em presença da outra. Por isso, ele é chamado de *densidade de energia de interação*.

### • energia de interação

Usando as eqs.(20.3) e (20.4), a densidade de energia de interação pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\text{int}}}{dV} &= \epsilon_0 \vec{E}_q \cdot \vec{E}_Q \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi} \frac{(\vec{r} - \vec{d}/2) \cdot (\vec{r} + \vec{d}/2)}{\left[r^2 + d^2/4 + \vec{r} \cdot \vec{d}\right]^{3/2} \left[r^2 + d^2/4 - \vec{r} \cdot \vec{d}\right]^{3/2}} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi} \frac{(r^2 - d^2/4)}{\left[(r^2 + d^2/4)^2 - r^2 d^2 \cos^2\theta\right]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (20.8)$$

A energia de interação total contida no sistema de duas cargas é dada pela integral da eq.(20.8) em todo o espaço. Lembrando que o elemento de volume em coordenadas esféricas é dado por  $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$ , escrevemos

$$\begin{aligned} U_{\text{int}} &= \int \frac{dU}{dV} dV \\ &= \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi} \frac{(r^2 - d^2/4)}{\left[(r^2 + d^2/4)^2 - r^2 d^2 \cos^2\theta\right]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (20.9)$$

Efetuada a integral em  $\phi$ , e manipulando o resultado, encontramos

$$\begin{aligned} U_{\text{int}} &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{4\pi} \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{(r^2 - d^2/4)}{\left[(r^2 + d^2/4)^2 - r^2 d^2 \cos^2\theta\right]^{3/2}} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_0^\infty dr r^2 \frac{(r^2 - d^2/4)}{(r^2 + d^2/4)^3} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{1}{\left[1 - \frac{r^2 d^2}{(r^2 + d^2/4)^2} \cos^2\theta\right]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (20.10)$$

Usando a nova variável

$$u = \frac{rd}{(r^2 + d^2/4)} \cos\theta \quad (20.11)$$

reescrevemos a eq.(20.10) como

$$U_{\text{int}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_0^\infty dr r^2 \frac{(r^2 - d^2/4)}{rd(r^2 + d^2/4)^2} + \int_{-\bar{u}}^{+\bar{u}} du \frac{1}{(1 - u^2)^{3/2}}, \quad (20.12)$$

sendo  $\bar{u} = \frac{rd}{(r^2+d^2/4)}$ .

A integral na variável  $u$  pode ser encontrada no apêndice B e é dada por

$$\int du \frac{1}{(1-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}. \quad (20.13)$$

Esse resultado permite reescrever a eq.(20.12) como

$$\begin{aligned} U_{\text{int}} &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_0^\infty dr \frac{r^2}{rd} \frac{(r^2 - d^2/4)}{(r^2 + d^2/4)^2} 2 \frac{\frac{rd}{(r^2+d^2/4)}}{\sqrt{1 - \frac{r^2 d^2}{(r^2+d^2/4)^2}}} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr r^2 \frac{(r^2 - d^2/4)}{(r^2 + d^2/4)^2} \frac{1}{\sqrt{(r^2 + d^2/4)^2 - r^2 d^2}} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr r^2 \frac{(r^2 - d^2/4)}{(r^2 + d^2/4)^2} \frac{1}{\sqrt{(r + d/4)^2}} \frac{1}{\sqrt{(r - d/4)^2}} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr r^2 \frac{(r^2 - d^2/4)}{(r^2 + d^2/4)^2} \frac{1}{(r - d/2)} \frac{1}{|r - d/2|} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr r^2 \frac{1}{(r^2 + d^2/4)^2} \frac{r - d/2}{|r - d/2|}. \end{aligned} \quad (20.14)$$

Para incorporar corretamente o fator  $|r - d/2|$  no denominador, é preciso quebrar o intervalo de integração  $0 \leq r < \infty$  em dois outros,  $0 \leq r < d/2$  e  $d/2 \leq r < \infty$ . Fazendo isso, encontramos

$$U_{\text{int}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[ - \int_0^{d/4} dr \frac{r^2}{(r^2 + d^2/4)^2} + \int_{d/4}^\infty dr \frac{r^2}{(r^2 + d^2/4)^2} \right]. \quad (20.15)$$

As integrais podem ser obtidas em uma tabela e são dadas por

$$\int dx \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{x}{2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a} \tan^{-1} \frac{x}{a}. \quad (20.16)$$

Assim,

$$\begin{aligned} U_{\text{int}} &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left\{ - \left[ -\frac{d/2}{2(d^2/4 + d^2/4)} + \frac{1}{d} \text{tg}^{-1} 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1}{d} \text{arc tg } \infty + \frac{d/2}{2(d^2/4 + d^2/4)} - \frac{1}{d} \text{tg}^{-1} 1 \right] \right\} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{2d} - \frac{\pi}{4d} + \frac{\pi}{2d} + \frac{1}{2d} - \frac{\pi}{4d} \right\} \end{aligned} \quad (20.17)$$

e, finalmente, mostramos que

$$U_{\text{int}} = \iiint dV [\epsilon_0 \vec{E}_q \cdot \vec{E}_0] = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d}. \quad (20.18)$$

- igual, mas diferente

O resultado exibido na eq.(20.18) é importante pois ele demonstra que é possível associar a energia potencial de um sistema de duas cargas puntiformes a uma densidade de energia espalhada por todo o espaço. A expressão

$$U_{\text{int}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d}, \quad (20.19)$$

obtida na aula 16 a partir do trabalho necessário para aproximar as cargas  $q$  e  $Q$ , desde o infinito até a distância  $d$ , determina a energia potencial de interação do sistema, sem fornecer pistas acerca da sua localização. Por isso, a expressão

$$\frac{dU_{\text{int}}}{dV} = \epsilon_0 \vec{E}_q \cdot \vec{E}_Q \quad (20.20)$$

é mais rica, já que ela descreve em detalhes a distribuição espacial da energia eletrostática e propicia uma compreensão mais bonita e mais satisfatória acerca do comportamento da natureza.

- a distribuição da energia potencial de interação

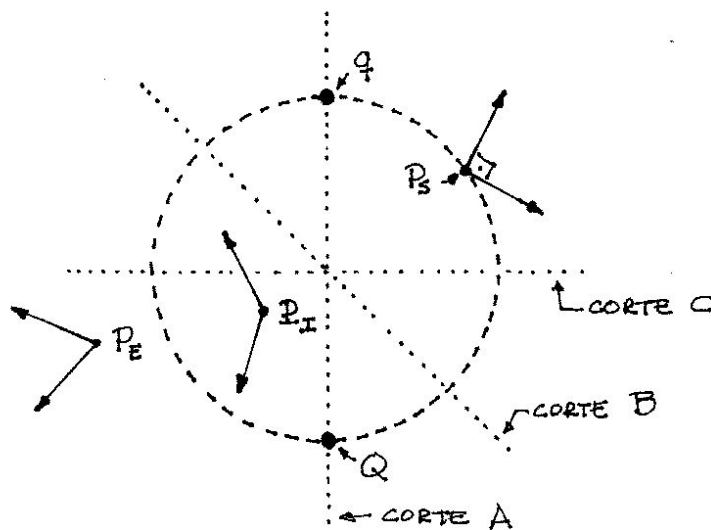


Figura 20.2: Superfície esférica e cortes no espaço para análise da distribuição da densidade de energia de interação de duas cargas puntiformes.

Para explorar o significado da densidade de energia potencial dada pela eq.(20.20) supomos, inicialmente, que as cargas  $q$  e  $Q$  sejam positivas. Existe um resultado matemático que, no nosso caso, pode ser expresso do seguinte modo: se as duas cargas puntiformes estiverem localizadas nos polos norte e sul de uma esfera, como na fig.20.2, então  $\vec{E}_q \cdot \vec{E}_Q = 0$ , em qualquer ponto  $P_S$  da sua superfície. Isto acontece porque as expressões do campo,

eqs.(20.3), permitem concluir que  $\vec{E}_q \cdot \vec{E}_Q$  é proporcional ao fator  $r^2 - d^2/4$ , como aparece na eq.(20.8).

Para um ponto da superfície da esfera,  $r = d/2$  este fator é nulo. Esse resultado indica que a esfera da fig.20.2 divide o espaço em duas regiões distintas. Nos pontos  $P_I$  do interior da esfera  $r < d/2$  e, portanto  $r^2 - \frac{d^2}{4} < 0$ . Já nos pontos  $P_E$ , externos à esfera  $r > d/2$  e  $r^2 - \frac{d^2}{4} > 0$ .

Deste modo, podemos concluir que, para duas cargas positivas, a densidade de energia potencial dada pela eq.(20.20) é, negativa no interior da esfera, nula sobre a superfície da esfera, positiva no exterior da esfera.

O valor da densidade de energia varia bastante quando nos movemos dos pólos para o equador da esfera. Na fig.20.3 mostramos a forma do perfil da densidade ao longo dos cortes A, B e C indicados na fig.20.2. Esses cortes interceptam a esfera em  $r = \pm d/2$  e esses pontos, correspondentes a  $r/d = \pm 0.5$ , são indicados pelas linhas verticais pontilhadas.

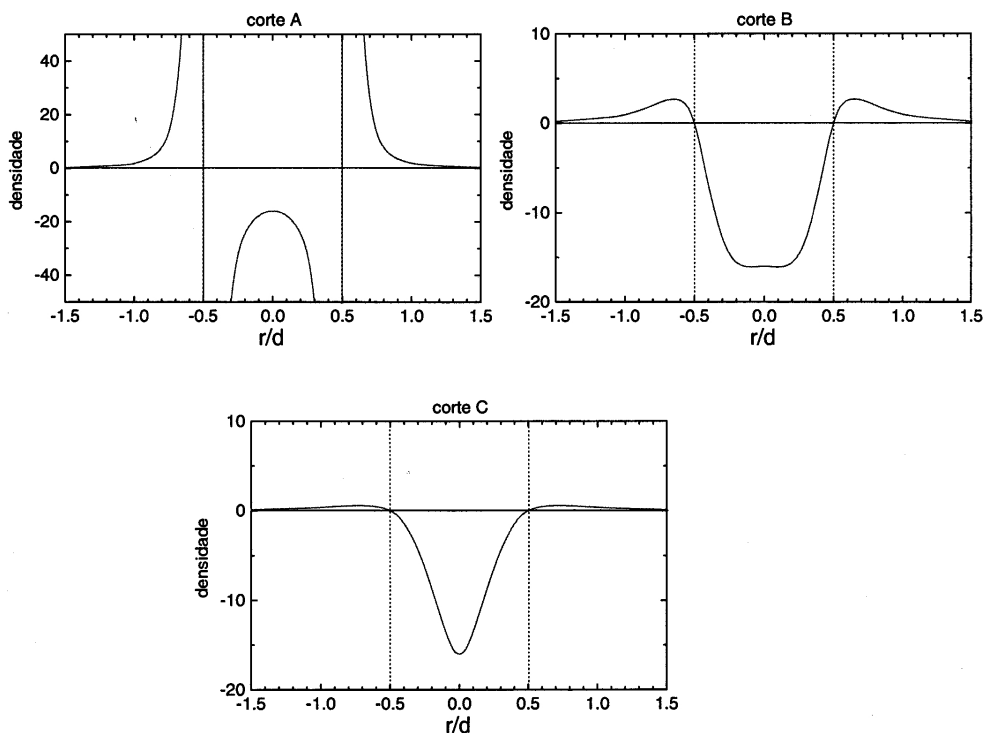


Figura 20.3: Perfil da densidade de energia potencial de interação de duas cargas puntiformes nos cortes A, B e C da fig.20.2.

Essas figuras foram feitas para o caso de duas cargas de mesmo sinal. Caso elas tivessem sinais opostos, a situação se inverte,  $dU_{\text{int}}/dV > 0$  no interior da esfera,  $dU_{\text{int}}/dV < 0$  no seu exterior e a fig.22.3 precisaria ser vista de cabeça para baixo.

## • atração e repulsão

Sabemos que duas cargas de mesmo sinal se repelem. Esse fenômeno pode ser explicado de vários modos diferentes e equivalentes. Se pensarmos nas forças que agem nas cargas, a repulsão é atribuída diretamente à direção e sentido da força que age em cada uma das cargas. No âmbito da energia potencial, a repulsão pode ser explicada pelo fato de que o movimento espontâneo de duas cargas deve ser tal que essa energia diminua. No caso de duas cargas positivas, isso corresponde a aumentar a distância  $d$  no denominador da eq.(22.19). Ou alternativamente, no contexto da densidade de energia, a expandir a esfera da fig.20.2. Isso faz com que a região na qual a densidade é negativa aumente, às custas da região na qual a densidade é positiva.

## • um problema ...

No contexto do eletromagnetismo clássico, a auto-energia de uma carga puntiforme, dada por  $U = \iiint \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV$  tem o valor infinito. Muito se refletiu sobre esse problema, mas ele não tem solução na física clássica.





# Capítulo 21

## operador diferencial - gradiente

### • as duas formas das equações de Maxwell

As quatro equações de Maxwell, que representam as leis básicas do eletromagnetismo, descrevem como cargas e correntes criam campos elétricos e magnéticos. Uma característica da teoria é que estas descrições podem ser feitas de modos fisicamente equivalentes mas bastante diferentes do ponto de vista matemático. Por isso, é costume falarmos em *forma global* e em *forma local* das equações de Maxwell. Para compreender a razão destes nomes consideremos, por exemplo, a lei de Gauss para o campo elétrico, que é dada pela eq.(?) como

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV. \quad (21.1)$$

Entretanto, como discutimos na próxima aula, ela também pode ser escrita como

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (21.2)$$

A eq.(21.1) é a forma global da lei, porque ela relaciona o comportamento do campo  $\vec{E}$  sobre a superfície  $S$  com a carga contida no seu interior. O uso da superfície  $S$  faz, necessariamente, com que tenhamos que tratar de regiões extensas nos dois membros da equação e, neste sentido, a relação entre eles envolve globalidades. Já que a eq.(21.2) representa a forma local da lei, porque os dois membros da equação envolvem grandezas calculadas *no mesmo* ponto do espaço. É este o significado da palavra local.

A equivalência entre as formas global e local das equações de Maxwell pode ser demonstrada por meio de dois teoremas muito importantes, conhecidos como *teorema de Gauss* e *teorema de Stokes*, apresentados na próxima aula. Ambos são formulados em termos de

um objeto matemático conhecido como *operador diferencial vetorial* e representado por  $\vec{\nabla}$ , sendo o símbolo  $\nabla$  chamado de *nabla*, o nome de um antigo instrumento musical grego de forma semelhante. O operador nabla é apresentado nesta aula.

### • o gradiente

Na aula 17, vimos que uma distribuição de cargas tem um campo elétrico  $\vec{E}$  e, a partir dele, podemos obter uma função potencial  $V$ , dado pela eq.(17.1)

$$V(\vec{r}_P) = - \int_{\infty}^P \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{c}. \quad (21.3)$$

Do ponto de vista matemático, o potencial é descrito por uma função escalar, que depende da posição  $\vec{r}_P$  do ponto  $P$ , que representa o final de um caminho que começou no infinito. O fato de  $\vec{E}$  depender da particular distribuição de cargas considerada indica que o mesmo acontece com  $V(\vec{r}_P)$ . Como a operação (21.3) pode ser efetuada para todos os pontos  $P$  do espaço,  $V(\vec{r}_P)$  é uma função escalar que tem um valor definido em qualquer ponto do espaço. Por este motivo, a função  $V(\vec{r}_P)$  representa um *campo escalar*.

Por exemplo, no caso de uma carga puntiforme  $q$ , o potencial  $V(\vec{r}_P)$ , que também pode ser chamado de campo escalar, é dado por

$$V(\vec{r}_P) = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{c} = - \int_{\infty}^P dr \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_P}. \quad (21.4)$$

Na natureza existem, também, campos escalares de outros tipos. Um exemplo comum é a temperatura. Imagine, por exemplo, uma sala com paredes mantidas a 20°C, no interior da qual existem uma pessoa e um aquecedor elétrico mantido a 70°C. Em uma situação como esta, a temperatura da sala não é uniforme mas, sim, representada por uma função  $T(x, y, z)$ , que depende do ponto considerado. Nas proximidades das paredes, ela deve ser um pouco maior do que 20°C, perto do aquecedor, um pouco menor do que 70°C e, quase junto à pessoa, um pouco menor do que 37°C. Como a temperatura é uma grandeza escalar, a função  $T(x, y, z)$  representa um campo escalar.

Consideramos, agora, um problema matemático. A eq.(21.3), parte do campo elétrico para determinar o potencial e, por isso, ela consiste em uma operação que pode ser representada simbolicamente por  $\vec{E} \rightarrow V$ . Existe um procedimento matemático que permite resolver o problema inverso, e obter o campo elétrico a partir do potencial. São problemas do tipo  $V \rightarrow \vec{E}$ , cuja solução envolve o operador nabla.

Se o potencial  $V$  é obtido a partir de  $\vec{E}$  por meio de uma integração, é razoável esperar que o problema inverso seja resolvido por meio de algum tipo de derivação. Este é, de fato, o caso, mas é preciso tomar cuidado com o fato de  $V$  ser um escalar e  $\vec{E}$  um vetor. Uma operação de derivação que transforma um escalar em um vetor é o *gradiente*.

Para obter a forma do gradiente, consideramos o potencial em dois pontos muito próximos,  $\vec{r}_P$  e  $\vec{r}_P + d\vec{c}$ , onde  $d\vec{c} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$  é um deslocamento infinitesimal.

Chamando de  $dV$  a diferença de potencial entre estes dois pontos, podemos escrever

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{c} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz). \quad (21.5)$$

Por outro lado,  $V$  é uma função de  $x, y, z$  e podemos também escrever a sua variação em termos de derivadas parciais como

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz. \quad (21.6)$$

Como as variações  $dx, dy$  e  $dz$  são quaisquer, a comparação entre estas duas expressões permite escrever

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (21.7)$$

Juntando todas estas componentes em uma única expressão vetorial, temos

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right). \quad (21.8)$$

Este resultado resolve o problema inverso pois, se conhecemos  $V$ , sabemos como determinar  $\vec{E}$ .

A expressão entre parênteses é conhecida como o *gradiente* de  $V$ . De modo geral, dada uma função *escalar*  $\phi$ , o seu gradiente é o *vetor* dado por

$$\text{grad } \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k}\right). \quad (21.9)$$

Simbolicamente, costuma-se escrever este resultado como

$$\text{grad } \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \phi. \quad (21.10)$$

Agora, o objeto entre parênteses é um *operador vetorial*, que representa um conjunto de instruções para operações matemáticas e é conhecido como nabla e denotado por  $\vec{\nabla}$ . Assim,

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}. \quad (21.11)$$

Note que as operações indicadas nesta expressão somente podem ser efetuadas quando o operador nabla age sobre alguma função, como em (21.10).

No caso do campo elétrico, o operador nabla permite que a eq.(21.8) seja reescrita de modo mais compacto como

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad (21.12)$$

ou seja, o campo elétrico é menos o gradiente de potencial. É importante notar que as características matemáticas do gradiente transformam o escalar  $V$  no vetor  $\vec{E}$ .

### • exemplo 1 - carga puntiforme

O potencial de uma carga puntiforme  $q$  em um ponto  $\vec{r} = (x, y, z)$  foi calculado na aula 17, sendo dado por

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Aqui, mostramos que a eq.(21.12) permite obtermos o campo elétrico da carga  $q$ . Ele é dado por

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\vec{\nabla} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right] \frac{1}{r}. \quad (21.13)$$

Lembrando que  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , temos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{r} \right] = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{r} \right] = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} \right] = -\frac{z}{r^3}, \quad (21.14)$$

e, obtemos

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (21.15)$$

Este resultado mostra que a eq.(21.12) permite a solução do problema inverso e fecha um círculo de auto-consistência. De fato, a partir de  $\vec{E}$ , podemos calcular  $V$  por meio do trabalho e, a partir de  $V$ , podemos calcular  $\vec{E}$  por meio do gradiente.

### • exemplo 2 - esfera uniformemente carregada

Na aula 17, calculamos o potencial  $V$  de uma esfera de raio  $R$ , uniformemente carregada com uma intensidade positiva de carga  $\rho$ . Este potencial em um ponto  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

tem a forma

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \text{para } r \geq R, \quad (21.16)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \left[ \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right] \quad \text{para } r \leq R. \quad (21.17)$$

Desejamos obter o campo elétrico da esfera a partir deste potencial. O cálculo para  $r > R$  foi apresentado no exemplo anterior. Para  $r < R$ , obtemos

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\vec{\nabla}V &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \left[ -\frac{2r}{2R^2} \frac{x}{r} \hat{i} - \frac{2r}{2R^2} \frac{y}{r} \hat{j} - \frac{2r}{2R^2} \frac{z}{r} \hat{k} \right] = \\ &= +\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \hat{r}. \end{aligned} \quad (21.18)$$

Assim, o campo é dado por

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{R^3} \quad \text{para } r \leq R, \quad (21.19)$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{para } r \geq R. \quad (21.20)$$

Como esperado, este resultado é idêntico ao dado pelas eqs.(13.15) e (13.16).

## • gradiente na prática

Como todos sabem, pernilongos são eficientes para localizar e picar pessoas. Estudos mostram que eles empregam três mecanismos para isto. A mais de 40 m, eles podem localizar os rastros de  $CO_2$  que a nossa respiração deixa no ar. Chegando mais perto, em torno de 10 m, eles podem usar a visão e, em seguida, a distância da ordem de 1 m, eles podem usar sensores de temperatura. Tanto o rastro de  $CO_2$  exalado como a nossa temperatura podem ser considerados campos escalares. O pernilongo afere estes campos e, para poder chegar ao seu objeto de desejo, ele precisa descobrir direções escondidas nestes campos, representadas por gradientes.

A ideia de gradiente está presente mesmo na brincadeira infantil conhecida como *jogo do quente ou frio*, na qual um grupo de crianças esconde um objeto qualquer em um ambiente e uma outra, que não conhece o esconderijo, começa a procurá-lo. Durante o jogo, as crianças que sabem onde o objeto está, guiam a que procura gritando frio, quente ou fervendo. A analogia com o gradiente ocorre quando as crianças transformam estas informações escalares acerca de temperatura em direções.

Se colocarmos um pedaço de carne em um canto de uma sala bem grande e soltarmos um cachorro em outra extremidade, depois de pouco tempo o cachorro, usando o seu olfato,

acha o pedaço de carne. E ele não faz isso andando sistematicamente em zigue-zague pela sala, tentando varrer todos os seus pontos. Ao contrário, em um dado ponto, ele fareja em direções diferentes, descobre a direção em que o cheiro aumenta mais rapidamente, e a segue.

No âmbito da semântica, a palavra *gradiência* é empregada para designar uma espécie de continuidade, de falta de fronteiras nítidas entre significados de palavras, tais como cadeira e banco, ou bom e excelente. Este tipo de gradiência permeia toda linguagem verbal. Tanto assim, que poderíamos pensar em escrever o início deste parágrafo como: No contexto da semântica, a palavra gradiência é utilizada para indicar um tipo de continuidade, de ausência de barreiras claras entre significados de palavras...

Podemos emprestar este significado e aplicá-lo à física, afirmando que campos escalares incorporam gradiências entre diferentes pontos do espaço. O poder do gradiente é que ele parte destas gradiências e nos fornece, em cada ponto, tanto a direção em que a variação do campo escalar é máxima como o seu valor.

### • a gradiência e o gradiente

O gradiente é muito útil em física e recorremos a um exemplo numérico para mostrar em detalhe o seu significado. O gradiente age sobre uma função escalar, transformando-a em um vetor. E em um dado ponto, a direção e sentido do gradiente indicam a direção e sentido de máxima variação dessa função escalar, enquanto que o seu módulo indica o valor numérico da derivada segundo essa direção.

Considere a função escalar  $\chi(x, y) = 2(x+3)(y+2)^2$ , apenas um brinquedo matemático, que varia de ponto a ponto sobre o plano  $xy$ . Se quisermos, podemos pensar que ela representa a intensidade do cheiro de carne em um campo aberto. Imaginemos, também, que um cachorro com faro matemático esteja sobre a origem do sistema de coordenadas onde  $V(0, 0) = 24$ , se perguntando qual direção deve ser seguida para alcançar a carne. Para resolver este problema, ele considera uma circunferência de raio  $r$  pequeno, de valor 0, 1, por exemplo, e determina o valor de  $V$  sobre ela, segundo várias direções diferentes. Seus resultados empíricos correspondem à equação  $\chi = 2(0, 1 \cos \theta + 3)(0, 1 \sin \theta + 2)^2$ . Como ele está com fome, ele varia o ângulo  $\theta$  em intervalos de  $15^\circ$  e constrói a tabela abaixo.

$\theta$	$\chi$	$\theta$	$\chi$	$\theta$	$\chi$	$\theta$	$\chi$
$0^\circ$	24,80	$90^\circ$	26,46	$180^\circ$	23,20	$270^\circ$	21,66
$15^\circ$	25,42	$105^\circ$	26,15	$195^\circ$	22,63	$285^\circ$	21,93
$30^\circ$	25,94	$120^\circ$	25,69	$210^\circ$	22,16	$300^\circ$	22,33
$45^\circ$	26,33	$135^\circ$	25,12	$225^\circ$	21,81	$315^\circ$	22,86
$60^\circ$	26,56	$150^\circ$	24,49	$240^\circ$	21,60	$330^\circ$	23,47
$75^\circ$	26,60	$165^\circ$	23,83	$255^\circ$	21,55	$345^\circ$	24,14

O cachorro e as intensidades de cheiro de carne segundo as várias direções são mostradas na

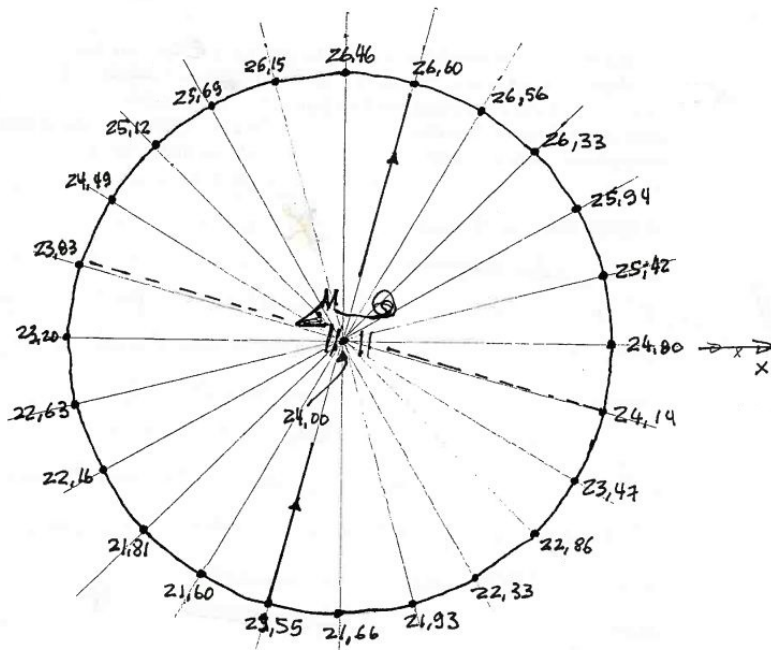


Figura 21.1: Um cachorro em busca da felicidade.

fig.21.1. Se percorrermos esta circunferência no sentido anti-horário, a partir do ponto  $\theta = 0$ , notamos que o valor de  $V$  cresce continuamente até  $\theta = 75^\circ$ , e, a partir daí, passa a decrescer até  $\theta = 255^\circ$ , quando a tendência se inverte novamente. Neste percurso, passamos, também, por dois valores bastante próximos ao valor  $V = 24$  do centro, em  $\theta = 165^\circ$  e  $\theta = 345^\circ$ . É importante notar que os pontos de máximo e de mínimo estão em lados opostos da circunferência, enquanto que a linha onde  $V$  é constante é ortogonal à esta direção.

Este tipo de variação de  $V$  em torno de um ponto fixo indica que a derivada nele depende da direção considerada. Por exemplo, para  $\theta = 30^\circ$ ,  $\Delta V/\Delta r = (25,94 - 24)/0,1 = 19,4$  e para  $60^\circ$ ,  $\Delta V/\Delta r = (26,56 - 24)/0,1 = 25,6$ . É interessante notar que, nos lados opostos da circunferência  $\theta' = \theta + 180^\circ$ , as derivadas mudam de sinal. Assim, para  $210^\circ$ ,  $\Delta V/\Delta r = (22,16 - 24)/0,1 = -18,4$  e para  $240^\circ$ ,  $\Delta V/\Delta r = -24,00$ .

A direção da felicidade para o cachorro é a  $\theta = 75^\circ$ , onde ocorre a variação máxima com relação ao valor da origem. Nesta direção a derivada vale  $(26,60 - 24)/0,1 = 26,0$ .

É interessante compararmos os números determinados pelo cachorro com o cálculo direto do gradiente. Em um ponto  $(x, y)$  genérico, ele é dado por

$$\vec{\nabla}\chi(x, y) = 2(y + 2)^2 \hat{i} + 4(x + 3)(y + 2) \hat{j}, \quad (21.21)$$

e na origem, ele vale

$$\vec{\nabla}\chi = 8\hat{i} + 24\hat{j}. \quad (21.22)$$

Este vetor tem módulo  $|\vec{\nabla}V| = (8^2 + 24^2)^{1/2} = 25,30$  e direção dada por  $\theta = \tan^{-1}(24/8) = 71,57^\circ$ .

Estes resultados não coincidem exatamente com os obtidos pelo cachorro por dois motivos. Um deles é que os passos de  $15^\circ$  usados na tabela são muito grandes. O outro é que o raio  $r = 0,1$  da circunferência considerada também é muito grande. Se ambos fossem menores, os valores do cachorro seriam mais precisos.

### • exercícios

1. O potencial de um fio retilíneo, de comprimento  $L$  e densidade de carga linear  $\lambda$ , constante e positiva é dado, em coordenadas cartesianas, por

$$V(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (z - L/2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (z + L/2)}. \quad (21.23)$$

a) Determine o campo elétrico desta distribuição;

b) Reexpresse o seu resultado em coordenadas cilíndricas.

2. É dado um campo escalar  $V(x, y) = 3x^2 - 2xy - 4y^2$ . Determine o seu gradiente e as direções das equipotenciais nos pontos

a)  $(x, y) = (0, 0)$

b)  $(x, y) = (0, 2)$

c)  $(x, y) = (2, 2)$

### • respostas

1. a)

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{(x^2 + y^2)} \left[ \frac{z - L/2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - L/2)^2}} + \frac{z + L/2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + L/2)^2}} \right] (-x\hat{i} - y\hat{j}) \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - L/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + L/2)^2}} \right] \hat{k} \right\} \end{aligned}$$

b) eq.(8.37)

2. a)  $\vec{\nabla}V(0, 0) = 0$ ; b)  $\vec{\nabla}V(0, 2) = -4\hat{i} - 16\hat{j}$ ,  $\theta = 255, 96$ ; c)  $\vec{\nabla}V(2, 2) = 8\hat{i} - 12\hat{j}$ ,  $\theta = 288, 43^\circ$ .



# Capítulo 22

## o operador vetorial -

divergente e rotacional

### • introdução

Na aula anterior, apresentamos o operador nabla, também conhecido como operador diferencial vetorial ou, simplesmente, por operador vetorial que, em coordenadas cartesianas, é representado por

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}. \quad (22.1)$$

Na formulação de problemas de física, este operador age sobre campos, que podem ser escalares, como a temperatura e a pressão, ou vetoriais, como o gravitacional, o elétrico e o magnético. Para evitar um compromisso com campos particulares, designamos um campo escalar por<sup>1</sup>  $\chi(x, y, z)$  e um campo vetorial por<sup>2</sup>  $\vec{\psi}(x, y, z)$ .

Existem três ações importantes do operador nabla, para calcular o *gradiente*, o *divergente* e o *rotacional*.

- **gradiente:** foi introduzido na aula anterior e corresponde à ação de  $\vec{\nabla}$  sobre um campo escalar  $\chi$ , dando origem a uma grandeza vetorial

$$\text{gradiente} \rightarrow \vec{\nabla} \chi = \text{vetor};$$

- **divergente:** é definido pelo *produto escalar* de  $\vec{\nabla}$  por um campo vetorial  $\vec{\psi}$ , resultando em uma grandeza escalar

$$\text{divergente} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} = \text{escalar};$$

- **rotacional:** é definido pelo *produto vetorial* de  $\vec{\nabla}$  por um campo vetorial  $\vec{\psi}$ , resultando em uma grandeza vetorial

$$\text{rotacional} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\psi} = \text{vetor}.$$

Nesta aula, apresentamos o divergente e o rotacional.

---

<sup>1</sup>Letra grega *chi*, pronuncia-se *qui*.

<sup>2</sup>Letra grega *psi*.

### • divergente

O divergente de um campo vetorial  $\vec{\psi}$  está diretamente relacionado ao seu fluxo sobre uma superfície infinitesimal cúbica  $dS$ , de lados  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ , com normais apontadas para fora e centrada em um ponto  $P=(a, b, c)$  genérico, com as características mostradas na tabela.

face	no plano	área da face	normal $\hat{n}$
1	$x = a$	$dy dz$	$-\hat{i}$
2	$x = a + dx$	$dy dz$	$\hat{i}$
3	$y = b$	$dx dz$	$-\hat{j}$
4	$y = b + dy$	$dx dz$	$\hat{j}$
5	$z = c$	$dx dy$	$-\hat{k}$
6	$z = c + dz$	$dx dy$	$\hat{k}$

Usando  $\vec{\psi} = \psi_x \hat{i} + \psi_y \hat{j} + \psi_z \hat{k}$ , o fluxo total  $d\Phi$  é dado pela soma das contribuições individuais  $d\Phi_i = \vec{\psi} \cdot \hat{n} dS_i$  e tem a forma

$$\begin{aligned}
 d\Phi &= [d\Phi_1 + d\Phi_2] + [d\Phi_3 + d\Phi_4] + [d\Phi_5 + d\Phi_6] \\
 &= [\psi_x(a + dx, b, c) - \psi_x(a, b, c)] dy dz + [\psi_y(a, b + dy, c) - \psi_y(a, b, c)] dx dz \\
 &\quad + [\psi_z(a, b, c + dz) - \psi_z(a, b, c)] dx dy .
 \end{aligned} \tag{22.2}$$

Os termos entre colchetes podem ser reexpressos por meio de derivadas parciais

$$\psi_x(a + dx, b, c) - \psi_x(a, b, c) = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} dx , \tag{22.3}$$

$$\psi_y(a, b + dy, c) - \psi_y(a, b, c) = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} dy , \tag{22.4}$$

$$\psi_z(a, b, c + dz) - \psi_z(a, b, c) = \frac{\partial \psi_z}{\partial z} dz , \tag{22.5}$$

e temos

$$d\Phi = \left[ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right] dx dy dz . \tag{22.6}$$

A eq.(22.1) permite identificar o termo entre colchetes com o produto escalar de  $\vec{\nabla}$  e  $\vec{\psi}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right] \cdot [\psi_x \hat{i} + \psi_y \hat{j} + \psi_z \hat{k}] = \left[ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right] \tag{22.7}$$

que, por definição, é o divergente de  $\vec{\psi}$ .

Deste modo, concluímos que o fluxo do vetor  $\vec{\psi}$  sobre a superfície  $dS$ , que encerra um volume  $dV = dx dy dz$ , é dado por

$$d\Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} dV . \tag{22.8}$$

Este resultado fornece uma interpretação do divergente de um vetor como o seu fluxo por unidade de volume quando este tende a zero.

## • teorema de Gauss

O *teorema de Gauss*, também conhecido como *teorema da divergência*, afirma que, para um campo vetorial  $\vec{\psi}$  qualquer, vale a relação

$$\oiint_S \vec{\psi} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} dV, \quad (22.9)$$

onde  $S$  é uma superfície fechada,  $V$  é o volume encerrado por ela e  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi}$  é divergente de  $\vec{\psi}$ .

Para demonstrar este teorema, dividimos o volume  $V$  em elementos  $dV$  e, para cada um deles, vale a eq.(22.8). Quando consideramos dois elementos de volume  $\alpha$  e  $\beta$  vizinhos, como na fig.22.1, os fluxos sobre a parede comum entre eles têm sinais opostos, porque o mesmo acontece com as suas normais, que devem apontar para fora do volume considerado. Deste modo, os fluxos sobre a parede comum se anulam e ela não contribui para a soma  $d\Phi_\alpha + d\Phi_\beta$ . Repetindo este raciocínio para todos os elementos de volume, concluímos que apenas a superfície externa  $S$  contribui para o fluxo que é, de fato dado pelo membro esquerdo da eq.(22.9). Já o seu membro direito corresponde à somatória dos termos proporcionais a  $dV$  na eq.(22.8).

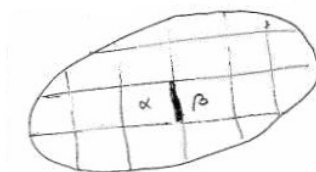


Figura 22.1: Parede contígua entre dois elementos de volume vizinhos  $\alpha$  e  $\beta$ , no interior do volume  $V$ .

• exemplo 1

Consideramos um campo vetorial dado por

$$\vec{\psi} = x^2 \hat{i} + xy \hat{j} + (y^2 - z^2) \hat{k} \quad (22.10)$$

e verificamos a validade do teorema de Gauss para a superfície cúbica descrita na tabela e mostrada na fig.22.2

face	no plano	área $dS$	normal $\hat{n}$
1	$x = 0$	$dy dz$	$-\hat{i}$
2	$x = A$	$dy dz$	$\hat{i}$
3	$y = 0$	$dx dz$	$-\hat{j}$
4	$y = B$	$dx dz$	$\hat{j}$
5	$z = 0$	$dx dy$	$-\hat{k}$
6	$z = C$	$dx dy$	$\hat{k}$

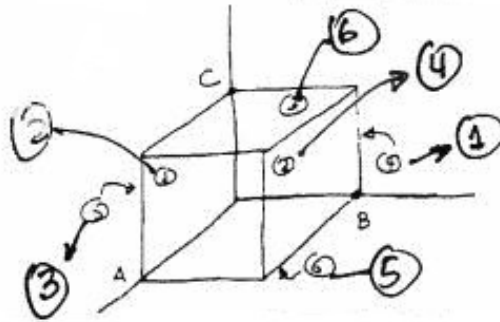


Figura 22.2: O cubo descrito na tabela.

O fluxo sobre a superfície do cubo tem a forma

$$\oiint \vec{\psi} \cdot \hat{n} dS = \Phi_1 + \dots + \Phi_6, \quad (22.11)$$

sendo as contribuições individuais dadas por

$$\Phi_1 = \int_0^C dz \int_0^B dy \vec{\psi} \cdot (-\hat{i}) = - \int_0^C dz \int_0^B dy x^2 = - \int_0^C dz \int_0^B dy [0] = 0, \quad (22.12)$$

$$\Phi_2 = \int_0^C dz \int_0^B dy \vec{\psi} \cdot \hat{i} = \int_0^C dz \int_0^B dy x^2 = \int_0^C dz \int_0^B dy A^2 = A^2 B C, \quad (22.13)$$

$$\Phi_3 = \int_0^C dz \int_0^A dx \vec{\psi} \cdot (-\hat{j}) = - \int_0^C dz \int_0^A dx x y = - \int_0^C dz \int_0^A dx [0] = 0, \quad (22.14)$$

$$\Phi_4 = \int_0^C dz \int_0^A dx \vec{\psi} \cdot \hat{j} = \int_0^C dz \int_0^A dx x y = \int_0^C dz \int_0^A dx B x = \frac{A^2 B C}{2}, \quad (22.15)$$

$$\begin{aligned} \Phi_5 &= \int_0^B dy \int_0^A dx \vec{\psi} \cdot (-\hat{k}) = - \int_0^B dy \int_0^A dx (y^2 - z^2) \\ &= - \int_0^B dy \int_0^A dx y^2 = - \frac{A B^3}{3}, \end{aligned} \quad (22.16)$$

$$\begin{aligned} \Phi_6 &= \int_0^B dy \int_0^A dx \vec{\psi} \cdot \hat{k} = \int_0^B dy \int_0^A dx (y^2 - z^2) \\ &= \int_0^B dy \int_0^A dx (y^2 - C^2) = \frac{A B^3}{3} - A B C^2. \end{aligned} \quad (22.17)$$

Assim, o fluxo total vale

$$\oiint \vec{\psi} \cdot \hat{n} dS = \frac{3 A^2 B C}{2} - A B C^2. \quad (22.18)$$

O lado direito da eq.(22.9) envolve o divergente de  $\vec{\psi}$ , que é dado por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = 3x - 2z \quad (22.19)$$

e temos

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} dV = \int_0^C dz \int_0^B dy \int_0^A dx (3x - 2z) = \frac{3 A^2 B C}{2} - A B C^2. \quad (22.20)$$

Fica, portanto, verificada a validade da eq.(22.9) no caso particular desta superfície cúbica.

## • lei de Gauss na forma diferencial

A lei de Gauss na forma integral é escrita como

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \quad (22.21)$$

onde  $S$  é uma superfície fechada e  $q_{\text{int}}$  representa a carga interna a ela. No caso de uma distribuição contínua, a carga interna  $q_{\text{int}}$  pode ser expressa em função da densidade volumétrica

$\rho$  e temos

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV, \quad (22.22)$$

onde  $V$  é o volume encerrado pela superfície  $S$ . Esta igualdade entre integrais sugere a possibilidade de relacionar diretamente os integrandos, ou seja, o campo elétrico à densidade de carga. Para fazer isso, entretanto, é preciso que as integrações nos dois membros sejam iguais. Isso pode ser conseguido por meio do teorema de Gauss, dado pela eq.(22.9), pois ele permite escrever o lado esquerdo da eq.(22.22) em função do divergente de  $\vec{E}$  como

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \quad (22.23)$$

e, portanto, a lei de Gauss pode ser escrita como

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV. \quad (22.24)$$

Para poder afirmar algo sobre os integrandos desta equação, é conveniente reescrevê-la como

$$\iiint_V \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right] dV = 0. \quad (22.25)$$

Como ela vale para um volume  $V$  encerrado por qualquer superfície  $S$ , podemos concluir que o integrando é nulo e, portanto, que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (22.26)$$

Esta expressão representa a lei de Gauss na *forma diferencial*. Como este nome indica, ela corresponde a uma forma matemática diferente para a lei, mas com conteúdo físico totalmente equivalente ao da forma integral. Essa equivalência decorre do fato de que a transição de uma forma para a outra foi efetuada por meio de um teorema matemático de validade ampla. Enquanto a forma integral da lei de Gauss associa campo e carga em regiões finita do espaço, a forma diferencial corresponde a uma equação *local*, já que ela relaciona o divergente de  $\vec{E}$  em um ponto do espaço à densidade de cargas no mesmo ponto.

## • do campo para a carga

Como já discutimos amplamente, a expressão da lei de Coulomb permite-nos obter o campo elétrico a partir do conhecimento da distribuição de cargas, situação simbolicamente representada por  $q \rightarrow \vec{E}$ . Já a lei de Gauss diferencial fornece a solução para o problema inverso  $\vec{E} \rightarrow q$ , pois permite a determinação de  $\rho$  a partir do conhecimento de  $\vec{E}$ .

## • o significado do divergente

A ideia básica da lei de Coulomb é que carga elétrica produz campo elétrico. Já a lei de Gauss associa a carga elétrica à *produção* de fluxo do campo elétrico sobre uma superfície fechada. Na

aula 13, calculamos o campo de uma esfera de raio  $R$  uniformemente carregada, que é dado pelas eqs.(13.14) e (13.15) [((((13.6) e (13.17)))]

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{R^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{R^3}, \quad (22.27)$$

$$\vec{E}(r \geq R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (22.28)$$

Para calcular o divergente de  $\vec{E}$ , usamos

$$\frac{\partial E_x(r \leq R)}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3}, \quad (22.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x(r \geq R)}{\partial x} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{3x^2}{2[x^2 + y^2 + z^2]^{5/2}} \right]. \end{aligned} \quad (22.30)$$

As demais componentes são análogas e temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(r \leq R) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{3q}{4\pi R^3 \epsilon_0}, \quad (22.31)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(r \geq R) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (22.32)$$

Do lado de fora da esfera carregada, existe o campo elétrico dado pela eq.(22.28), mas o seu divergente é nulo. Isto ocorre porque não há *geração de fluxo* no exterior da esfera. Já na parte interna da esfera, há *uma fonte* de fluxo, que é a carga elétrica e, na eq.(22.31) podemos identificar a densidade volumétrica de carga  $\rho = 3q/(4\pi R^3)$ . O fato de o divergente de  $\vec{E}$  em um dado ponto do interior da esfera ser proporcional a  $\rho$  naquele ponto indica que é a densidade de carga que está criando fluxo de campo elétrico.

## • exemplo 2

Uma distribuição volumétrica de carga gera o campos elétrico  $\vec{E} = \lambda e^{-\alpha r} \hat{r}$ , onde  $\lambda$  e  $\alpha$  são constantes positivas. Desejamos conhecer a expressão que descreve a distribuição de carga e, para tanto, usamos a lei de Gauss diferencial, escrevendo  $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ . A forma do divergente de  $\vec{E}$  é obtida a partir da eq.(22.7). Usando  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  e  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , a derivada parcial de  $E_x$  em relação a  $x$  é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{e^{-\alpha r}}{r} x \right] = \lambda \left[ \frac{e^{-\alpha r}}{r} + x \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-\alpha r}}{r} \right) \right] \\ &= \lambda \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{r^2} \right) x^2 \right] \frac{e^{-\alpha r}}{r}. \end{aligned} \quad (22.33)$$

As demais componentes são calculadas de modo análogo e o divergente é, portanto,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \lambda \left[ 3 - \left( \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{r^2} \right) (x^2 + y^2 + z^2) \right] \frac{e^{-\alpha r}}{r} \\ &= \lambda (2 - \alpha r) \frac{e^{-\alpha r}}{r}\end{aligned}\quad (22.34)$$

e a densidade de carga é descrita pela função

$$\rho = \epsilon_0 \lambda (2 - \alpha r) \frac{e^{-\alpha r}}{r} . \quad (22.35)$$

### • exemplo 3

Dado um campo  $\vec{E} = \lambda(y\hat{i} - x\hat{j})/r^3$ , sendo  $\lambda$  uma constante positiva, nosso interesse é saber se existe uma distribuição de carga que dá origem a este campo. A partir da lei de Gauss diferencial, obtemos

$$\rho = \epsilon_0 \left[ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] = \epsilon_0 \lambda \left[ -\frac{3yx}{r^5} + \frac{3xy}{r^5} \right] = 0 . \quad (22.36)$$

Este resultado pode parecer surpreendente, pois indica que existem campos elétricos que não são produzidos por cargas. Na natureza, eles podem ser produzidos por campos magnéticos que variam com o tempo, discutidos na aula 34, quando tratamos da lei de Faraday.

### • o laplaciano e a equação de Poisson

No caso da eletrostática, o campo está relacionado ao potencial por  $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ . Usando este resultado na lei de Gauss diferencial, dada na eq.(22.26), podemos reescrevê-la em termos do potencial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V = -\nabla^2 V , \quad (22.37)$$

onde o operador  $\nabla^2$ , conhecido como *laplaciano*, é dado por

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right] \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \quad (22.38)$$

Note que o laplaciano é um operador escalar. Deste modo, em termos do potencial, a lei de Gauss tem a forma

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} . \quad (22.39)$$

No âmbito da matemática, uma equação deste tipo é conhecida como *equação de Poisson*.

### • rotacional



Formalmente, o rotacional de um campo vetorial  $\vec{\psi}$  é dado pelo produto vetorial do operador  $\vec{\nabla}$  por esse campo. Em coordenadas cartesianas, ele é o vetor dado por

$$\vec{\nabla} \times \vec{\psi} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{vmatrix}$$

$$= \left[ \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right] \hat{i} + \left[ \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right] \hat{j} + \left[ \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right] \hat{k}. \quad (22.40)$$

O significado do rotacional deriva da sua relação com a *circuitação* de  $\vec{\psi}$  sobre um caminho fechado elementar. A circuitação de um campo vetorial  $\vec{\psi}$  sobre um caminho fechado  $C$  é o nome dado à integral

$$\oint_C \vec{\psi} \cdot d\vec{c}, \quad (22.41)$$

onde  $d\vec{c}$  é um elemento do caminho.

Para mostrar a relação do rotacional com a circuitação consideramos, inicialmente, um caminho  $C_{xy}$  paralelo ao plano  $xy$ , situado em  $z = c$ , com lados numerados de 1 a 4, como mostra a fig.22.3

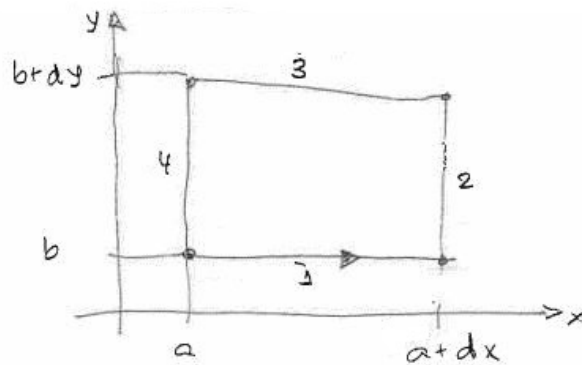


Figura 22.3: Caminho infinitesimal  $C_{xy}$  paralelo ao plano  $xy$ , onde a seta indica o sentido do percurso

A circuitação de  $\vec{\psi} = \psi_x \hat{i} + \psi_y \hat{j} + \psi_z \hat{k}$  sobre este caminho é dada por

$$\begin{aligned} \oint_{C_{xy}} \vec{\psi} \cdot d\vec{c} &= \int_a^{a+dx} \psi_x(x, b, c) dx + \int_b^{b+dy} \psi_y(a+dx, y, c) dy \\ &+ \int_{a+dx}^a \psi_x(x, b+dy, c) dx + \int_{b+dy}^b \psi_y(a, y, c) dy. \end{aligned} \quad (22.42)$$

Juntando as integrais de mesmo tipo, temos

$$\begin{aligned} \oint_{C_{xy}} \vec{\psi} \cdot d\vec{c} &= \int_a^{a+dx} [\psi_x(x, b, c) - \psi_x(x, b+dy, c)] dx \\ &+ \int_b^{b+dy} [\psi_y(a+dx, y, c) - \psi_y(a, y, c)] dy. \end{aligned} \quad (22.43)$$

Os termos entre colchetes correspondem a derivadas parciais e escrevemos

$$\oint_{C_{xy}} \vec{\psi} \cdot d\vec{c} = \int_a^{a+dx} \left[ -\frac{\partial \psi_x(x, b, c)}{\partial y} \right] dy dx + \int_b^{b+dy} \left[ \frac{\partial \psi_y(a, y, c)}{\partial x} \right] dx dy. \quad (22.44)$$

Para concluir esta discussão, é preciso efetuar as integrais. De modo geral, para integrar um função  $G(x)$  em um intervalo muito pequeno, podemos expandi-la em série de Taylor em torno de um dos extremos, escrevendo

$$\begin{aligned} \int_a^{a+dx} G(x) dx &= \int_a^{a+dx} \left[ G(a) + \frac{(x-a)}{2!} G'(a) + \frac{(x-a)^2}{3!} G''(a) + \dots \right] dx \\ &= \left[ G(a)x + \frac{G'(a)}{2!} \left( \frac{x^2}{2} - ax \right) + \frac{G''(a)}{3!} \left( \frac{x^3}{3} - ax^2 + a^2x \right) + \dots \right]_a^{a+dx} \\ &= G(a) dx + \frac{(dx)^2}{2!} G'(a) + \frac{(dx)^3}{3!} G''(a) + \dots \end{aligned} \quad (22.45)$$

Assim, em primeira ordem, apenas o primeiro termo contribui e a eq.(22.44) pode ser escrita como

$$\oint_{C_{xy}} \vec{\psi} \cdot d\vec{c} = \left[ \frac{\partial \psi_y(a, b, c)}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x(a, b, c)}{\partial y} \right] dx dy. \quad (22.46)$$

Comparando este resultado com a eq.(22.40) notamos que o termo entre chaves é idêntico à componente do rotacional na direção  $z$ , o que permite escrever

$$\oint_{C_{xy}} \vec{\psi} \cdot d\vec{c} = \left[ \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \right] \cdot \hat{k} dx dy. \quad (22.47)$$

Assim, a circuitação de  $\vec{\psi}$  em um caminho elementar contido no plano  $xy$  é proporcional à componente do seu rotacional na direção perpendicular a este plano. Antes de prosseguir, é preciso chamar a atenção que ainda há uma ambiguidade neste resultado. Ela ocorre porque a nossa escolha de percorrer o caminho  $C_{xy}$  no sentido antihorário indicado na fig.22.3 é arbitrária. Se o percorrêssemos no sentido horário, o sinal da eq.(22.46) seria invertido e a eq.(22.47) ficaria incorreta. A remoção desta ambiguidade é baseada em uma convenção muito importante e que é empregada com grande frequência no eletromagnetismo.

Como o caminho  $C_{xy}$  pode ser percorrido em dois sentidos diferentes, você escolhe arbitrariamente um deles e, em seguida, apoia uma superfície matemática sobre ele. Feito isto, você espeta um versor  $\hat{n}_{xy}$ , normal à superfície, usando a *regra da mão direita*, que consiste em orientar seus dedos da mão direita paralelamente ao caminho e escolher a normal segundo o seu polegar, como indicam as figs.22.4. Esta convenção faz com que o caminho e a normal à superfície apoiada nele possam ser considerados parte de um sistema rígido. Assim, as figuras (a) e (b) descrevem o mesmo objeto, apenas dispostos de modos diferentes.

Usando a convenção da mão direita, a eq.(22.47) passa a ser escrita como

$$\oint_{C_{xy}} \vec{\psi} \cdot d\vec{c} = \left[ \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \right] \cdot \hat{n}_{xy} dx dy. \quad (22.48)$$

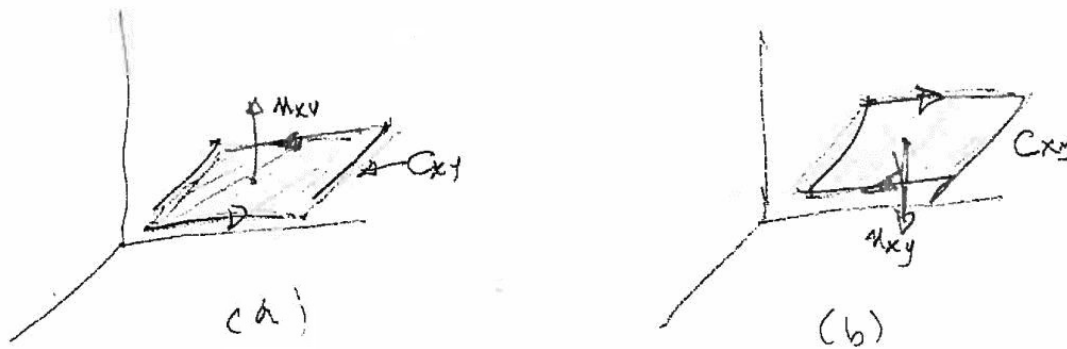


Figura 22.4: Dois sentidos de percurso e a normal, para um caminho fechado.

Com isso, a ambiguidade foi removida porque, se invertermos o sentido de percurso do caminho, os dois lados desta equação mudam de sinal e ela continua válida.

Para generalizar este resultado, consideramos agora um caminho  $C'$ , não contido totalmente no plano  $xy$ , como mostra a fig.22.5(a) e calculamos a circulação de  $\vec{\psi}$  sobre ele. Para enquadrar este problema na situação discutida anteriormente, introduzimos os caminhos 3 e 4, entre os pontos A e B, como na figura (b). Eles têm sentidos opostos e, por isso, a soma das suas contribuições é nula. Entretanto, isto quebra o caminho  $C'$  em dois outros,  $C_{xy}$  e  $C_{yz}$ , e nos permite escrever

$$\oint_{C'} \vec{\psi} \cdot d\vec{c} = \oint_{C_{xy}} \vec{\psi} \cdot d\vec{c} + \oint_{C_{yz}} \vec{\psi} \cdot d\vec{c}. \tag{22.49}$$

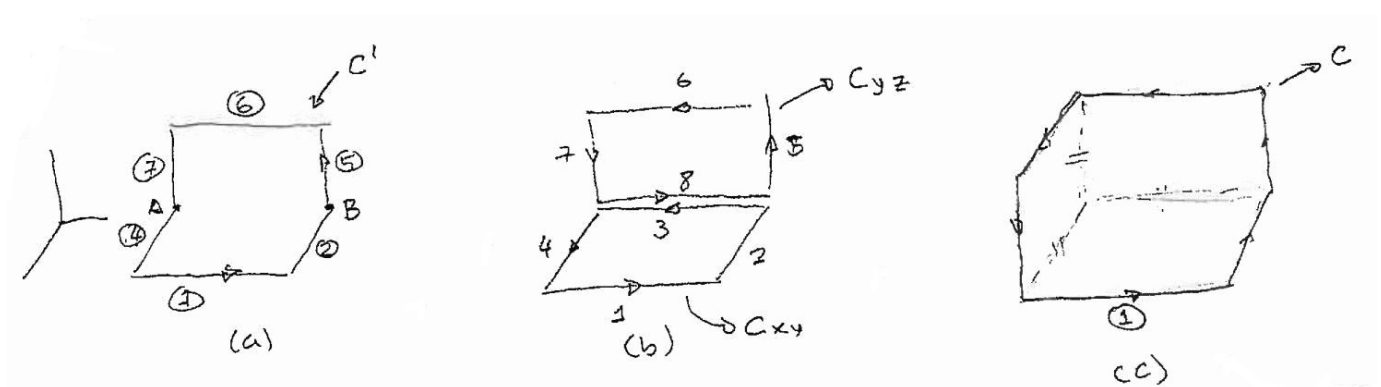


Figura 22.5: Caminhos fora do plano.

O resultado da circulação sobre o caminho  $C_{yz}$  pode ser obtido a partir da eq.(22.44), trocando  $x \rightarrow z$  e o resultado (22.48) permite afirmar que

$$\oint_{C'} \vec{\psi} \cdot d\vec{c} = [\vec{\nabla} \times \vec{\psi}] \cdot \hat{n}_{xy} dx dy + [\vec{\nabla} \times \vec{\psi}] \cdot \hat{n}_{yz} dy dz. \tag{22.50}$$

O mesmo tipo de raciocínio leva à extensão desta expressão para o caminho  $C$  mostrado na figura (c) e temos

$$\oint_C \vec{\psi} \cdot d\vec{c} = [\vec{\nabla} \times \vec{\psi}] \cdot \hat{n}_{xy} dx dy + [\vec{\nabla} \times \vec{\psi}] \cdot \hat{n}_{yz} dy dz + [\vec{\nabla} \times \vec{\psi}] \cdot \hat{n}_{zx} dz dx. \tag{22.51}$$

A bem da simplicidade, costuma-se escrever este resultado como

$$\oint_C \vec{\psi} \cdot d\vec{c} = [\vec{\nabla} \times \vec{\psi}] \cdot \hat{n} dS, \quad (22.52)$$

com o entendimento que os símbolos  $\hat{n}$  e  $dS$  se aplicam à parte da superfície apoiada no caminho  $C$  que estamos considerando.

### • o significado do rotacional

Para adquirir uma intuição acerca do significado do rotacional, é conveniente voltar à eq.(22.48), válida para um caminho sobre o plano  $xy$ . Ela pode ser escrita como

$$[\vec{\nabla} \times \vec{\psi}] \cdot \hat{n}_{xy} = \frac{\oint_{C_{xy}} \vec{\psi} \cdot d\vec{c}}{dx dy} \quad (22.53)$$

e permite interpretar o rotacional como sendo a circuitação do campo por unidade de área. Podemos tornar esta interpretação mais concreta imaginando que o caminho elementar descrito na fig.22.3 esteja no meio de um rio matemático, que corre na direção do eixo  $x$ . A velocidade da água na superfície do rio corresponde a um campo vetorial bidimensional  $\vec{v}(x, y)$ , que toma o lugar do  $\vec{\psi}$  genérico que vimos considerando. Suponha, inicialmente, que o perfil de velocidades seja o indicado na fig.22.6(a). A superfície  $dS$  apoiada no caminho elementar da fig.22.3 tem uma normal, dada pela regra da mão direita, na direção  $\hat{k}$ . Se o colocarmos nos pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , a circuitação ao longo dele se anula, pois as contribuições dos lados 1 e 3 são iguais em módulo e têm sinais opostos. Assim, nestes três pontos,  $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$  e o movimento da água é dito irrotacional.

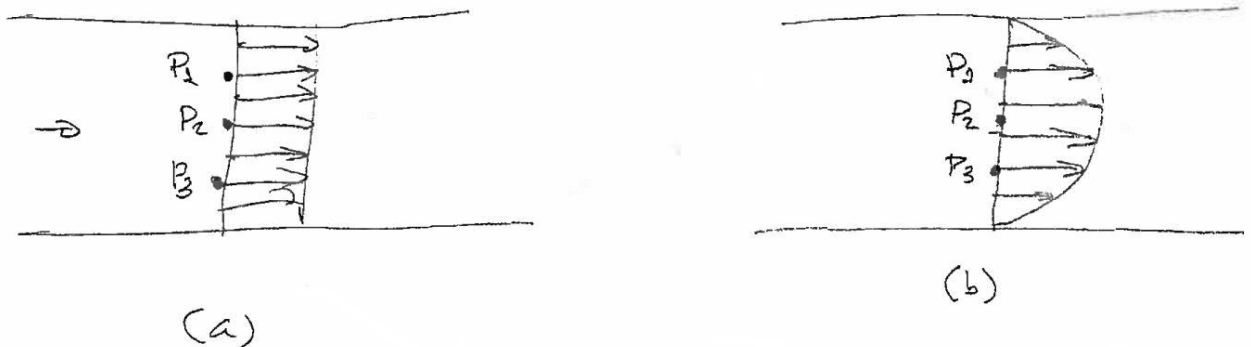


Figura 22.6: Movimento da água de um rio e o rotacional da velocidade.

Consideremos, agora, uma versão do rio mais próxima da realidade, na qual a velocidade da água é mais baixa próxima às margens e maior no centro, como indica a figura (b). Neste caso, se colocarmos o caminho elementar sobre o ponto  $P_1$ , a circuitação de  $\vec{v}$  ao longo dele é positiva, pois a contribuição do caminho 1 é maior do que a do caminho 3. Consequentemente, em  $P_1$ ,  $\vec{\nabla} \times \vec{v}$  é paralelo a  $\hat{k}$ . Já no ponto  $P_3$  ocorre o oposto e  $\vec{\nabla} \times \vec{v}$  é antiparalelo a  $\hat{k}$ , enquanto que, em  $P_2$ ,  $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ .

Se abandonarmos uma folha seca sobre o ponto  $P_1$  do rio mais realístico, o seu movimento será de translação junto com a água, acompanhada por uma rotação no sentido antihorário.

Se ela for abandonada em  $P_2$ , ela tem apenas translação e, em  $P_3$ , translação acompanhada de rotação horária. Assim, o rotacional captura tendências de rotações em campos e é desta característica que vem o seu nome.

## • teorema de Stokes

O teorema de Stokes afirma que, para um campo vetorial  $\vec{\psi}$  qualquer, vale a igualdade

$$\oint_C \vec{\psi} \cdot d\vec{c} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{\psi}) \cdot \hat{n} dS, \quad (22.54)$$

onde  $C$  é um caminho fechado genérico e  $S$  é qualquer superfície apoiada nele. Esta expressão incorpora a convenção de sinais que relaciona o caminho  $C$  e a normal  $\hat{n}$  à superfície pela regra da mão direita. Na fig.22.7, mostramos o caminho  $C$  e algumas possíveis superfícies  $S$  apoiadas nele.

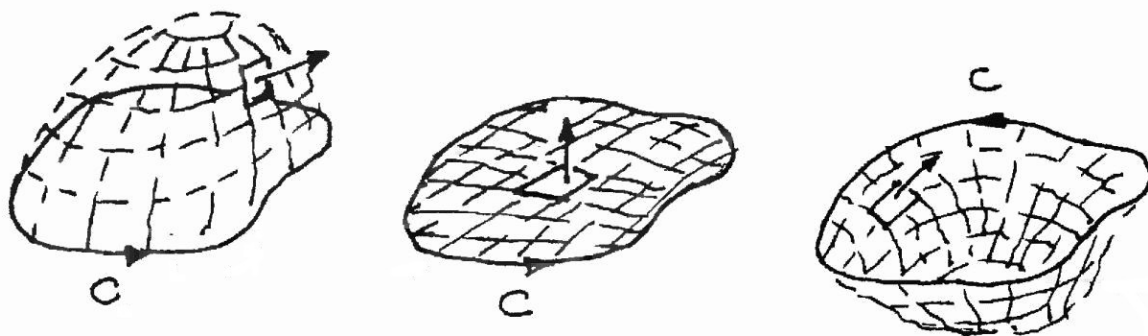


Figura 22.7: Possíveis superfícies  $S$  apoiadas no caminho  $C$ .

O teorema de Stokes é a versão macroscópica da eq.(22.52) e, para demonstrá-lo, dividimos a superfície  $S$  em pedaços elementares  $dS_i$ , cada um deles circundado por um caminho  $C_i$ , e escrevemos

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \cdot \hat{n} dS = \sum_i \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \cdot \hat{n}_i dS_i = \sum_i \oint_{C_i} \vec{\psi} \cdot d\vec{c}. \quad (22.55)$$

Como os trechos de caminho  $C_i$  entre elementos de superfície  $dS_i$  vizinhos se cancelam na soma das circuitações, podemos afirmar que

$$\sum_i \oint_{C_i} \vec{\psi} \cdot d\vec{c} = \oint_C \vec{\psi} \cdot d\vec{c}, \quad (22.56)$$

o que mostra a validade da eq.(22.54).

## • exemplo 4

É dado um campo vetorial  $\vec{\psi} = x^2 \hat{i} + xy \hat{j} + (xz + y^2 + z^2) \hat{k}$  e, para fixar o teorema de Stokes, calculamos explicitamente cada um dos seus membros, usando o caminho  $C$  mostrado na fig.22.8.

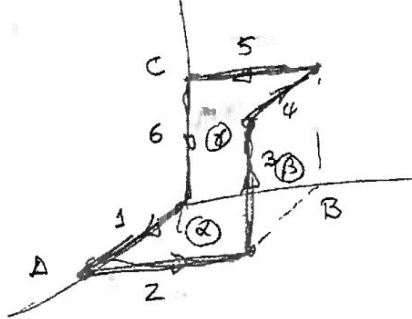


Figura 22.8: O caminho  $C$  e a superfície  $S$  apoiada sobre ele.

A circulação total é dada por

$$\oint_C \vec{\psi} \cdot d\vec{c} = \oint_1 \vec{\psi} \cdot d\vec{c}_1 + \dots + \oint_6 \vec{\psi} \cdot d\vec{c}_6. \quad (22.57)$$

Usando  $d\vec{c}_1 = d\vec{c}_4 = dx \hat{i}$ ,  $d\vec{c}_2 = d\vec{c}_5 = dy \hat{j}$  e  $d\vec{c}_3 = d\vec{c}_6 = dz \hat{k}$ , temos

$$\int_1 \vec{\psi} \cdot d\vec{c}_1 = \int_0^A [x^2 \hat{i} + xy \hat{j} + (xz + y^2 + z^2) \hat{k}] \cdot dx \hat{i} = \int_0^A x^2 dx = \frac{A^3}{3}, \quad (22.58)$$

$$\int_2 \vec{\psi} \cdot d\vec{c}_2 = \int_0^B [x^2 \hat{i} + xy \hat{j} + (xz + y^2 + z^2) \hat{k}] \cdot dy \hat{j} = \int_0^B Ay dy = \frac{AB^2}{3}, \quad (22.59)$$

$$\begin{aligned} \int_3 \vec{\psi} \cdot d\vec{c}_3 &= \int_0^C [x^2 \hat{i} + xy \hat{j} + (xz + y^2 + z^2) \hat{k}] \cdot dz \hat{k} \\ &= \int_0^C [Az + B^2 + z^2] dz = \frac{AC^2}{2} + B^2C + \frac{C^3}{3}, \end{aligned} \quad (22.60)$$

$$\int_4 \vec{\psi} \cdot d\vec{c}_4 = \int_A^0 [x^2 \hat{i} + xy \hat{j} + (xz + y^2 + z^2) \hat{k}] \cdot dx \hat{i} = \int_A^0 x^2 dx = -\frac{A^3}{3}, \quad (22.61)$$

$$\int_5 \vec{\psi} \cdot d\vec{c}_5 = \int_B^0 [x^2 \hat{i} + xy \hat{j} + (xz + y^2 + z^2) \hat{k}] \cdot dy \hat{j} = \int_B^0 [0] y dy = 0, \quad (22.62)$$

$$\begin{aligned} \int_6 \vec{\psi} \cdot d\vec{c}_6 &= \int_C^0 [x^2 \hat{i} + xy \hat{j} + (xz + y^2 + z^2) \hat{k}] \cdot dz \hat{k} \\ &= \int_C^0 [0 + 0 + z^2] dz = -\frac{C^3}{3}, \end{aligned} \quad (22.63)$$

e a circulação total vale

$$\oint \vec{\psi} \cdot d\vec{c} = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} + B^2C. \quad (22.64)$$

O segundo membro da equação depende do rotacional de  $\vec{\psi}$ , que é dado por

$$\vec{\nabla} \times \vec{\psi} = 2y \hat{i} - z \hat{j} + y \hat{k}. \quad (22.65)$$

Dividindo a superfície  $S$  nas três partes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , indicadas na fig.22.8, temos

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \cdot \hat{n} dS = \iint_{\alpha} \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \cdot \hat{n}_{\alpha} dS_{\alpha} + \iint_{\beta} \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \cdot \hat{n}_{\beta} dS_{\beta} + \iint_{\gamma} \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \cdot \hat{n}_{\gamma} dS_{\gamma}. \quad (22.66)$$

Usando  $\hat{n}_{\alpha} = \hat{k}$ ,  $\hat{n}_{\beta} = -\hat{j}$  e  $\hat{n}_{\gamma} = \hat{i}$ , temos

$$\iint_{\alpha} \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \cdot \hat{n}_{\alpha} dS_{\alpha} = \int_0^B dy \int_0^A dx [2y \hat{i} - z \hat{j} + y \hat{k}] \cdot \hat{k} = \int_0^B dy \int_0^A dx y = \frac{AB^2}{2}, \quad (22.67)$$

$$\iint_{\beta} \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \cdot \hat{n}_{\beta} dS_{\beta} = \int_0^C dz \int_0^A dx [2y \hat{i} - z \hat{j} + y \hat{k}] \cdot (-\hat{j}) = \int_0^C dz \int_0^A dx z = \frac{AC^2}{2} \quad (22.68)$$

$$\iint_{\gamma} \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \cdot \hat{n}_{\gamma} dS_{\gamma} = \int_0^C dz \int_0^B dy [2y \hat{i} - z \hat{j} + y \hat{k}] \cdot \hat{i} = \int_0^C dz \int_0^B dy 2y = B^2 C, \quad (22.69)$$

e a integral sobre a superfície  $S$  vale

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \cdot \hat{n} dS = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} + B^2 C, \quad (22.70)$$

resultado idêntico ao dado em (22.64), o que mostra que o teorema de Stokes é satisfeito nesta situação particular.

## • campos conservativos

Na eletrostática, o campo elétrico é conservativo, como discutimos na aula 17, obedecendo a condição

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = 0, \quad (22.71)$$

onde  $C$  é um caminho fechado qualquer. Usando o teorema de Stokes, podemos obter a versão desta condição na forma diferencial, que é dada por

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (22.72)$$

De modo geral, campos conservativos são irrotacionais.

## • exercícios

1. Calcule o divergente e o rotacional do campo vetorial  $\vec{\psi} = A \cos(\kappa y) (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k})$ , onde  $A$  e  $\kappa$  são constantes positivas.

2. Mostre que

a)  $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi}) = 0$ , para qualquer campo vetorial  $\vec{\psi}$ ;

b)  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \chi) = 0$ , para qualquer campo escalar  $\chi$ .

3. mostre que o campo  $\vec{E}$  do exemplo 2 é conservativo.

• respostas

1.  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} = 3 A \cos(\kappa y) - A \sin(\kappa y) y, \quad \vec{\nabla} \times \vec{\psi} = A \sin(\kappa y) (-z \hat{i} + x \hat{k}).$



# Capítulo 23

## resumo da eletrostática - características elétricas dos núcleons

### • introdução

O conhecimento físico assume muitas formas diferentes e envolve fenômenos, resultados experimentais, conceitos, representações matemáticas... Uma parte deste conhecimento é organizada em teorias, que estruturam conceitos de modo significativo. Neste ponto do curso, já abordamos os principais conceitos necessários à descrição de sistemas de cargas em repouso, que podem ser acomodados em uma estrutura teórica conhecida como *eletrostática*. Ela é uma parte relativamente autônoma do eletromagnetismo, que já exhibe algumas das características importantes das teorias.

Os principais conceitos da eletrostática são a carga elétrica  $Q$ , a força de Coulomb  $\vec{F}$ , o campo elétrico  $\vec{E}$ , a energia potencial  $U$  e o potencial  $V$ , que podem ser organizados no mapa mostrado na fig.23.1. A carga é colocada no centro porque os demais conceitos representam manifestações dela.

O passeio pela eletrostática realizado até o momento neste curso pode ser representado no mapa do seguinte modo:

- apresentamos  $Q$ ;
- percorremos o caminho (1), introduzindo a força de Coulomb como uma manifestação empírica da carga;
- percorremos o caminho (5) no sentido  $\vec{F} \rightarrow \vec{E}$ , obtendo o campo a partir da força;
- na discussão da lei de Gauss, percorremos o caminho (2), ressignificando a relação  $Q \leftrightarrow \vec{E}$ ;
- voltamos a  $\vec{F}$ , para percorrer o caminho (6) no sentido de  $U$ ;
- discutimos o caminho (9), que representa uma relação direta entre  $U$  e  $\vec{E}$ ;
- percorremos os caminhos (7) e (8), para estabelecer as relações  $U \rightarrow V$  e  $\vec{E} \rightarrow V$ ;
- apresentamos o operador gradiente, que permite percorrer o caminho (8) no sentido  $V \rightarrow \vec{E}$ ;
- finalmente, com o operador divergente, podemos percorrer o caminho (2) no sentido  $\vec{E} \rightarrow Q$ .

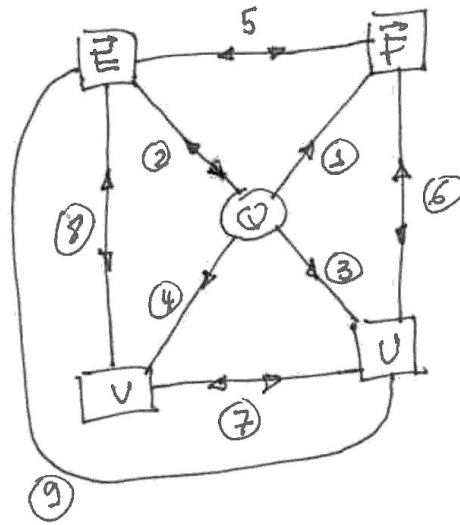


Figura 23.1: Mapa da eletrostática

Este conjunto de passos representa uma abordagem pedagógica, dentre outras possíveis, para permitir o acesso à estrutura da teoria. Uma vez que isto tenha sido conseguido, podemos contemplar a eletrostática à distância e perceber que ela possui uma estrutura espacial, atemporal e estável. Esta estabilidade é dada pela matemática, que sustenta os vários caminhos. Assim, os caminhos (1)-(4) correspondem a expressões que relacionam diretamente  $Q$  a  $\vec{F}$ ,  $\vec{E}$ ,  $U$  e  $V$ , como é o caso, por exemplo, da que descreve a lei de Coulomb. Já os caminhos (5)-(8) envolvem operações reversíveis, que permitem ir e voltar de um atributo a outro. Os caminhos (5) e (7) se baseiam em relações do tipo  $\vec{F} = Q \vec{E}$  e  $U = Q V$ , enquanto que os (6) e (8) envolvem integrais de linha e gradientes. Este tipo de estruturação matemática faz com que a teoria seja auto-consistente e permite que possamos passear por ela à vontade, partindo de um lugar qualquer e chegando a outro, como fazemos em um parque público.

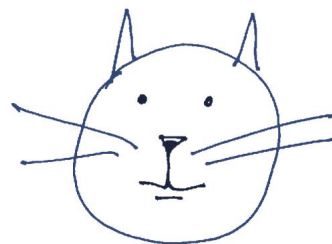


Figura 23.2: A parte e o todo

A matemática possibilita a totalidade lógica da teoria. Para um exemplo simples do que acontece com totalidades, considere a fig.23.2. No lado direito, mostramos uma bolinha preta e podemos nos perguntar o que ela significa. Em princípio, ela pode significar qualquer coisa, ou seja, quase nada. No lado direito, a mesma bolinha é inserida num contexto e, então, ela adquire o significado de olho do gato. Assim, aprendemos que o significado de algo não está

nele mesmo. Ao contrário, este significado é dado pelo contexto no qual este algo se insere, por meio de um diálogo entre o todo e a parte. Ao mesmo tempo, cada parte contribui para o todo e o todo determina o significado das partes. Retire uma bolinha preta do desenho do gato e ele fica estranho. Algo análogo, embora bem mais complexo, acontece com a eletrostática e o seu mapa. O significado físico do símbolo  $Q$  não está nele mesmo...

O fato de a eletrostática poder ser representada por um mapa estável ajuda a reificar a teoria e sugere que ela pode ser pensada como um objeto, tal como uma casa. Olhando apenas para o mapa, as várias manifestações da carga apresentam uma certa simetria, já que podemos partir de qualquer uma delas para chegar às demais pelos caminhos internos da teoria. Por outro lado, uma noção de sequência, de tempo, é introduzida por nós quando pensamos na teoria. Tanto ela como o seu mapa carregam valores psicológicos que tornam as várias manifestações da carga assimétricas para nós. Assim, alguém pode pensar que o campo elétrico é o atributo da carga com maior significado físico. Outra pessoa, entretanto, pode preferir a força de Coulomb. E, no âmbito da física moderna, a tendência é privilegiar a energia  $U$  ...

Nesta aula, discutimos algumas propriedades elétricas de prótons e nêutrons passeando pela eletrostática por caminhos diferentes. Do ponto de vista experimental estas propriedades podem ser conhecidas por meio do espalhamento de elétrons. Neste tipo de experimento, elétrons com diferentes velocidades são atirados sobre alvos formados por prótons ou nêutrons e os seus desvios depois do choque são medidos. Estes dados, complementados por cálculos teóricos, permitem-nos conhecer as distribuições de carga, os campos eletrostáticos e os potenciais associados aos alvos.

## • características elétricas do próton

Neste exemplo estudamos a carga do próton e calculamos o seu campo elétrico (caminho 2), o potencial eletrostático (8), sua auto-energia eletrostática (9), a força que age sobre um elétron próximo a ele (1) e a energia de interação do sistema elétron-próton (6).

### • carga

Medidas feitas com o próton levam à determinação de sua distribuição volumétrica de cargas, que pode ser expressa por

$$\rho_p(r) = e \frac{\Lambda^3}{8\pi} e^{-\Lambda r}, \quad (23.1)$$

onde  $\Lambda = 3,6 \times 10^{15} \text{ m}^{-1}$  é um parâmetro experimental e  $e$  é a carga total. O valor  $1/\Lambda = 0,3 \times 10^{-15} \text{ m}$  indica a ordem de grandeza do tamanho do próton.

A parcela  $q_p(r)$  da carga do próton encerrada numa esfera de raio  $r$  vale

$$\begin{aligned} q_p(r) &= \int_0^r dr' \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r'^2 \operatorname{sen} \theta \rho_p(r') = e \frac{\Lambda^3}{8\pi} 4\pi \int_0^r dr' r'^2 e^{-\Lambda r'} \\ &= e \left[ 1 - \left( 1 + \Lambda r + \frac{\Lambda^2 r^2}{2} \right) e^{-\Lambda r} \right]. \end{aligned} \quad (23.2)$$

Os valores de  $q_p$  em função da distância  $r$  ao centro do próton são dados na tabela abaixo. Somente quando  $r \rightarrow \infty$ , obtemos  $q_p = e$ , a carga total do próton.

$r$ ( $10^{-15}$ m)	0,1	0,5	1,0	2,0	3,0	$\infty$
$q_p$	0,006 $e$	0,271 $e$	0,698 $e$	0,976 $e$	0,999 $e$	$e$

Tabela 23.1: Quantidade de carga positiva na esfera de raio  $r$  em torno do próton.

### • campo elétrico

Na eletrostática, podemos sempre determinar o campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas a partir da lei de Coulomb. Nos casos em que há simetria esférica, podemos também utilizar a lei de Gauss e, então, os cálculos ficam mais simples. Neste problema, adotamos o segundo procedimento.

Escolhendo uma superfície gaussiana esférica, de raio  $r$  e usando o resultado do item anterior, a lei de Gauss permite-nos escrever

$$\begin{aligned} \oiint \vec{E}_p \cdot \hat{n} dS &= \oiint E_p dS = 4\pi r^2 E_p \\ &= \frac{q_p(r)}{\epsilon_0} = \frac{e}{\epsilon_0} \left[ 1 - \left( 1 + \Lambda r + \frac{\Lambda^2 r^2}{2} \right) e^{-\Lambda r} \right]. \end{aligned} \quad (23.3)$$

Portanto, o vetor campo elétrico num ponto que dista  $r$  do centro do próton é dado por

$$\vec{E}_p(r) = \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \frac{[1 - (1 + \Lambda r + \Lambda^2 r^2/2) e^{-\Lambda r}]}{r^2} \hat{r}. \quad (23.4)$$

O valor deste campo no limite  $r \rightarrow 0$  pode ser obtido a partir da expansão em série da exponencial, que é dada por

$$e^{-\Lambda r} = 1 - \Lambda r + \frac{\Lambda^2 r^2}{2} - \frac{\Lambda^3 r^3}{6} + \dots \quad (23.5)$$

válida para  $\Lambda r \ll 1$ . Assim, obtemos

$$\vec{E}_p(r \rightarrow 0) \simeq \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \frac{[1 - (1 + \Lambda r + \Lambda^2 r^2/2) (1 - \Lambda r + \Lambda^2 r^2/2 + \dots)]}{r^2} \hat{r} \rightarrow 0. \quad (23.6)$$

Este resultado é compatível com a simetria esférica da distribuição de carga, pois ela impede que o campo elétrico tenha uma direção no ponto  $r = 0$ . Ele mostra que o fato de a carga estar distribuída no espaço suaviza o campo a pequenas distâncias. Para valores de  $r$  grandes, tais que  $\Lambda r > 10$ , a exponencial fica muito pequena e o campo tende ao valor coulombiano.

### • potencial

Como  $\vec{E}_p$  é conservativo, existe um potencial eletrostático dado por

$$V_p(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E}_p \cdot d\vec{c}. \quad (23.7)$$

Usando o resultado (23.4) e um caminho radial, para o qual  $d\vec{c} = dr' \hat{r}$ , temos

$$V_p(r) = - \int_{\infty}^r dr' \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \frac{[1 - (1 + \Lambda r' + \Lambda^2 r'^2/2) e^{-\Lambda r'}]}{r'^2}. \quad (23.8)$$

Para efetuar a integração, notamos que

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{e^{-\Lambda r}}{r} \right) = - \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\Lambda}{r} \right) e^{-\Lambda r}. \quad (23.9)$$

e escrevemos

$$V_p(r) = - \int_{\infty}^r dr' \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{1}{r'^2} + \frac{d}{dr'} \left( \frac{e^{-\Lambda r'}}{r'} \right) - \frac{\Lambda^2}{2} e^{-\Lambda r'} \right]. \quad (23.10)$$

Assim, o potencial eletrostático num ponto que dista  $r$  do centro do próton é dado por

$$V_p(r) = \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \frac{[1 - (1 + \Lambda r/2) e^{-\Lambda r}]}{r}. \quad (23.11)$$

Na origem, a eq.(23.5) fornece

$$V_p(r \rightarrow 0) \simeq \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \frac{[1 - (1 + \Lambda r/2) (1 - \Lambda r + \dots)]}{r} = \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \frac{\Lambda}{2}, \quad (23.12)$$

enquanto que, para valores grandes de  $r$ ,  $V_p$  tende ao potencial coulombiano.

### • auto-energia

A auto energia eletrostática do próton é dada por

$$U_p = \iiint_V \left[ \frac{\epsilon_0}{2} E_p^2 \right] dV = \int_0^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta \left[ \frac{\epsilon_0}{2} E_p^2 \right] = \frac{4\pi \epsilon_0}{2} \int_0^{\infty} dr r^2 E_p^2. \quad (23.13)$$

Esta expressão pode ser calculada usando o valor de  $\vec{E}_p$  dado pela eq.(23.4) e efetuando a integração com força bruta. Entretanto, este procedimento requer o cálculo de integrais bastante

complicadas. Por isso, neste tipo de problema costuma-se recorrer a uma alternativa que, apesar de menos óbvia, requer menos esforço. Lembrando que campo elétrico relaciona-se ao potencial por  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ , utilizando o fato que o potencial dado pela eq.(23.11) depende apenas de  $r$  e empregando a regra da cadeia, temos

$$\vec{E}_p = - \left[ \frac{\partial V_p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V_p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V_p}{\partial z} \hat{k} \right] = - \frac{\partial V_p}{\partial r} \left[ \frac{\partial r}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \hat{k} \right] = - \frac{\partial V_p}{\partial r} \hat{r}. \quad (23.14)$$

Isto permite expressar a auto energia de modo híbrido como

$$U_p = \frac{4\pi \epsilon_0}{2} \int_0^\infty dr [r^2 E_p(r)] \left[ \frac{dV_p(r)}{dr} \right]. \quad (23.15)$$

A partir da eq.(23.3), obtemos  $[r^2 E_p(r)] = q_p(r)/(4\pi \epsilon_0)$  e, portanto,

$$U_p = \frac{1}{2} \int_0^\infty dr q_p(r) \left[ \frac{dV_p(r)}{dr} \right]. \quad (23.16)$$

Integrando por partes, encontramos

$$U_p = \frac{1}{2} \left[ q_p(r) V_p(r) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dr \frac{dq_p(r)}{dr} V_p(r) \right]. \quad (23.17)$$

Usando as eqs.(23.2) e (23.11), concluímos que o primeiro termo se anula tanto na origem como no infinito e, por isso, não contribui. Para calcular o segundo termo, notamos que

$$\frac{dq_p(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho_p(r) \quad (23.18)$$

e obtemos

$$U_p = \frac{4\pi}{2} \int_0^\infty dr r^2 \rho_p(r) V_p(r). \quad (23.19)$$

Apesar de obtido em um contexto particular, este é um resultado geral e importante. Usando as eqs.(23.1) e (23.11), juntamente com as integrais do apêndice XXX, temos

$$\begin{aligned} U_p &= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \left[ e \frac{\Lambda^3}{8\pi} e^{-\Lambda r} \right] \left[ \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \frac{[1 - (1 + \Lambda r/2) e^{-\Lambda r}]}{r} \right] \\ &= \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{\Lambda^3}{4} \int_0^\infty dr \left[ r e^{-\Lambda r} - \left( r + \frac{\Lambda r^2}{2} \right) e^{-2\Lambda r} \right] \\ &= \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{5\Lambda}{32}. \end{aligned} \quad (23.20)$$

Usando os valores de  $\Lambda$  e das constantes dadas no apêndice A, obtemos  $U_p = 1,297 \times 10^{-13}$  J. É interessante comparar este valor com a energia de repouso do próton, que é dada por  $m_p c^2 = 1,493 \times 10^{-10}$  J. Assim, o cálculo mostra que  $U_p/m_p c^2 \approx 1/1000$ , indicando que cerca de um milésimo da massa do próton é devida à sua auto energia eletrostática. É importante notar que, apesar de o nosso cálculo ter sido feito no contexto da física clássica, ele fornece a ordem de grandeza correta dos resultados. Um estudo mais preciso requer o uso da teoria quântica de

campos.

### • força elétron-próton

Quando um elétron está na presença de um próton, à distância  $r$  do seu centro, sobre ele age uma força atrativa, dada por

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{[1 - (1 + \Lambda r + \Lambda^2 r^2/2) e^{-\Lambda r}]}{r^2} \hat{r} \quad (23.21)$$

Esta expressão leva em conta o fato de a carga do próton estar distribuída por uma certa região. Se o próton fosse puntiforme, o elétron sentiria uma força dada por

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}. \quad (23.22)$$

O fator proporcional a  $e^{-\Lambda r}$  está associado ao tamanho do próton e, por isso, quando  $\Lambda r \approx 1$ , esse tamanho é importante. Já quando  $\Lambda r \gg 1$ , o próton pode ser considerado como sendo puntiforme. Nas proximidades do centro do próton, quando  $\Lambda r \ll 1$ , a exponencial pode ser expandida em série e obtemos

$$\begin{aligned} \vec{F} &\simeq -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{[1 - (1 + \Lambda r + \Lambda^2 r^2/2) (1 - \Lambda r + \Lambda^2 r^2/2 - \Lambda^3 r^3/6)]}{r^2} \hat{r} \\ &\simeq -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Lambda^3 r}{6} \hat{r}. \end{aligned} \quad (23.23)$$

Ou seja, para valores pequenos de  $r$ , a força sobre o elétron tende linearmente a zero.

### • energia potencial do sistema elétron-próton

Quando um elétron e um próton estão separados por uma distância  $r$ , o sistema tem uma energia potencial dada por

$$U_{\text{int}}(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{[1 - (1 + \Lambda r/2) e^{-\Lambda r}]}{r}. \quad (23.24)$$

Nesta expressão, o fato de o próton não ser puntiforme está associado ao fator  $(1 + \Lambda r/2)e^{-\Lambda r}$ , que é importante para distâncias pequenas. Na origem, a energia potencial pode ser calculada a partir do resultado (23.12) e obtemos

$$U_{\text{int}}(r \approx 0) \simeq -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Lambda}{2} \quad (23.25)$$

Este resultado deve ser comparado com o caso de duas partículas puntiformes, onde  $U(r \approx 0) \rightarrow \infty$ . Assim, podemos perceber que o fato de a carga do próton ser distribuída amacia a

energia potencial do sistema na origem, tornando-a finita. Quanto mais distribuída for a carga do próton, mais suave é a interação na origem.

### • características elétricas do nêutron

Neste exemplo, seguimos caminhos diferentes dos do caso do próton. A partir do potencial  $V_n$ , calculamos o campo elétrico  $\vec{E}_n$  seguindo o caminho (8) do mapa e, depois, determinamos sua distribuição de cargas  $\rho_n$  pelo caminho (2). Calculamos, também, a força entre um elétron e um nêutron.

As características elétricas do nêutron são difíceis de serem observadas e, são bem menos conhecidas que as dos prótons. Por isso, limitamo-nos a um modelo qualitativo, no qual o potencial eletrostático do nêutron num ponto que dista  $r$  do seu centro é simulado pela função

$$V_n(r) = \frac{e\Lambda}{4\pi\epsilon_0} (1 + \Lambda r) e^{-\Lambda r}, \quad (23.26)$$

onde  $e$  e  $\Lambda$  são os mesmos que no caso do próton.

### • campo elétrico

O campo elétrico do nêutron é obtido a partir do gradiente do potencial

$$\vec{E}_n(r) = -\vec{\nabla}V_n = -\left[\frac{\partial V_n}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V_n}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V_n}{\partial z}\hat{k}\right] = \frac{e\Lambda^3}{4\pi\epsilon_0} e^{-\Lambda r} \vec{r}. \quad (23.27)$$

Como se espera em um problema com simetria esférica, o campo é nulo no ponto  $r = 0$ . O fato de carga total do nêutron ser nula faz com que, para valores grandes de  $r$ ,  $\vec{E}_n$  tenda a zero mais rapidamente do que o campo coulombiano.

### • densidade de carga

A densidade de carga é obtida usando a lei de Gauss na forma diferencial,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ . No cálculo do divergente, usamos

$$\frac{\partial E_{nx}}{\partial x} = -\frac{e\Lambda^3}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} (e^{-\Lambda r} x) = \frac{e\Lambda^3}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{\Lambda x^2}{r}\right) e^{-\Lambda r} \quad (23.28)$$

Empregando as expressões equivalentes para  $y$  e  $z$ , obtemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_n = \frac{e\Lambda^3}{4\pi\epsilon_0} (3 - \Lambda r) e^{-\Lambda r} \quad (23.29)$$

Concluimos, portanto, que a carga elétrica é distribuída no interior do nêutron segundo a equação

$$\rho_n(r) = \frac{e\Lambda^3}{4\pi} (3 - \Lambda r) e^{-\Lambda r} \quad (23.30)$$



Esta densidade se anula para  $r = r_0 = 3/\Lambda \approx 0,9 \times 10^{-15}$  m, sendo positiva para  $r < r_0$  e negativa para  $r > r_0$ . Neste modelo, a imagem do nêutron corresponde a uma região de carga positiva envolta por outra, de carga negativa.

### • carga

A carga total contida no interior de uma esfera de raio  $r$  é dada por

$$\begin{aligned} q_n(r) &= 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho_n(r') = e \Lambda^3 \int_0^r dr' r'^2 (3 - \Lambda r') e^{-\Lambda r'} \\ &= e \Lambda^3 r^3 e^{-\Lambda r} , \end{aligned} \quad (23.31)$$

usando as integrais do apêndice XXXX. Alternativamente, poderíamos ter obtido o mesmo resultado usando a lei de Gauss escrita como

$$q_n(r) = \frac{4\pi r^2}{\epsilon_0} E_n . \quad (23.32)$$

Assim, neste modelo, a carga total no interior de uma esfera de raio  $r$  é sempre positiva, tornando-se cada vez menor à medida em que esse raio aumenta. No limite  $r \rightarrow \infty$ , obtemos  $q_n = 0$ .

### • força elétron-nêutron

Neste modelo, a força elétron-nêutron é atrativa e, para uma separação  $r$  entre as duas partículas, vale

$$\vec{F}(r) = -\frac{e^2 \Lambda^3}{4\pi \epsilon_0} e^{-\Lambda r} \vec{r} . \quad (23.33)$$

Esta força tem alcance extremamente pequeno, devido ao fator exponencial, e só é efetiva a distâncias menores que  $10^{-15}$  m.

### • exercícios

1. Faça os gráficos para as funções  $\rho_p(r)$ ,  $\rho_n(r)$ ,  $q_p(r)$  e  $q_n(r)$ , dadas nas eqs.(23.1), (23.2), (23.2) e (23.33), em função de  $r$  e os interprete.
2. Coloque, num mesmo gráfico, as curvas representando as intensidades dos campos elétricos do próton, eq.(23.4) e de uma partícula puntiforme com a mesma carga. A partir de qual distância as diferenças entre os dois casos tornam-se importantes?
3. Mostre que, em pontos muito próximos da origem, o módulo do campo elétrico do próton,

eq.(4), tende a zero. Sugestão: para pequenas distâncias, pode-se expandir a exponencial em série de Taylor.

4. Mostre, num mesmo gráfico, as curvas representando a energia potencial do sistema elétron-próton, para os casos em que a carga do próton é distribuída, como na eq.(23.1), e toda concentrada num ponto.
5. Mostre que as expressões do campo elétrico e do potencial do próton reduzem-se ao caso puntiforme no limite de distâncias muito grandes.
6. Com que velocidade  $v$  um elétron deve ser atirado, a partir do infinito, para que ele possa passar pelo centro de um nêutron?
7. Uma esfera de raio  $R$  está carregada com uma densidade de carga volumétrica  $\rho = \rho_0 (1 - \alpha r/R)$ , com  $\rho_0$  e  $\alpha$  constantes positivas. Determine
  - a) a carga total  $q$  da esfera;
  - b) o campo elétrico em todos os pontos do espaço;
  - c) o potencial eletrostático em todos os pontos do espaço.
8. O potencial eletrostático de uma esfera carregada de raio  $R$  é dado por

$$V(r \leq R) = \frac{\rho_0 R^2}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} \right) - \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{r^2}{6} - \frac{\alpha r^3}{12R} \right),$$

$$V(r \geq R) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right) \frac{1}{r}.$$

Determine:

- a) o campo elétrico em todos os pontos do espaço;
- b) a densidade de cargas na esfera;
- c) a auto-energia da esfera.

## • respostas

6.  $v > \sqrt{\frac{e\Lambda}{2\pi\epsilon_0 m}}$ .
7. a)  $q = 4\pi\rho_0 \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right) R^3$ ;
- b)  $\vec{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{r}{3} - \frac{\alpha r^2}{4R} \right) \hat{r}$ , para  $r \leq R$ ;  $\vec{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right) \frac{\hat{r}}{r^2}$ , para  $r \geq R$ ;
- c)  $V = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left[ R^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} \right) - \left( \frac{r^2}{6} - \frac{\alpha r^3}{12R} \right) \right]$ , para  $r \leq R$ ;  $V = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right) \frac{1}{r}$ , para  $r \geq R$ .
8. a)  $\vec{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{r}{3} - \frac{\alpha r^2}{4R} \right) \hat{r}$ , para  $r \leq R$ ;  $\vec{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right) \frac{\hat{r}}{r^2}$ , para  $r \geq R$ ;
- b)  $\rho = \rho_0 (1 - \alpha r/R)$ ;
- c)  $U = \frac{2\pi\rho_0^2 R^5}{\epsilon_0} \left( \frac{6}{45} - \frac{7\alpha}{36} + \frac{8\alpha^2}{112} \right)$ .

# Capítulo 24

## corrente elétrica e equação da continuidade

### • introdução

Na eletrostática, consideramos apenas sistemas constituídos por cargas elétricas em repouso. Passamos, agora, a considerar também os efeitos devidos aos movimentos das cargas. O principal deles é a produção de campos magnéticos, descrita pela lei de Ampère-Maxwell, que é tratada em detalhe posteriormente. Antes de estudar os mecanismos de produção desses campos, discutimos como descrever os próprios movimentos das cargas.

A carga elétrica não é, ela mesma, um ente material mas, sim, uma característica de corpos materiais. Como vimos na aula 7, mesmo uma partícula pequena como um elétron *não é* uma carga elétrica, ele *possui* carga elétrica. Corpúsculos que possuem carga elétrica costumam ser chamados de *portadores de carga*. Na natureza são encontrados os mais variados portadores de carga, tais como elétrons, quarks, prótons, pósitrons, núcleos atômicos, íons e muitas outras partículas ou sistemas de partículas.

Os portadores de carga podem se mover de muitas formas diferentes. Em alguns casos seus movimentos podem ser considerados uniformes e, em uma infinidade de outros, acelerações são importantes. Como exemplo de portadores em movimento uniforme, temos os raios cósmicos, constituídos por prótons e outras partículas que se movem no espaço interestelar. Os movimentos acelerados são os mais comuns, podendo ser encontrados no interior dos átomos, das moléculas, e em todos os tipos de materiais. Elétrons em movimento no interior de átomos produzem efeitos importantes e o mesmo acontece com quarks em movimento no interior de prótons e nêutrons.

No estudo de partículas elementares, átomos ou moléculas, há poucos corpos envolvidos e o movimento de cada um deles pode ser considerado em detalhe, isoladamente. Em outras situações, entretanto, existe um número muito grande de partículas carregadas, cujo movimento precisa ser tratado coletivamente. É isso o que ocorre, por exemplo, no interior dos fios elétricos das nossas casas.

De modo geral, no eletromagnetismo, as velocidades e as quantidades de carga de um dado conjunto de portadores são mais importantes do que outras características, tais como massas ou tamanhos. Por isso, os efeitos eletromagnéticos são atribuídos diretamente aos movimentos das cargas, que costumam ser caracterizados por duas grandezas relacionadas entre si, a *corrente elétrica* e a *densidade de corrente elétrica*, apresentadas a seguir.

### • antes e depois das correntes

Atualmente, a importância das correntes elétricas no eletromagnetismo é amplamente aceita, mesmo por pessoas sem formação em ciência. Entretanto, a situação era completamente diversa antes de 1800 porque, até então, não se conheciam os meios técnicos para produzir correntes elétricas que durassem tempos longos e, conseqüentemente, que pudessem ser observadas e estudadas. Na eletrostática, os processos de transportes de cargas que ocorrem quando corpos são carregados ou descarregados são irregulares, bruscos, muito rápidos e as correntes associadas a eles não se prestam a ser estudadas em detalhes.

A primeira fonte de correntes estáveis foi produzida pelo físico italiano Alessandro Volta em 1800, empregando pilhas químicas, as ancestrais das que usamos hoje cotidianamente. A sua descoberta foi muito importante porque abriu as portas para pesquisas em laboratórios sobre os efeitos dessas correntes, que levaram à construção da teoria eletromagnética no século 19.

### • corrente elétrica

Existem inúmeras situações onde grandes quantidades de portadores de carga se deslocam através de uma região do espaço. Isto acontece, por exemplo, quando as extremidades de um fio metálico são ligadas a uma bateria e, no interior do fio passa a existir um fluxo de elétrons, do polo negativo em direção ao positivo. No interior de uma lâmpada fluorescente acesa, existem fluxos de elétrons e de íons positivos. No interior do Sol, devido às altas temperaturas e à sua rotação, elétrons, prótons e outros núcleos leves, portadores de carga positiva, estão em movimento contínuo. No interior da Terra também existem cargas em movimento, como evidencia o seu campo magnético, que deflete as bússolas.

Antes de tratar situações concretas, tais como as que envolvem elétrons no interior de metais, discutimos o modo de caracterizar coletivamente os movimentos de muitos portadores de carga numa região do espaço. A ideia básica consiste em tomar uma superfície matemática de referência  $S$  e contar a quantidade de carga que passa através dela em uma unidade de tempo. Tal situação está ilustrada na fig.24.1. A *corrente elétrica*  $I$  que passa através dessa superfície é definida como

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad (24.1)$$

onde  $dQ$  é a quantidade de carga que atravessa a superfície aberta  $S$  no intervalo de tempo  $dt$ . No SI, a unidade de corrente elétrica é o Ampère, representada por  $A$  e relacionada à unidade de carga por:  $1A = 1C/1s$ . A expressão para a corrente é bastante simples, mas requer alguma

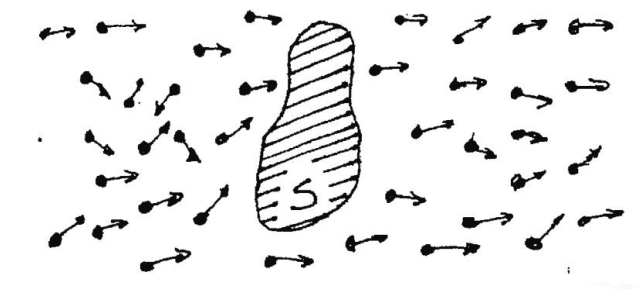


Figura 24.1: Os pontos escuros representam cargas elétricas e as flechas, as direções de suas velocidades.; à medida que o tempo passa, algumas dessas cargas atravessam a superfície matemática aberta  $S$ .

atenção. Correntes elétricas definidas deste modo podem ser tanto positivas como negativas, pois a quantidade  $dQ$  depende do sinal das cargas dos portadores e, também, do sentido do seu movimento. Além disso, é importante ressaltar que a eq.(24.1) *não* representa uma derivada da carga em relação ao tempo. A ideia de derivada pressupõe uma função  $Q(t)$ , que não tem significado claro quando  $S$  é uma superfície aberta. Esta é uma questão sutil, que deve ficar mais clara ao longo do curso.

## • densidade de corrente elétrica

Em muitos casos, a noção de corrente elétrica é suficiente para descrever os movimentos de cargas no interior de sistemas de geometria simples, tais como fios elétricos com seção transversal constante. Em outras situações, entretanto, ela mostra-se limitada. Por exemplo, como seria possível representar detalhadamente os deslocamentos de cargas no interior do Sol, que são bastante complexos, apenas por meio da grandeza  $I$ ?

A corrente elétrica  $I$  é uma grandeza escalar e, portanto, não pode conter informações detalhadas acerca das direções e sentidos dos deslocamentos dos portadores de carga. Por esse motivo, é conveniente caracterizar os movimentos de portadores de carga por meio do *vetor densidade de corrente elétrica*, geralmente representado por  $\vec{j}$ . Por construção, a densidade de corrente numa região do espaço está relacionada à corrente elétrica  $I$  através de uma superfície  $S$  por

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \hat{n} \, dS, \quad (24.2)$$

onde  $\hat{n}$  é o versor normal ao elemento de superfície  $dS$ . Em outras palavras, a corrente elétrica através da superfície  $S$  é o fluxo da densidade de corrente sobre esta superfície.

## • densidade de corrente e velocidade

O vetor densidade de corrente  $\vec{j}$  é um instrumento eficaz para descrever os movimentos coleti-

vos de muitos portadores de cargas, porque ele está diretamente relacionado às suas velocidades. O procedimento utilizado para estabelecer esta relação é o mesmo usado em muitas outras situações físicas, envolvendo gases, líquidos ou outros grupos de corpos em movimento.

Consideramos, inicialmente, um conjunto com muitas partículas idênticas carregadas, que se move numa região do espaço vazio. Esta situação é análoga a um enxame de abelhas que voa num campo aberto. Imagine que haja interesse em saber quantas abelhas passam, durante um intervalo de tempo  $dt$ , através de uma superfície matemática de área  $dS$ , colocada perpendicularmente ao movimento delas. É intuitivo que, para abelhas com velocidades iguais, um enxame mais denso corresponde a um fluxo maior de abelhas por unidade de tempo através de  $dS$  do que um outro, menos denso. Por isso, é preciso caracterizar a *densidade volumétrica* de abelhas em movimento. Em geral, esta densidade é representada pelo símbolo  $N$  e costumamos dizer que existem  $N$  abelhas por unidade de volume em um dado enxame.

É importante notar que  $N$  é uma *densidade volumétrica* e não, um número. No caso do enxame, se conhecermos  $N$  e se supusermos que todas as abelhas têm a mesma velocidade  $\vec{v}$ , podemos calcular o fluxo usando o cilindro matemático da fig.24.2. Para isto, basta notar que as abelhas que atravessam a superfície  $dS$  dentro de um intervalo de tempo  $dt$  são aquelas contidas no interior do volume  $dV = (v dt dS)$ . As demais abelhas ou passam por fora da superfície  $dS$ , ou não têm tempo de chegar até ela durante o intervalo  $dt$ . Por isso, o número de abelhas que atravessa  $dS$  durante o tempo  $dt$  é dado por  $N dV = N v dt dS$ ; e o *número por unidade de tempo* é igual a  $N v dS$ .

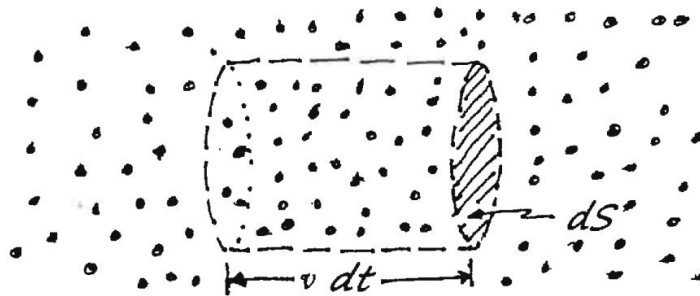


Figura 24.2: Cada ponto representa uma abelha que se move com velocidade  $v$  para a direita; apenas as abelhas que estão no interior do cilindro de base  $dS$  e comprimento  $v dt$  atravessam a superfície  $dS$  dentro do tempo  $dt$ .

Voltando ao caso das cargas elétricas, para determinar a relação entre a densidade de corrente e a velocidade dos portadores, consideramos um conjunto de partículas com densidade volumétrica  $N$  que se move numa região do espaço, todas com a mesma carga  $q$  e supomos que todas tenham a mesma velocidade  $\vec{v}$ . Usando novamente a fig.24.2, podemos concluir que o número de cargas que atravessa a superfície  $dS$  por unidade tempo é  $N v dS$ , o que corresponde a uma *corrente*  $dI = q N v dS$  e a uma *densidade de corrente* de intensidade  $j = dI/dS = q N v$ . A partir desses resultados construímos o *vetor da densidade de corrente* escrevendo

$$\vec{j} = q N \vec{v}. \quad (24.3)$$

Esta expressão corresponde ao caso em que todos os portadores de carga têm a mesma velocidade  $\vec{v}$ . Em situações reais, é difícil que isso aconteça e o mais comum é que os portadores tenham

velocidades distribuídas em intervalos. Quando isso acontece, a expressão para a densidade de corrente passa a ser uma soma das contribuições de várias velocidades  $\vec{v}_k$ , dada por

$$\vec{j} = q \sum_k N_k \vec{v}_k, \quad (24.4)$$

onde  $N_k$  é a densidade volumétrica de partículas com velocidade  $\vec{v}_k$ . Notando que a velocidade média do conjunto de  $N$  partículas por unidade de volume é definida por

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\sum_k N_k \vec{v}_k}{N}, \quad (24.5)$$

podemos reescrever a eq.(24.3) para o caso geral de portadores com diferentes velocidades como

$$\vec{j} = q N \langle \vec{v} \rangle. \quad (24.6)$$

No caso em que existem diferentes tipos de portadores de carga em uma mesma região do espaço, tal como acontece em um plasma, esse resultado pode ser novamente generalizado. Supondo que a carga, a densidade volumétrica e a velocidade média de um portador de tipo  $k$  sejam, respectivamente,  $q_k$ ,  $N_k$  e  $\langle \vec{v}_k \rangle$ , podemos escrever

$$\vec{j} = \sum_k \vec{j}_k = \sum_k q_k N_k \langle \vec{v}_k \rangle, \quad (24.7)$$

onde a soma é feita sobre todos os diferentes tipos de portadores de carga.

De modo geral, o vetor  $\vec{j}$  descreve muito melhor as minúcias do transporte de cargas de um sistema do que a corrente global  $I$ , já que ele indica, além da intensidade, as direções e sentidos desse transporte, bem como a sua distribuição espacial.

## • correntes no vácuo e em metais

Correntes no vácuo e em metais são bastante diferentes. No vácuo, elas consistem em movimentos de cargas continuamente aceleradas como ocorre, por exemplo, nos aceleradores de partículas. Já nos metais, os movimentos de cargas envolvem colisões e efeitos térmicos. Metais são formados por íons positivos, organizados em redes cristalinas bastante estáveis e elétrons livres, que se movem entre esses íons. Quando você segura um prego, você está, de fato, segurando a sua rede cristalina. Se você entorta o prego, você está deformando a sua rede cristalina. Visto nesta perspectiva, um metal não é propriamente uma substância. Metal é apenas o nome dado a um certo tipo de estrutura, envolvendo íons e elétrons livres. Os íons ocupam cerca de 15% do volume do metal e, devido à temperatura, oscilam em torno de suas posições de equilíbrio. Já os elétrons livres se movem com velocidades típicas da ordem de 100 km/s e se chocam continuamente entre si e com os íons. Nestas interações os elétrons, que são muito mais leves do que os íons, sofrem grandes desvios. Isto faz com que a velocidade  $\vec{u}_i$  de um dado elétron mude continuamente. Como este tipo de processo ocorre com todos os elétrons livres, os efeitos estatísticos são muito importantes.

Em um metal isolado, o número de elétrons livres que se movem segundo uma dada direção é, em média, igual ao número de elétrons que se movem na direção oposta. Por este motivo, em

média,

$$\sum_i N_i \vec{u}_i = 0, \quad (24.8)$$

onde  $N_i$  é a densidade volumétrica de elétrons com velocidade  $\vec{u}_i$ . Quando há uma corrente em um condutor, é porque algum campo elétrico externo  $\vec{E}$  produziu um movimento coletivo por meio de uma força  $\vec{f}_i = -e\vec{E}$ , que age em cada elétron, fazendo com que a sua velocidade passe a ter uma nova componente  $\vec{v}_i$  paralela a esta força. Na literatura, esta nova velocidade é conhecida como *velocidade de arrasto*, *velocidade de arrastamento* ou *velocidade de deriva*. Deste modo, na presença do campo, cada elétron passa a ter velocidade  $\vec{u}_i + \vec{v}_i$ .

A velocidade de arrasto dá origem a um movimento coletivo de cargas na direção da força elétrica e, conseqüentemente, a uma densidade de corrente que, em princípio, tem a forma

$$\begin{aligned} \vec{j} &= -e \sum_i N_i (\vec{u}_i + \vec{v}_i) \\ &= -e \sum_i N_i \vec{v}_i, \end{aligned} \quad (24.9)$$

usando a eq.(24.8). Em termos da velocidade de arrasto média  $\langle \vec{v} \rangle = \sum_i N_i \vec{v}_i / N$ , escrevemos

$$\vec{j} = -e N \langle \vec{v} \rangle. \quad (24.10)$$

Este resultado é formalmente igual ao dado em (24.6). Entretanto é preciso lembrar que, no caso de correntes no vácuo,  $\langle \vec{v} \rangle$  representa a velocidade média dos portadores de carga enquanto que, nos metais, o mesmo símbolo  $\langle \vec{v} \rangle$  corresponde à velocidade média de arrasto. Neste curso, a bem da simplicidade da notação, representamos os dois casos empregando  $\vec{v}$  em lugar de  $\langle \vec{v} \rangle$ . Assim, usamos

$$\vec{j} = q N \vec{v}. \quad (24.11)$$

## • exemplo 1

Aqui, estimamos a velocidade média de arrasto  $\vec{v}$  dos elétrons em um condutor metálico doméstico quando ele é percorrido por uma corrente elétrica. As correntes elétricas nas nossas casas são alternadas e descritas por funções do tipo  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ , onde  $\omega$  é a frequência de oscilação. Como esta frequência é baixa e estamos interessados apenas em aspectos qualitativos do problema, tratamos esta corrente como se ela fosse contínua. Como discutimos no volume 2, as incertezas associadas a esta aproximação são menores do que um fator 2.

Se você inspecionar os disjuntores de uma residência, pode ver que eles são construídos para cortar correntes quando elas atingem 30A ou mais. Assim, correntes da ordem de 1A são comuns em residências. Por exemplo, a relação  $P = VI$  entre a potência dissipada  $P$ , a tensão  $V$  e a corrente  $I$  ensina que a corrente que percorre uma lâmpada de 100 W, sujeita a uma tensão de 110 V, é de cerca de 0,9 A. Esta é, também, a corrente que passa pelo fio que liga a lâmpada a



uma tomada de 110 V. Supondo que esse fio tenha uma seção transversal  $S = 1 \text{ mm}^2$ , o módulo da densidade de corrente no interior do fio é dado por  $j = I/S = 0,9 \times 10^6 \text{ A/m}^2$ .

Para determinar a velocidade de arrasto média  $\vec{v}$  dos elétrons no interior do fio, usamos o valor do módulo da carga do elétron dado no apêndice XXX e a informação empírica que a densidade típica de elétrons livres por unidade de volume em um condutor metálico é  $N \sim 2,5 \times 10^{28} \text{ elétrons/m}^3$ . Assim, a eq.(24.11) fornece  $v \sim 2 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ . Esta velocidade corresponde a  $v \sim 12 \text{ mm/min} = 72 \text{ cm/h}$ . Ou seja, se a corrente fosse contínua e se a lâmpada estivesse ligada à tomada por um fio de cerca de 2 m de comprimento, um elétron levaria, em média, 3 horas para ir da tomada até a lâmpada.

Aqui fica uma pergunta muito interessante: como os resultados anteriores podem ser compatíveis com o fato de a luz da lâmpada acender quase instantaneamente quando ela é ligada à tomada? A resposta, maravilhosa, é esboçada nas próximas aulas.

## • equação da continuidade

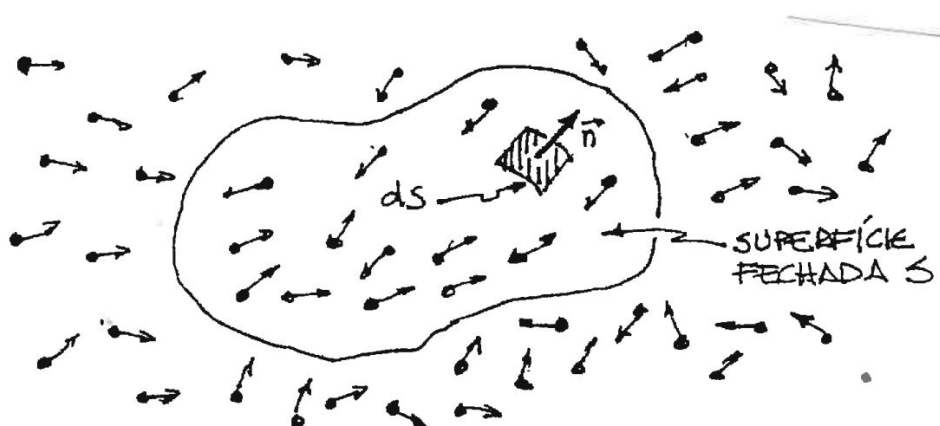


Figura 24.3: Os pontos escuros representam cargas elétricas e as flechas, as suas velocidades; à medida que o tempo passa, algumas dessas cargas entram na superfície matemática  $S$ , outras saem dela, ocasionando uma variação da carga total contida no seu interior.

Uma das características mais importantes da carga elétrica é ela ser conservada. Essa conservação dá origem a uma relação muito importante entre as densidades de corrente  $\vec{j}$  e de carga  $\rho$ , conhecida como *equação da continuidade*. A ideia subjacente a essa equação é simples. Consideremos uma superfície matemática *fechada*  $S$ , qualquer. Como a carga elétrica não pode ser criada nem destruída, se houver variação da quantidade total  $q_{\text{int}}$  de carga no interior dessa superfície, é porque houve um trânsito equivalente de carga elétrica através da superfície. Como a esse trânsito é associado a uma corrente elétrica, para a superfície fechada  $S$  mostrada na fig.24.3 podemos escrever

$$\oiint_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS = - \frac{dq_{\text{int}}}{dt}, \quad (24.12)$$

onde  $dS$  é um elemento da superfície e  $\hat{n}$  é a sua normal, orientada para fora. Deste modo, o lado esquerdo da equação representa o fluxo de carga que *sai* da superfície e o lado direito, a

variação temporal da *carga interna à superfície*. O sinal negativo que aparece nela é devido ao fato de termos convencionado que o versor  $\hat{n}$  aponta para fora de  $S$ .

A eq.(24.12) corresponde à equação da continuidade na *forma integral*. Ela também pode ser colocada numa *forma diferencial*. Para isso, escrevemos a carga interna à superfície  $S$  como

$$q_{\text{int}} = \iiint_V dV \rho, \quad (24.13)$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica de carga. Usando o teorema de Gauss no lado esquerdo da eq. (24.12), obtemos

$$\iiint_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = - \iiint_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (24.14)$$

Já que este resultado vale para uma superfície qualquer, podemos eliminar as integrações triplas, para obter da igualdade dos integrandos, que corresponde à *equação da continuidade na forma diferencial*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (24.15)$$

A equação da continuidade, tanto na forma integral da eq.(24.12) como na diferencial da eq.(24.15), expressa a conservação da carga elétrica, uma das leis físicas de maior abrangência conhecida até hoje. É importante ressaltar que esta lei de conservação permanece válida tanto no âmbito da relatividade como no da mecânica quântica.

### • correntes estacionárias

Em muitas situações de interesse, correntes elétricas fluem através de circuitos fechados e podem permanecer praticamente constantes durante tempos bastante longos. Nestes casos, elas são chamadas de *correntes estacionárias*. Quando isso ocorre, a equação da continuidade nos ensina que a corrente deve ser a mesma em todos os pontos do circuito.

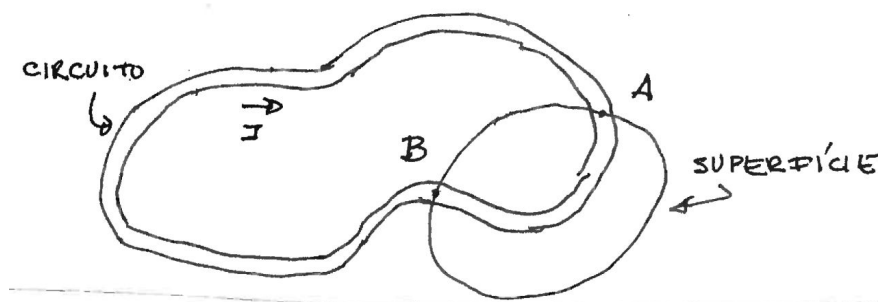


Figura 24.4: Corrente fluindo em um circuito fechado, interceptado nos pontos A e B por uma superfície matemática fechada.

Para mostrar por que isso acontece, consideremos o circuito representado na fig.24.4, interceptado nos pontos A e B por uma superfície matemática fechada  $S$ . Supondo que nos pontos

A e B as correntes no fio sejam respectivamente  $I_A$  e  $I_B$ , em um intervalo de tempo  $dt$ , na superfície matemática entra uma quantidade de carga  $dQ_A = I_A dt$  e sai dela uma quantidade  $dQ_B = I_B dt$ . Assim, a variação temporal da carga  $Q_{\text{int}} = Q_A - Q_B$  no interior de  $S$  é dada por

$$\frac{dQ_{\text{int}}}{dt} = I_A - I_B. \quad (24.16)$$

O mesmo resultado pode ser obtido diretamente da equação da continuidade, dada por (24.12). Ele é importante porque indica que, se as correntes  $I_A$  e  $I_B$  forem diferentes, ocorre acúmulo ou perda de cargas no interior de  $S$ . Por exemplo, se tivéssemos  $I_A = 1,00$  A e  $I_B = 0,99$  A, haveria um acúmulo de  $0,01$  C/s no interior de  $S$ . No caso de um circuito isolado, se houver acúmulo de carga de um dado sinal em uma região, deve haver também acúmulo de carga de sinal oposto em outra. Estes excessos de cargas de sinais opostos podem dar origem a forças eletrostáticas enormes e, também, aumentar a energia potencial do sistema. Entretanto, aumentos de energia potencial não acontecem espontaneamente e, por isso,  $dQ_{\text{int}}/dt = 0$  para qualquer superfície  $S$ . Ou seja, cargas não se acumulam continuamente no interior de circuitos percorridos por correntes estacionárias. Consequentemente, a equação da continuidade permite concluir que a corrente  $I_A$  que entra numa superfície matemática  $S$  que intercepta o circuito é igual à corrente  $I_B$  que sai dela, para quaisquer pontos A e B.

## • exemplo 2

Correntes estacionárias podem existir no vácuo, como no caso de aceleradores de partículas. Aceleradores são compostos por um tubo oco, no interior do qual é feito vácuo por meio de bombas. No caso de um acelerador eletrostático, é aplicada uma diferença de potencial constante  $V$  entre as extremidades do tubo, que corresponde a um campo elétrico  $\vec{E}$ , praticamente uniforme no seu interior. Quando um feixe de partículas eletricamente carregadas é injetado continuamente na entrada do tubo, se forma uma corrente elétrica estacionária no seu interior.

Para exemplificar as características da corrente elétrica no interior de um acelerador eletrostático<sup>1</sup>, supomos que o tubo tenha 10 m de comprimento e seção transversal circular de 2,5 cm de raio. Entre as extremidades do acelerador é estabelecida uma diferença de potencial de  $8 \times 10^6$  V. Neste tubo, é injetado um feixe de prótons com 3 mm de raio, velocidade inicial de  $3 \times 10^6$  m/s e intensidade correspondente a uma corrente  $I_0 = 10^{-5}$  A. A massa  $m_p$  do próton e a sua carga e são dadas no apêndice XXX. Neste exemplo, desejamos calcular:

- o número de prótons por unidade de volume na entrada do acelerador;
- a velocidade de um próton e a densidade volumétrica de prótons em um ponto genérico do tubo, distante  $x$  da entrada do acelerador;
- a velocidade de um próton e a densidade volumétrica de prótons na saída do acelerador.

### cálculos

(a) Como a corrente  $I_0$  do feixe é conhecida e a sua seção transversal  $S$  é dada, podemos usar a eq.(24.3) e escrever a intensidade da densidade de corrente como

$$j = \frac{I_0}{S} = e N_0 v_0 \quad (24.17)$$

<sup>1</sup>Os valores empregados aqui são inspirados nos do acelerador Pelletron da USP.

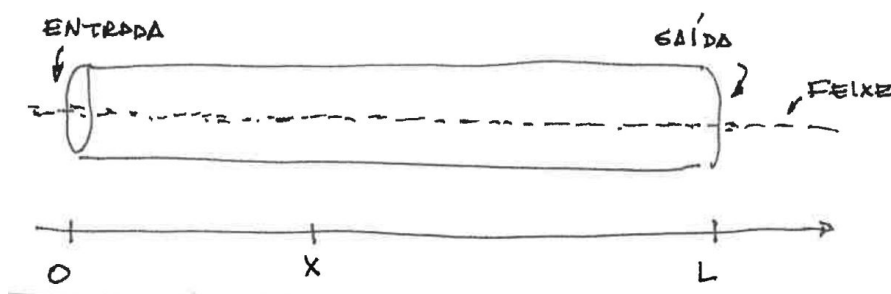


Figura 24.5: Acelerador eletrostático esquemático.

Portanto, no início do acelerador, em unidades do S.I., temos

$$N_0 = \frac{I_0}{S e v_0} = 7,4 \times 10^{11} \text{ prótons/m}^3 .$$

(b) Para o cálculo da velocidade, usamos o fato de que o campo elétrico é uniforme no interior do tubo e causa uma aceleração constante no próton, dada por

$$a = \frac{F}{m_p} = \frac{e E}{m_p} = \frac{e}{m_p} \frac{\Delta V}{d} . \quad (24.18)$$

A eliminação do tempo  $t$  das expressões cinemáticas para a posição  $x = v_0 t + a t^2/2$  e para a velocidade  $v_x = v_0 + a t$  fornece

$$v_x = \sqrt{v_0^2 + 2 a x} = \sqrt{v_0^2 + 2 x \frac{e \Delta V}{m_p d}} . \quad (24.19)$$

Este resultado mostra que, de fato, o tubo é um acelerador, já que a velocidade dos prótons cresce no seu interior. Como não há acúmulos espontâneos de cargas no interior do tubo, a equação da continuidade garante que a corrente elétrica é constante ao longo do feixe, independentemente do valor de  $x$  considerado. Já que a seção transversal do feixe também é constante, o mesmo acontece com a densidade de corrente  $j$ , ou seja

$$j_0 = j_x \rightarrow e N_0 v_0 = e N_x v_x . \quad (24.20)$$

Assim, a densidade volumétrica de prótons em uma posição genérica  $x$ , medida a partir da entrada do acelerador, é dada por

$$N_x = N_0 \frac{v_0}{v_x} = \frac{I_0}{S e \sqrt{v_0^2 + 2 (x e \Delta V)/(m_p d)}} . \quad (24.21)$$

(c) Na saída do acelerador,  $x = d = 10 \text{ m}$  e o valor da velocidade é  $v_d \simeq 4 \times 10^7 \text{ m/s}$ . Deste modo o próton, que entrou no tubo com a velocidade de  $3000 \text{ km/s}$ , sai dele com  $40000 \text{ km/s}$ . A densidade volumétrica de prótons na saída do acelerador é dada por  $N_d = N_0 v_0/v_d = 5,5 \times 10^{10} \text{ prótons/m}^3$ . Assim, no processo de aceleração, as partículas ficam mais separadas umas das outras, já que  $N_d < N_0$ . Para uma discussão de porque isto ocorre, veja o exercício 4.

## • exercícios

- Determine, por meio de uma análise dimensional das equações de continuidade (24.8) e (24.11) a unidade usada para caracterizar a densidade de corrente no SI.
- Um disco circular, de raio  $R$  e espessura  $a$ , feito de material dielétrico e carregado com uma densidade volumétrica de carga  $\rho$ , constante, gira com uma velocidade  $\omega$  em torno de um eixo passando pelo seu centro e perpendicular ao plano que o contém. Determine a intensidade da densidade de corrente elétrica, em função da distância  $r$  do ponto considerado ao centro do disco.
- Um gás de hidrogênio ionizado é constituído por  $N$  elétrons e  $N$  prótons por unidade de volume, que se movem paralelamente ao eixo  $y$ , respectivamente com as velocidades  $\vec{v}_e = -5v \hat{j}$  e  $\vec{v}_p = v \hat{j}$ , sendo  $v > 0$ .
  - Chamando de  $e$  a carga do próton, determine a densidade de corrente total.
  - Determine a corrente elétrica  $I$  que atravessa uma superfície matemática  $S$ , plana, quadrada de lado  $L$ , que contém o eixo  $x$  e está inclinada de um ângulo  $\alpha$  relativamente ao eixo  $z$ .
- Um estudante está sobre uma ponte que liga os lados de um desfiladeiro muito alto. Para matar o tédio ele solta duas bolinhas 1 e 2, de massas iguais a  $m$ , nos instantes  $t_1 = 0$  e  $t_2 = T$ ,  $T > 0$ , e observa seus movimentos de queda.
  - Desprezando a resistência do ar e supondo conhecida a aceleração da gravidade  $\vec{g}$ , determine a distância  $d(t)$  entre as duas bolinhas no instante  $t$ , com  $t > T$ .
  - Imagine, agora, que o estudante deixasse cair um número muito grande de bolinhas, sempre a intervalos regulares  $T$ ; discuta em que medida esta situação é análoga à discutida no exemplo 2.

## • respostas

- A unidade é  $\text{A/m}^2$ .
- $j(r) = \rho \omega r$ .
- (a)  $\vec{j} = (-e) N (-5v \hat{j}) + (e) N (v \hat{j}) = 6 e N v \hat{j}$ .  
 (b) Como a superfície é aberta, não há uma convenção definida para determinar o versor normal a ela. Por isso, as soluções  $\hat{n}_1 = -\cos\alpha \hat{j} + \sin\alpha \hat{k}$  e  $\hat{n}_2 = \cos\alpha \hat{j} - \sin\alpha \hat{k}$  são igualmente boas. No primeiro caso,  $\vec{j} \cdot \hat{n}_1 = -6 e N v \cos\alpha$ ,  $I_1 = -6 e N v \cos\alpha L^2$ ; no caso alternativo,  $I_2 = -I_1$ .
- a)  $d(t) = \frac{gT}{2} (2t - T)$ ; assim, fica claro que a distância entre as duas bolinhas aumenta com o tempo.  
 b) o campo  $\vec{g}$  faz o papel do campo elétrico; a corrente de bolinhas é uniforme ao longo do trecho em que elas caem; a densidade de bolinhas por unidade de comprimento diminui à medida que a distância percorrida na queda aumenta.



# Capítulo 25

## lei de Ohm

### • correntes em metais

Correntes em metais são devidas aos movimentos de arrasto de elétrons livres causados por campos elétricos externos, gerados por pilhas, baterias ou outras fontes, presentes no seu interior. Estes movimentos ocorrem em um ambiente repleto de íons positivos dispostos de maneira regular, que atrapalham o movimento de arrasto de cada elétron. Os íons têm dimensões típicas da ordem de  $10^{-10}$  m e mesmo um volume  $dV$  pequeno em escala macroscópica contém um número muito grande deles. Por exemplo, um cubo de 1 micrometro de lado encerra mais de um bilhão de íons. Isto faz com que seja necessário descrever as propriedades de um metal em termos de suas grandezas médias. No interior do condutor, existem duas densidades volumétricas de cargas a serem consideradas: uma delas é  $\rho_+$ , a densidade de carga iônica positiva e a outra é  $\rho_-$ , a densidade de elétrons livres. Como não ocorrem concentrações espontâneas de cargas temos, em média,

$$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0 . \quad (25.1)$$

Isto significa que os números de elétrons livres que entram e saem de um volume macroscópico  $dV$  por unidade de tempo são, em média iguais. Além disso, as velocidades térmicas  $\vec{u}_i$  dos elétrons livres estão estatisticamente distribuídas em todas as direções e sentidos, fazendo com que a média  $\langle \vec{u}_i \rangle$  dessas velocidades seja nula.

### • a lei de Ohm microscópica

Quando um condutor metálico é ligado a uma fonte de tensão constante, como uma pilha ou bateria, em seu interior passa a existir um campo elétrico que está presente em todos os seus pontos. Em linguagem figurada, podemos pensar que o metal está embebido no campo externo, que causa forças em todas as cargas presentes, tanto nos íons positivos como nos elétrons livres. A força sobre um íon é contrabalançada pelas forças que os outros elementos da rede cristalina causam sobre ele, e ele não se move. A força sobre um elétron livre, por outro lado, causa nele uma aceleração, fazendo com que ele seja arrastado. Como o campo externo age de modo

uniforme sobre todos os elétrons livres que existem em uma dada região do condutor, o seu efeito é fazer com que a densidade de carga negativa  $\rho_-$  seja empurrada no sentido oposto ao campo e se mova relativamente a  $\rho_+$ . Deste modo, em presença do campo, os elétrons livres têm dois tipos de movimento, um desordenado devido à agitação térmica e outro de arrasto, ordenado, devido ao campo externo.

A *lei de Ohm* está associada à dificuldade de o movimento de arrasto de um elétron livre ocorrer no interior de um meio material. Quando o campo externo age sobre um desses elétrons, ele passa a ser uniformemente acelerado. Se o interior do fio metálico fosse vazio, como no caso do tubo de um acelerador, sua velocidade aumentaria continuamente. No metal, entretanto, à medida que o elétron se movimenta, ele vai se chocando com os íons da rede. Nesses choques ele transfere momento aos íons, perdendo parte de sua velocidade. Após cada choque, ele passa a ser acelerado novamente e tudo recomeça. Este tipo de processo tem duas consequências importantes. A primeira é que as velocidades de arrasto dos elétrons não conseguem aumentar muito e ficam num patamar relativamente baixo, como vimos no exemplo 1 da aula anterior. A outra é que a energia que os elétrons transferem para os íons aumenta a sua energia cinética e esquenta o metal, obedecendo o princípio da equipartição da energia.

Devido ao grande número de objetos participantes neste processo e, também, à possibilidade de muitas interações diferentes, o tratamento matemático do movimento de arrasto dos elétrons livres no interior do metal pode vir a ser extremamente complicado. Nós, aqui, simplificamos este tratamento ao máximo, supondo que, para todos os elétrons livres

- o intervalo de tempo médio entre dois choques sucessivos seja  $T$ ;
- em cada choque, o elétron perde toda a sua velocidade de arrasto, adquirida na aceleração pelo campo externo.

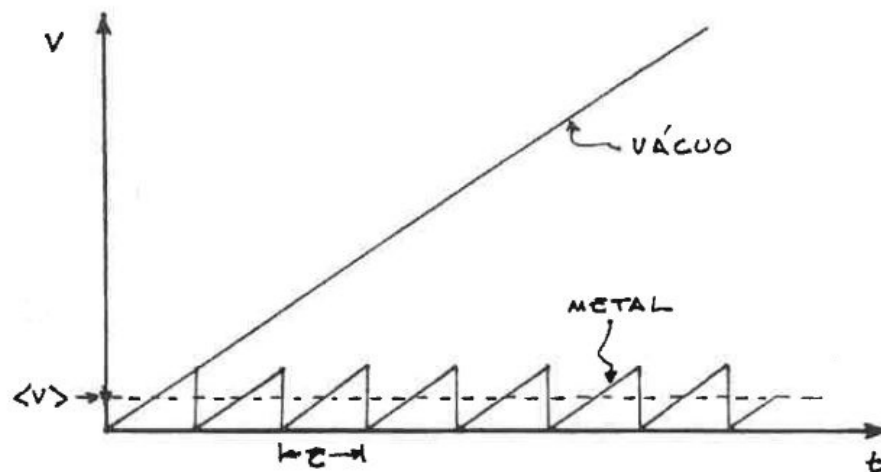


Figura 25.1: Comportamento da velocidade de um elétron sujeito a um campo elétrico constante no vácuo e no interior de um metal, sendo  $T$  o intervalo de tempo entre colisões.

Neste caso, sua sua velocidade de arrasto varia em função do tempo como na fig.25.1. A aceleração  $\vec{a}$  do elétron é constante e sua velocidade em função do tempo é  $\vec{v} = \vec{a}t$ . Neste processo de sucessivas acelerações pelo campo externo e choques, os elétrons livres adquirem



uma velocidade de arrasto média dada por

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{a}T}{2}. \quad (25.2)$$

Chamando de  $m$  a massa do elétron, de  $-e$  a sua carga e de  $\vec{E}$  o campo externo na região onde ele se encontra, a segunda lei de Newton fornece

$$\vec{f} = m \vec{a} \quad (25.3)$$

e, usando a eq.(25.2), concluímos que

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{T}{2m} \vec{f}. \quad (25.4)$$

O resultado (24.6) [ (24.6) ] permite-nos escrever a densidade de corrente como

$$\vec{j} = -eN \langle \vec{v} \rangle = - \left[ \frac{eNT}{2m} \right] \vec{f}. \quad (25.5)$$

onde  $N$  é o número de elétrons livres por unidade de volume do metal. Este é um resultado geral e importante, que mostra que a corrente elétrica é proporcional à força que arrasta os elétrons coletivamente.

No caso em que o movimento coletivo dos elétrons é produzido por um campo elétrico,  $\vec{f} = -e\vec{E}$  e temos

$$\vec{j} = \left[ \frac{e^2NT}{2m} \right] \vec{E}, \quad (25.6)$$

Esta expressão representa a forma mais comum da *lei de Ohm microscópica* e indica que a densidade de corrente  $\vec{j}$  é diretamente proporcional ao campo elétrico externo  $\vec{E}$ .

O coeficiente de proporcionalidade entre os dois vetores envolve  $T$  e  $N$ , que são características do particular metal considerado. Como é muito difícil obter informação acerca do valor de  $T$ , este coeficiente, chamado de *condutividade* do metal e representado por  $\sigma$ , costuma ser tratado como uma grandeza empírica, cujo valor deve ser obtido por meio de experimentos. No caso do nosso modelo simplificado, temos

$$\sigma = \frac{e^2NT}{2m}. \quad (25.7)$$

Assim, a lei de Ohm microscópica é escrita como

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (25.8)$$

Do ponto de vista microscópico, um condutor ôhmico é aquele para o qual a densidade de corrente em um dado ponto é proporcional ao campo elétrico externo naquele ponto. Na prática, também costuma-se definir a *resistividade*  $\rho$  de um material como  $\rho = 1/\sigma$ .

## • a forma geral da lei de Ohm microscópica

O resultado (25.8) representa a lei de Ohm microscópica para o caso de um metal sujeito a um campo elétrico externo  $\vec{E}$ , que pode ser devido a uma pilha ou bateria. Entretanto, existem também outros tipos de forças  $\vec{f}$  que podem causar o movimento de arrasto de elétrons livres, de origem magnética ou química, discutidas mais tarde. Por isso, a forma mais geral da lei de Ohm, que abrange quaisquer tipos de forças, é escrita a partir da eq.(25.5) como

$$\vec{j} = \sigma \frac{\vec{f}}{(-e)}, \quad (25.9)$$

com  $\sigma$  dado por (25.7).

### • forças e energia

A forma da lei de Ohm microscópica é característica de meios dissipativos, nos quais há forças de choque envolvidas. Nos cálculos que levaram às eqs.(25.6) e (25.9), as forças de choque estão implícitas no comportamento da velocidade de arrasto dos elétrons considerado na fig.25.1. Para perceber isto, note que a eq.(25.4) corresponde a

$$\vec{f} = \frac{2m}{T} \langle \vec{v} \rangle . \quad (25.10)$$

Esta expressão parece encerrar uma contradição, já que descreve uma a força proporcional a uma velocidade e, não, a uma aceleração. Entretanto, esta contradição é apenas aparente. Enquanto a eq.(25.2) envolve apenas a força devida ao agente externo que arrasta os elétrons e só vale no intervalo de tempo  $T$  entre dois choques sucessivos, o fator  $\langle \vec{v} \rangle$  na eq.(25.10) incorpora os resultados dos choques, como sugere a fig.25.1. O efeito global desses choques indica a existência de uma outra força que age sobre o elétron, que denotamos por  $\vec{f}_c$ . Esse processo complicado de acelerações e choques resulta numa corrente elétrica constante, associada a uma velocidade média constante para os elétrons. Como  $\langle \vec{v} \rangle$  é constante, a aceleração média é nula e a lei de Newton permite-nos concluir que a força total média  $\langle \vec{f} + \vec{f}_c \rangle$  que age sobre um elétron é nula. Assim,

$$\langle \vec{f}_c \rangle = -\vec{f} = -\frac{2m}{T} \langle \vec{v} \rangle . \quad (25.11)$$

Como esperado,  $\langle \vec{f}_c \rangle$  é proporcional a  $\langle -\vec{v} \rangle$  e corresponde a uma força viscosa.

Quando há movimento em presença de uma força viscosa, há produção de calor, fenômeno conhecido como *efeito Joule*. A potência dissipada no fio é dada pelos trabalhos  $\tau$  realizados pelos elétrons sobre os íons por unidade de tempo. Como  $\langle \vec{f}_c \rangle$  é a força média que os íons exercem sobre um elétron, a força média que este elétron exerce sobre os íons é  $\langle -\vec{f}_c \rangle = \vec{f}$ . Por isso, a potência média fornecida por um elétron à rede iônica é dada por

$$\frac{d\tau}{dt} = \vec{f} \cdot \langle \vec{v} \rangle . \quad (25.12)$$

### • a lei de Ohm macroscópica

A forma microscópica da lei de Ohm pode ser convertida na forma macroscópica mais usual. Consideremos, inicialmente, um trecho de um fio cilíndrico de comprimento  $L$ , orientado paralelamente à direção  $\hat{\ell}$ , com seção transversal  $S$ , condutividade  $\sigma$  e percorrido por uma corrente estacionária  $I$ , no sentido  $\ell > 0$ , mostrado na fig.25.2.

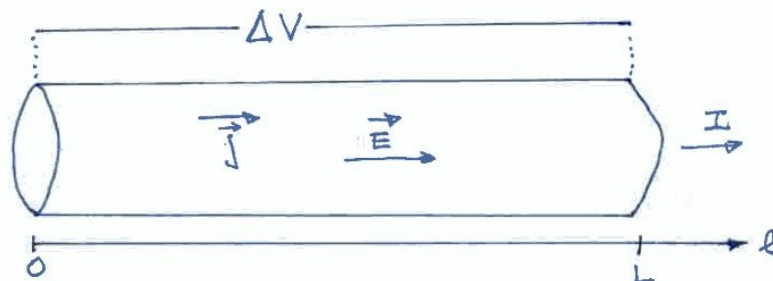


Figura 25.2: Trecho de fio cilíndrico percorrido por corrente  $I$ .

Como cargas não se acumulam continuamente no interior de condutores, a corrente que entra por um dos lados do fio é a mesma que sai pelo outro lado. Por isso, a corrente  $I$  é a mesma em qualquer superfície transversal ao fio e a densidade de corrente é dada por

$$\vec{j} = \frac{I}{S} \hat{\ell}, \quad (25.13)$$

em qualquer ponto do interior do condutor. Devido à lei de Ohm microscópica, eq.(25.7), o mesmo acontece com o campo elétrico, dado por

$$\vec{E} = \frac{I}{\sigma S} \hat{\ell} = \frac{\rho I}{S} \hat{\ell}. \quad (25.14)$$

Deste modo, o interior deste condutor percorrido por uma corrente estacionária corresponde a um ambiente bastante uniforme. Como discutimos na próxima aula, há uma física bastante rica por trás deste fato aparentemente simples.

O campo elétrico é uma grandeza local e, na abordagem macroscópica, é conveniente usar a tensão  $\Delta V$  entre as extremidades do trecho de fio considerado, que é uma grandeza mensurável. Ela é dada por

$$\Delta V = V(L) - V(0) = - \int_0^L \vec{E} \cdot d\vec{c}, \quad (25.15)$$

com  $d\vec{c} = d\ell \hat{\ell}$ . Como o campo é uniforme no interior do condutor, podemos escrever

$$\Delta V = -EL \quad (25.16)$$

e o sinal negativo indica que a função  $V$  diminui no sentido da corrente. Usando a eq.(25.14) neste resultado, temos

$$\Delta V = \left[ \frac{\rho L}{S} \right] I. \quad (25.17)$$

Ou seja, a corrente no pedaço de fio é proporcional à queda de tensão entre seus extremos. É costume chamar a constante de proporcionalidade de  $R$ , a *resistência*, e a lei de Ohm macroscópica fica dada por

$$\Delta V = R I , \quad (25.18)$$

com

$$R = \frac{\rho L}{S} . \quad (25.19)$$

Este resultado mostra que a resistência do trecho de fio é diretamente proporcional ao seu comprimento  $L$  e inversamente proporcional à sua seção transversal  $S$ . No SI, a unidade de resistência é o *ohm*, representado por  $\Omega$ .

## • potência

A potência fornecida à rede iônica pelo movimento de um único elétron foi dada na eq.(25.12). No interior do pedaço de fio de comprimento  $L$ , existem  $NLS$  elétrons livres e a potência média total fornecida à sua rede é

$$P = NLS \vec{f} \cdot \langle \vec{v} \rangle = -NLS e \vec{E} \cdot \langle \vec{v} \rangle . \quad (25.20)$$

Usando as eqs.(24.6) [ (24.6) ] e (25.7), escrevemos

$$P = LS \vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{LS}{\sigma} j^2 = \frac{\rho L}{S} I^2 \quad (25.21)$$

e, finalmente, a eq.(25.18) fornece

$$P = R I^2 . \quad (25.22)$$

Este resultado representa a potência fornecida pelos elétrons à rede iônica. Ao absorver esta potência, a rede aumenta as suas vibrações, o fio esquenta e passa a irradiar energia para o ambiente externo na forma de calor. Deste modo, a eq.(25.22) também corresponde à potência dissipada pelo resistor. Este conjunto de fenômenos é conhecido como efeito Joule.

## • leis e leis

A lei de Ohm é uma lei empírica e, não, uma lei fundamental da natureza, como as leis de Newton ou as equações de Maxwell. Leis empíricas são obtidas a partir de medidas sistemáticas e não têm validade geral.

A lei de Ohm é um exemplo típico de lei linear, cuja forma pode ser obtida a partir da série de Taylor<sup>1</sup>. Imagine que você possua um aparato experimental capaz de produzir tensões  $V$  em

<sup>1</sup>Este modo de olhar as leis lineares foi apresentado em um seminário no IFUSP por Sir Rudolph Peierls.

um fio e medir as correntes  $I$  produzidas. Para equacionar este problema, é preciso determinar a função  $I(V)$ . Na falta de uma teoria, expandimos esta função na série de Taylor

$$I(V) = I(0) + V \left. \frac{dI}{dV} \right]_{V=0} + \frac{V^2}{2!} \left. \frac{d^2I}{dV^2} \right]_{V=0} + \dots \quad (25.23)$$

Como sem tensão não há corrente,  $I(0) = 0$  e, para tensões não muito altas, trabalhamos com

$$I(V) = \alpha V + \beta V^2 + \dots \quad (25.24)$$

onde  $\alpha, \beta, \dots$  são constantes. A lei de Ohm corresponde às situações em que apenas o primeiro termo dá conta dos resultados experimentais, sendo o parâmetro  $\alpha$  tratado como uma grandeza empírica. Outro exemplo de lei linear é  $F = -kx$ , usada para molas.

### • exemplo 1

São dados dois cilindros A e B, feitos com o mesmo metal de resistividade  $\rho$ , com comprimentos iguais a  $L_A$  e  $L_B$  e seções transversais  $S_A$  e  $S_B$ , respectivamente, ligados em série como na fig.25.3, e percorridos por uma corrente estacionária  $I$ , paralela à direção  $\hat{\ell}$ . Nosso objetivo é obter as densidades de corrente e campos elétricos nos dois trechos, bem como a resistência do conjunto.

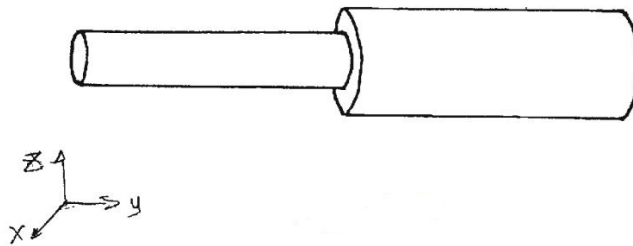


Figura 25.3: Um corpo metálico composto por dois cilindros de dimensões diferentes, coaxiais e justapostos

O ponto de partida para a compreensão de um problema como este é a equação da continuidade, juntamente com a noção de que não há acúmulos de cargas em sistemas percorridos por correntes estacionárias. Isto nos permite afirmar que a corrente elétrica é a mesma através de qualquer superfície matemática transversal ao fio. Por isso, as densidades de corrente nos dois trechos do fio são

$$\vec{j}_A = \frac{I}{S_A} \hat{\ell} \quad \text{e} \quad \vec{j}_B = \frac{I}{S_B} \hat{\ell} \quad (25.25)$$

e, portanto,  $|\vec{j}_A| > |\vec{j}_B|$ . A interpretação deste resultado é dada pela eq.(24.6), [((24.6))] que nos informa que, para um dado material, a densidade de corrente é proporcional à velocidade de arrasto média dos portadores de carga. Por isso, para que a corrente  $I$  possa ser a mesma nos dois setores, esta velocidade média na parte mais estreita deve ser maior do que a na parte mais larga.

Os campos elétricos são obtidos a partir da lei de Ohm microscópica, eq.(25.7), e dados por

$$\vec{E}_A = \frac{\rho I}{S_A} \hat{\ell} \quad \text{e} \quad \vec{E}_B = \frac{\rho I}{S_B} \hat{\ell}. \quad (25.26)$$

Como estes campos são uniformes no interior dos respectivos trechos, as diferenças de tensão entre as extremidades de cada um deles valem

$$\Delta V_A = \frac{\rho L_A}{S_A} I \quad \text{e} \quad \Delta V_B = \frac{\rho L_B}{S_B} I. \quad (25.27)$$

Estas relações definem as resistências dos trechos A e B como

$$R_A = \frac{\rho L_A}{S_A} \quad \text{e} \quad R_B = \frac{\rho L_B}{S_B}. \quad (25.28)$$

Se considerarmos os dois trechos de uma só vez, a resistência equivalente  $R$  é definida por  $\Delta V_A + \Delta V_B = RI$ , que fornece

$$R = R_A + R_B, \quad (25.29)$$

um resultado bem conhecido para resistores associados em série.

## • exemplo 2

Um fio cilíndrico, de seção transversal  $S$ , é formado por dois metais diferentes, A e B, com comprimentos  $L_A$  e  $L_B$ , mostrados na fig.25.4. As resistividades dos dois trechos de fio são, respectivamente,  $\rho_A$  e  $\rho_B$ , com  $\rho_B > \rho_A$ . O objetivo deste exemplo é mostrar que existe uma densidade superficial de carga  $\sigma$  na interface entre os dois condutores, quando o fio é percorrido por uma corrente estacionária  $I$ , paralela à direção  $\vec{\ell}$ .

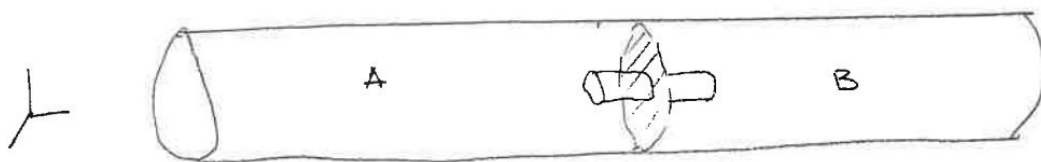


Figura 25.4: Um corpo metálico composto por dois cilindros de metais diferentes, coaxiais e justapostos

Analogamente ao exemplo anterior, a corrente é sempre a mesma através de qualquer superfície matemática transversal ao fio e, conseqüentemente,

$$\vec{j}_A = \vec{j}_B = \frac{I}{S} \hat{\ell}. \quad (25.30)$$

Como a lei de Ohm microscópica depende da resistividade do material, os campos nos dois trechos são diferentes entre si e dados por

$$\vec{E}_A = \frac{\rho_A I}{S} \hat{\ell} \quad \text{e} \quad \vec{E}_B = \frac{\rho_B I}{S} \hat{\ell}. \quad (25.31)$$

Estes campos são uniformes nos respectivos trechos de fio e descontínuos na interface, indicando a presença de um acúmulo de cargas nesta região. O valor  $\sigma$  desta densidade superficial pode ser obtido por meio da lei de Gauss, aplicada à superfície gaussiana  $G$  mostrada na figura. A normal ao lado do cilindro gaussiano é ortogonal aos campos, enquanto que as normais às tampas são, respectivamente,  $\hat{n}_A = -\hat{\ell}$  e  $\hat{n}_B = \hat{\ell}$ . Deste modo, chamando de  $a$  a área destas tampas, temos

$$\oiint_G \vec{E} \cdot \hat{n} dS = (-E_A + E_B) a = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \quad (25.32)$$

e, portanto,

$$\sigma = \epsilon_0 (E_B - E_A) = \epsilon_0 (\rho_B - \rho_A) \frac{I}{S}. \quad (25.33)$$

Neste exemplo, supusemos que  $\rho_B > \rho_A$  e, conseqüentemente, as cargas acumuladas são positivas.

Para concluir, discutimos um ponto importante. Na apresentação da equação da continuidade feita na aula anterior enfatizamos que não há acúmulos espontâneos de cargas no interior de condutores com correntes estacionárias. O resultado dado pela eq.(25.32) é coerente com esta noção, por dois motivos. Um deles é que a densidade de cargas  $\sigma$  na interface não corresponde a um efeito espontâneo, já que ele é causado pelas características diferentes dos dois metais. Além disso,  $\sigma$  não varia com o tempo e, por isso, não contribui para o fator  $dq_{\text{int}}/dt$  da eq.(24.8). [((((((24.8))))))] Por isso, apesar de existir uma densidade de carga na interface, a mesma corrente que entra por um lado do fio sai pelo outro.

## • exercícios

**1.** Imagine que você tivesse  $10^{-9}\text{m}$  de altura. Como você perceberia a superfície externa de um metal, colocado no vácuo? Seria adequado pensar nele como um objeto sólido? Em um metal existem, estatisticamente, elétrons livres que se movem em todas as direções e sentidos, com velocidades altas. Isto significa que, na superfície do metal, existem alguns elétrons indo para fora dele. Qual o destino desses elétrons?

**2.** Um condutor metálico de resistividade  $\rho$ , de forma cilíndrica, de comprimento  $L$  e raio  $a$ , é percorrido por uma corrente constante  $I$ . No interior deste condutor existe uma bolha de ar esférica, de raio  $b < a$ . Considere dois pontos no interior do metal: um deles, chamado de P, muito longe da bolha; o outro, chamado de Q, na região de maior estreitamento em torno da bolha.

a) Calcule as correntes  $I_P$  e  $I_Q$ , que atarvessam superfícies matemáticas transversais ao fio, passando por P e Q.

b) Calcule os módulos das densidades de correntes  $\vec{j}_P$  e  $\vec{j}_Q$ , nos pontos P e Q.

c) Calcule os módulos dos campos elétricos nos pontos P e Q.

d) Compare a diferença de potencial  $\Delta V$  entre as extremidades do fio com a quantidade  $V_0 = [\rho L I]/[\pi a^2]$ .

**3.** Considere a situação discutida no exemplo 2.

a) Faça um desenho representando o campo elétrico no interior do fio por meio de linhas de campo.

b) *A partir deste desenho*, determine o sinal das cargas acumuladas na interface entre os dois metais.

c) Calcule o campo elétrico  $\vec{E}_\sigma$  criado pela densidade de cargas  $\sigma$  dada pela eq.(25.32), nas proximidades dela.

### • respostas

**2.** a)  $I_P = I_Q = I$ ;

b)  $j_P = \frac{I}{\pi a^2}$  e  $j_Q = \frac{I}{\pi(a^2 - b^2)}$

c)  $E_P = \frac{\rho I}{\pi a^2}$  e  $E_Q = \frac{\rho I}{\pi(a^2 - b^2)}$

d)  $\Delta V$  é maior do que  $V_0$

**3.** c)  $\vec{E}_\sigma = -E_\sigma \hat{j}$  no lado A,  $\vec{E}_\sigma = +E_\sigma \hat{j}$  no lado B, com  $E_\sigma = \frac{(\rho_B - \rho_A)I}{2S}$



# Capítulo 26

## baterias e fios metálicos

Um dos problemas mais tradicionais de eletricidade que encontramos na nossa formação inicial é o de obter a corrente que passa por um fio de resistência  $R$  quando ele está ligado a uma bateria de tensão  $V$ . Ele pode ser resolvido com a fórmula  $V = RI$  e nada parece mais simples. Entretanto, a física deste problema é bastante rica e nada simples. Nesta aula, descrevemos qualitativamente o que acontece quando uma bateria é acoplada a fios metálicos. A escolha da bateria foi feita por razões pedagógicas e é representativa de outras fontes de tensão constante.

### • a bateria - novo

Uma bateria de automóvel ou uma pilha comum são fontes de tensão constante e, enquanto ela dura, existe uma diferença de potencial  $V$  entre seus terminais que não varia com o tempo. Ela consegue isto acumulando quantidades de cargas de sinais opostos nestes terminais. Deste ponto de vista, uma pilha isolada se assemelha a um dipolo elétrico, já que ambos têm cargas estáticas acumuladas em pontos diferentes do espaço e criam campos elétricos à sua volta. A diferença entre estes sistemas se manifesta quando eles são ligados a circuitos externos. Se conectarmos as cargas de um dipolo por meio de um fio metálico, ele se neutraliza depois de um tempo bastante curto. Já com pilhas e baterias, isto não acontece, pois este tipo de fonte de tensão consegue repor as cargas nos seus terminais durante sua vida útil.

Baterias e pilhas funcionam, portanto, como dipolos elétricos, mesmo quando ligados a circuitos. Os mecanismos que determinam o funcionamento destes sistemas dependem de reações químicas e são bastante complicados. Processos químicos envolvendo ligações covalentes podem separar espacialmente cargas elétricas de sinais opostos, fazendo com que a energia potencial elétrica de um dado sistema não seja a menor possível. Um exemplo deste tipo foi apresentado na aula 3, quando discutimos a molécula de água, que é polar, na qual as concentrações de cargas positivas e negativas estão localizadas em pontos distintos. Estas cargas se atraem, a sua energia eletrostática não é a mínima possível e, mesmo assim, permanecem separadas devido às ligações covalentes entre os elétrons dos átomos de hidrogênio e de oxigênio.

Algo de natureza semelhante, mas bem mais complicado, ocorre nas baterias. Atualmente, são conhecidos muitos tipos, que vão desde de pilhas de aparelhos de surdez, até acumuladores industriais, passando pelos usados em telefones celulares e computadores. Tal variedade não é descrita aqui e baseamos nossas discussões em um modelo bastante simplificado das pilhas comuns de uso doméstico. As partes condutoras da pilha são uma casca metálica exterior em forma de copo, que constitui o polo negativo, e um bastão central de grafite, ligado ao polo positivo. Embora este tipo de pilha seja conhecido como célula seca, o seu interior é úmido, o que causa a separação de substâncias químicas em íons positivos e negativos. Algumas destas substâncias dissolvidas no interior da pilha atacam a casca metálica, arrancando os seus íons positivos e deixando elétrons, que permanecem nela. Por meio de várias reações químicas, a carga positiva do íon metálico migra para o bastão de grafite e para a lâmina metálica que o recobre. Como resultado desta série de processos, ocorre a separação espacial de elétrons e cargas positivas.

No nosso modelo simplificado de pilha, consideramos apenas o efeito global, que envolve

- o acúmulo de elétrons livres no polo negativo e de cargas positivas no polo oposto;
- a migração interna de cargas positivas, da casca metálica para o bastão de carbono, levadas por vários íons diferentes.

Nos polos de uma bateria carregada existem sempre cargas positivas e negativas acumuladas, o que produz um campo elétrico  $\vec{E}_b$  à sua volta, como mostra a fig.26.1(a). Quando compramos uma bateria, é este campo que existe do seu lado de fora que nos interessa, mesmo que não saibamos disto, pois é ele que produz os efeitos desejados quando ela é empregada em aparelhos.

As cargas nos polos da bateria também dão origem a um campo elétrico  $\vec{E}'_b$  na sua parte interna, que produz forças ( $e\vec{E}'_b$ ) sobre os íons positivos que migram e tendem a causar movimentos no sentido contrário. Isto não acontece devido à presença das forças de origem química  $\vec{f}_{\text{quim}}$  que agem sobre os íons e promovem a sua migração. Como a bateria está isolada, há equilíbrio entre estas forças antagônicas e temos

$$\vec{f}_{\text{quim}} + e\vec{E}'_b = 0. \quad (26.1)$$

Esta característica interna da bateria influencia o seu comportamento elétrico externo. A relação entre o que acontece dentro e fora da bateria é obtida do fato de o campo elétrico das cargas acumuladas nos seus polos ser conservativo. Assim, tomando os caminhos matemáticos mostrados na figura (b),  $C_1$  interno à pilha, e  $C_2$  no seu exterior, podemos escrever

$$\int_{C_1} \vec{E}'_b \cdot d\vec{c} + \int_{C_2} \vec{E}_b \cdot d\vec{c} = 0. \quad (26.2)$$

Dividindo os dois membros da eq.(26.1) por  $e$  e integrando ao longo do caminho  $C_1$ , temos

$$\int_{C_1} \frac{\vec{f}_{\text{quim}}}{e} \cdot d\vec{c} + \int_{C_1} \vec{E}'_b \cdot d\vec{c} = 0. \quad (26.3)$$

Estas duas expressões permitem obter a relação desejada, que é dada por

$$\int_{C_1} \frac{\vec{f}_{\text{quim}}}{e} \cdot d\vec{c} = \int_{C_2} \vec{E}_b \cdot d\vec{c}. \quad (26.4)$$

A interpretação deste resultado de aparência simples é bastante interessante.

Historicamente, a integral da quantidade  $\vec{f}_{\text{quim}}/e$  entre os polos da bateria foi chamada de *força eletromotriz*, costuma ser designada por *fem* e é representada por  $\mathcal{E}$ . Assim, no caso da pilha, por definição, temos

$$\mathcal{E} = \int_{C_1} \frac{\vec{f}_{\text{quim}}}{e} \cdot d\vec{c}. \quad (26.5)$$

O nome *força* aplicado à grandeza  $\mathcal{E}$  é claramente inadequado, já que ela representa um trabalho por unidade de carga. Entretanto, ele é mantido por tradição. No SI, a sua unidade é o volt. Já o lado direito da eq.(26.4) representa a diferença de potencial  $V = V_+ - V_-$  entre os polos positivo e negativo da bateria.

Por isso, escrevemos a relação entre as características interna e externa da bateria isolada como

$$\mathcal{E} = V. \quad (26.6)$$

É importante notar que esta igualdade não corresponde a uma identidade conceitual ou ontológica entre  $\mathcal{E}$  e  $V$ , pois estes símbolos designam entidades físicas diferentes. Em particular a força química, que contribui para  $\mathcal{E}$  não é conservativa. Assim, esta expressão, que determina o comportamento de baterias isoladas, representa o resultado do seguinte encadeamento de ideias: a fem  $\mathcal{E}$  representa o trabalho por unidade de carga realizado pelas forças químicas no *interior* da bateria, que dá origem a um acúmulo de cargas nos seus polos, que produz um campo elétrico no *exterior* da bateria, associado a uma diferença de potencial  $V$  entre os polos.

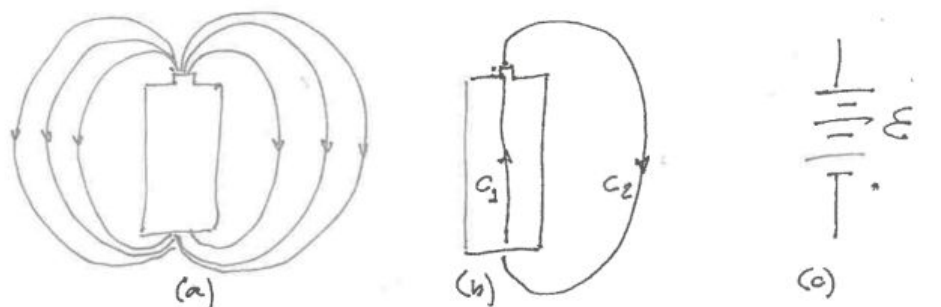


Figura 26.1: (a) O campo externo da bateria isolada; (b) caminhos  $C_1$  e  $C_2$ ; (c) representação da bateria isolada.

### • exemplo 1

Desejamos estimar a quantidade de elétrons em excesso existente no polo negativo de uma pilha comum isolada, de tensão nominal de 1,5 V. Supondo que os polos da pilha estejam separados por uma distância  $d = 5$  cm e que as cargas que eles contêm possam ser consideradas

puntiformes, estimamos os seus valores substituindo os dados do problema na expressão

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d}.$$

Usando o valor de  $\epsilon_0$  do apêndice ??, obtemos  $q \simeq 8,34 \times 10^{-12}$  C. A carga  $e$  de um elétron é dada no mesmo apêndice e aprendemos que, no polo negativo da bateria, há um excesso de elétrons dado por  $q/e \simeq 5,2 \times 10^7 = 52$  milhões.

## • o fio metálico

Para estudar o funcionamento de um circuito simples, consideramos um fio metálico cilíndrico, de comprimento  $L$ , seção transversal  $S$ , resistividade  $\rho$ , dobrado na forma mostrada na fig.26.2(a), de modo a poder se encaixar na bateria. A resistência do fio é  $R = \rho L/S$  e, no desenho, a sua espessura está bastante exagerada, de modo a permitir que, mais tarde, linhas de campo possam ser desenhadas no seu interior. Na figura (b), mostramos o símbolo convencional de um resistor e é interessante perceber que ele não guarda nenhuma relação com a forma ou outras características do fio real.

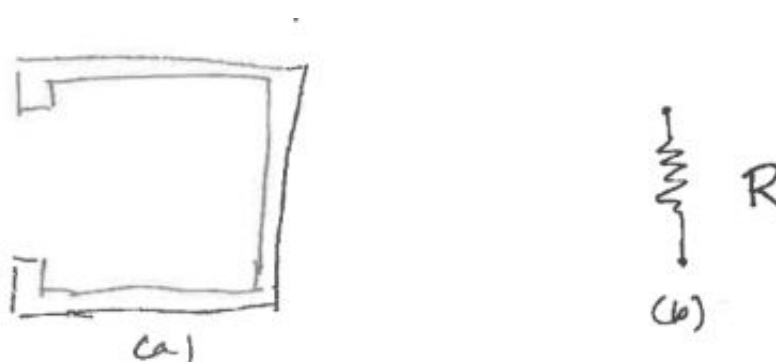


Figura 26.2: (a) Fio metálico; (b) representação da sua resistência.

## • o fio perto da bateria

Quando um fio metálico é ligado aos extremos de uma bateria, algo bastante complexo acontece. Para ligar o fio à bateria, é preciso trazê-lo para próximo dela, o que significa que, mesmo antes de ser conectado, o condutor já está em presença do campo  $\vec{E}_b$  que ela produz no seu exterior. Se o fio estiver em repouso, temos a situação típica de um condutor em equilíbrio eletrostático em presença de um campo  $\vec{E}_b$  externo. Neste caso, cargas positivas e negativas são induzidas na superfície do condutor, que passam a criar campos elétricos  $\vec{E}_q$  em todo o espaço. Em qualquer ponto do interior do fio, a soma do campo  $\vec{E}_q$  das cargas induzidas com o  $\vec{E}_b$  devido à bateria é nula, pois o condutor está em equilíbrio eletrostático. Nas regiões externas, o campo elétrico é não nulo, sendo dado pela soma vetorial das duas contribuições. Devido ao equilíbrio eletrostático, as linhas de campo externo são ortogonais à superfície do condutor em

regiões próximas a ele. Em geral, a determinação precisa deste campo é difícil, mas ele tem a forma esquemática mostrada na fig.26.3(a).

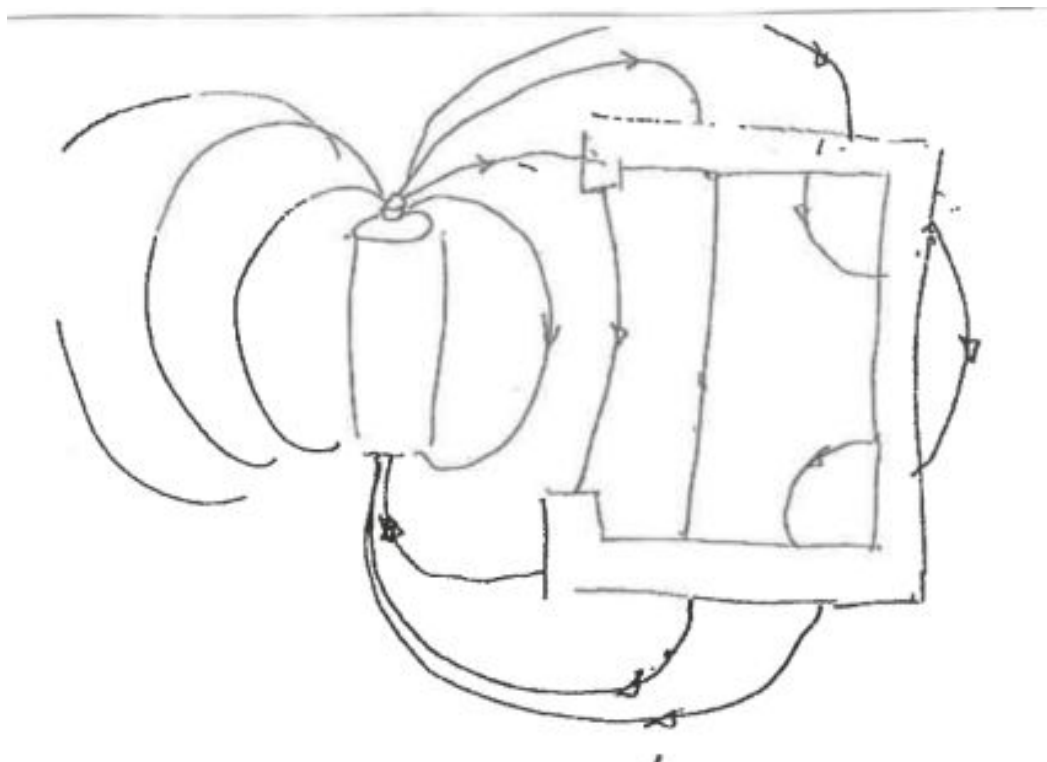


Figura 26.3: Fio em equilíbrio eletrostático próximo a uma bateria e linhas de campo resultante.

### • o fio ligado à bateria

Quando as duas extremidades do condutor são ligadas à bateria, as cargas existentes na sua superfície se rearranjam um pouco, mas continuam lá. Deste modo, dentro do fio, os elétrons se movem sob a ação combinada dos campos  $\vec{E}_b$  da bateria e  $\vec{E}_q$ , das cargas induzidas na sua superfície. O campo  $\vec{E}_q$  tem um papel muito importante neste tipo de problema. Para perceber isto, lembramos que o campo elétrico de uma bateria isolada cai com a distância aos seus polos. Se apenas este campo  $\vec{E}_b$  agisse nos elétrons do interior do fio, seria razoável pensar que, sendo ele ligado à bateria, as suas regiões mais distantes dos polos estariam sujeitas a campos mais fracos. De acordo com a lei de Ohm, estes campos deveriam produzir correntes relativamente mais fracas nestas regiões. Entretanto, não é isso o que acontece, já que a equação da continuidade garante que, para situações estacionárias, a corrente é a mesma em todos os pontos do fio, sejam eles próximos ou distantes dos polos da bateria. Se a corrente não fosse uniforme, deveria haver acúmulos contínuos de cargas em certas regiões do interior do fio, que dariam origem a forças muito intensas e aumentos espontâneos da energia potencial do sistema, o que não acontece. É por essa razão que a corrente é a mesma em qualquer ponto do fio e o gás de elétrons no seu interior pode ser considerado como um fluido incompressível.

Assim, no caso de um fio de seção constante  $S$  ligado a uma bateria, a corrente que atravessa

qualquer superfície matemática transversal é  $I$  e o módulo da densidade de corrente *em qualquer ponto do fio* é

$$|\vec{j}| = \frac{I}{S}. \quad (26.7)$$

Deste modo, a lei de Ohm microscópica, eq.(25.7), [ (25.7) ] nos ensina que o módulo do campo elétrico que move os elétrons em qualquer ponto do interior do fio é constante, dado por

$$|\vec{E}| = \rho |\vec{j}| = \frac{\rho I}{S}. \quad (26.8)$$

Este campo  $\vec{E}$  é a resultante da soma do campo  $\vec{E}_b$ , devido à bateria, com o campo  $\vec{E}_q$ , devido às cargas acumuladas na superfície do fio. Os valores das contribuições individuais variam de ponto a ponto, mas a sua soma, não. Em qualquer ponto,  $|\vec{E}_b + \vec{E}_q| = \rho I/S$ . Isto não é fantástico?

Em resumo, no interior do fio, a corrente elétrica corresponde ao movimento de um gás incompressível de elétrons, devido à ação conjunta dos campos  $\vec{E}_b$  da pilha e  $\vec{E}_q$  das cargas induzidas sobre a superfície dele. A corrente que resulta deste processo é uniforme ao longo do fio. Se ele tiver sempre a mesma seção transversal, o módulo da densidade de corrente elétrica é também uniforme no seu interior, como indica a fig.26.4.

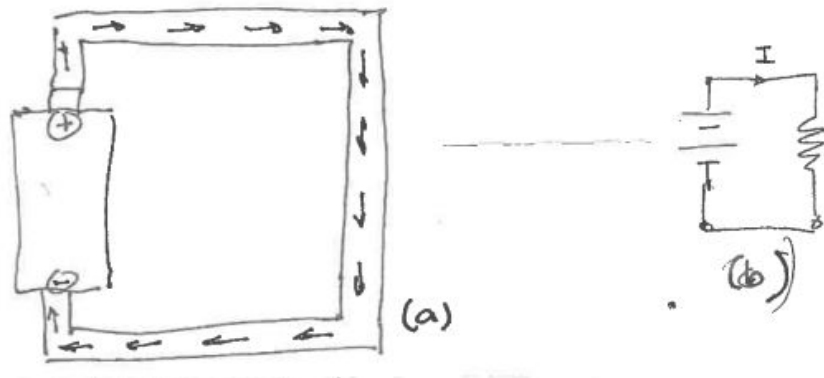


Figura 26.4: Fio ligado a uma bateria: (a) esboço das linhas de campo elétrico resultante; (b) densidade de corrente; (c) representação do sistema.

Para enfatizar o papel das cargas induzidas na superfície do fio, consideremos as figs.26.5 (a) e (b), que envolvem condutores iguais, dobrados de modos diferentes. Como a forma do fio não influi na sua resistência, os dois condutores são percorridos por correntes iguais, o que corresponde a densidades de corrente e campos elétricos que são, em módulo, também iguais em todos os pontos dos seus interiores. No entanto, no ponto P da figura (a),  $\vec{j}$  e  $\vec{E}$  têm sentido horizontal e apontam para a direita, enquanto que, na figura (b), eles têm sentido vertical e apontam para baixo. Deste modo, o *vetor* campo elétrico muda de uma configuração para a outra. O fato de a pilha ser a mesma nos dois casos evidencia que  $\vec{E}_q$  depende da geometria do fio e, portanto, que as distribuições de cargas superficiais variam de um caso para outro.

É difícil explicitar as formas destas distribuições de carga, mas elas sempre se organizam de modo a fazer com que a corrente no fio seja uniforme. Assim, localmente, a corrente sempre

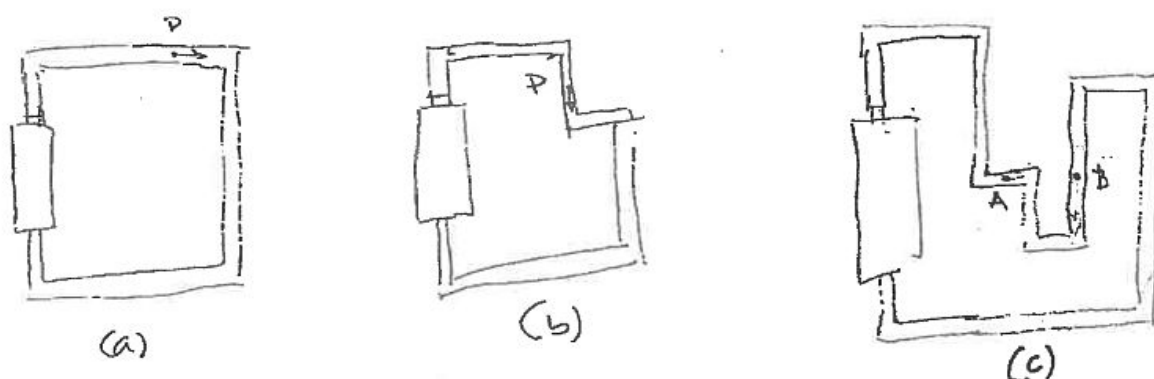


Figura 26.5: Fio dobrado de diferentes modos, ligado a uma bateria.

decorre do campo resultante  $\vec{E}$  e, não, da contribuição da bateria isoladamente. Isto fica claro na figura (c). Nos pontos A e B, por exemplo, o sentido da corrente indica que os campos resultantes são, respectivamente, ortogonal e antiparalelo ao da bateria.

## • um interruptor

A corrente elétrica em um circuito pode ser impedida de circular por meio de interruptores ou chaves, peças móveis que podem desfazer o contato entre dois pedaços de fio. Eles correspondem, esquematicamente, ao que é mostrado na fig.26.6.



Figura 26.6: (a) Fio ligado a uma bateria com o interruptor aberto; (b) representação do sistema.

Por que, com a chave aberta, a corrente não circula? Uma resposta óbvia é dizer que a chave aberta não permite a passagem de elétrons. Apesar de correta, esta afirmação esconde algumas sutilezas. Por exemplo, retomemos o caso do fio ligado à bateria mas, agora, com uma chave. Com a chave fechada, o campo  $\vec{E}$  no ponto P da fig.26.7(a) é o dado pela eq.(26.8). Quando a chave é aberta, não há corrente e a lei de Ohm indica que o campo resultante naquele ponto

passa a ser nulo. Isto mostra que a abertura da chave deu origem a um campo novo, que se superpõe aos já existentes. Este campo novo, mostrado na figura (b), provém do acúmulo de cargas nas extremidades da chave, cuja distribuição se assemelha à de um dipolo elétrico. O novo campo que ela gera, somado com os campos  $\vec{E}_b$  da bateria e  $\vec{E}_q$  das cargas induzidas, que se rearranjam sobre a superfície do fio, faz com que o campo resultante seja nulo em *todos* os pontos do interior do condutor. Neste aspecto, a abertura da chave funciona qualitativamente como uma segunda pilha, similar à primeira, que houvesse sido inserida no circuito, como na figura (c).

Com a chave aberta, a corrente não flui porque todo o sistema está embebido no campo indicado na figura (b). Se fecharmos a chave, a corrente volta a circular com a mesma velocidade com que o campo desaparece. Este desaparecimento do campo de um dipolo, quando as suas cargas voltam a se superpor, envolve ondas eletromagnéticas que se propagam com a velocidade da luz. Como esta velocidade é muito alta e o circuito comparativamente pequeno, o desaparecimento deste campo parece ser instantâneo. Por isso, ao abrirmos a chave, o campo elétrico em cada um dos pontos do interior do condutor pula muito rapidamente de zero para o valor dado na eq.(26.8). Conseqüentemente, a corrente elétrica recomeça a fluir, de modo praticamente simultâneo, em todos os pontos do condutor.

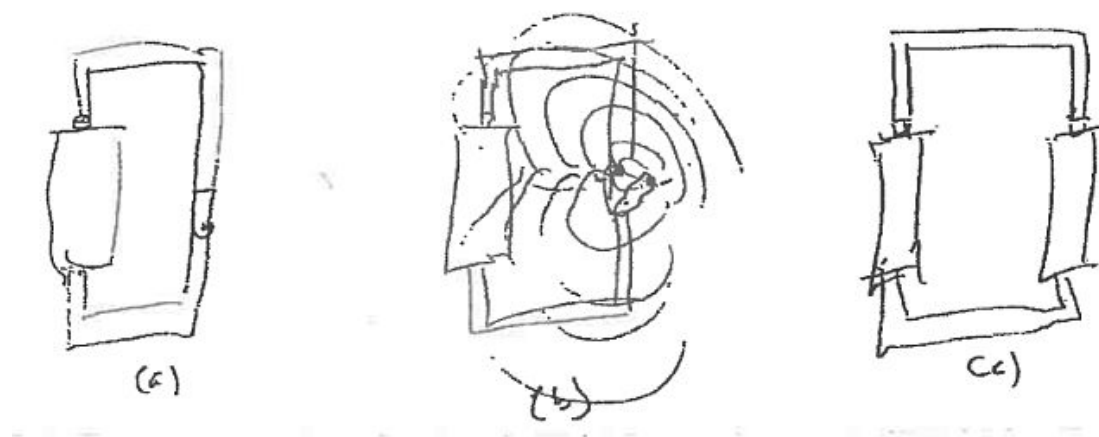


Figura 26.7: Interruptores...

O mesmo tipo de efeito ocorre quando você acende a luz de uma sala, acionando o interruptor. Você já deve ter reparado que, se houver várias lâmpadas na sala, elas não acendem em sequência, primeiro uma, depois a outra... Ao contrário, o acendimento de todas elas é conjunto. Isto ocorre porque, antes de você acionar o interruptor, havia cargas acumuladas nas suas extremidades metálicas e, portanto, um campo do tipo dipolar embebida todo o circuito, o que impedia a passagem da corrente. Quando o interruptor é fechado, este campo é suprimido muito rapidamente e a corrente passa a circular, em todos os elementos do circuito, sejam eles fios ou lâmpadas, de modo praticamente instantâneo. Assim, quando a chave é fechada, a corrente que acende a lâmpada não sai devagarinho do interruptor e vai caminhando pelo interior do fio... A informação que a chave foi fechada é levada pelo campo através do espaço vazio, para todos os pontos do circuito, com a velocidade da luz. Quando esta informação chega, a corrente começa a fluir em todo o circuito de uma só vez.



## • fios e encanamentos

Quando estudamos o que acontece com baterias ligadas a fios metálicos, podemos ser tentados a pensar que eles são análogos a sistemas hidráulicos, nos quais bombas mecânicas fazem água circular através de tubulações. Entretanto, esta não é uma boa analogia e pode induzir a ideias erradas. Uma das diferenças importantes entre estes dois tipos de sistema é que, no caso hidráulico, os encanamentos são entidades materiais, que impedem a passagem da água para o exterior. Por isso, se fizermos uma pressão sobre a água em uma das extremidades de um tubo, por meio de um êmbolo, por exemplo, a água só pode se mover pelo seu interior e sair pelo outro lado, como em uma seringa de injeção. No interior do fluido, um elemento empurra o outro. Um fio elétrico *não* é análogo a este encanamento. Se pensarmos no metal na perspectiva de um elétron no seu interior, ele se mostra constituído por inúmeros íons positivos, que flutuam no espaço, sustentados por forças devidas a campos. Como a importância da gravidade é extremamente pequena, não existe abaixo e acima, todas as direções são praticamente equivalentes. Todo este conjunto é vazado, cheio de buracos. Assim, o elétron não é confinado no interior do fio por paredes físicas, não existe a noção de encanamento. O elétron se mantém confinado na região onde estão os íons por meio de forças elétricas. Sem campos externos, todas as direções são equivalente e ele pode se mover livremente entre dois choques. Quando o fio é ligado a uma bateria, aparece um campo elétrico no seu interior, que causa o movimento de arrasto dos elétrons segundo uma direção privilegiada, determinada pelo campo resultante. Como já discutimos, a direção deste campo em um dado ponto depende tanto do campo produzido pela bateria como do devido às cargas estáticas acumuladas sobre a superfície do fio. É este conjunto de campos que orienta, em cada ponto, o movimento dos elétrons através do fio.



# Capítulo 27

## fios metálicos e baterias

### • introdução

Quando um fio metálico é conectado a uma bateria, os elétrons livres no seu interior se movem sob a ação conjunta de dois campos,  $\vec{E}_b$  produzido pela bateria e  $\vec{E}_q$ , pelas cargas acumuladas na sua superfície, como vimos na aula anterior. Além disso, o emprego combinado da lei de Ohm microscópica e da equação da continuidade permite concluir que a corrente  $I$  é a mesma ao longo de todo o fio. Sendo  $S$  a seção do fio, suposta constante, o módulo da densidade de corrente em qualquer ponto do seu interior é dado pela eq.(26.7) [[[ (26.7) ]]]

$$|\vec{j}| = \frac{I}{S}$$

e o campo elétrico resultante  $\vec{E} = \vec{E}_b + \vec{E}_q$ , com a utilização da lei de Ohm microscópica, eq.(26.8) [[[ (26.8) ]]], tem a forma

$$|\vec{E}| = \rho |\vec{j}| = \frac{\rho I}{S} .$$

Tanto  $|\vec{j}|$  como  $|\vec{E}|$  são uniformes no interior do fio. Estes resultados têm caráter microscópico e, a partir deles, podemos elaborar uma descrição do comportamento do sistema como um todo.

### • a descrição macroscópica

Para formular o problema em uma perspectiva macroscópica, calculamos a circuitação do campo elétrico sobre um caminho matemático fechado  $C$ , composto por dois trechos,  $C_1$  passando pelo interior da bateria e  $C_2$ , pelo interior do fio, mostrados na fig.27.1. No caso da bateria, os campos elétricos que ela cria, tanto no seu interior como no seu exterior, são devidos às cargas acumuladas nos seus polos. Já o campo  $\vec{E}_q$  é devido às densidades existentes na superfície do fio. Em ambos os caso, as cargas podem ser consideradas em repouso e o campo

resultante  $\vec{E} = \vec{E}_b + \vec{E}_q$  é conservativo. Assim, podemos escrever

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = \int_{C_1} [\vec{E}'_b + \vec{E}'_q] \cdot d\vec{c} + \int_{C_2} [\vec{E}_b + \vec{E}_q] \cdot d\vec{c} = 0. \quad (27.1)$$

A equação que descreve o comportamento macroscópico do sistema decorre deste resultado, reescrito como

$$V = \int_{C_2} [\vec{E}_b + \vec{E}_q] \cdot d\vec{c} = - \int_{C_1} [\vec{E}'_b + \vec{E}'_q] \cdot d\vec{c}, \quad (27.2)$$

onde  $V$  é a diferença de potencial  $V = V_+ - V_-$  entre os polos positivo e negativo.

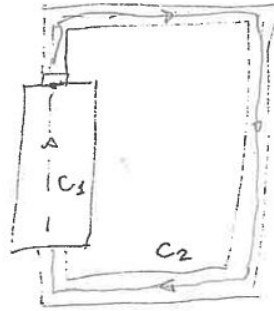


Figura 27.1: Caminho  $C$  fechado e seus trechos  $C_1$  e  $C_2$ .

Usando a lei de Ohm microscópica, eq.(25.8) [eq.(25.8)] no interior do fio e o fato que  $|\vec{E}| = |\vec{E}_b + \vec{E}_q|$  é o mesmo em todos os pontos do caminho  $C_2$ , obtemos

$$V = \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{c} = E L = \rho j L = \frac{\rho L}{S} I = R I, \quad (27.3)$$

onde  $R$  é a sua resistência.

Para determinar  $V$  em termos das características da bateria, é preciso calcular a integral (27.2) no caminho  $C_1$ . Na aula anterior, foi feito um cálculo semelhante, para o caso de uma bateria isolada, onde as forças químicas  $\vec{f}_{\text{quim}}$ , que agem sobre os íons positivos, fazem com que eles se acumulem no polo positivo. Estas forças dão origem à fem

$$\mathcal{E} = \int_{C_1} \frac{\vec{f}_{\text{quim}}}{e} \cdot d\vec{c}. \quad (27.4)$$

Quando a bateria está isolada, o campo  $\vec{E}'_b$  no seu interior, criado pelas cargas acumuladas nos polos, causa forças em sentido contrário a  $\vec{f}_{\text{quim}}$ , a condição de equilíbrio, eq.(26.1) [eq.(26.1)] é  $\vec{f}_{\text{quim}} + e \vec{E}'_b = 0$  e temos  $\mathcal{E} = V$ .

Quando a bateria está ligada ao condutor metálico, esta situação se altera, pois o seu interior também é percorrido pela corrente  $I$ , na forma de um movimento de íons positivos, que vão do polo negativo ao positivo. Este movimento ocorre em um meio resistivo e é causado por uma força resultante  $\vec{f}$ , dada por

$$\vec{f} = \vec{f}_{\text{quim}} + e (\vec{E}'_b + \vec{E}'_q) \quad (27.5)$$

e a existência da corrente indica que  $|\vec{f}_{\text{quim}}|$  é maior do que  $|e(\vec{E}'_b + \vec{E}'_q)|$ . Dividindo esta expressão por  $e$  e integrando sobre o caminho  $C_1$  interno à bateria, escrevemos

$$\int_{C_1} \left[ \frac{\vec{f}_{\text{quim}}}{e} + (\vec{E}'_b + \vec{E}'_q) \right] \cdot d\vec{c} = \int_{C_1} \frac{\vec{f}}{e} \cdot d\vec{c}. \quad (27.6)$$

O lado esquerdo desta expressão é reescrito usando os resultados (27.4) e (27.2) e temos

$$\int_{C_1} \left[ \frac{\vec{f}_{\text{quim}}}{e} + (\vec{E}'_b + \vec{E}'_q) \right] \cdot d\vec{c} = \mathcal{E} - V. \quad (27.7)$$

Se o meio no interior da bateria for ôhmico, a força resultante  $\vec{f}$  que age sobre os íons positivos pode ser relacionada à densidade de corrente pela lei de Ohm microscópica geral, eq.(??) [[[ (25.xx) ]]]], e escrevemos

$$\vec{j}_b = \sigma_b \frac{\vec{f}}{e}, \quad (27.8)$$

onde  $\sigma_b$  é a condutividade do material da bateria. Para calcular o lado direito da eq.(27.6) recorreremos ao nosso modelo esquemático de bateria, adotado para evitar as muitas complexidades das baterias reais. Por simplicidade, supomos que a corrente de íons positivos seja paralela ao trecho de caminho  $C_1$  da fig.27.1 e, também, que ela seja a mesma em qualquer seção transversal  $S_b$  da bateria, o que faz com que  $\vec{j}_b$  tenha o mesmo valor em qualquer ponto do seu interior. De acordo com a lei de Ohm, o mesmo acontece com  $\vec{f}$  e, chamando de  $L_b$  o comprimento da bateria e  $R_b = \rho_b L_b / S_b$  a sua resistência, temos

$$\int_{C_1} \frac{\vec{f}}{e} \cdot d\vec{c} = \frac{f}{e} L_b = \rho_b j_b L_b = \frac{\rho_b L_b}{S_b} I = R_b I. \quad (27.9)$$

Assim, a eq.(27.6) fornece

$$\mathcal{E} - V = R_b I. \quad (27.10)$$

Apesar de obtida no âmbito do modelo simplificado de bateria, este é um resultado importante e geral, que pode ser verificado por meio de experimentos simples. Usando-o na eq.(27.2), encontramos a equação que determina o funcionamento macroscópico do circuito, dada por

$$\mathcal{E} = (R_B + R) I. \quad (27.11)$$

## • em resumo...

Quando um fio é ligado a uma bateria, existe um diálogo entre estes dois elementos. Se, por um lado, a bateria causa a corrente no fio, por outro, o fio influencia o comportamento da bateria. De modo geral, quando uma bateria é ligada a um circuito, algumas das suas características mudam e outras, não. A sua fem  $\mathcal{E}$ , que representa o efeito das forças químicas entre os dois

polos da bateria, dada pela eq.(27.4) não se altera de uma situação para a outra. Já a diferença de potencial  $V$  entre os polos da bateria depende das características do circuito do qual ela faz parte. Ela é determinada pela eq.(27.2) e sintetizada pela relação

$$V = RI . \quad (27.12)$$

Usando a eq.(27.10), podemos também escrever

$$V = \mathcal{E} - R_b I . \quad (27.13)$$

Como  $\mathcal{E}$  é uma característica da bateria, a diferença de potencial entre os seus polos é  $V \leq \mathcal{E}$ , sendo que a igualdade só acontece se  $I = 0$ . Quando existe corrente,  $V$  é menor do que  $\mathcal{E}$ . Eliminando  $I$  entre as eqs.(27.12) e (27.13), obtemos

$$V(R) = \frac{R}{R + R_b} \mathcal{E} . \quad (27.14)$$

Este resultado indica que, se a resistência interna da bateria  $R_b$  for pequena comparada à resistência  $R$  do circuito,  $R_b \ll R$ , temos  $V \simeq \mathcal{E}$ .

### • exemplo 1

Uma bateria comum tem fem  $\mathcal{E} = 1,5 \text{ V}$  e resistência interna  $R_b = 0,6 \Omega$ , aproximadamente. Desejamos determinar a diferença de potencial  $V$  entre seus polos quando ela está ligada a um fio de cobre de comprimento  $L$  e seção transversal circular, de diâmetro  $0,2 \text{ mm}$ , sabendo que a resistividade deste metal é  $\rho = 1,68 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ .

O fio, que tem diâmetro comparável ao de duas folhas de papel, corresponde a uma seção transversal  $S = 3,14 \times 10^{-8} \text{ m}^2$  e tem uma resistência  $R = 0,53 L \Omega$ , quando  $L$  é expresso em m. A razão  $V/\mathcal{E}$  entre a diferença de potencial  $V$  e a fem  $\mathcal{E}$  é obtida a partir da eq.(27.14), e os resultados, para alguns valores de  $L$ , são mostrados na tabela, juntamente com as correntes, calculadas usando a eq.(27.11). Podemos notar que, para valores de  $L$  pequenos,  $V$  é bastante diferente de  $\mathcal{E}$ . Para  $L = 1,13 \text{ m}$ , as resistências  $R$  do fio e  $R_b$  da bateria ficam iguais, o que dá uma ideia da importância desta última. Como esperado,  $V \rightarrow \mathcal{E}$  para valores grandes de  $L$ .

$L$ (m)	0,20	0,50	1,13	2,0	10	20	$\infty$
$R$ ( $\Omega$ )	0,11	0,27	0,60	1,07	5,35	10,7	$\infty$
$V/\mathcal{E}$	0,15	0,31	0,50	0,64	0,90	0,95	1
$I$ (A)	2,11	1,72	1,25	0,90	0,25	0,13	0

### • exemplo 2

É dado um trecho de um condutor feito com um metal de resistividade  $\rho$ , com seção transversal circular e a seção longitudinal mostrada na fig.27.2, percorrido por uma corrente estacionária  $I$ . Desejamos determinar a resistência  $R$  deste trecho de condutor.

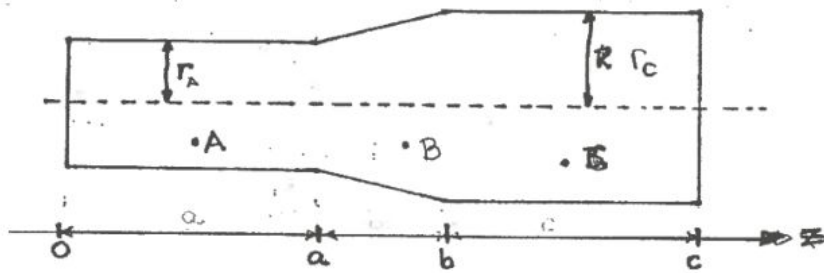


Figura 27.2: Fio metálico de seção transversal circular, com raio variável.

Esta resistência é dada pela associação em série dos trechos: (1)  $\rightarrow 0 \leq x \leq a$ , (2)  $\rightarrow a \leq x \leq b$  e (3)  $\rightarrow b \leq x \leq c$ . Para os trechos cilíndricos, temos

$$R_1 = \frac{\rho}{\pi} \frac{a}{r_1^2}, \quad (27.15)$$

$$R_3 = \frac{\rho}{\pi} \frac{(c-b)}{r_3^2}. \quad (27.16)$$

O valor de  $R_2$  é calculado com base em uma associação em série de contribuições elementares dadas por

$$dR_2 = \frac{\rho}{\pi} \frac{dz}{[r_2(z)]^2}, \quad (27.17)$$

onde  $r_2(z)$  representa o raio variável da seção transversal no trecho (2), dado por

$$r_2(z) = \frac{[b r_1 - a r_3 + (r_3 - r_1) z]}{(b-a)}. \quad (27.18)$$

Assim,

$$R_2 = \int_a^b dz \frac{\rho}{\pi} \frac{(b-a)^2}{[b r_1 - a r_3 + (r_3 - r_1) z]^2}. \quad (27.19)$$

A integração é efetuada usando a variável  $u = [b r_1 - a r_3 + (r_3 - r_1) z]$  e obtemos

$$R_2 = -\frac{\rho}{\pi} \frac{(b-a)^2}{r_3 - r_1} \left[ \frac{1}{[b r_1 - a r_3 + (r_3 - r_1) z]} \right]_a^b = \frac{\rho}{\pi} \frac{(b-a)}{r_1 r_3}. \quad (27.20)$$

Como esperado, este resultado se reduz ao de um cilindro quando  $r_1 = r_3$ .

Assim, a resistência do trecho de fio é dada por

$$R = \frac{\rho}{\pi} \left[ \frac{a}{r_1^2} + \frac{(b-a)}{r_1 r_3} + \frac{(c-b)}{r_3^2} \right]. \quad (27.21)$$

A diferença de potencial entre as extremidades do condutor é dada por  $V = RI$ .

### • exemplo 3 - fio com três tipos de metal

O circuito da fig.27.3 é formado por uma bateria de fem  $\mathcal{E}$  e resistência interna  $R_b$ , cujos extremos são conectados por três fios metálicos, cilíndricos, de mesma seção transversal  $S$ , cada um deles de comprimento  $L$ , ligados em série, como mostra a figura. Os fios são feitos de materiais diferentes e têm resistividade  $\rho_1 > \rho_2 < \rho_3$ . Desejamos determinar a corrente  $I$  que percorre este circuito, bem como as suas características microscópicas.

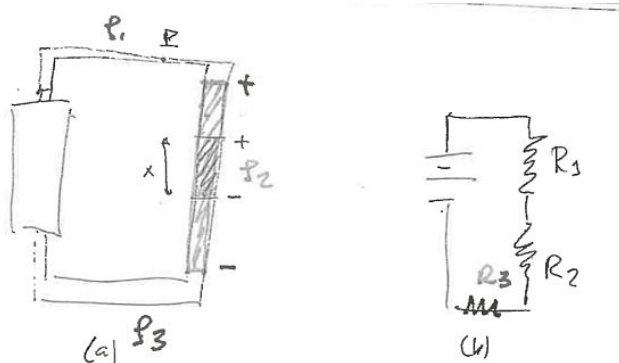


Figura 27.3: (a) Bateria conectada a três fios metálicos de diferentes resistividades; (b) representação do sistema.

A corrente  $I$  é determinada a partir da relação  $I = \mathcal{E}/R$ , onde  $R$  é a resistência total do sistema. As resistências dos três trechos de fio são dadas por

$$R_1 = \rho_1 \frac{L}{S}, \quad R_2 = \rho_2 \frac{L}{S}, \quad R_3 = \rho_3 \frac{L}{S} \quad (27.22)$$

e, portanto,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_b + (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) L/S}. \quad (27.23)$$

Este resultado pode ser reescrito em termos da diferença de potencial  $V$  entre os polos da bateria, como

$$I = \frac{V S}{(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) L}. \quad (27.24)$$

A seção transversal do fio é uniforme e, já que cargas não se acumulam continuamente no interior do metal, a corrente  $I$  é a mesma em todos os seus pontos. O mesmo acontece com o módulo da sua densidade, dado por

$$|\vec{j}_1| = |\vec{j}_2| = |\vec{j}_3| = \frac{V}{(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) L}. \quad (27.25)$$

Este resultado é interessante porque indica que a densidade de corrente em um ponto do interior do fio 1, por exemplo, depende tanto da resistividade  $\rho_1$  do metal em torno daquele ponto, como das densidades  $\rho_2$  e  $\rho_3$  de metais localizados em outras partes do circuito. Tanto  $I$  como as densidades de corrente são determinadas, à uma, por características locais e globais do sistema. Assim, o circuito é tanto um conjunto de partes quanto uma totalidade. E a integração do sistema se dá pela ação de campos elétricos.



Os módulos dos campos elétricos no interior dos trechos de fio, obtidos por meio da lei de Ohm microscópica, dependem do metal considerado, sendo dados por

$$|\vec{E}_1| = \frac{V \rho_1}{(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) L}, \quad |\vec{E}_2| = \frac{V \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) L}, \quad |\vec{E}_3| = \frac{V \rho_3}{(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) L}. \quad (27.26)$$

Estes resultados mostram que o campo em um ponto de um dado fio também é influenciado pelas características de elementos distantes dele. Como supomos que  $\rho_1 > \rho_2 < \rho_3$ , estes resultados mostram que  $|\vec{E}_1| > |\vec{E}_2| < |\vec{E}_3|$ . Estes campos são descontínuos na interface entre dois metais diferentes, o que indica a presença de uma densidade de cargas nesta região. Usando a lei de Gauss, como foi feito no exemplo 2 da aula 25, determinamos as densidades superficiais de carga  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{23}$  nas interfaces 1-2 e 2-3, que são dadas por

$$\sigma_{12} = \epsilon_0 \left( |\vec{E}_2| - |\vec{E}_1| \right) = \epsilon_0 \frac{V (\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) L} < 0, \quad (27.27)$$

$$\sigma_{23} = \epsilon_0 \left( |\vec{E}_3| - |\vec{E}_2| \right) = \epsilon_0 \frac{V (\rho_3 - \rho_2)}{(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) L} > 0. \quad (27.28)$$

Estas densidades de carga funcionam como novas fontes de campos elétricos  $\vec{E}_{\sigma_{12}}$  e  $\vec{E}_{\sigma_{23}}$ , que existem em todo o espaço, inclusive no interior da bateria e dos fios, como sugere a fig.27.3. Estes campos, somados ao  $\vec{E}_b$  da bateria e ao  $\vec{E}_q$  das cargas distribuídas sobre a superfície do fio, produzem as resultantes dadas na eq.(27.26). Isto explica, por exemplo, porque  $\rho_2$  e  $\rho_3$  estão presentes na expressão de  $|\vec{E}_1|$ . Como esperado, a densidade de carga em uma interface depende da diferença das resistividades dos dois metais que a determinam e se anula quando elas se tornam iguais.

Para concluir, notamos que existem materiais, tais como o carbono, que podem ter resistividades milhares de vezes mais altas do que metais como cobre ou prata. Suponhamos, por exemplo, que o trecho (2) do metal seja substituído por uma barra de carbono de mesmas dimensões. Neste caso  $\rho_2 \gg \rho_1 \sim \rho_3$  e os resultados anteriores ficam mais simples. A corrente passa a ser dada por  $I \simeq V S / (\rho_2 L)$  e os módulos da sua densidade são  $|\vec{j}_1| = |\vec{j}_2| = |\vec{j}_3| \simeq V / (\rho_2 L)$ . Já os módulos dos campos elétricos tornam-se  $|\vec{E}_1| \sim |\vec{E}_3| \sim 0$  e  $|\vec{E}_2| \simeq V / L$ . Assim, a diferença de potencial entre os polos da bateria e os extremos da barra de grafite é muito pequena. Finalmente, as densidades de carga acumuladas nas interfaces metal-grafite são dadas por  $\sigma_{12} = -\sigma_{23} \simeq \epsilon_0 V / L$ . É interessante perceber que, no limite  $\sigma_{12} = -\sigma_{23} \rightarrow \epsilon_0 V / L$ , temos  $I \rightarrow 0$ . Isto ocorre porque, neste limite, o efeito do campo criado pelas distribuições de carga se torna igual e contrário ao da bateria.

## • exercícios

1. Considere o circuito do exemplo 3 para duas situações: 1)  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$  e 2)  $\rho_1 = \rho_3 > \rho_2$ .
  - a) calcule os módulos do campo elétrico resultante nos vários trechos do fio em cada uma delas;
  - b) desenhe os dois sistemas e o vetor campo elétrico em vários trechos do fio;
  - c) desenhe os dois sistemas e indique a intensidade do campo elétrico nos vários trechos do fio, por meio de linhas de campo;
  - d) a partir dos desenhos anteriores, determine os sinais das distribuições de cargas nas interfaces entre metais diferentes;

- e) a partir do resultado do item anterior, esboce as linhas de campo em todo o espaço criado pelas interfaces entre os dois metais e discuta a consistência com os resultados do item a).
- f) usando a lei de Gauss, calcule as densidades de cargas nas interfaces de separação entre os dois metais diferentes.

• respostas

1. a)  $|\vec{E}| = \frac{V}{L} \rightarrow |\vec{E}_A| = \frac{V}{(L-x)+x\rho_B/\rho_A}$ ,  $|\vec{E}_B| = \frac{V}{x+(L-x)\rho_A/\rho_B}$ ,

f)  $|\sigma| = \epsilon_0 \frac{|\rho_A - \rho_B|V}{\rho_A(L-x) + \rho_B x}$ .

# Capítulo 28

## magnetismo - leis de Gauss e de Biot e Savart

### • introdução

Alguns tipos de material, chamados de ímãs naturais, têm propriedades magnéticas e o conhecimento deles é muito antigo. Evidência disto é que a palavra magnetismo deriva de Magnésia, uma região da Grécia onde podiam ser encontradas naturalmente pedras que se atraíam, sendo que este tipo de fenômeno já havia sido descrito por filósofos há mais de 2.500 anos. Os ímãs naturais permitiram a invenção da bússola pelos chineses há 2.000 anos e, como sabemos, estes instrumentos tiveram papel importante nas grandes navegações portuguesas, que começaram a se tornar importantes a partir de 1.460.

A propriedade mais evidente dos ímãs é a sua capacidade de atrair pedaços de ferro e interagir com outros ímãs por meio de forças de atração e repulsão. Como podemos perceber facilmente, estas interações se dão à distância, sem a necessidade de contato físico direto. Este tipo de característica levou o médico inglês William Gilbert a imaginar a Terra como um grande ímã, como descreve em seu livro intitulado *Sobre Ímãs, os Corpos Magnéticos e o Grande Ímã Terrestre*, mais conhecido abreviadamente como *De Magnete*. Para estudar o comportamento magnético da Terra em detalhe, Gilbert construiu um modelo dela como uma esfera contendo um ímã, a *terrella* e compreendeu que a sua influência sobre as bússolas tem origem magnética. É curioso que ele já recorre a desenhos de flechas para representar esta influência.

A descrição atual das interações magnéticas é baseada no campo magnético, representado por  $\vec{B}$ . Esta ideia, introduzida apenas no século 19, permite compreender porque interações magnéticas ocorrem à distância. Quando um ímã é colocado em presença de limalha de ferro, notamos que ela fica disposta sobre linhas de campo magnético e, também, que estas parecem sair de regiões opostas do ímã, como mostra a fig.28.1(a). Por analogia com o comportamento magnético da Terra, estas regiões costumam ser chamadas de polos norte e sul do ímã. Nas interações ímã-ímã, podem ser observadas forças que parecem ter origem nos seus polos, sendo que polos iguais se repelem e polos diferentes se atraem, como indica a figura (b).

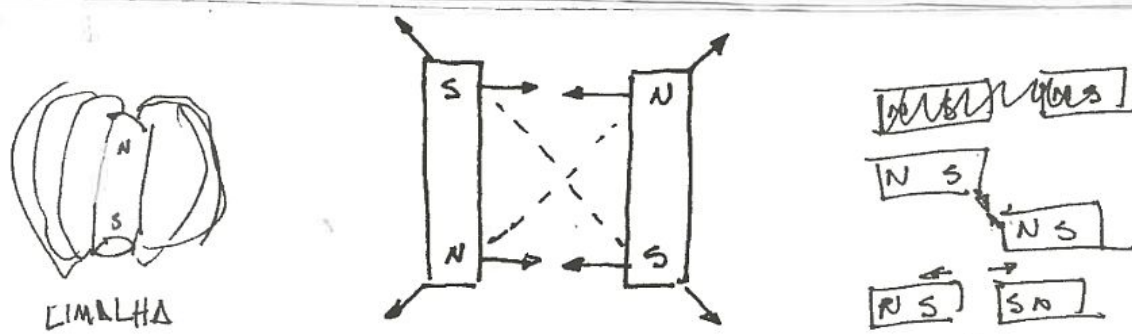


Figura 28.1: REVER (a) limalha; (b) interação entre os polos de dois ímãs.

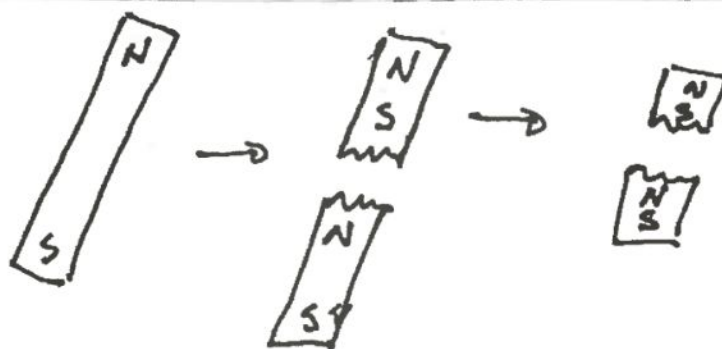


Figura 28.2: A quebra de um ímã resulta em outros dois, cada um deles com polos norte e sul.

A existência de dois polos diferentes e a ocorrência de forças de atração e repulsão pode sugerir que as interações magnéticas são, de algum modo, análogas às eletrostáticas. Entretanto, no contexto das equações de Maxwell, a existência do campo magnético *não é* atribuída a cargas magnéticas, que poderiam estar localizadas nos polos do ímã. Estas cargas, também conhecidas como monopolos magnéticos não são necessárias para descrever os fenômenos conhecidos atualmente<sup>1</sup>. A não-existência de cargas magnéticas está associada à impossibilidade de separar os polos norte e sul de um ímã, uma característica fenomenológica muito importante. Quando se tenta separar os polos de um ímã quebrando-o em dois, nas extremidades de cada fragmento surgem polos norte e sul. Deste modo, a quebra transforma um ímã com polos norte e sul em dois novos ímãs, cada um deles com polos norte e sul, como mostra a fig.28.2. Este processo se repete sempre que tornamos a quebrar os fragmentos do ímã e esta impossibilidade de separar os seus polos norte e sul indica que cargas magnéticas não são observadas.

### • lei de Gauss magnética

<sup>1</sup>O fato de monopolos magnéticos não terem sido observados não significa que isto não possa vir a acontecer no futuro e o assunto ainda é objeto de especulação.

A noção de que cargas magnéticas não são observadas é expressa pela lei de Gauss do magnetismo. Ela constitui uma das quatro equações de Maxwell e é formalmente análoga à lei de Gauss da eletricidade.

Na forma integral, a lei de Gauss do magnetismo é escrita como

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0, \quad (28.1)$$

onde  $S$  é uma superfície matemática fechada qualquer e  $\hat{n}$  é a normal a ela, apontando para fora. A sua forma diferencial é obtida por meio do teorema de Gauss, dado pela eq.(??), que permite escrever

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (28.2)$$

A lei de Gauss magnética, em qualquer das formas, representa a inexistência de cargas magnéticas. Consequentemente, linhas de campo magnético não têm de onde ser criadas ou onde ser absorvidas e, por isso, elas são sempre fechadas. É deste modo que elas existem, sem ter começo ou fim.

## • correntes e campos magnéticos

Ímãs naturais eram as únicas fontes de informação sobre fenômenos magnéticos até 1.820, quando o físico dinamarquês Hans Christian Oersted demonstrou, em laboratório, que correntes elétricas eram capazes de influenciar bússolas. Esquemáticamente, o experimento de Oersted consiste em passear com uma bússola nas vizinhanças de um fio metálico percorrido por uma corrente elétrica. Ao fazer isto, notamos que a bússola tende a ficar orientada tangencialmente a uma circunferência com centro no fio, como na fig.28.3. Um experimento deste tipo permite a conclusão direta que a corrente influencia a bússola. Quando reinterpretado em termos atuais, ele indica que uma corrente elétrica  $I$  cria um campo magnético  $\vec{B}$ . Além disso, consistentemente com a lei de Gauss magnética, ele mostra que as linhas de campo magnético em torno do fio são fechadas, que não têm começo nem fim. Na sequência, exploramos os aspectos matemáticos da relação entre  $I$  e  $\vec{B}$ .

## • lei de Biot e Savart

No fim de 1820, o mesmo ano em que Oersted percebeu a relação entre correntes elétricas e magnetismo, dois físicos franceses, Jean-Baptiste Biot e Félix Savart, realizaram medições cuidadosas destes efeitos e propuseram uma lei empírica. Após algumas correções, esta primeira versão deu origem ao que é hoje conhecido com *lei de Biot e Savart*. Ela descreve a estrutura matemática de campos magnéticos criados por correntes estacionárias, que não variam com o tempo, e é apresentada a seguir.

Um fio metálico percorrido por uma corrente elétrica cria, nas suas vizinhanças, um campo magnético descrito por um vetor  $\vec{B}$ , cujas propriedades, módulo, direção e sentido, dependem

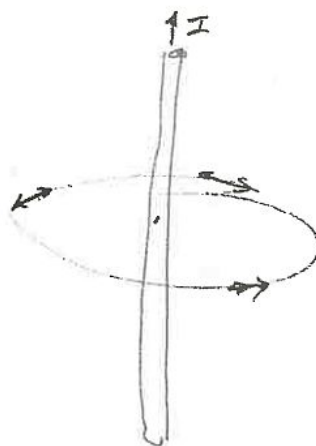


Figura 28.3: Oersted: corrente orientando bússolas.

do ponto do espaço considerado. A ideia básica da lei de Biot e Savart é que o fio pode ser pensado matematicamente como uma sucessão de trechos pequenos e que a contribuição de cada um desses trechos, representada por  $d\vec{B}$ , pode ser calculada pela expressão que eles propuseram. Deste modo, o campo criado pelo fio é dado pela somatória de todas as contribuições individuais, representada por

$$\vec{B} = \int_{\text{fio}} d\vec{B}. \quad (28.3)$$

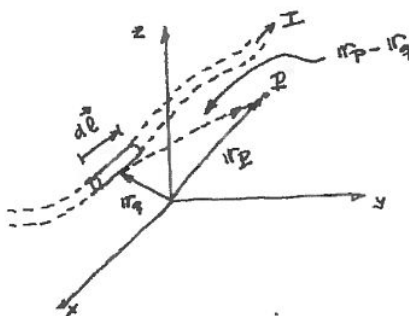


Figura 28.4: Biot e Savart: trecho elementar de fio com corrente  $I$  e coordenadas para o cálculo de  $d\vec{B}$  no ponto  $P$ .

Para utilizar a expressão matemática da lei, é conveniente empregar um sistema de referência como o mostrado na fig.28.4, já que é preciso especificar as várias características geométricas do pedacinho de fio considerado e do ponto onde o campo é calculado:

- a posição do pedacinho de fio, relativamente à origem do sistema de coordenadas, representada pelo vetor  $\vec{r}_I$ ;
- o pedacinho de fio representado pelo vetor  $d\vec{\ell}$ , com módulo igual ao seu comprimento e direção e sentido paralelos à corrente  $I$  que o percorre;

- a posição do ponto  $P$  onde o campo é calculado, relativamente à origem do sistema de coordenadas, descrita pelo vetor  $\vec{r}_P$ .

A expressão da lei envolve, também, uma constante empírica  $\mu_0$ , a *permeabilidade magnética do vácuo*.

Segundo a lei de Biot e Savart, um trecho elementar de fio localizado no ponto  $\vec{r}_I$ , com comprimento e orientação definidos pelo vetor  $d\vec{\ell}$ , percorrido por uma corrente  $I$ , cria num ponto  $P$  determinado pelo vetor  $\vec{r}_P$ , uma contribuição  $d\vec{B}$  ao campo magnético dada por

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{\ell} \times \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_I)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_I|^3}. \quad (28.4)$$

Esta expressão tem várias características importantes e indica que o campo magnético criado pelo elemento de fio

- é linear na corrente  $I$ ;
- depende de  $\vec{r}_P$  e  $\vec{r}_I$  apenas através da diferença  $(\vec{r}_P - \vec{r}_I)$ , que representa a posição do ponto  $P$  observada a partir do pedacinho de fio;
- o fator  $(\vec{r}_P - \vec{r}_I) / |\vec{r}_P - \vec{r}_I|^3$  indica que a intensidade de  $d\vec{B}$  cai com o inverso do quadrado da distância do fio ao ponto considerado;
- a direção e o sentido de  $d\vec{B}$  são dados por um produto vetorial e ela é, simultaneamente, perpendicular ao trecho de fio que o criou e ao vetor que o liga ao ponto considerado.

Esta última propriedade corresponde à chamada *regra da mão direita*, que relaciona os sentidos da corrente  $I$  e de  $d\vec{B}$ . Segundo esta regra, se segurarmos o fio com a mão direita e com o polegar alinhado com a corrente, os demais dedos indicam a orientação do campo magnético produzido.

No SI, a unidade de campo magnético é o *tesla*, representado por T. Apesar de prática, esta unidade não é fundamental e pode ser transformada em outras. Por exemplo,  $T = [N/(Am)] = [Ns/(Cm)]$ . Para fornecer uma ordem de grandeza desta unidade, notamos que a intensidade do campo magnético terrestre, próximo à superfície, é da ordem de  $10^{-5}$  T. A constante característica do magnetismo é dada por  $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$  Tm/A.

## • exemplo 1

Espiras são circuitos simples, formadas por um fio metálico fechado em si mesmo, que podem ter formas diversas: circulares, quadradas etc. Quando uma espira é percorrida por uma corrente elétrica  $I$  independente do tempo, à sua volta existe um campo magnético, com orientação genérica dada pela regra da mão direita. Um exemplo é o da fig.28.5(a). Por meio da lei de Biot e Savart, podemos calcular o campo magnético  $\vec{B}$  em qualquer ponto da vizinhança da espira. Entretanto, este cálculo é tecnicamente complicado e, por isso, nós aqui calculamos apenas o campo magnético criado por uma espira de raio  $R$ , percorrida por uma corrente  $I$ , num ponto  $P$  de seu eixo, distante  $Z$  do seu centro, como mostra a figura (b).

O passo inicial para este cálculo consiste em explicitar os vários vetores envolvidos. A posição

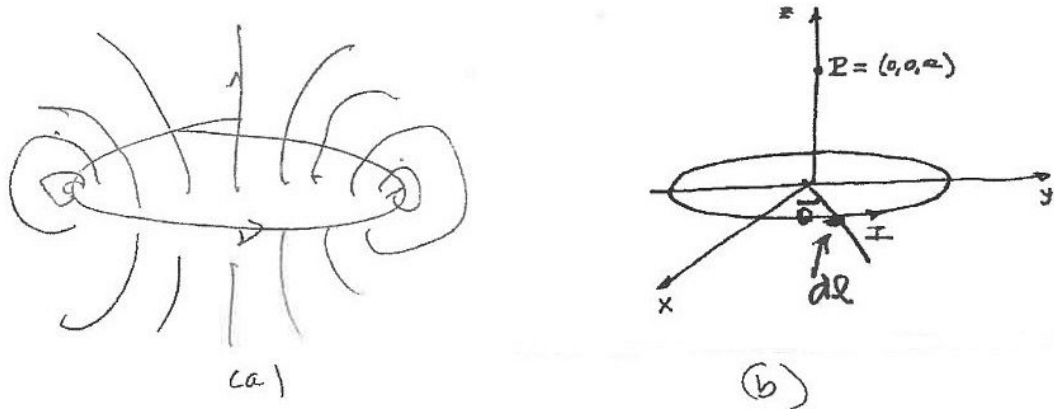


Figura 28.5: Espira circular: (a) linhas de campo magnético; (b) o elemento  $d\vec{\ell}$  do fio e as coordenadas do ponto P.

do ponto P é dada por

$$\vec{r}_P = Z \hat{k}. \quad (28.5)$$

Como a espira está apoiada sobre o plano  $xy$ , a posição genérica de um pedacinho é descrita por

$$\vec{r}_I = R [\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}], \quad (28.6)$$

enquanto que o seu comprimento  $d\ell = R d\theta$  e a sua orientação espacial são incorporadas no vetor

$$d\vec{\ell} = (R d\theta)[- \sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}]. \quad (28.7)$$

Você pode verificar explicitamente que, neste problema,  $d\vec{\ell} \cdot \vec{r}_I = 0$ .

A contribuição do pedacinho  $d\vec{\ell}$  ao campo magnético é dada pela lei de Biot e Savart, eq.(28.4), escrita como

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I (R d\theta)[- \sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}] \times \frac{[Z \hat{k} - R \cos\theta \hat{i} - R \sin\theta \hat{j}]}{[R^2 + Z^2]^{3/2}}, \quad (28.8)$$

usando  $|\vec{r}_P - \vec{r}_I|^2 = [R^2 + Z^2]$ . Efetuando o produto vetorial, obtemos

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I R d\theta \frac{[Z \cos\theta \hat{i} + Z \sin\theta \hat{j} + R \hat{k}]}{[R^2 + Z^2]^{3/2}}. \quad (28.9)$$

O campo magnético total é dado pela soma das contribuições de todos os pedacinhos da espira, como indicado na eq.(28.3) e temos

$$\vec{B} = \int_0^{2\pi} d\theta \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I R}{[R^2 + Z^2]^{3/2}} (Z \cos\theta \hat{i} + Z \sin\theta \hat{j} + R \hat{k}) \right]. \quad (28.10)$$

As integrações nas direções  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  se anulam e obtemos

$$\vec{B}(Z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi R^2}{[R^2 + Z^2]^{3/2}} \hat{k}. \quad (28.11)$$



Esta expressão mostra que o campo magnético em um ponto do eixo  $z$  é paralelo a este eixo, um resultado compatível com a simetria do problema e a regra da mão direita.

O campo é máximo no centro da espira, onde  $Z = 0$ , e é dado por

$$\vec{B}(Z = 0) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi}{R} \hat{k}, \quad (28.12)$$

enquanto que, para valores muito grandes de  $Z$ , temos

$$\vec{B}(Z \gg R) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi R^2}{Z^3} \hat{k}. \quad (28.13)$$

## • exemplo 2

Desejamos calcular o campo magnético produzido pela espira mostrada na fig.28.6, na origem do sistema de coordenadas, quando ela é percorrida por uma corrente  $I$ .

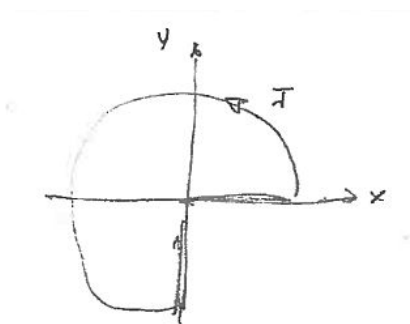


Figura 28.6: Espira com corrente  $I$ .

Neste caso,  $\vec{r}_P = 0$ , enquanto que as expressões que descrevem  $\vec{r}_I$  e  $d\vec{\ell}$  dependem do trecho considerado. Estes vetores podem ser escritos formalmente, mas a solução do problema fica mais simples se notarmos que, nos trechos retilíneos,  $\vec{r}_I$  e  $d\vec{\ell}$  são paralelos. Por isso, já que  $\vec{r}_P = 0$ , o produto vetorial se anula na expressão da lei de Biot e Savart, eq.(28.4). Por este motivo, os trechos retilíneos não contribuem e basta considerar o arco de circunferência. A contribuição dos pedacinhos neste trecho é calculada como no exemplo 1 e podemos nos apropriar diretamente do resultado (28.9) com  $Z = 0$ , que fornece

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} d\theta \hat{k}. \quad (28.14)$$

Integrando sobre o fio, obtemos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\pi I}{2R} \hat{k}. \quad (28.15)$$

Você pode verificar que a direção e sentido deste vetor são consistentes com a regra da mão direita.

• exemplo 3

Supondo que o circuito da fig.28.7 seja percorrido por uma corrente constante  $I$ , qual é o vetor campo magnético na origem do sistema de coordenadas?

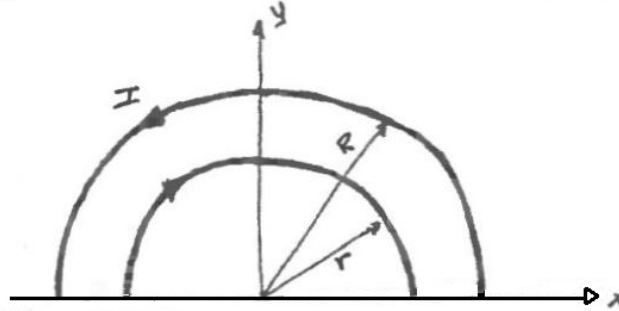


Figura 28.7: Espira com corrente  $I$ .

Neste exemplo,  $\vec{r}_P = 0$  e, pela mesma razão discutida no exemplo 2, a contribuição dos trechos retilíneos é nula. Para a semi-circunferência maior temos,

$$\vec{r}_I = R [\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}], \quad (28.16)$$

$$d\vec{\ell} = (R d\theta)[- \sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}], \quad (28.17)$$

enquanto que, para a menor, escrevemos

$$\vec{r}_I = r [\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}], \quad (28.18)$$

$$d\vec{\ell} = (r d\theta)[\sin\theta \hat{i} - \cos\theta \hat{j}]. \quad (28.19)$$

Note que os sinais de  $d\vec{\ell}$  nas eqs.(28.17) e (28.19) são opostos. Isto ocorre porque, na lei de Biot e Savart, este vetor é sempre orientado segundo a corrente. Por isso, para as duas semi-circunferências temos

$$\text{maior :} \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} d\theta \hat{k}, \quad \rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\pi I}{R} \hat{k}. \quad (28.20)$$

$$\text{menor :} \quad d\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} d\theta \hat{k}, \quad \rightarrow \quad \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\pi I}{R} \hat{k}. \quad (28.21)$$

É interessante verificar os sinais destas duas contribuições usando a regra da mão direita. O campo resultante desta espira é dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \pi I \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right] \hat{k}, \quad (28.22)$$

sendo antiparalelo ao eixo  $z$ .

## • correntes em ímãs

Nesta aula vimos que, até o presente, não foram encontrados monopolos magnéticos e, também, que correntes produzem campos magnéticos. Isto indica que os efeitos magnéticos produzidos por ímãs também podem ser atribuídos a correntes. Este, de fato, é o caso, só que as correntes envolvidas são microscópicas, internas aos átomos. Elétrons atômicos pode tanto girar em torno do núcleo como em torno do seu próprio eixo, analogamente aos movimentos da Terra em torno do Sol e de si mesma. Como o elétron é carregado, seus movimentos dão origem a correntes microscópicas, cada uma delas produzindo campos magnéticos. Neste aspecto, um átomo de Fe é análogo a uma espira microscópica percorrida por uma corrente, como sugere a fig.28.8(a).

Os ímãs mais tradicionais são feitos de compostos contendo átomos de Fe, nos quais 26 elétrons orbitam em torno do núcleo. A estrutura do átomo de Fe, que somente pode ser bem descrita por meio da mecânica quântica, é tal que o campo magnético resultante das várias correntes internas é não nulo. Uma característica do Fe e, também do Co e do Ni é que, quando dois átomos são colocados lado a lado, os seus campos magnéticos tendem a ficar alinhados. Quando as amostras de materiais têm dimensões macroscópicas e envolvem um número muito grande de átomos, as organizações internas são mais complexas e envolvem os chamados domínios, discutidos na aula 32 do segundo volume deste texto. Quando um objeto contendo átomos deste tipo é submetido a campos magnéticos macroscópicos e costumamos dizer que ele ficou imantado.

Um átomo de Fe é análogo a uma espira com corrente, dois átomos alinhados são análogos a duas espiras e muitos átomos são análogos a muitas espiras. Entretanto, como sugere a figura (b), no que diz respeito ao campo magnético, duas espiras também são análogas a uma espira maior e muitas espiras, análogas a uma espira muito maior. Por isso o efeito global produzido por muitos átomos de Fe alinhados, cada um deles análogo a uma espira, é qualitativamente equivalente ao de uma corrente sobre a superfície do corpo. Este modo de pensar sobre o problema é motivado apenas porque em algumas discussões qualitativas fica mais fácil aplicar a intuição se pensarmos um ímã como um conjunto de espiras macroscópicas. Mas esta é apenas uma imagem conveniente, pois os efeitos magnéticos do ímã são, de fato, produzidos por mecanismos mais complexos, tratados na aula 32 do segundo volume deste texto.

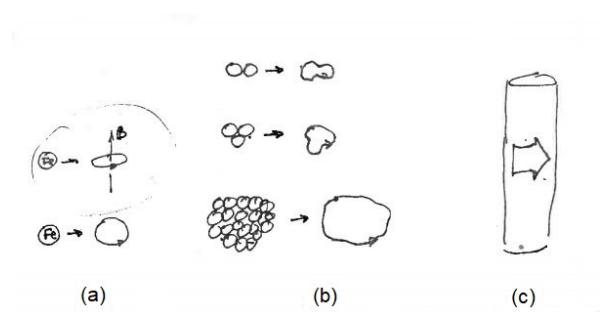
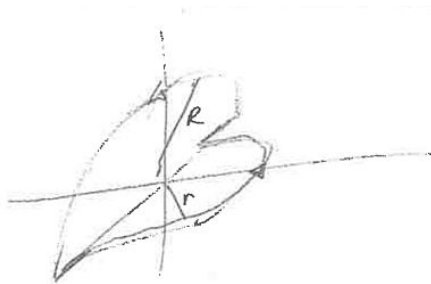


Figura 28.8: Correntes em um ímã: (a) um átomo de Fe é análogo a uma espira com corrente; (b) várias espiras são equivalentes a uma espira maior; (c) efeito global produzido por muitos átomos alinhados como modelo de um ímã.

• **exercícios**

1. Faça um desenho em três dimensões representando o vetor  $[Z \cos\theta \hat{i} + Z \sin\theta \hat{j} + R \hat{k}]$ , que indica a direção e o sentido do campo magnético  $d\vec{B}$  dado pela eq.(28.9) e mostre que ele é coerente com a aplicação da regra da mão direita ao pedacinho de fio representado pelo vetor  $d\vec{\ell}$ , dado pela eq.(28.7).
2. Considere a espira mostrada na figura e calcule o campo magnético na origem do sistema de coordenadas, quando ela é percorrida por uma corrente  $I$ .



3. Na eq.(28.22), quais são as previsões para o sentido de  $\vec{B}$  nos casos
  - a)  $r < R$ ;
  - b)  $r = R$ ;
  - c)  $r > R$ ;
  - d) interprete fisicamente estes resultados.

• **respostas**

2.  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \pi I \left[ \frac{1}{R} \hat{j} + \frac{1}{r} \hat{k} \right]$ .
3. a)  $r < R \rightarrow$  antiparalelo ao eixo  $z$ ;  
 b)  $r = R \rightarrow$  o campo é nulo;  
 c)  $r > R \rightarrow$  paralelo ao eixo  $z$ .

# Capítulo 29

## lei de Biot e Savart - aplicações

Nesta aula, apresentamos exemplos de cálculos de campos magnéticos produzidos por correntes estacionárias, envolvendo fios retilíneos.

### • exemplo 1

Considere um trecho retilíneo de fio, de comprimento  $L$ , percorrido por uma corrente estacionária  $I$ , como mostra a fig.29.1. Desejamos calcular o campo magnético que ele produz em um ponto P genérico, à sua volta.

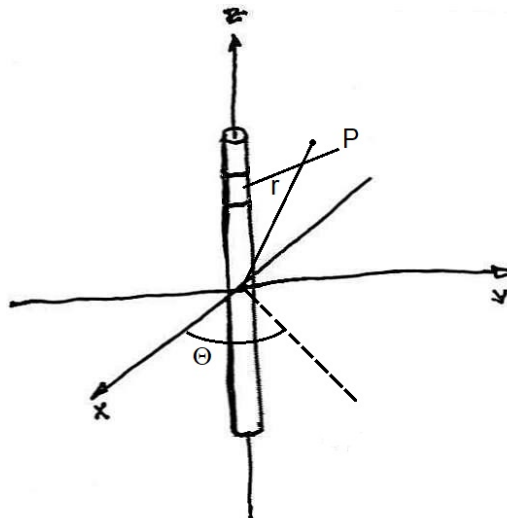


Figura 29.1: Trecho de fio retilíneo percorrido por corrente.

Em um problema como este, é conveniente orientar o trecho de fio ao longo do eixo  $z$ , localizar seu centro na origem e usar coordenadas cilíndricas para descrever a posição do ponto

$P = (r, \theta, Z)$ . Assim, os vetores usados no cálculo da contribuição  $d\vec{B}$  de um pedacinho genérico de fio de comprimento  $dz$ , distante  $z$  da origem, para o campo  $\vec{B}$  em  $P$  são

$$\vec{r}_P = r \cos\theta \hat{i} + r \sin\theta \hat{j} + Z \hat{k}, \quad (29.1)$$

$$\vec{r}_I = z \hat{k}, \quad (29.2)$$

$$d\vec{\ell} = dz \hat{k}. \quad (29.3)$$

A lei de Biot e Savart, dada pela eq.(27.4), [((((27.4 ou 27.8??)))]], fornece

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I (dz \hat{k}) \times \frac{[r \cos\theta \hat{i} + r \sin\theta \hat{j} + (Z - z) \hat{k}]}{[r^2 + (Z - z)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I dz \frac{[-r \sin\theta \hat{i} + r \cos\theta \hat{j}]}{[r^2 + (Z - z)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (29.4)$$

O campo resultante no ponto  $P$  é determinado pela integral

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int_{-L/2}^{L/2} d\vec{B} = \int_{-L/2}^{L/2} dz \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[-r \sin\theta \hat{i} + r \cos\theta \hat{j}]}{[r^2 + (Z - z)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I [-r \sin\theta \hat{i} + r \cos\theta \hat{j}] \int_{-L/2}^{L/2} dz \frac{1}{[r^2 + (Z - z)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (29.5)$$

O resultado da integral, que pode ser obtido no apêndice XX, é

$$\int dz \frac{1}{[r^2 + (Z - z)^2]^{3/2}} = -\frac{(Z - z)}{r^2 \sqrt{r^2 + (Z - z)^2}}. \quad (29.6)$$

Assim,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{L/2 - Z}{r \sqrt{r^2 + (Z - L/2)^2}} + \frac{L/2 + Z}{r \sqrt{r^2 + (Z + L/2)^2}} \right] [-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}]. \quad (29.7)$$

Este resultado é exato para um trecho de fio percorrido por uma corrente constante  $I$ . Uma característica importante dele diz respeito à direção e sentido do campo  $\vec{B}$  no ponto  $P$  onde ele é observado. O vetor  $\vec{r}_P$  é dado pela eq.(29.1) e a direção e o sentido da sua componente paralela ao plano  $xy$  é definida pelo versor  $\hat{r} = [\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}]$ . Já a direção e sentido de  $\vec{B}$  são determinados pelo versor  $\hat{B} = [-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}] = \hat{k} \times \hat{r}$ . Esses dois versores, mostrados na fig.29.2(a), são paralelos ao plano  $xy$  e ortogonais entre si, pois  $\hat{r} \cdot \hat{B} = 0$ . Além disso, o versor  $\hat{B}$  gira no sentido anti-horário, indicando que a relação entre o seu sentido e o da corrente é o previsto pela regra da mão direita.

Neste problema, o parâmetro  $Z$  representa a distância do ponto  $P$  ao plano  $xy$  e o resultado da eq.(29.7) é válido para qualquer valor no intervalo  $-\infty < Z < \infty$ . Ou seja, a expressão para  $\vec{B}$  não está restrita apenas ao intervalo  $-L/2 \leq Z \leq L/2$ . Deste modo, o pedaço de fio considerado dá origem a linhas de campo com simetria cilíndrica em todo o espaço, como as indicadas na figura (b). Como um próton que se move com velocidade constante corresponde a uma corrente na região onde ele se encontra, o campo magnético que ele cria quando viaja ao

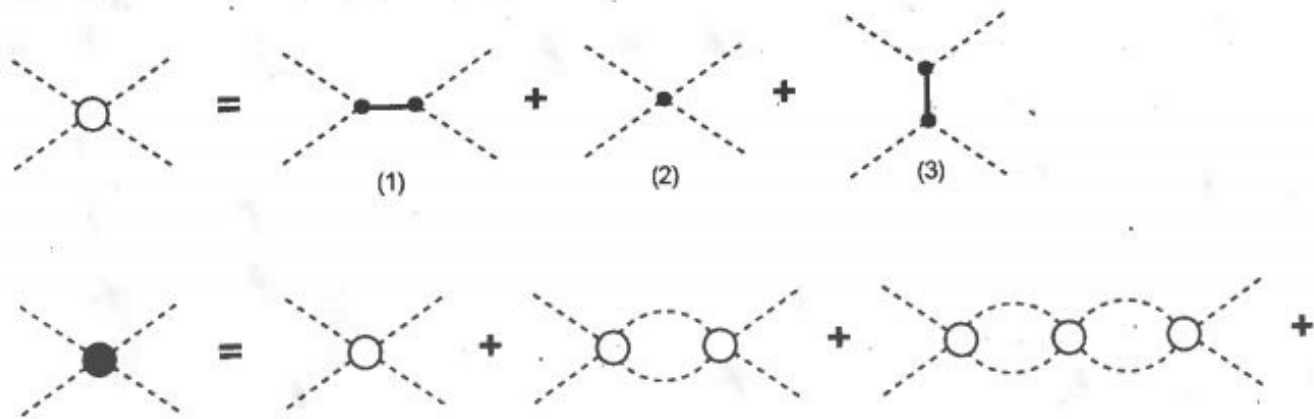


Figura 29.2: (a) Fio com corrente visto de frente; (b) linhas de campo magnético.

longo do eixo  $z$  positivo também tem a forma mostrada na figura. No caso do próton, além de  $\vec{B}$ , existe um campo elétrico.

A seguir, brincamos um pouco com a eq.(29.7) e exploramos alguns casos particulares. No primeiro deles, consideramos o campo  $\vec{B}$  no plano médio do fio,  $Z = 0$ , que corresponde a

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{L}{r \sqrt{r^2 + L^2/4}} \right] [-\text{sen } \theta \hat{i} + \text{cos } \theta \hat{j}]. \quad (29.8)$$

Supondo, agora, que o fio seja muito longo, consideramos o limite  $L \gg r$  e encontramos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} [-\text{sen } \theta \hat{i} + \text{cos } \theta \hat{j}] = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{k} \times \hat{r}. \quad (29.9)$$

Neste limite, a intensidade do campo cai com o inverso da distância a ele. Por ser especialmente simples, esta expressão é muito empregada na análise de situações onde a intuição é mais importante do que a precisão numérica.

## • exemplo 2

Aqui, calculamos o campo magnético criado por uma espira quadrada de lado  $L$ , percorrida por uma corrente  $I$ , em um ponto P do seu eixo, distante  $Z$  do seu centro, como mostra a fig.29.3(a).

Para resolver este problema calculamos, inicialmente, a contribuição de um dos lados da espira ao campo  $\vec{B}$  em P. Partimos do resultado do exemplo anterior, eq.(29.8), que foi obtido para um fio paralelo ao eixo  $z$  e notamos que, naquela expressão, a grandeza  $r$  representa a distância do centro do fio ao ponto P considerado. Para adaptar aquele resultado ao presente caso, precisamos fazer a substituição  $r \rightarrow d = \sqrt{Z^2 + L^2/4}$ . A determinação do versor que indica a direção e o sentido do campo fica mais fácil com o uso da regra da mão direita.

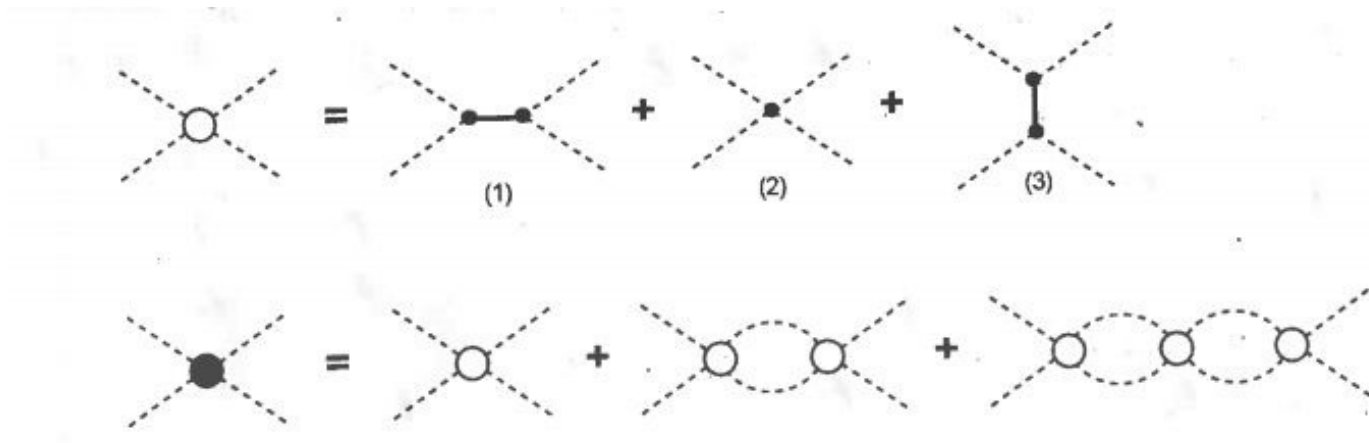


Figura 29.3: (a) Espira quadrada e o sentido da corrente; (b) o lado 1 da espira visto de frente, com coordenadas e vetor relevantes ao cálculo do seu campo magnético.

O caso da barra é mostrado na fig.29.4(b), onde o vetor  $\hat{t}_1$  é dado por

$$\hat{t}_1 = \frac{Z}{d} \hat{i} + \frac{L}{2d} \hat{k}, \quad (29.10)$$

com  $\sin \alpha = Z/d$  e  $\cos \alpha = L/(2d)$ . Chamando de  $\vec{B}_1$  o campo magnético criado pelo lado 1 da espira, temos

$$\vec{B}_1 = B_L \left[ \frac{Z}{d} \hat{i} + \frac{L}{2d} \hat{k} \right], \quad (29.11)$$

$$B_L = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{L}{d \sqrt{d^2 + L^2/4}} \right]. \quad (29.12)$$

O cálculo do campo para os demais trechos do fio é análogo. Como as distâncias dos centros de todas as barras ao ponto P são iguais, as várias contribuições diferem apenas na parte referente ao vetor e obtemos

$$\vec{B}_2 = B_L \left[ \frac{Z}{d} \hat{j} + \frac{L}{2d} \hat{k} \right], \quad (29.13)$$

$$\vec{B}_3 = B_L \left[ -\frac{Z}{d} \hat{i} + \frac{L}{2d} \hat{k} \right], \quad (29.14)$$

$$\vec{B}_4 = B_L \left[ -\frac{Z}{d} \hat{j} + \frac{L}{2d} \hat{k} \right]. \quad (29.15)$$

Assim, o campo resultante no ponto P é dado por

$$\vec{B}(Z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{2L^2}{(Z^2 + L^2/4) \sqrt{Z^2 + L^2/2}} \right] \hat{k}. \quad (29.16)$$

No centro da espira, onde  $Z = 0$ , o campo é máximo e dado por

$$\vec{B}(Z = 0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{8\sqrt{2}}{L} \hat{k}. \quad (29.17)$$



Por outro lado, a grandes distâncias da espira, a condição  $Z \gg L$  fornece

$$\vec{B}(Z \gg L) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2L^2}{Z^3} \hat{k}. \quad (29.18)$$

### • uma propriedade interessante

Estudamos dois casos de campos magnéticos criados por espiras sobre seus eixos de simetria, em pontos muito distantes delas. Um, para espiras circulares, é dado pela eq.(27.10) [((((((27.10))))))] e o outro, para espiras quadradas, pela eq.(29.18). Em ambos os casos, os resultados podem ser escritos como

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{S}{Z^3} \hat{k}, \quad (29.19)$$

onde  $S$  é a área da espira. Este resultado indica que, em pontos muito distantes da espira, o campo magnético não depende da sua forma. Ele é válido para espiras planas e pode ser demonstrado a partir da lei de Biot e Savart. Nós, aqui, nos limitamos a mencionar esta propriedade.

### • exemplo 3

São dados dois fios retilíneos, muito longos e paralelos, separados pela distância  $d$ , percorridos por correntes  $I$ , iguais e de mesmo sentido. Desejamos calcular o campo magnético criado por estes fios.

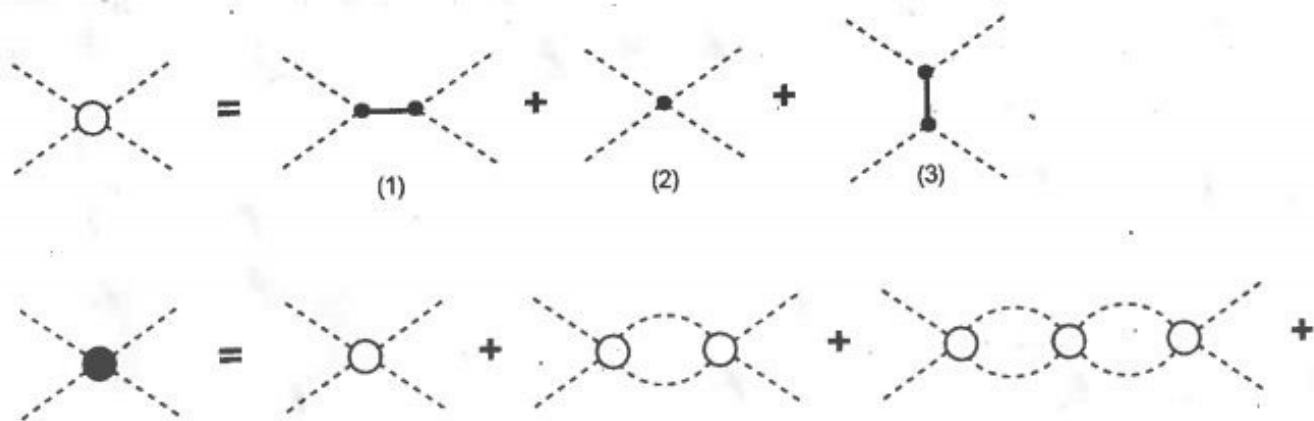


Figura 29.4: Dois fios paralelos com correntes no mesmo sentido.

Para discutir esta questão, consideramos o sistema de coordenadas da fig.29.4, que mostra que os fios 1 e 2 estão localizados nos pontos  $-d/2\hat{j}$  e  $d/2\hat{j}$  e adaptamos o resultado (29.9) a

esta situação. Para calcular o campo  $\vec{B}_1$  do fio 1, usamos

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}_1 = \vec{r} - \left( -\frac{d}{2} \hat{j} \right) = r \cos\theta \hat{i} + \left( r \sin\theta + \frac{d}{2} \right) \hat{j}, \quad (29.20)$$

$$r \rightarrow r_1 = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} + dr \sin\theta} \quad (29.21)$$

e o resultado (29.9) fornece

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} \hat{k} \times \hat{r}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{[-(r \sin\theta + d/2) \hat{i} + r \cos\theta \hat{j}]}{[r^2 + d^2/4 + dr \sin\theta]}. \quad (29.22)$$

O cálculo do campo  $\vec{B}_2$  do fio 2 é totalmente análogo e seu resultado pode ser obtido por meio da troca  $d \rightarrow -d$ . Assim, o campo criado pelos dois fios é dado por

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{[-(r \sin\theta + d/2) \hat{i} + r \cos\theta \hat{j}]}{[r^2 + d^2/4 + dr \sin\theta]} + \frac{[-(r \sin\theta - d/2) \hat{i} + r \cos\theta \hat{j}]}{[r^2 + d^2/4 - dr \sin\theta]} \right\}. \quad (29.23)$$

Este resultado é geral e indica que o campo resultante está sempre contido em planos ortogonais ao fio, já que ele só tem componentes nas direções  $x$  e  $y$ . Para adquirir uma intuição sobre o significado deste resultado, consideramos o que acontece sobre o plano  $yz$ , no qual  $r \cos\theta = 0$  e  $r \sin\theta = y$ . Neste caso,

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{y + d/2} \hat{i} = B_1 \hat{i}, \quad (29.24)$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{y - d/2} \hat{i} = B_2 \hat{i}, \quad (29.25)$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{2y}{y^2 - d^2/4} \hat{i} = B \hat{i}. \quad (29.26)$$

A direção destes campos é sempre paralela ao eixo  $x$ , o seu sentido é determinado pela relação entre  $y$  e  $d/2$  nos denominadores e as suas intensidades são representadas na fig.29.5. Nos casos das eqs.(29.24) e (29.25), notamos que as intensidades  $B_1$  e  $B_2$  são grandes nas proximidades dos respectivos fios e decrescem à medida que nos afastamos deles, enquanto que os seus sinais dependem do lado considerado.

O sentido do campo resultante  $\vec{B}$  é determinado pela relação entre  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$ . Estas contribuições individuais são paralelas à esquerda do fio 1 e à direita do fio 2 e antiparalelas no intervalo entre os dois fios. No ponto médio  $\vec{B}$  se anula e, nos demais pontos, o seu sentido é determinado pelo fio que está mais próximo.

A grandes distâncias do sistema,  $r \gg d$  e a eq.(29.23) fornece

$$\vec{B}(r \gg d) \rightarrow 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} [-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}]. \quad (29.27)$$

Comparando este resultado com a eq.(29.9), que descreve o campo criado por um único fio, podemos compreender que, para  $r \gg d$ , o sistema é equivalente a um fio percorrido por uma corrente  $2I$ .

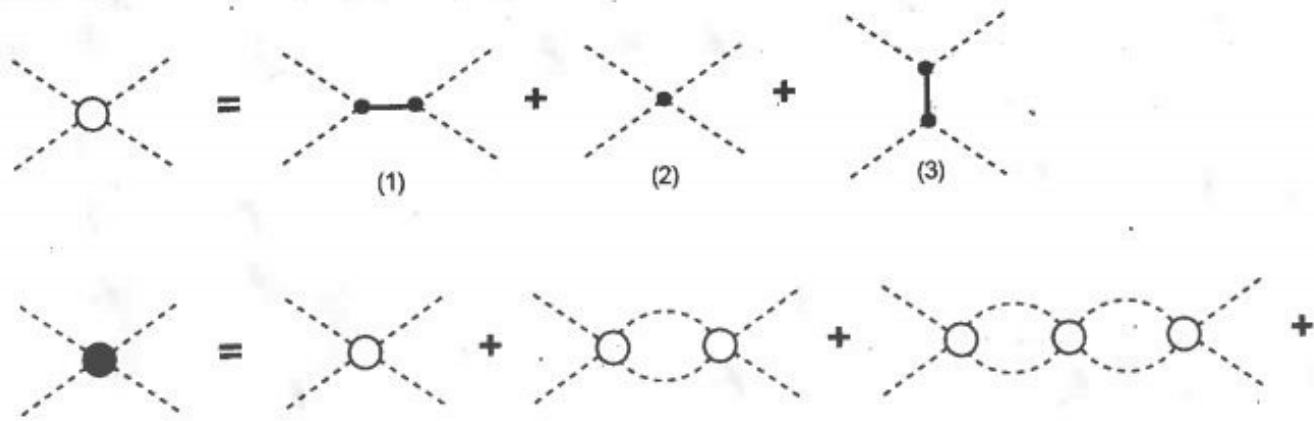


Figura 29.5: Intensidade dos campos magnéticos  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{B}_2$  e  $\vec{B}$  em função de  $y$  de dois fios paralelos ao eixo  $z$  com correntes de mesmo sentido.

As linhas de campo magnético de dois fios paralelos e percorridos por correntes de mesmo sentido são mostradas na fig.29.6(a). É interessante notar que ela é consistente com as discussões das características do campo ao longo do eixo  $y$  e a grandes distâncias, feitas anteriormente.

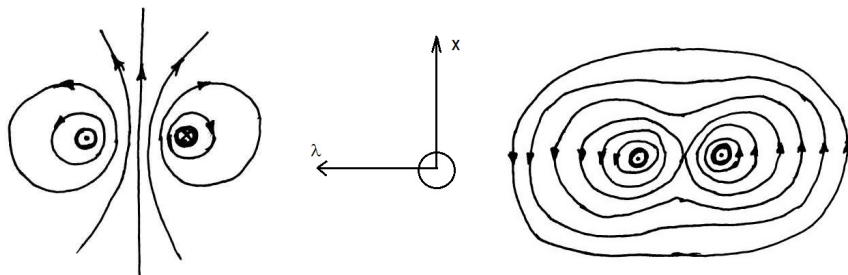


Figura 29.6: Linhas de campo magnético de dois fios paralelos vistos de frente com correntes iguais (a) de mesmo sentido e (b) de sentidos opostos.

#### • exemplo 4

Consideramos, agora, uma situação análoga à do exemplo anterior, com dois fios infinitos, paralelos ao eixo  $z$ , separados pela distância  $d$ , mas percorridos por correntes de sentidos opostos.

O tratamento do problema é, também, análogo ao do exemplo anterior, bastando inverter a corrente de um dos fios, que escolhemos ser o de número 2. Assim, o campo resultante é obtido a partir da eq.(29.23) e dado por

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{[-(r \sin \theta + d/2) \hat{i} + r \cos \theta \hat{j}]}{[r^2 + d^2/4 + dr \sin \theta]} - \frac{[-(r \sin \theta - d/2) \hat{i} + r \cos \theta \hat{j}]}{[r^2 + d^2/4 - dr \sin \theta]} \right\}. \quad (29.28)$$

O campo ao longo do eixo  $y$  pode ser obtido a partir das eqs.(29.24) e (29.25), sendo dado

por

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{d}{y^2 - d^2/4} \hat{i} = B \hat{i}. \quad (29.29)$$

A fig.29.6(b) mostra as linhas de campo do sistema formado por dois fios muito longos e paralelos, percorridos por correntes de sentidos opostos.

### • exercícios

1. Considere a eq.(29.7) para o caso de um fio muito pequeno, fazendo  $L \rightarrow \Delta L$ , e compare o resultado com o obtido diretamente a partir da expressão da lei de Biot e Savart, eq.(28.2) [((((((28.2))))))].
2. [difícil] Considere a previsão da eq.(29.7) para o campo magnético sobre o eixo  $z$ , nos casos
  - a)  $Z > L/2$ ;
  - b)  $Z < L/2$ .
3. Uma espira retangular, apoiada no plano  $z = 0$ , com lados de comprimento  $L$ , paralelos ao eixo  $y$  e  $\ell$ , paralelos ao eixo  $x$ , é percorrida por uma corrente  $I$ , no sentido horário.
  - a) Calcule o campo magnético  $\vec{B}$ , que ela cria em um ponto  $P(0, 0, Z)$  do seu eixo.
  - b) Mostre que, a grandes distâncias da espira, a eq.(29.19) é satisfeita.
  - c) Qual o valor do campo para  $Z = 0$ ?
  - d) Quais são as condições para que o resultado do item anterior possa ser comparado com o apresentado no exemplo 4?
4. Faça um gráfico análogo ao da fig.29.5 para o caso do campo magnético ao longo do eixo  $y$  para o caso de dois fios longos e paralelos, percorridos por correntes em sentidos opostos, discutido no exemplo 4.
5. Qual é a interpretação física da soma dos campos magnéticos dados pelas eqs.(29.23) e (29.28)?
6. [difícil] Mostre que, para  $r \gg d$ , a eq.(29.28) tende a

$$\vec{B} \rightarrow -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{d}{r^2} [\cos(2\theta) \hat{i} + \sin(2\theta) \hat{j}].$$

### • respostas

2. Nos dois casos, fazendo  $r \rightarrow \infty$ , temos  $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r} \left[ \frac{L/2-Z}{|L/2-Z|} \right]$ .
  - a) Quando  $Z > L/2$ ,  $|\vec{B}| = 0$ , o que é esperado da simetria axial do problema.
  - b) Quando  $Z < L/2$ ,  $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  e, portanto,  $|\vec{B}| \rightarrow \infty$ . Ainda que matematicamente correto, este resultado deixa de incorporar duas características físicas importantes. Uma delas é que fios reais têm raios finitos e a outra é que a eq.(29.7) só vale para pontos externos ao fio. Este aspecto do problema deve ficar mais claro ao apresentarmos a lei de Ampère.

3. a)  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\ell L}{\sqrt{Z^2 + \ell^2/4 + L^2/4}} \left[ \frac{1}{Z^2 + \ell^2/4} + \frac{1}{Z^2 + L^2/4} \right] \hat{k};$

c)  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{8\sqrt{L^2 + \ell^2}}{\ell L} \hat{k};$

d) No limite  $L \rightarrow \infty$ ,  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{8}{\ell} \hat{k}$ ; este resultado representa a mesma física que a eq.(29.29) com  $y = 0$ .



# Capítulo 30

## lei de Ampère

### • introdução

A lei de Biot e Savart permite o cálculo do campo magnético produzido por correntes estacionárias a partir da soma de contribuições  $d\vec{B}$  de elementos de corrente  $I d\vec{\ell}$ , por meio da expressão (28.4) [(((28.4)))]], dada por

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{\ell} \times \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_I)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_I|^3} .$$

O campo magnético resultante é obtido por meio do princípio da superposição e escrito como

$$\vec{B} = \int d\vec{B} ,$$

sendo a integração feita sobre todas as correntes. Nesta aula, apresentamos uma outra forma da relação entre correntes estacionárias e o seu campo magnético, conhecida como lei de Ampère, que explora o fato de as linhas de campo magnético serem sempre fechadas.

### • lei de Ampère

A lei de Ampère na forma integral relaciona o campo magnético  $\vec{B}$  à densidade de corrente  $\vec{j}$ , e é escrita como

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS , \quad (30.1)$$

onde  $C$  é um caminho fechado qualquer e  $S$  é uma superfície, também qualquer, cujas extremidades coincidem com  $C$ . O sentido de  $\hat{n}$ , a normal à superfície, está relacionado ao sentido de percurso do caminho pela regra da mão direita: se os dedos da mão direita acompanharem o caminho, o polegar indica o lado da superfície onde se encontra a normal, como mostra a fig.30.1.

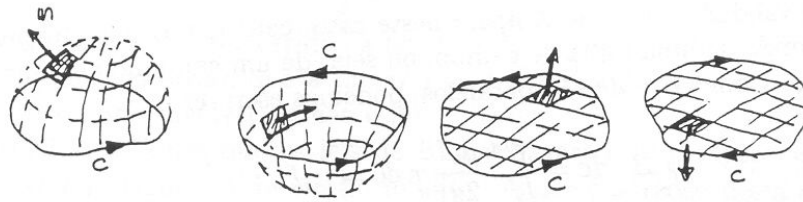


Figura 30.1: Alguns caminhos e superfícies nos quais se pode aplicar a lei de Ampère.

Na expressão da lei de Ampère, o lado esquerdo representa a integral de linha de  $\vec{B}$  sobre o caminho  $C$ , enquanto que o lado direito corresponde à corrente que atravessa a superfície  $S$ , apoiada sobre este caminho, denotada por  $I_{\text{int}}$ . Por isso, também costuma-se escrever a lei como

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 I_{\text{int}} . \quad (30.2)$$

Usando o teorema de Stokes, a lei de Ampère pode ser reescrita na forma diferencial, como

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} . \quad (30.3)$$

## • Biot e Savart e Ampère

Para correntes que não variam com o tempo, é possível mostrar a equivalência das leis de Ampère e de Biot e Savart. Por exemplo, no caso de um fio retilíneo e infinito, percorrido por uma corrente  $I$ , o módulo de  $\vec{B}$  a uma distância  $r$  do fio, calculado por meio da eq.(29.9) [((((29.9)))] vale

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} , \quad (30.4)$$

sendo as linhas de campo circunferências concêntricas com o fio, cujo sentidos são dados pela regra da mão direita. Tal situação está indicada na fig.30.2.

Para mostrar a validade da lei de Ampère neste caso, calculamos inicialmente a circuitação de  $\vec{B}$  ao longo de uma linha de campo, ou seja, de um caminho circular de raio  $r$ , com centro no fio. Como  $\vec{B}$  e  $d\vec{c}$  são paralelos, podemos escrever

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \int_0^{2\pi} d\theta r \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \mu_0 I , \quad (30.5)$$

o que corresponde ao resultado da lei de Ampère, já que para o fio e a superfície da fig.30.2, vale a relação

$$\iint_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS = I . \quad (30.6)$$

Obtivemos este resultado utilizando um caminho circular, mas podemos mostrar que ele permanece válido para qualquer outro, desde que este envolva o fio. Para nos convencer disto



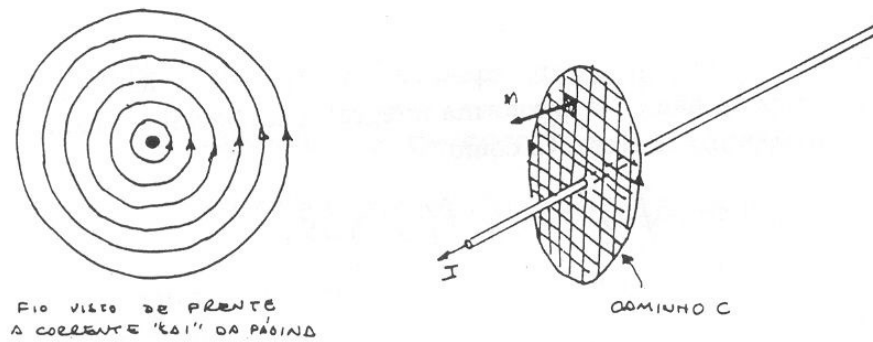


Figura 30.2: O fio retilíneo infinito e as suas linhas de campo magnético.

consideramos, inicialmente, a integral de linha ao longo do caminho mostrado na fig.30.3(a). Os trechos radiais não contribuem, pois  $\vec{B}$  e  $d\vec{c}$  são ortogonais. Já nos trechos circulares, o campo do fio cai com  $1/r$ , enquanto que o comprimento do caminho aumenta com  $r$ , resultando num efeito de compensação entre o campo e a geometria, análogo ao que acontece na lei de Gauss elétrica no caso de uma carga puntiforme. Assim, as eqs.(30.5) e (30.6) continuam válidas para este caminho. O mesmo ocorre no caso mostrado na figura (b), uma vez que, apesar de ser mais complexo, ele pode ser subdividido em elementos radiais e circulares.

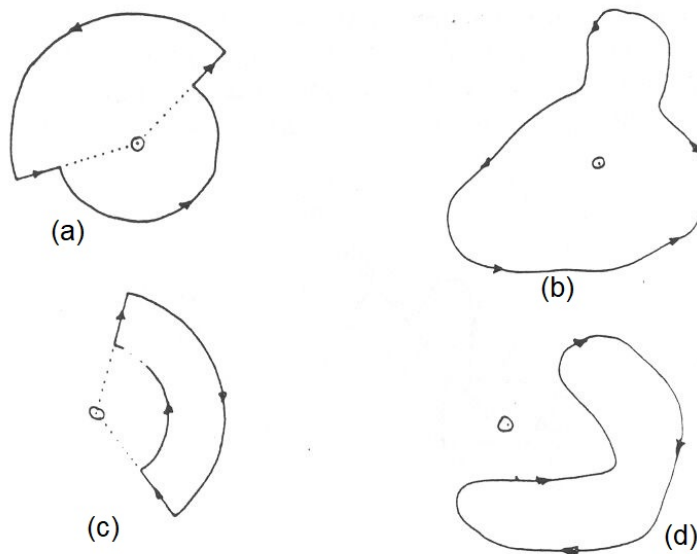


Figura 30.3: O fio retilíneo infinito: dois caminhos que o envolvem (a) e (b) e dois caminhos que não o envolvem (c) e (d).

Podemos, também calcular a integral de linha de  $\vec{B}$  sobre caminhos que não envolvem o fio infinito, tais como os mostrados nas figuras (c) e (d). Para estes caminhos, temos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = 0, \quad (30.7)$$

já que parte deles é percorrido no sentido de  $\vec{B}$  e parte, no sentido contrário.

Estes resultados mostram que a integral de linha de  $\vec{B}$  sobre um caminho fechado depende de ele envolver o fio, ou não. Assim, mostramos que as leis de Biot e Savart e de Ampère são equivalentes no caso do campo magnético de um fio infinito. A demonstração dessa equivalência no caso mais geral também pode ser feita, mas envolve técnicas matemáticas um pouco mais avançadas do que as empregadas neste texto e, por isso, é omitida aqui.

### • um detalhe técnico

Na formulação da lei de Ampère é importante saber se um caminho envolve ou não uma corrente elétrica. Embora a distinção entre essas duas possibilidades seja bastante simples na maioria dos casos, existem situações que dão margem a dúvidas. Por exemplo, nos casos mostrados na fig.30.4, os caminhos envolvem ou não o fio?

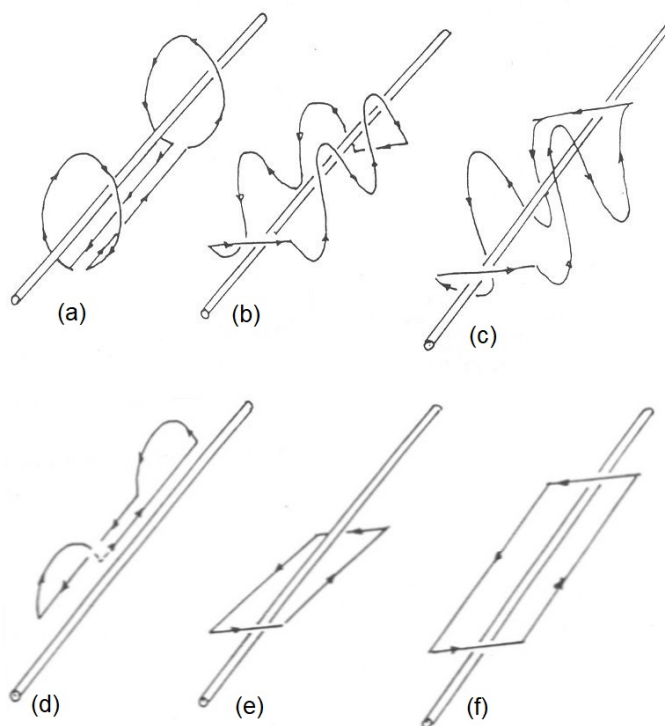


Figura 30.4: Os caminhos (a), (b) e (c) envolvem ou não o fio retilíneo infinito? Os caminhos (d), (e) e (f) são deformações contínuas dos caminhos (a), (b) e (c), respectivamente.

Para remover este tipo de ambiguidade, é preciso conceituar melhor o que significa um caminho envolver um fio. Em geral, o fato de um caminho envolver ou não um fio não muda quando o caminho é deformado continuamente. Por exemplo, os caminhos (a) e (b) da fig.30.3 podem ser deformados continuamente um no outro, o mesmo acontecendo com os caminhos (c) e (d). Não é possível, entretanto transformar o caminho (a) no caminho (d) por meio de uma transformação contínua. Isso faz com que os caminhos (a) e (b) pertençam a uma classe e os caminhos (c) e (d), a outra classe. Usando este critério e deformando continuamente os caminhos (a), (b) e (c) mostrados na fig.30.4, obtemos os (d), (e) e (f), o que nos permite concluir que apenas o

caminho (b) envolve o fio.

## • validade x utilidade

No caso de correntes estacionárias, sempre é possível o cálculo de  $\vec{B}$  por meio da lei de Biot e Savart. A lei de Ampère, por outro lado, só permite o cálculo de campos em situações onde existe simetria. Analogamente ao caso da lei de Gauss na eletrostática, se a simetria do problema for tal que a direção e o sentido de  $\vec{B}$  possam ser conhecidos de antemão, então o uso da lei de Ampère pode nos fornecer o módulo deste campo.

## • exemplo 1 - fio retilíneo infinito

Cálculo do campo magnético produzido por um fio retilíneo e infinito, paralelo ao eixo  $z$  e percorrido por uma corrente  $I$ . Este campo já foi calculado por meio da lei de Biot e Savart e, também, discutido no início desta aula. Neste exemplo, o cálculo é refeito, apenas para ilustrar o uso da lei de Ampère.

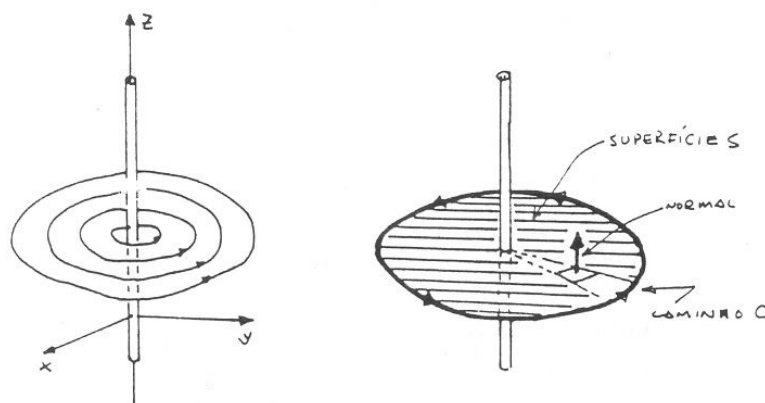


Figura 30.5: O fio retilíneo infinito e o seu campo magnético

O fio tem simetria em torno do eixo  $z$ , que coincide com ele. Se orientarmos  $z$  paralelamente a  $I$ , como mostra a fig.30.5, o uso da regra da mão direita nos indica que as linhas de campo são circunferências, com centro no fio e dispostas em planos perpendiculares a ele. Por isso, escrevemos  $\vec{B} = B \hat{B}$ , onde  $\hat{B}$  é um versor tangente às linhas de campo e  $B$  é o valor a ser determinado. O cálculo da integral de linha de  $\vec{B}$  sobre um caminho matemático  $C$  coincidente com uma linha de campo, distante  $r$  do fio, permite-nos obter o lado esquerdo da lei da Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \oint_C B dc = \int_0^{2\pi} d\theta r B = 2\pi r B . \quad (30.8)$$

Usando o lado direito da lei de Ampère aplicado à superfície  $S$ , plana e apoiada sobre a linha

de campo da figura (b) e notando que  $\vec{j}$  só é não nulo no interior do fio, obtemos

$$\iint_S \mu_0 \vec{j} \cdot \hat{n} dS = \mu_0 I. \quad (30.9)$$

Concluimos, portanto, que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{B}. \quad (30.10)$$

É interessante notar que esse campo cai com  $1/r$ , ou seja, ele decresce exatamente na mesma proporção com que o comprimento da linha de campo cresce.

### • exemplo 2 - fio cilíndrico infinito

Cálculo do campo criado em todo o espaço por um fio cilíndrico de raio  $a$ , percorrido por uma corrente  $I$ , uniformemente distribuída em sua seção reta.

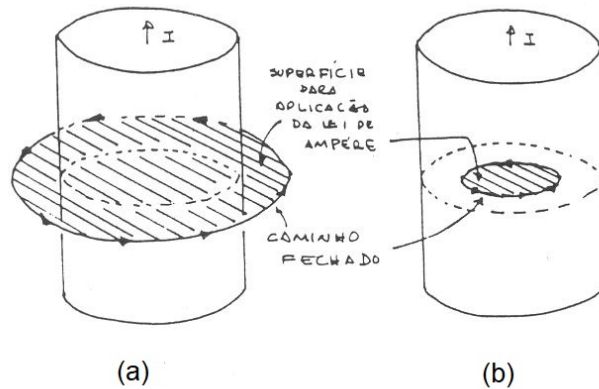


Figura 30.6: Os caminhos para a aplicação da lei de Ampère.

Este exemplo é muito semelhante ao anterior, a principal diferença é que, agora, o fio tem uma espessura. Como no caso anterior, a simetria do problema permite-nos concluir que as linhas de campo são circunferências com centro no eixo do fio e contidas em planos perpendiculares a ele, tanto no seu interior como no seu exterior. Por isso, escrevemos novamente  $\vec{B} = B \hat{B}$  e usamos a lei de Ampère para calcular  $B$ . Tomando um caminho matemático  $C$  ao longo da linha de campo a uma distância  $r$  do fio, obtemos novamente

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \oint_C B dc = \int_0^{2\pi} d\theta r B = 2\pi r B. \quad (30.11)$$

Para os pontos externos ao fio, nos quais  $r > a$ , a corrente que atravessa uma superfície apoiada no caminho  $C$  é toda a corrente do fio, como mostra a fig.30.6(a). A lei de Ampère nos fornece, então,

$$\vec{B}(r \geq a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{B}. \quad (30.12)$$

No caso em que  $r < a$ , correspondente a pontos internos ao fio, a corrente que atravessa o caminho é menor que  $I$ , como sugere a figura (b). Para determiná-la, notamos que a corrente está uniformemente distribuída sobre a seção do fio, o que faz com que o módulo da densidade de corrente no seu interior seja

$$j = \frac{I}{\pi a^2}. \quad (30.13)$$

Por isso, a corrente que atravessa o caminho fechado é

$$I_{\text{int}} = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I \quad (30.14)$$

e a lei de Ampère permite-nos concluir que o campo magnético no interior do fio é dado por

$$\vec{B}(r \leq a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r \hat{B}. \quad (30.15)$$

Assim, o módulo do campo magnético gerado por um fio espesso, percorrido por uma corrente elétrica, cresce com  $r$  no interior do fio e decresce com  $1/r$  fora dele, como mostra a fig.30.7. Nas duas situações, a direção e o sentido do campo são dados pela regra da mão direita.

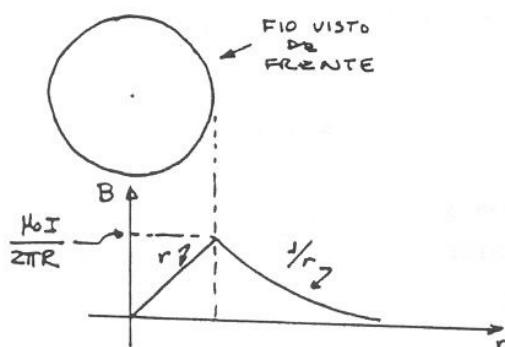


Figura 30.7: Módulo do campo magnético do fio cilíndrico em função da distância ao seu eixo.

### • exemplo 3 - cabo coaxial

Cabos coaxiais têm muitas aplicações práticas e costumam ser utilizados para blindar correntes elétricas da influência de campos externos. Normalmente, os cabos coaxiais são formados por um fio central, envolto por um material isolante que, por sua vez, é envolto por uma malha metálica flexível. Em geral, um cabo coaxial é parte de um circuito mais amplo, e os seus condutores interno e externo são percorridos por correntes iguais e de sentidos opostos.

Neste exemplo consideramos o cabo coaxial esquemático mostrado na fig.30.8, formado por um fio interno idêntico ao do exemplo anterior, envolto por uma casca cilíndrica externa, de raio  $b$  e de espessura desprezível. Quando o fio interno é percorrido por uma corrente  $I$ , a simetria do

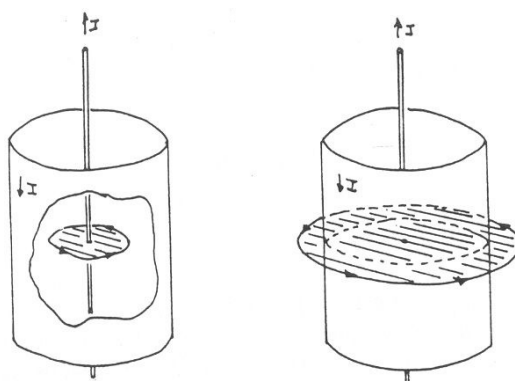


Figura 30.8: Caminhos para o cálculo de  $\vec{B}$  (a) dentro e (b) fora do cabo coaxial.

problema permite-nos saber de antemão que as linhas de campo são circunferências centradas no seu eixo, cuja tangente é paralela ao versor  $\hat{B}$ . Por isso, para um caminho matemático  $C$  coincidente com a linha de campo de raio  $r$ , o lado esquerdo da lei da Ampère pode ser, mais uma vez, escrito como

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \oint_C B dc = \int_0^{2\pi} d\theta r B = 2\pi r B. \quad (30.16)$$

Para pontos internos ao fio, a corrente que atravessa um caminho de raio  $r$ , com  $r < a$ , é a dada pela eq.(30.14), enquanto que na região entre o fio e a casca, correspondente a  $a < r < b$ , essa corrente vale  $I$ . Por isso, em toda a região interna à casca, a expressão do campo  $\vec{B}$  é idêntica à do exemplo anterior, dada pela eq.(30.12).

Por outro lado, para pontos externos à casca cilíndrica, onde  $r > b$ , a corrente que fura qualquer superfície apoiada no caminho é nula. Este resultado decorre do fato que as correntes que fluem pelo fio e pela casca o fazem em sentidos opostos. Como elas são iguais em módulo, obtemos

$$\iint_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (30.17)$$

e a lei de Ampère nos permite concluir que  $\vec{B} = 0$  nessa região. Assim, no cabo coaxial, a presença da casca elimina o campo magnético no seu exterior, sem modificar o campo do fio na região interna. O módulo de  $\vec{B}$  em um plano perpendicular ao cabo é mostrado na fig.30.9, que deve ser comparada à figura 8.

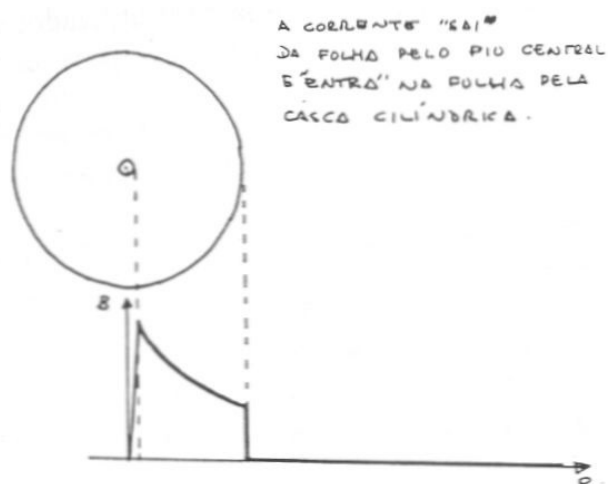


Figura 30.9: Módulo do campo do cabo coaxial em função da distância ao seu eixo.

#### • exemplo 4 - cilindro carregado em rotação

Cálculo do campo magnético devido a uma casca cilíndrica muito longa, de raio  $a$ , carregada com densidade superficial de carga  $\sigma$ , positiva, que gira em torno do seu eixo com velocidade angular  $\omega$ , mostrada na fig.30.10(a).

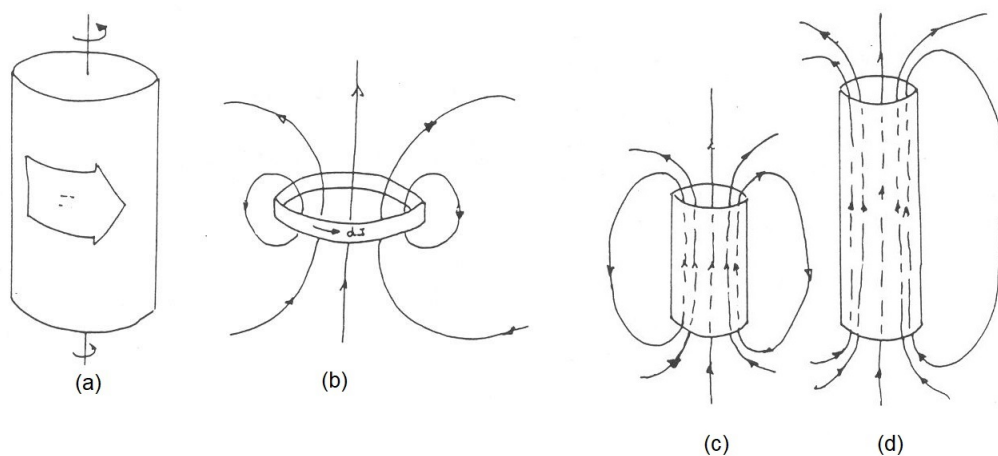


Figura 30.10: (a) Superfície cilíndrica carregada positivamente em rotação; (b) linhas de campo magnético de uma espira; (c) linhas de campo magnético de várias espiras empilhadas; (d) linhas de campo magnético da superfície em rotação.

Neste problema, a rotação da superfície dá origem a uma corrente elétrica sobre a mesma, transversal ao seu eixo. Para discutir os efeitos qualitativos dessa corrente, é conveniente considerar a superfície cilíndrica como sendo formada por um conjunto de espiras de altura  $dz$ . Quando a espira gira em torno do seu eixo, a quantidade de carga que atravessa um plano matemático que contém este eixo em um intervalo de tempo  $dt$  é dada por  $dq = \sigma (\omega a dt) dz$ , e,

portanto, a corrente sobre a espira vale

$$dI = \sigma \omega a dz . \quad (30.18)$$

A regra da mão direita, aplicada à espira, nos ensina que as suas linhas de campo magnético têm a forma qualitativa indicada na figura (b). Quando as várias espiras elementares vão sendo empilhadas para reconstituir a superfície cilíndrica, as linhas de campo mantêm algumas das suas características qualitativas. Em particular, elas continuam a ser linhas fechadas, que entram por um dos lados do cilindro, atravessam o seu interior e saem pelo outro lado. Entretanto, no processo de empilhamento de espiras, à medida que o comprimento do cilindro vai crescendo, as linhas de campo no seu interior vão se tornando mais paralelas, como sugere a figura (c), deixando de sê-lo apenas nas proximidades dos extremos da casca. Assim, o campo no interior de uma superfície girante muito longa corresponde a um feixe de linhas praticamente paralelas, como mostra a figura (d).

De modo geral, um campo pode ser considerado constante na região onde as suas linhas são paralelas. Por isso, quanto mais comprida for a superfície que gira, maior vai ser a região do seu interior onde o campo é aproximadamente constante.

Por outro lado, as linhas de  $\vec{B}$  devem ser fechadas, e este fechamento ocorre pelo lado de fora da superfície cilíndrica. Uma característica importante deste tipo de configuração é que ela faz com que as linhas de campo estejam juntas no interior do cilindro e dispersas no seu exterior. Como a intensidade do campo está associada à densidade de linhas de campo, a situação descrita acima corresponde a um campo muito mais forte no interior do cilindro do que no seu exterior.

As características quantitativas do campo no interior do cilindro podem ser determinadas com o auxílio da lei de Ampère, que é válida para qualquer caminho fechado  $C$ . Aproveitando esta flexibilidade, inicialmente aplicamos a lei ao caminho  $C_1$  da fig.30.11, localizado inteiramente no interior do cilindro. A circuitação do campo magnético nos fornece

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{c} = B_1 d - B_2 d , \quad (30.19)$$

onde  $d$  é o comprimento dos trechos do caminho paralelos ao eixo do cilindro e  $B_1$  e  $B_2$  são as intensidades do campo sobre eles. Como não existe corrente fluindo através de qualquer superfície apoiada sobre este caminho, a lei de Ampère permite-nos concluir que a eq.(30.19) é nula e, conseqüentemente, que  $B_1 = B_2$ . Este resultado é válido para qualquer caminho no interior do cilindro e, portanto, a intensidade de  $\vec{B}$  é a mesma em qualquer ponto do seu interior. Ou seja,  $\vec{B}$  é uniforme nessa região.

Para calcular a intensidade do campo, é conveniente usarmos o caminho  $C_2$  da fig.30.11. Supondo que a intensidade de  $\vec{B}$  fora do cilindro possa ser desprezada relativamente à interna, temos

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{c} = B h , \quad (30.20)$$

sendo  $h$  o comprimento do caminho paralelo à linha de campo e  $B$ , o módulo do campo magnético no interior do cilindro. Uma superfície plana  $S$  apoiada sobre o caminho  $C_2$  tem a normal



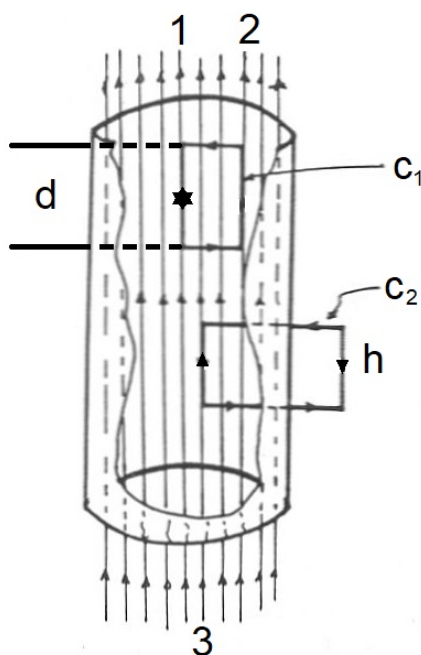


Figura 30.11: Caminhos para a aplicação da lei de Ampère no cálculo do campo magnético.

apontando para dentro da folha, segundo a convenção da mão direita. A corrente elétrica  $I = \sigma \omega a h$ , obtida a partir da eq.(30.17), flui através de  $S$  no sentido da normal e, portanto,

$$\iint_S \mu_0 \vec{j} \cdot \hat{n} dS = \mu_0 \sigma \omega a h. \quad (30.21)$$

O campo no interior do cilindro, determinado igualando as eqs.(30.20) e (30.21), é dado por

$$\vec{B} = \mu_0 \sigma \omega a \hat{k}. \quad (30.22)$$

É interessante notar que a intensidade de  $\vec{B}$  é diretamente proporcional a  $\sigma$ ,  $\omega$  e  $a$ : o aumento de qualquer uma destas grandezas corresponde a um aumento da corrente que gera o campo.

## • exemplo 5 - solenoide cilíndrico

É dado um solenoide cilíndrico, de altura  $b$  e raio  $a$ , sendo  $a \ll b$ , com  $n$  espiras por unidade de comprimento, percorrido por uma corrente  $I$ . Desejamos calcular o campo magnético no seu interior. Um solenoide é um sistema formado por fios enrolados em torno de um suporte mecânico, que usualmente é cilíndrico ou toroidal. Como um fio produz um campo proporcional à corrente que o percorre, quando ele é enrolado, os efeitos das várias voltas se somam e podemos obter um campo resultante bastante forte no interior do sistema.

A forma do campo  $\vec{B}$  no interior de um solenoide cilíndrico longo pode ser determinada considerando-o como uma superposição de espiras. Supomos, inicialmente, que cada espira seja circular. Para o caso de uma única espira temos, num plano que contém o seu eixo, as linhas de

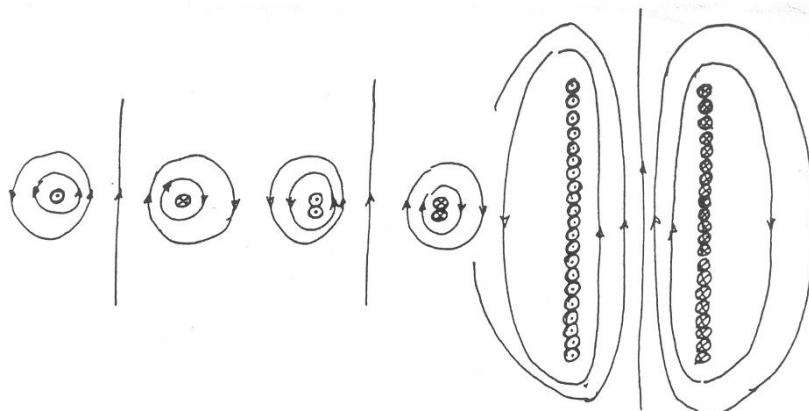


Figura 30.12: Linhas de campo de um solenoide cilíndrico visto como a superposição de espiras circulares.

campo representadas mostradas na fig.30.12(a). Quando duas espiras são colocadas uma sobre a outra, temos a situação da figura (b). Por isso, ao empilharmos muitas espiras, o campo vai-se tornando uniforme na região central, como sugere a figura (c), com todas as linhas contidas no plano do eixo do sistema. Neste aspecto, um solenoide cilíndrico se parece bastante com a casca cilíndrica girante, discutida no exemplo anterior.

No entanto, os dois casos não são exatamente equivalentes já que, no solenoide o fio forma uma hélice, como mostra a fig.30.13(a) e, ainda que o seu passo seja pequeno, existe uma corrente  $I$  que flui paralelamente ao seu eixo. Por isso, o campo fora do solenoide tem também componentes ortogonais ao eixo  $z$  e corresponde ao mostrado esquematicamente na figura (b).

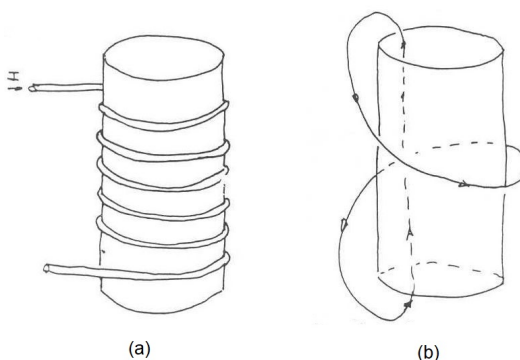


Figura 30.13: (a) solenoide cilíndrico; (b) linha de campo magnético.

Em geral, quando um solenoide é longo, o campo no seu interior é muito mais intenso do que no exterior e este último pode ser desprezado. Nesta aproximação, o problema torna-se totalmente equivalente ao do exemplo 4 e o campo no interior do solenoide cilíndrico pode ser calculado usando os mesmos caminhos mostrados na fig.30.11. O uso do caminho  $C_1$  permite demonstrar a uniformidade no campo. No caso do caminho  $C_2$  o lado esquerdo da lei de Ampère é dado pela eq.(30.21), enquanto que a corrente total que atravessa uma superfície apoiada nele é dada pelo produto da corrente que atravessa uma espira pelo número de espiras contidas no

comprimento  $b$ , que é  $nb$ . Assim,

$$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{k}. \quad (30.23)$$

### • exemplo 6 - solenoide toroidal

Um solenoide toroidal, de seção retangular, com raio interno  $a$ , raio externo  $b$  e altura  $h$ , com  $N$  espiras e percorrido por uma corrente  $I$  é mostrado na fig.30.14. Determinamos o campo magnético no seu interior.

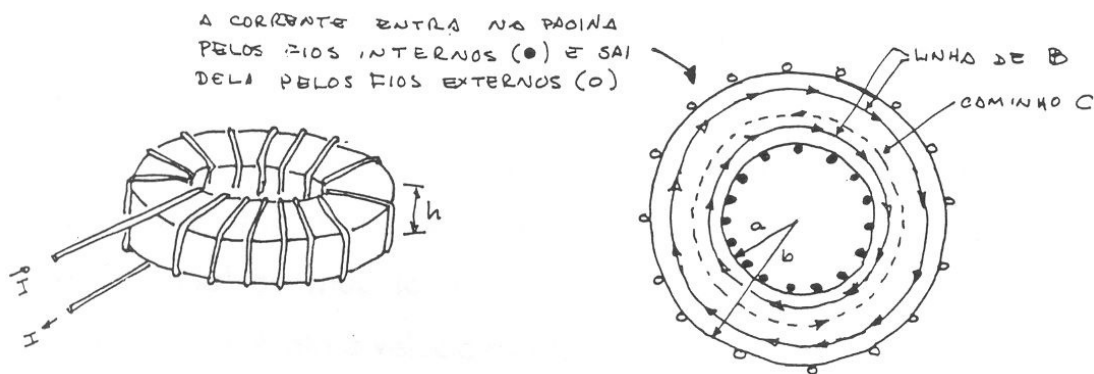


Figura 30.14: (a) solenoide toroidal; (b) corte perpendicular ao seu eixo, linhas de campo e caminho  $C$ .

O uso da regra da mão direita permite-nos concluir que, no seu interior, as linhas de campo são circunferências com centro no eixo do sistema. Usando o caminho  $C$  da figura (b), obtemos o lado esquerdo da expressão da lei de Ampère, dado por

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \oint_C B dc = 2\pi r B. \quad (30.24)$$

Para calcular o lado direito, tomamos uma superfície plana  $S$ , apoiada sobre o caminho e cuja normal, segundo as nossas convenções, aponta para dentro da página. A corrente que atravessa esta superfície tem o sentido da normal e, portanto,  $\vec{j} \cdot \hat{n} = j$ . Como existem  $N$  espiras no solenoide, encontramos

$$\iint_S \mu_0 \vec{j} \cdot \hat{n} dS = \mu_0 \iint_S j dS = \mu_0 N I. \quad (30.25)$$

Assim, o campo no interior do solenoide tem módulo

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \quad (30.26)$$

e a direção e o sentido indicados na figura (b).

• **exercícios**

1. Um condutor metálico tem a forma de um cilindro muito longo, de raio  $a$ . No seu interior existe uma cavidade, também cilíndrica, de raio  $b$ , com eixo coincidente com o do condutor.

a) Calcule o campo magnético, em todo o espaço, criado por este condutor quando ele é percorrido por uma corrente  $I$ , distribuída uniformemente por sua seção transversal.

b) Faça um gráfico  $B \times r$ , onde  $r$  é a distância ao eixo do sistema.

2. Uma lâmina condutora de corrente, plana e muito larga, pode ser feita juntando-se, lado a lado, um número muito grande de fios retilíneos e muito longos, que transportam correntes idênticas  $I$ . Para pontos próximos desta lâmina, ela se comporta como se fosse infinita. Se uma lâmina deste tipo coincide com o plano  $z = 0$  e a corrente flui paralelamente ao versor  $\hat{i}$ , mostre que, em qualquer ponto próximo a ela, o módulo do campo magnético é dado por

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 n I}{2},$$

onde  $n$  é o número de fios por unidade de largura. Quais são a direção e o sentido deste campo?

3. Determine o campo magnético criado por um sistema formado por duas lâminas idênticas à descrita no exercício anterior, localizadas nos planos  $z = -a$  e  $z = +a$  e percorridas, respectivamente, por correntes no mesmo sentido e contrário ao versor  $\hat{j}$ .

• **respostas**

1. a)  $|\vec{B}| = 0$ , para  $r < b$ ,  $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{(r^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)}$ , para  $b \leq r \leq a$

e  $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ , para  $r \geq a$ .

3.  $\vec{B} = \mu_0 n I \hat{i}$ , na região entre as placas e  $\vec{B} = 0$ , nas regiões externas.

# Capítulo 31

## força de Lorentz

### • Força de Lorentz

Vimos, nas aulas anteriores, que correntes, ou seja, cargas em movimento criam campos magnéticos. A reciprocidade característica de interações mediadas por campos permite esperar que campos magnéticos criem forças sobre cargas em movimento.

Quando uma partícula com carga  $q$  e velocidade  $\vec{v}$  está em presença de um campo elétrico  $\vec{E}$  e de um campo magnético  $\vec{B}$ , ela está sujeita a uma força dada por

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (31.1)$$

Esta expressão é conhecida como *força de Lorentz* e indica que cargas em movimento podem sentir forças de origem magnética, além das devidas ao campo elétrico. A componente magnética é diretamente proporcional ao módulo da velocidade da carga, sendo sua direção perpendicular tanto à velocidade  $\vec{v}$  como ao campo  $\vec{B}$ .

Em uma região do espaço onde houver um campo magnético  $\vec{B}$  e o campo elétrico for nulo, a força sobre uma carga em movimento será sempre perpendicular à sua velocidade. Uma força deste tipo não acelera tangencialmente a partícula e, portanto, não pode alterar o módulo da sua velocidade. Assim, em presença apenas de forças magnéticas, somente a sua direção e o seu sentido mudam.

### • exemplo 1

Estudamos a trajetória de uma partícula de massa  $m$  e carga  $q$ , positiva, que penetra com velocidade  $\vec{v}$ , paralela ao plano  $xy$ , em uma região onde o campo elétrico é nulo e o campo magnético é dado por  $\vec{B} = B \hat{k}$ .

O produto vetorial na expressão da força de Lorentz, eq.(31.1), faz com que  $\vec{v}$  e  $\vec{F}$  sejam

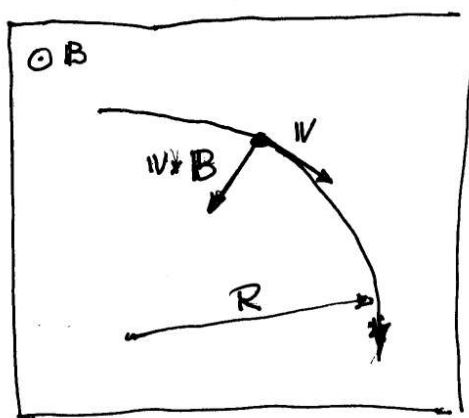


Figura 31.1: Trajetória de uma partícula carregada e com velocidade em presença de um campo magnético uniforme; a força é ortogonal ao campo e à velocidade.

ortogonais entre si, em qualquer ponto da trajetória, como mostra a fig.31.1. Assim, não há força tangencial à trajetória da partícula. Como a força é centrípeta e tem intensidade constante, a trajetória é circular. A intensidade da força de Lorentz, neste caso, é dada por

$$F = q v B , \quad (31.2)$$

e, igualando-a ao resultado da mecânica newtoniana para o movimento circular uniforme, temos

$$F = q v B = m \frac{v^2}{R} , \quad (31.3)$$

o que define o raio da trajetória pela relação

$$R = \frac{m v}{q B} . \quad (31.4)$$

O movimento de partículas carregadas em presença de campos magnéticos uniformes ocorre em muitas situações físicas importantes, envolvendo desde cíclotrons até o estudo de plasmas. O raio  $R$  da trajetória é também conhecido como *raio de Larmor*, em referência ao físico inglês Joseph Larmor. O resultado (31.4) é dado pela razão entre dois fatores,  $m v$  e  $q B$ . O primeiro deles incorpora a inércia da partícula e representa a sua tendência a se mover em linha reta com velocidade constante, enquanto que o segundo favorece os desvios causados pela força magnética. O raio da órbita representa um compromisso entre estas duas tendências.

## • exemplo 2: espectrômetro de massa

Em física, muitos experimentos são feitos com o auxílio de aceleradores, nos quais núcleos atômicos são atirados contra outros, fixos no laboratório. Nestes experimentos é preciso conhecer, dentre outras coisas, a massa do núcleo incidente. Entretanto, por razões técnicas, o preparo do feixe de partículas incidentes é feito usando processos que, muitas vezes, não distinguem isótopos diferentes do mesmo elemento. Por exemplo, no caso do oxigênio, existem núcleos

com 8 prótons e que podem ter 8, 9 ou 10 nêutrons e, por isso, massas diferentes. Para produzir feixes com apenas um tipo de núcleo, costuma-se recorrer a eletroímãs com campo magnético uniforme, cuja intensidade pode ser ajustada pelo experimentador.

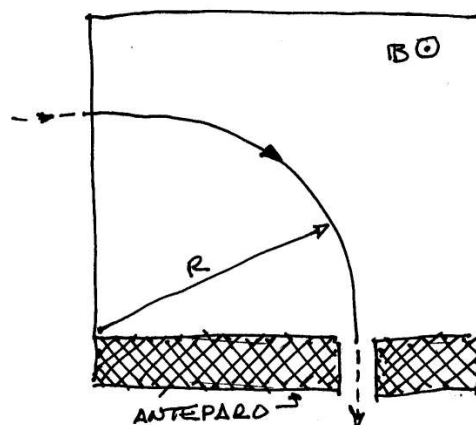


Figura 31.2: Esquema do espectrômetro magnético de massa.

A fig.31.2 mostra o esquema de um espectrômetro de massa<sup>1</sup>, que é um instrumento onde há uma região com um campo magnético uniforme e orifícios para entrada e saída de feixes de partículas carregadas. Suponhamos que um feixe contendo dois isótopos de um dado elemento, com carga  $q$  positiva e massas  $m_1$  e  $m_2$  incida, com a mesma velocidade  $\vec{v}$  perpendicular às linhas do campo magnético do espectrômetro. Para separar estas partículas, é colocado um anteparo com um pequeno orifício, como mostra a figura e o valor do campo magnético é ajustado para que apenas as partículas com massa  $m_1$  possam escapar dessa região, passando pelo orifício no anteparo.

Na configuração mostrada na figura, a partícula que escapa pelo orifício deve percorrer uma trajetória na forma de um quarto de circunferência, com raio  $R$ , no interior da região onde existe campo magnético. A partir da eq.(31.4) obtemos

$$B = \frac{m_1 v}{q R} . \quad (31.5)$$

Para este valor de  $B$ , o outro isótopo bateria no anteparo à direita do orifício se  $m_2 > m_1$  e à esquerda dele, se  $m_2 < m_1$ . Assim, o outro isótopo é retido e o feixe emergente contém apenas o isótopo de massa  $m_1$ .

### • exemplo 3

Determinação da trajetória e equação horária de uma partícula com massa  $m$  e carga  $q$  positiva que entra numa região em que existe um campo magnético uniforme, com uma velocidade que tem componentes tanto na direção do campo como perpendicular a ele.

Por conveniência, adotamos um sistema de coordenadas no qual o campo magnético é paralelo

<sup>1</sup>De modo geral, instrumentos utilizados para separar constituintes de um feixe são conhecidos como espectrômetros.

ao eixo  $z$  e escrevemos

$$\vec{B} = B \hat{k}. \quad (31.6)$$

Neste caso, a velocidade  $\vec{v}(t)$  da partícula em um dado instante pode ser escrita com

$$\vec{v} = \vec{u} + v_z \hat{k}, \quad (31.7)$$

$$\vec{u} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}, \quad (31.8)$$

onde  $\vec{u}$  é a componente paralela ao plano  $xy$ . Usando a expressão da força de Lorentz, eq.(31.1), obtemos

$$\vec{F} = q(v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) \times B \hat{k} = qB(v_y \hat{i} - v_x \hat{j}). \quad (31.9)$$

Uma característica importante deste resultado é que não existe força na direção do campo, já que  $\vec{v} \times \vec{B} = 0$  quando  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  são paralelos. Deste modo, concluímos que o movimento da partícula ao longo do eixo  $z$  se dá com velocidade constante  $v_z \hat{k}$ .

Para determinar a projeção do movimento da partícula sobre o plano  $xy$ , é útil reescrever a eq.(31.9) como  $\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$ , já que isto nos permite recair na situação do exemplo 1. Assim, sobre o plano  $xy$ , o movimento da partícula é uma circunferência de raio  $R$ , dado pela eq.(31.4)

$$R = \frac{m|\vec{u}|}{q|\vec{B}|}. \quad (31.10)$$

A trajetória da partícula tem, portanto, a forma de uma hélice cilíndrica, parecida com uma espiral de caderno. A velocidade angular de rotação da partícula em torno do eixo  $z$  é dada por

$$\omega = \frac{|\vec{u}|}{R} = \frac{qB}{m} \quad (31.11)$$

e é conhecida como frequência de Larmor. O raio da hélice é o dado pela eq.(31.10) e o seu passo é  $2\pi v_z/\omega$ .

Supondo que, no instante  $t = 0$ , a posição da partícula seja  $\vec{r}(0) = R\hat{j}$  e a sua velocidade seja  $\vec{v}(0) = u\hat{i} + v_z\hat{k}$ , a equação horária ao longo da hélice cilíndrica tem a forma

$$\vec{r}(t) = R \text{sen}(\omega t) \hat{i} + R \text{cos}(\omega t) \hat{j} + v_z t \hat{k} \quad (31.12)$$

e a velocidade é dada por

$$\vec{v}(t) = R\omega \text{cos}(\omega t) \hat{i} - R\omega \text{sen}(\omega t) \hat{j} + v_z \hat{k}. \quad (31.13)$$

Como esperado, a segunda lei da dinâmica de Newton é satisfeita, já que

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2 [\text{sen}(\omega t) \hat{i} + \text{cos}(\omega t) \hat{j}] = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (31.14)$$

#### • exemplo 4



Em muitos experimentos da física de partículas elementares é possível observar a trajetória de partículas carregadas e há a necessidade de indentificar o sinal das suas cargas. Por exemplo, quando um fóton  $\gamma$  interage com um núcleo  $N$ , é possível ocorrer a reação  $\gamma N \rightarrow e^- e^+$ , onde  $e^-$  é um elétron e  $e^+$  é a sua antipartícula, o pósitron. O elétron e o pósitron têm massas e outras características idênticas, sendo o sinal da carga a principal diferença entre eles. Para possibilitar a identificação destas cargas em experimentos, costuma-se colocar um campo magnético na região onde a reação ocorre. Como a força de Lorentz depende do sinal da carga, ela desvia o elétron e o pósitron para lados diferentes, como sugere a fig.31.3.

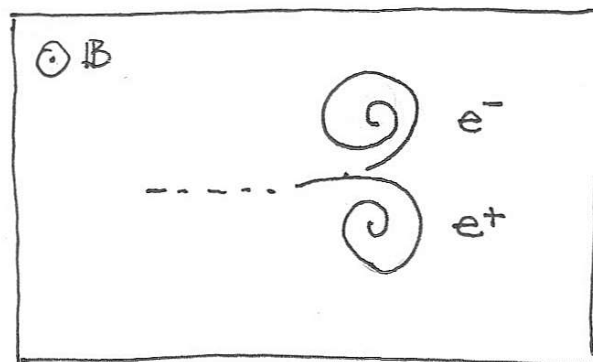


Figura 31.3: Trajetória de um elétron  $e^-$  e de um pósitron  $e^+$  criados em P, em presença de um campo magnético.

### • exemplo 5: a observação do elétron

Em 1906, o físico inglês Joseph John Thomson foi agraciado com o prêmio Nobel "em reconhecimento dos grandes méritos das suas investigações teóricas e experimentais sobre a condução de eletricidade em gases

, em trabalhos realizados entre 1897 e 1899. No fim do século 19, tanto a existência quanto as propriedades das correntes elétricas eram bem conhecidas, mas não se sabia de que forma as cargas se moviam no interior da matéria. A descoberta de Thomson ajudou a elucidar esta questão e, mais importante ainda, abriu as portas para a ideia de que átomos não são unidades indivisíveis de matéria, mas podem conter partículas menores no seu interior.

O elétron foi observado experimentalmente pela primeira vez quando Thomson estudava os chamados raios catódicos que, atualmente, são entendidos como descargas elétricas em gases rarefeitos confinados em ampolas de vidro. Isto, entretanto, não era claro à época. Nas palavras do próprio Thomson:

*[...] havia uma forte controvérsia sobre a natureza desses raios. Havia duas visões dominantes: uma, que era defendida principalmente por físicos ingleses, era que os raios são corpos eletrizados negativamente, atirados do cátodo com grande velocidade; a outra visão, adotada pela grande maioria dos físicos alemães era que os raios são alguma forma de vibração etérea ou ondas.*

Os argumentos a favor de que os raios sejam partículas carregadas negativamente são, fundamentalmente, que eles são defletidos por um ímã, do mesmo modo que partículas eletrizadas negativamente em movimento. Sabemos que tais partículas, quando um ímã é colocado perto delas, estão sujeitas a uma força [...]

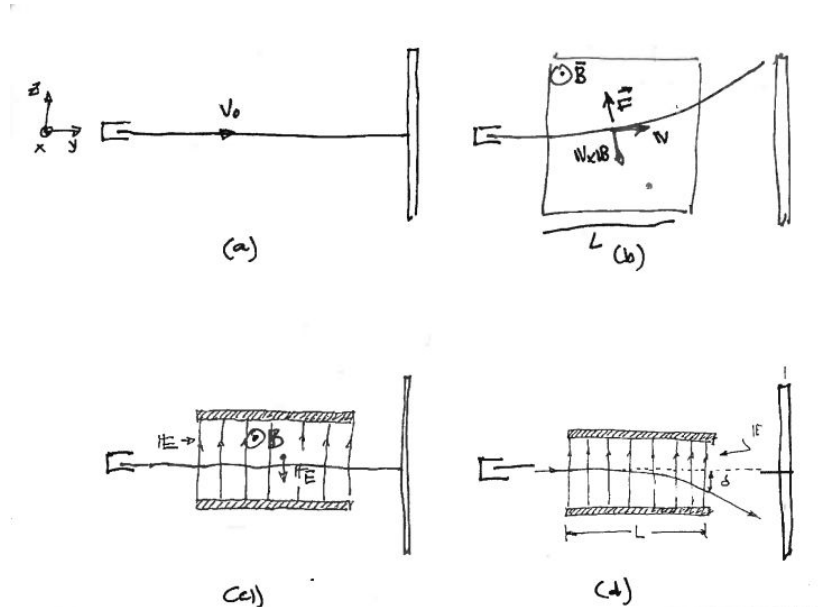


Figura 31.4: Experimento de Thomson: (a) o feixe de partículas carregadas; (b) desvio das partículas sob ação de campo magnético uniforme; (c) a força magnética é cancelada por uma força elétrica; (d) desvio das partículas por um campo elétrico uniforme.

Para discutir esquematicamente a série de experimentos que levou Thomson à observação do elétron, suponhamos que, no interior de uma ampola de vidro, na qual há um gás rarefeito, exista um canhão de partículas carregadas, que as atira com velocidade  $\vec{v}_0 = v_0 \hat{j}$  em direção a um anteparo, como nas figs.31.4. Na ausência de campos externos, as partículas se movem em linha reta e atingem o centro do anteparo, como na figura (a). Quando um campo magnético  $\vec{B} = B \hat{i}$ , paralelo ao eixo  $x$ , é colocado entre o canhão e o anteparo, as partículas são defletidas para cima, como na figura (b), o que permite a conclusão que elas são portadoras de cargas negativas.

A seguir, um capacitor no interior da ampola de vidro foi carregado, de modo que o campo elétrico no seu interior fosse  $\vec{E} = E \hat{k}$ , paralelo ao eixo  $z$ , como mostra a figura (c). O campo magnético também foi mantido, permitindo que  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  coexistissem na região entre as placas. Em seguida, a intensidade do campo elétrico foi ajustada, de modo a fazer com que as partículas continuassem a se mover em linha reta e atingissem o centro do anteparo. Nesta situação, a força de Lorentz, eq.(31.1), corresponde a

$$\vec{F} = q(E - v_0 B) \hat{k} = 0. \quad (31.15)$$

Medindo  $E$  e  $B$ , Thomson conseguiu determinar a velocidade

$$v_0 = \frac{E}{B} \quad (31.16)$$

das partículas que, em alguns experimentos, podiam ser muito altas, até da ordem de  $1/3$  da velocidade da luz. Isto levou à suspeita de que essas partículas deveriam ser muito mais leves do que todas as demais até então conhecidas.

Em seguida, Thomson retirou o campo magnético, de modo que houvesse apenas um campo elétrico uniforme entre as placas do capacitor, que cria uma força constante  $\vec{F} = -qE\hat{k}$  sobre a partícula. De acordo com a segunda lei de Newton, a aceleração dela é dada por  $\vec{a} = -(qE/m)\hat{k}$ , sendo  $m$  a sua massa. A componente  $v_0$  da velocidade da partícula na direção  $y$  é constante e, sendo  $L$  o comprimento do capacitor, o tempo que ela leva para atravessá-lo é  $t = L/v_0$ . Durante este tempo, o módulo do deslocamento  $\delta$  da partícula na direção  $z$  é dado por

$$\delta = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \frac{L^2}{v_0^2}. \quad (31.17)$$

Usando a eq.(31.16), obtemos

$$\frac{q}{m} = \frac{2\delta E}{L^2 B^2}. \quad (31.18)$$

Todos os elementos do lado direito desta equação são mensuráveis, o que permitiu a Thomson determinar a razão  $q/m$  da partícula que ele estava estudando, o elétron, como sendo  $1/1700$  do valor correspondente para o hidrogênio ionizado  $H^+$ , que era conhecido. Hoje, sabemos que o  $H^+$  é um próton e que  $m_e/m_p = 1/1836$ .

## • exemplo 6: garrafa de plasma

Neste exemplo, discutimos uma situação que é importante em física de plasmas. Sabemos que, com o aumento da temperatura, sólidos se transformam em líquidos, líquidos se transformam em gases e gases se transformam em plasmas. Neste último estágio, os choques térmicos são tão intensos que eles conseguem arrancar elétrons das moléculas e o sistema passa a conter uma certa quantidade de íons positivos e elétrons, que se movem livremente. Como as forças entre cargas de sinais opostos são bastante intensas, cada elemento de volume macroscópico é globalmente neutro. Um plasma existe, por exemplo, na região da chama de um palito de fósforo e a luz que vemos é emitida quando os elétrons se recombinaem com os íons positivos. Algo semelhante, em intensidade muito maior, ocorre com os raios que observamos em tempestades.

O estudo dos plasmas é muito importante porque eles podem ser encontrados em muitas situações diferentes, que vão desde chamas de fogões até o interior do Sol, passando pela atmosfera terrestre. Além disso eles são, também, fontes promissoras para a produção de energia com fins econômicos.

Um problema técnico importante na física de plasmas diz respeito ao seu armazenamento. Como os plasmas são muito quentes, não é possível armazená-los em recipientes materiais. Por este motivo, são utilizadas *garrafas de plasma*, como a mostrada na fig.31.5, formada por linhas curvas de campo magnético, produzidas por eletroímãs. Na região central da garrafa, o movimento das partículas é helicoidal, como no exemplo 3. Quando uma partícula carregada e com velocidade radial tenta escapar da garrafa, nas bordas aparecem forças tangenciais ao

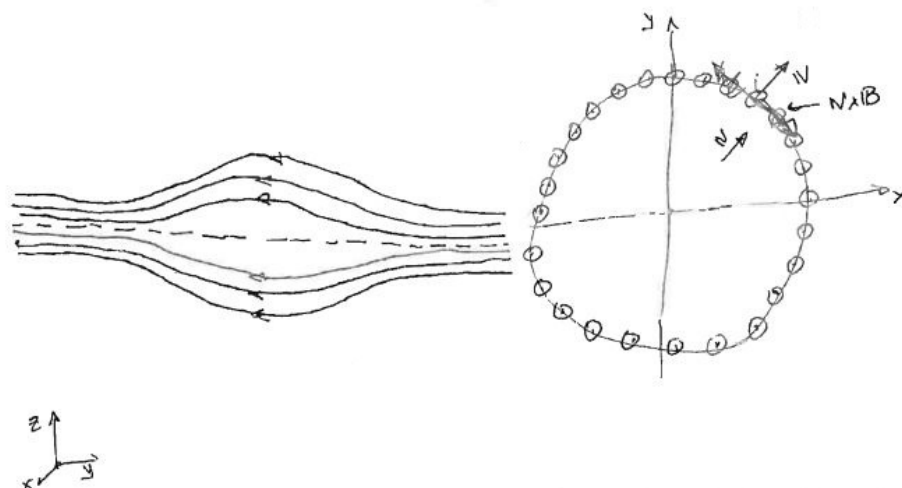


Figura 31.5: Garrafa de plasma (a) linhas de campo magnético; (b) força magnética sobre uma partícula carregada e com velocidade não nula.

campo, que geram movimentos também tangenciais. Estes, por sua vez, dão origem a novas forças, que empurram as partículas de volta para dentro da garrafa.

### • exemplo 7: o campo da Terra

O campo magnético da Terra é gerado por correntes elétricas devidas a fluidos quentes existentes no seu interior e o seu módulo, próximo à superfície da Terra, tem valores entre  $30$  e  $60 \times 10^{-6}$  T. O polo sul magnético da Terra está próximo do polo norte geográfico e vice-versa. É por isso que o polo norte de uma bússola aponta para o polo norte geográfico, como sugere a fig.31.6. Os polos magnéticos da Terra não são fixos, movendo-se a uma velocidade de cerca de  $20$  km por ano. Estudos de polarizações magnéticas em rochas indicam que houve  $9$  inversões dos polos norte e sul magnéticos da Terra durante os seus  $4$  bilhões de anos de idade.

A atmosfera terrestre é continuamente bombardeada por raios cósmicos, que são constituídos principalmente por prótons provenientes tanto do Sol como de fontes externas à galáxia. Como toda radiação formada por partículas carregadas é ionizante, os raios cósmicos podem ser muito nocivos aos seres vivos, causando desde doenças como cânceres até mutações genéticas. O campo magnético terrestre tem papel muito importante em diminuir a influência dos raios cósmicos na superfície da Terra. Considere uma partícula com carga  $q$  positiva, que se aproxima da Terra com velocidade  $\vec{v}$ , como na fig.31.6. Ao atingir o campo terrestre, esta partícula começa a sofrer uma força  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ , que aponta para dentro da folha de papel. Como a velocidade da partícula é, em geral alta, esta força é intensa e tende a fazer com que ela passe a girar em torno da Terra, paralelamente à sua superfície. Deste modo, os raios cósmicos são desviados e aprisionados em garrafas de plasma. Essas partículas ficam girando em torno da Terra e dão origem a um fenômeno muito interessante, que é o chamado cinturão de Van Allen, formado por partículas carregadas que orbitam em torno dela, em camadas altas da atmosfera. As bocas da garrafa de campo terrestre ficam nos polos, e por elas podem escapar partículas carregadas,

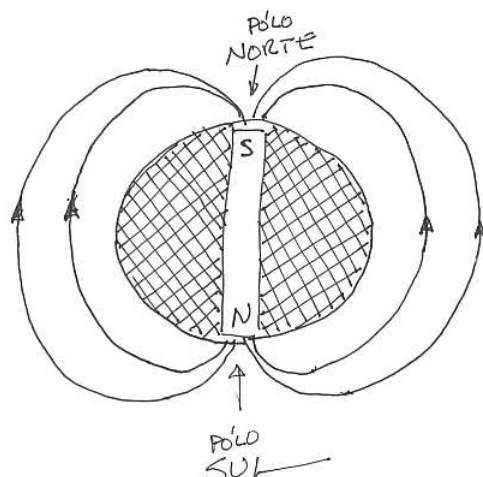


Figura 31.6: Planeta Terra e seus polos geográficos e magnéticos.

que entram na atmosfera polar com grande velocidade. Quando isso acontece, elas ionizam o ar, produzindo o efeito luminoso conhecido como aurora polar. As auroras polares ocorrem nos dois polos magnéticos, sendo denominadas aurora boreal no norte e aurora austral no sul.

### • exemplo 8

Em problemas de física de plasmas, a situação mais comum é que partículas carregadas se movam em presença de campos magnéticos não uniformes, que podem variar significativamente em regiões relativamente pequenas. Quando isto acontece, a trajetória da partícula pode assumir formas incomuns, pouco prováveis em outras situações. Como a força magnética é sempre ortogonal à velocidade da partícula e a intensidade do campo é inversamente proporcional ao raio de curvatura da trajetória, campos mais intensos provocam desvios mais acentuados. Deste modo, é possível que a trajetória de uma partícula possa ter, por exemplo, a forma mostrada na fig.31.7.

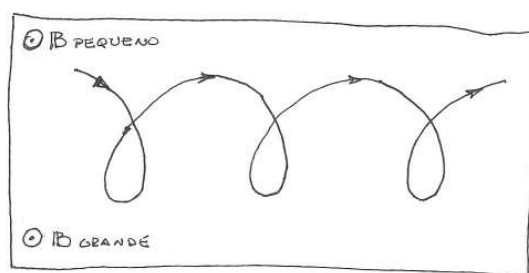


Figura 31.7: Possível trajetória de uma partícula em uma região de campo magnético não uniforme.

### • exemplo 9: um pouquinho de LHC

Atualmente, o maior acelerador de partículas existente no mundo é o LHC (*Large Hadron Collider*, em inglês), que está no laboratório CERN, na Europa. Ele está montado no interior de um túnel bastante profundo, escavado sob a superfície, com 4,3 km de raio e 27 km de circunferência. No LHC são acelerados prótons e íons positivos e, por isso, são necessários campos magnéticos bastante intensos para manter estas partículas em trajetória circular. A intensidade do campo magnético no interior do acelerador pode chegar a  $|\vec{B}| = 8,4 \text{ T}$ , a maior já conseguida até hoje e cerca de  $10^5$  vezes maior que a do campo terrestre.

Só por brincadeira, suponhamos que desejemos produzir um campo de tal magnitude no interior de um solenoide cilíndrico como o discutido no exemplo 5 da aula 30, para o qual  $|\vec{B}| = \mu_0 n I$ . Usando o valor de  $\mu_0$  dado no apêndice XXX, precisaríamos ter  $n I \sim 6,7 \times 10^6 \text{ A/m}$ , que representa um valor enorme. Se isto pudesse ser concretizado, a dissipação de energia por efeito Joule seria gigantesca e destruiria o solenoide. Por este motivo, no LHC, são utilizados eletroímãs supercondutores, cuja construção representa um grande desafio técnico.

Os prótons acelerados no interior do LHC têm velocidades apenas ligeiramente menores do que a da luz e, por isso, não podem ser descritos pela mecânica newtoniana e precisam ser tratados pela teoria da relatividade. Nesta teoria, a inércia de uma partícula é descrita pela relação  $E/c^2$ , onde  $E$  é a sua energia e  $c$ , a velocidade da luz. Esta energia está relacionada à sua massa por  $E = \gamma m c^2$ , onde  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Assim, uma generalização simples da eq.(31.3) para incluir efeitos relativísticos do próton, para o qual  $q = e$ , seria

$$e v B = \gamma m_p \frac{v^2}{R}. \quad (31.19)$$

A aproximação  $v \sim c$  permite estimar  $\gamma$  pela relação

$$\gamma = \frac{e B R}{m_p c}. \quad (31.20)$$

Usando  $B = 8,4 \text{ T}$ ,  $R = 4,3 \times 10^3 \text{ m}$  e os dados do apêndice XXX para  $e$ ,  $m_p$  e  $c$ , obtemos  $\gamma \simeq 1,15 \times 10^4$ , o que indica que a inércia de um próton no interior do LHC é cerca de dez mil vezes maior do que a de um próton em repouso. Esta nossa estimativa simples, que despreza efeitos de radiação, entre outros, não está muito distante do valor mais preciso  $\gamma = 0,7 \times 10^4$ .

## • exercícios

- Um acelerador atira elétrons de massa  $m$  e carga  $e$ , com velocidade  $\vec{v} = v \hat{j}$ , sobre uma região de extensão  $L$ , onde há campo magnético  $\vec{B} = B \hat{i}$  uniforme, como na fig.31.4(a). Calcule:
  - o raio  $R$  da trajetória do elétron na região onde há campo;
  - a velocidade angular  $\omega$  do elétron, na região onde há campo;
  - o desvio  $\delta$  do elétron na direção  $z$ , no ponto no qual ele deixa a região onde existe  $\vec{B}$ ;
  - o vetor velocidade  $\vec{v}_F$  do elétron depois que ele atravessa a região onde existe  $\vec{B}$ .

## • respostas

1. a)  $R = \frac{mv}{eB}$ ;      b)  $\omega = \frac{eB}{m}$ ;  
c)  $\delta = R \left[ 1 - \sqrt{1 - L^2/R^2} \right]$ , com  $R$  dado acima;  
d)  $\vec{v}_F = v \left[ \sqrt{1 - L^2/R^2} \hat{j} + L/R \hat{k} \right]$ , com  $R$  dado acima.





# Capítulo 32

## força de Lorentz em metais

Metais são sistemas formados por redes cristalinas de íons positivos, bastante estáveis, e elétrons livres, que podem se mover com grande facilidade. Por isso, as respostas destes dois tipos de portadores de cargas a campos externos são bastante diferentes. Os efeitos devidos a campos elétricos foram apresentados na aula 27?? e, agora, discutimos o que ocorre quando existem campos magnéticos externos.

### • exemplo 1

Descrevemos o que acontece quando uma barra metálica é movida, com velocidade constante, em presença de um campo magnético uniforme e constante no tempo. Para definir melhor a situação, supomos que o campo magnético seja dado por  $\vec{B} = B \hat{i}$  e que a velocidade da barra seja  $\vec{v} = v \hat{j}$ , como mostra fig.32.1(a).

Quando a barra é movida em presença do campo, ela arrasta todas as suas cargas consigo. Assim, na situação da figura, existem tanto íons positivos quanto elétrons livres se movendo para a direita, com velocidade  $\vec{v}$ . Sendo  $e$  o módulo da carga do elétron, existem forças

$$\vec{F}_{B+} = e \vec{v} \times \vec{B} = -e v B \hat{k}, \quad (32.1)$$

agindo sobre cada íon e

$$\vec{F}_{B-} = -e \vec{v} \times \vec{B} = e v B \hat{k}, \quad (32.2)$$

agindo sobre cada elétron. Como os íons são massivos e estão presos à rede cristalina, os seus movimentos devidos à força magnética podem ser desprezados. Já os elétrons livres, que são muito leves, se deslocam ao longo da barra, até se acumularem na sua extremidade superior.

Este deslocamento de cargas dá origem a um campo elétrico, que existe tanto dentro quanto fora da barra, como indica a figura (b). Este campo cria forças  $\vec{F}_{E+}$  sobre os íons positivos e  $\vec{F}_{E-}$  sobre os elétrons livres, com sentidos opostos ao das forças magnéticas, indicado na figura

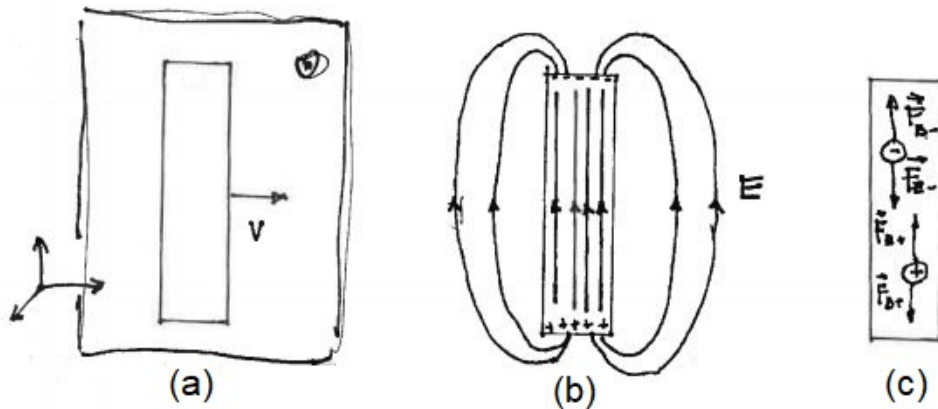


Figura 32.1: (a) Barra metálica em movimento em campo magnético perpendicular à sua velocidade; (b) acúmulos de cargas na barra devidos à força de Lorentz e suas linhas de campo elétrico; (c) forças elétricas e magnéticas nos íons positivos e elétrons livres na situação de equilíbrio.

(c). A ação conjunta das forças elétrica e magnética tende a fazer com que os elétrons no interior do metal parem de se deslocar e o sistema se estabilize. Nesta situação, as forças resultantes sobre as cargas no metal se anulam e temos

$$\vec{F}_{B+} + \vec{F}_{E+} = e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0, \quad (32.3)$$

$$\vec{F}_{B-} + \vec{F}_{E-} = -e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0. \quad (32.4)$$

Este resultado permite concluir que, na situação de equilíbrio, o campo elétrico *no interior* do metal é dado por

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = v B \hat{k}. \quad (32.5)$$

Do lado de fora da barra, as linhas de campo elétrico estão espalhadas pelo espaço vazio e são qualitativamente semelhantes às da pilha mostradas na fig.27.1 [((((((27.1)))))). Por este motivo, tal como uma pilha, uma barra que se move em presença de um campo magnético externo também pode ser utilizada para gerar correntes elétricas em circuitos.

## • exemplo 2

Um cilindro metálico, parecido com uma moeda, de raio  $R$ , espessura  $d$  ( $d \ll R$ ) e eixo na direção  $z$ , é movido com velocidade  $\vec{v} = v \hat{j}$  em presença de um campo magnético uniforme e independente do tempo  $\vec{B} = B \hat{i}$ , como na fig.32.2. Determinamos a quantidade de carga acumulada em cada uma das bases do cilindro.

Os efeitos que ocorrem no cilindro metálico são análogos aos discutidos no exemplo anterior. Os elétrons e íons arrastados pelo movimento do corpo sofrem forças de origem magnética e

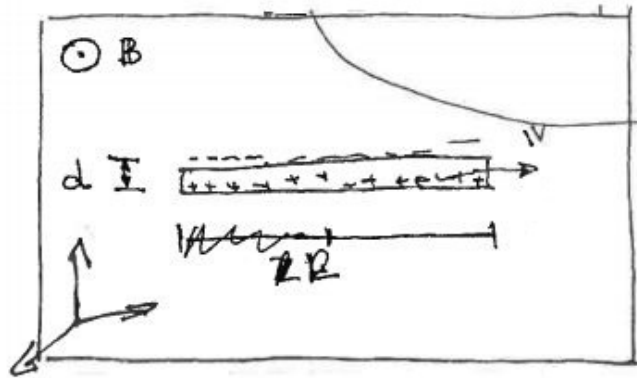


Figura 32.2: Cilindro de raio  $R$  e altura  $d \ll R$  com velocidade  $\vec{v}$ , na presença de um campo magnético uniforme.

se separam. Na situação de equilíbrio, existe um campo elétrico no interior do metal, dado pela eq.(32.5). A particularidade deste caso é que o fato de o cilindro ter duas faces grandes, separadas por uma distância pequena, faz com que ele seja análogo a um capacitor de placas paralelas carregado. Na aproximação  $R \gg d$ , podemos usar os resultados da aula 14, eq.(?xxx), e escrever

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k}, \quad (32.6)$$

onde  $\sigma$  é o módulo da densidade superficial de carga. Igualando as eqs.(32.5) e (32.6), obtemos

$$\sigma = \epsilon_0 v B \quad (32.7)$$

e, portanto, as cargas nas placas valem  $\pm Q$ , com

$$Q = [\epsilon_0 v B] [\pi R^2]. \quad (32.8)$$

Este resultado indica que as cargas nas bases do cilindro são diretamente proporcionais a  $v$  e a  $B$ , já que elas são devidas a estes dois fatores conjuntamente.

## • efeito Hall

O efeito Hall foi descoberto em 1879, pelo físico estadunidense Edwin Hall e ocorre sempre que um condutor é percorrido por uma corrente elétrica em presença de um campo magnético externo. Este efeito é muito importante, porque permite conhecer propriedades microscópicas dos metais por meio de medidas macroscópicas.

Consideremos a situação da fig.32.3(a), que mostra um condutor metálico de seção transversal retangular, de lados  $a$  e  $L$ , apoiado sobre o plano  $xy$  e percorrido por uma corrente  $I$  no sentido do eixo  $y$ , em presença de um campo magnético uniforme e constante  $\vec{B} = B \hat{k}$ .

Hoje, sabemos que correntes em metais são devidas a deslocamentos de elétrons livres. Entretanto, como vimos na aula 31, o elétron somente foi descoberto em 1897 e, à época de Hall,

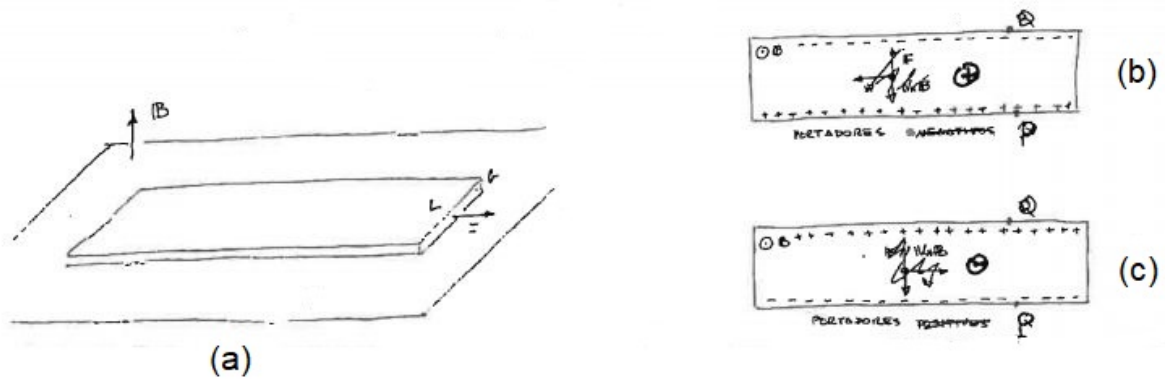


Figura 32.3: Efeito Hall: (a) placa metálica retangular percorrida por corrente em presença de campo magnético externo; a distribuição de cargas nas placas se os portadores de corrente forem (b) cargas positivas ou (c) cargas negativas.

sabia-se pouco acerca da natureza da corrente elétrica. Em particular, não era claro se as cargas em movimento eram positivas ou negativas e o experimento de Hall ajudou a responder esta questão. Por isso, por um momento, fingimos não saber o seu sinal, chamamos de  $q$  a carga dos portadores e consideramos as possibilidades  $q = \pm|q|$ . Na situação da fig.32.3(a), se  $q > 0$ , a velocidade das cargas é  $\vec{v}_+ = v \hat{j}$  e a força magnética sobre um portador vale

$$\vec{F}_{B+} = q (\vec{v}_+ \times \vec{B}) = |q| v B \hat{i}. \quad (32.9)$$

Esta força desloca as cargas positivas paralelamente ao eixo  $x$  e elas ficam acumuladas sobre as superfícies laterais do condutor, como mostra a figura (b), dando origem a um campo elétrico  $\vec{E}_+ = -E \hat{i}$  no seu interior, que estabiliza o sistema quando

$$\vec{F}_{E-} + \vec{F}_{B+} = |q| (\vec{E}_+ + \vec{v}_+ \times \vec{B}) = |q| (-E + v B) \hat{i} = 0. \quad (32.10)$$

No caso  $q < 0$ , a velocidade dos portadores é  $\vec{v}_- = -v \hat{j}$  e a força magnética é dada por

$$\vec{F}_{B-} = q (\vec{v}_- \times \vec{B}) = |q| v B \hat{i}, \quad (32.11)$$

idêntica a  $\vec{F}_{B+}$ . Só que, agora, são as cargas negativas que são deslocadas paralelamente ao eixo  $x$  e ficam acumuladas sobre as paredes do condutor, como na figura (c). Estas cargas produzem um campo  $\vec{E}_- = E \hat{i}$  no interior do metal e, na condição de equilíbrio,

$$\vec{F}_{E-} + \vec{F}_{B-} = q (\vec{E}_- + \vec{v}_- \times \vec{B}) = |q| (E - v B) \hat{i} = 0. \quad (32.12)$$

A presença de um campo elétrico no interior do metal indica a existência de uma tensão entre os pontos P e Q das figuras (b) e (c), dada por

$$\Delta V_{PQ} = V_P - V_Q = \int_0^L \vec{E} \cdot dx \hat{i}. \quad (32.13)$$

Como  $\vec{E}$  é constante ao longo do caminho, obtemos

$$\text{para } q > 0 \rightarrow \Delta V_{PQ} = -v B L, \quad (32.14)$$

$$\text{para } q < 0 \rightarrow \Delta V_{PQ} = v B L. \quad (32.15)$$

O sinal da tensão depende do sinal do portador de carga  $e$ , por isso, medindo  $\Delta V_{PQ}$ , podemos determinar o sinal de  $q$ . Como sabemos hoje, os resultados experimentais indicam que  $q < 0$ .

O efeito Hall é importante, também, porque permite a determinação experimental de  $n$ , o número de elétrons livres por unidade de volume de um metal. Para mostrar isso, lembramos que a velocidade  $\vec{v}_-$  dos elétrons livres em um metal está relacionada à densidade de corrente  $\vec{j}$  que o percorre pela eq.(26.6) [((((26.6)))]], que corresponde a  $\vec{j} = -en\vec{v}_-$ . Na situação da fig.32.3(c), a corrente  $I$  é dada por

$$I = (en v) (a L). \quad (32.16)$$

Usando esta expressão juntamente com a eq.(32.15), podemos escrever  $n$  como

$$n = \frac{I B}{e a \Delta V_{PQ}}. \quad (32.17)$$

A importância deste resultado é que todas as grandezas do seu lado direito podem ser medidas, o que permite conhecer  $n$ , uma grandeza microscópica.

## • força sobre um fio percorrido por corrente

A existência de forças sobre fios metálicos percorridos por correntes em presença de campos magnéticos externos  $\vec{B}_{\text{ext}}$  é um fenômeno conhecido há muito tempo. Por exemplo, no caso de motores elétricos, a transformação de energia eletromagnética em energia mecânica tem início com forças que campos magnéticos produzem sobre os fios enrolados no rotor móvel, quando estes são percorridos por correntes.

Entretanto, se a observação das forças sobre fios percorridos por correntes em presença de campos magnéticos externos é simples, a explicação detalhada da origem deste fenômeno não o é e envolve algumas sutilezas, associadas à estrutura metálica do fio. Metais são constituídos por redes cristalinas formadas por íons positivos, no interior das quais se movem elétrons livres. Como já mencionamos, as principais características mecânicas de um metal, tais como sua massa e rigidez, são determinadas pela rede iônica. Assim, por exemplo, 1 kg de metal contém bem menos do que 1 g de elétrons. Se considerarmos apenas os elétrons livres, a proporção é ainda menor e, portanto, podemos afirmar com boa aproximação que 1 kg de metal contém 1 kg de íons.

Deste modo, as forças que agem sobre fios percorridos por correntes em presença de  $\vec{B}_{\text{ext}}$  e que, dependendo da configuração do sistema, são capazes de acelerá-los, deslocá-los ou levantá-los, são perceptíveis pelos efeitos que elas causam sobre as suas redes iônicas. Entretanto, do ponto de vista do eletromagnetismo, este fato parece ser paradoxal, já que a velocidade média

dos íons da rede cristalina é nula e, conseqüentemente, a força de origem magnética que age sobre eles também é nula.

O efeito Hall tem papel fundamental na explicação deste aparente paradoxo<sup>1</sup>.

No interior do fio, apenas os elétrons livres se movem e, por isso, somente sobre eles agem as forças de origem magnética, que são transversais à corrente e deslocam lateralmente os elétrons em movimento, relativamente à rede iônica. Esta pequena separação de cargas dá origem a uma força elétrica entre elétrons livres e a rede cristalina. Assim, sobre os elétrons livres agem dois tipos de força, em sentidos opostos, uma elétrica e outra magnética, que tendem a se equilibrar. Já nos íons, agem apenas forças elétricas e são elas que produzem os efeitos observáveis.

O detalhamento desta discussão interessante e relativamente complexa é feita, com base em um caso específico, nos dois exemplos que seguem.

### • exemplo 3: cálculo da força sobre um fio

Consideramos um fio metálico, retilíneo e muito longo, paralelo ao eixo  $y$ , percorrido por uma corrente  $I$  no sentido deste eixo e supomos que, na região onde ele se encontra, exista um campo magnético uniforme e constante  $\vec{B} = B\hat{k}$ , como na fig.32.4. Desejamos obter a força resultante  $\vec{F}$  que age sobre o fio. Para organizar a discussão consideramos várias etapas, determinando as seguintes grandezas:

- (1) - força magnética  $\vec{F}_{B-}$  sobre os elétrons livres;
- (2) - força elétrica  $\vec{F}_{E-}$  sobre os elétrons livres;
- (3) - força elétrica  $\vec{F}_{E+}$  sobre a rede iônica;
- (4) - força resultante  $\vec{F}$  sobre o fio.

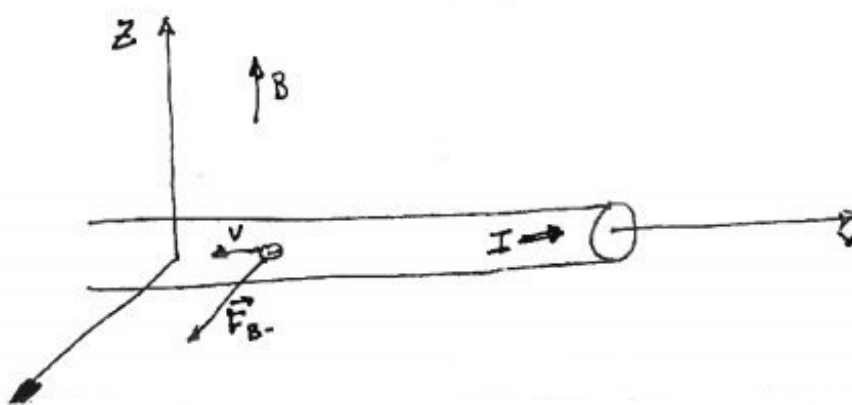


Figura 32.4: Fio cilíndrico percorrido por corrente, em presença de campo magnético externo.

<sup>1</sup>A apresentação feita aqui é baseada no artigo *xxxx* de Karam, Kneubil e Robilotta.

• (1) - **cálculo de  $\vec{F}_{B-}$**  Como a corrente no fio é devida ao movimento de elétrons livres em presença de uma rede cristalina iônica estática, o campo magnético atua apenas sobre os elétrons livres. A força  $\vec{f}_{B-}$  que atua sobre cada um deles é dada por

$$\vec{f}_{B-} = -e\vec{v} \times \vec{B} = evB\hat{i}, \quad (32.18)$$

sendo  $\vec{v} = -v\hat{j}$  a sua velocidade de arraste. Chamando de  $n$  o número de elétrons livres por unidade de volume e  $S$  a área da seção transversal do fio, sobre um trecho de comprimento  $L$ , existem  $N = nLS$  elétrons. Assim, a força total que age sobre os elétrons contidos neste trecho do fio é dada por

$$\vec{F}_{B-} = N\vec{f}_{B-} = [nLS][evB]\hat{i}. \quad (32.19)$$

Este resultado pode ser reescrito em termos da corrente  $I$ . A densidade de corrente  $\vec{j}$ , expressa pela eq.(26.6) [((((26.6)))]], vale

$$\vec{j} = -en\vec{v} = env\hat{j} \quad (32.20)$$

e, portanto, a corrente é dada por

$$I = jS = envS. \quad (32.21)$$

Este resultado, usado na eq.(32.19), fornece

$$\vec{F}_{B-} = BIL\hat{i}. \quad (32.22)$$

Esta é a força que age sobre os *elétrons livres* de um trecho de comprimento  $L$  do fio. Como mostramos a seguir, esta força é transmitida à rede iônica do metal por meio de campos elétricos, associados ao efeito Hall.

• (2) - **cálculo de  $\vec{F}_{E-}$**

Na aula 27???? mostramos que, no **No** interior de um fio metálico, consideramos duas densidades de carga,  $\rho_+ = \rho$  dos íons positivos e  $\rho_- = -\rho$  dos elétrons livres que se movem. Na ausência de campo magnético externo, estas duas densidades, iguais em módulo, estão totalmente superpostas em todos os pontos do metal e a densidade resultante  $\rho_+ + \rho_-$  é nula. Quando há campo magnético externo, os elétrons em movimento estão sujeitos à força dada pela eq.(32.22) e cada um deles se desloca na direção  $\hat{i}$ , fazendo com que a superposição entre  $\rho_+$  e  $\rho_-$  seja parcial, como mostra a fig.32.5. Esta separação de cargas dá origem a campos elétricos, que tendem a reaproximar as duas densidades. A situação de equilíbrio ocorre quando, sobre cada elétron, as forças de origem magnética e elétrica se anulam.

Como as forças elétricas são muito intensas, a separação  $\Delta$  entre os eixos das densidades  $\rho_+$  e  $\rho_-$  é muito pequena e isto facilita muito o cálculo da força elétrica que a rede iônica cria sobre a densidade  $\rho_-$ . O campo criado pela densidade  $\rho_+$  é obtido a partir da lei da Gauss. Considerando  $\rho_+$  como uma distribuição cilíndrica infinita de carga, recaímos na situação discutida no exemplo 9 da aula 15, onde o campo tem a forma

$$\vec{E}_+ = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{r} \rightarrow \text{dentro do fio}, \quad (32.23)$$

$$\vec{E}_+ = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2} \vec{r} \rightarrow \text{fora do fio}, \quad (32.24)$$

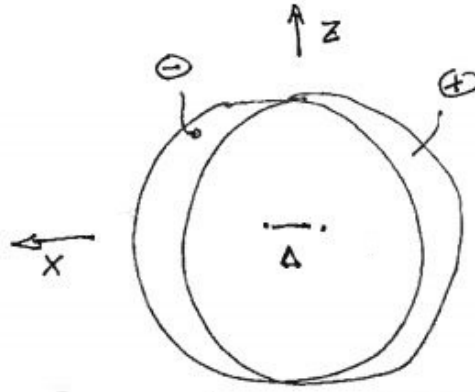


Figura 32.5: Fio visto de frente: distribuições de cargas positivas e negativas, separadas pela ação do campo magnético externo.

onde  $\vec{r}$  é o vetor radial em coordenadas cilíndricas. O deslocamento  $\Delta$  da distribuição negativa de cargas é muito pequeno e, por isso, precisamos da expressão do campo externo ao fio apenas em regiões muito próximas à sua superfície, para as quais  $r = (1 + \epsilon) R$ , com  $\epsilon \ll 1$ . Neste caso, a eq.(32.24) se torna aproximadamente igual à (32.23) e escrevemos

$$\vec{E}_+ \simeq \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{r} \rightarrow \text{fora e perto do fio.} \quad (32.25)$$

A força que age sobre um elemento de carga  $dq_-$  da distribuição negativa, que ocupa um volume  $dV$ , localizado à distância  $r$  do eixo da rede iônica, é dada por

$$d\vec{F}_{E_-} = dq_- \vec{E}_+ = -\rho dV \vec{E}_+ = -\rho dV \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{r}. \quad (32.26)$$

Consequentemente, a força total que age em um trecho de comprimento  $L$  é dada por

$$\vec{F}_{E_-} = \iiint_V dV \left[ -\frac{\rho^2}{2\epsilon_0} \vec{r} \right], \quad (32.27)$$

sendo que a integral deve ser efetuada sobre o volume ocupado por  $\rho_-$ . Esta distribuição é um cilindro, com eixo deslocado passando pelo ponto  $\vec{\Delta} = \Delta \hat{i}$  e a integração fica mais simples se usarmos a variável  $\vec{s} = \vec{r} - \vec{\Delta}$ . Neste caso, o eixo de simetria fica localizado em  $\vec{s} = 0$ ,  $dV = s ds d\theta dz$  e

$$\vec{F}_{E_-} = \int_0^L dz \int_0^R ds \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ s \left[ -\frac{\rho^2}{2\epsilon_0} (\vec{s} + \vec{\Delta}) \right] \right\}. \quad (32.28)$$

Como o integrando é simétrico em torno do eixo da distribuição negativa, a integral sobre  $\vec{s}$  se anula e obtemos

$$\vec{F}_{E_-} = -\frac{\rho^2}{2\epsilon_0} \int_0^L dz \int_0^R ds \int_0^{2\pi} d\theta s \vec{\Delta} = -\frac{\rho^2}{2\epsilon_0} \pi R^2 L \Delta \hat{i}. \quad (32.29)$$

É importante notar que  $\vec{F}_{E_-}$  tem a mesma direção, mas sentido oposto a  $\vec{F}_{B_-}$ .



• **(3) - cálculo de  $\vec{F}_{E_+}$**  A força  $\vec{F}_{E_-}$ , dada por (32.29), é devida à ação das cargas positivas da rede iônica sobre os elétrons livres. O efeito dos elétrons sobre os íons é determinado pelo princípio da ação e reação e, portanto, a força que age sobre um trecho de comprimento  $L$  da rede é dada por

$$\vec{F}_{E_+} = -\vec{F}_{E_-} = \frac{\rho^2}{2\epsilon_0} \pi R^2 L \Delta \hat{i}. \quad (32.30)$$

• **(4) - cálculo da força resultante sobre o fio**

A força total  $\vec{F}_-$  que age sobre os elétrons em movimento é determinada pelos resultados (32.22) e (32.29) e vale

$$\vec{F}_- = \vec{F}_{B_-} + \vec{F}_{E_-} = \left[ B I L - \frac{\rho^2}{2\epsilon_0} \pi R^2 L \Delta \right] \hat{i}, \quad (32.31)$$

enquanto que a força sobre os íons é

$$\vec{F}_+ = \vec{F}_{E_+} = \left[ \frac{\rho^2}{2\epsilon_0} \pi R^2 L \Delta \right] \hat{i}. \quad (32.32)$$

Assim, a força resultante que age no trecho de comprimento  $L$  do fio vale

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = B I L \hat{i}. \quad (32.33)$$

Este resultado é conceitualmente interessante. De modo geral, a força magnética só age sobre cargas em movimento que, neste exemplo, são os elétrons livres. Esta força, em analogia ao que acontece no efeito Hall, separa um pouco as densidades de carga de sinais opostos, fazendo com que exista uma força elétrica entre elétrons livres e a rede cristalina. Deste modo, a força de origem magnética que age sobre os elétrons acaba por influenciar indiretamente os íons positivos, apesar de eles estarem estacionários. Como as forças de origem elétrica são *internas* ao sistema, elas se cancelam quando calculamos a força resultante que age sobre todos os elementos do fio. É deste modo que a força magnética produz efeitos sobre o fio.

• **exemplo 4: distribuição de cargas no fio**

Aqui, complementamos a discussão iniciada no exemplo anterior, calculando

- (a) - o deslocamento  $\Delta$  da densidade de carga negativa;
- (b) - o campo elétrico dentro e fora do fio;
- (c) - as densidades de carga na superfície do fio;
- (d) - a tensão entre lados opostos do fio.

• **(a) - cálculo de  $\Delta$**

Se o fio sujeito ao campo magnético externo estiver preso de algum modo e impedido de se mover, os seus elétrons livres se deslocam apenas da quantidade  $\Delta$  na direção  $x$  e a força total

$\vec{F}_-$ , eq.(32.31), que age sobre eles é nula. Se o fio estiver livre, ele pode sofrer uma aceleração  $\vec{a}$  devida à força  $\vec{F}$ , eq.(32.33). Neste caso, para os elétrons livres, vale a segunda lei de Newton

$$\vec{F}_- = m_- \vec{a}, \quad (32.34)$$

onde  $m_-$  é a massa do conjunto de elétrons livres contidos no trecho de fio de comprimento  $L$ . Entretanto, esta massa é milhares de vezes menor do que a massa total do fio, o produto  $m_- \vec{a}$  é pequeno e, com boa aproximação, podemos desprezar  $\vec{F}_-$ .

Assim, em ambos os casos, fazemos  $\vec{F}_- = 0$  na eq.(32.31) e obtemos o valor de  $\Delta$ , dado por

$$\Delta = \frac{2\epsilon_0 B I}{\rho^2 \pi R^2}, \quad (32.35)$$

que pode ser determinado em termos de grandezas observáveis. Para estimar o seu valor, adotamos  $B = 1 \text{ T}$ ,  $I = 1 \text{ A}$  e  $R = 10^{-3} \text{ m}$ . Em um metal, existem tipicamente,  $10^{28}$  elétrons livres por  $\text{m}^3$  e, usando o valor de  $e$  dado no apêndice XXX, obtemos  $\rho = en = 1,6 \times 10^9 \text{ C/m}^3$ . Empregando o valor de  $\epsilon_0$ , também dado no apêndice X, encontramos  $\Delta \sim 2,2 \times 10^{-24} \text{ m}$ . Este é um valor muito pequeno, um trilhão de vezes menor que o raio de um próton, que é da ordem de  $10^{-15} \text{ m}$ .

#### • (b) - cálculo do campo elétrico

Na ausência de campo magnético externo não há campo elétrico do lado de fora de um fio percorrido por uma corrente, porque as densidades  $\rho_+$  e  $\rho_-$  são iguais em módulo e estão totalmente superpostas. Na presença de  $\vec{B}$  externo, estas densidades se deslocam lateralmente, de uma distância  $\Delta$ . Apesar de pequeno, este deslocamento faz com que apareçam campos elétricos dentro e fora do fio. As eqs.(32.23) e (32.24) descrevem o campo criado pela distribuição positiva. O campo devido às cargas negativas pode ser obtido a partir delas fazendo  $\rho \rightarrow -\rho$  e  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} - \vec{\Delta}$ , para incorporar o fato que a densidade negativa tem seu eixo deslocado em relação à positiva. Deste modo, obtemos

$$\vec{E}_- = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{\Delta}) \rightarrow \text{dentro do fio}, \quad (32.36)$$

$$\vec{E}_- = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{|\vec{r} - \vec{\Delta}|^2} (\vec{r} - \vec{\Delta}) \rightarrow \text{fora do fio}. \quad (32.37)$$

Como  $\Delta$  é muito pequeno, a última expressão pode ser simplificada guardando apenas termos lineares em  $\Delta$ , escrevendo

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{\Delta}|^2} = \frac{1}{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{\Delta} + \Delta^2} \simeq \frac{1}{r^2} \left[ 1 + \frac{2\vec{\Delta} \cdot \vec{r}}{r^2} \right]. \quad (32.38)$$

Assim, obtemos

$$\vec{E}_- = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2} \left[ \vec{r} - \vec{\Delta} + \frac{2\vec{\Delta} \cdot \vec{r}}{r^2} \vec{r} \right]. \quad (32.39)$$

$$\vec{E}_- = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2} \left[ \vec{r} - \vec{\Delta} + \frac{2\vec{\Delta} \cdot \vec{r}}{r^2} \vec{r} \right] \rightarrow \text{fora do fio}. \quad (32.40)$$

O campo resultante  $\vec{E}$  é dado pela soma de  $\vec{E}_+$  e  $\vec{E}_-$ , eqs.(32.23), (32.24), (32.36) e (32.40). Escrevendo  $\vec{r}$  em coordenadas cilíndricas como

$$\vec{r} = r \left( \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{k} \right), \quad (32.41)$$

temos

$$\vec{E}_{\text{int}} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \Delta \hat{i} \rightarrow \text{dentro do fio}, \quad (32.42)$$

$$\vec{E}_{\text{ext}} = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2} \Delta \left( \cos(2\theta) \hat{i} + \sin(2\theta) \hat{k} \right) \rightarrow \text{fora do fio}. \quad (32.43)$$

Este campo é uniforme no interior do fio e as suas linhas estão indicadas na fig.32.6

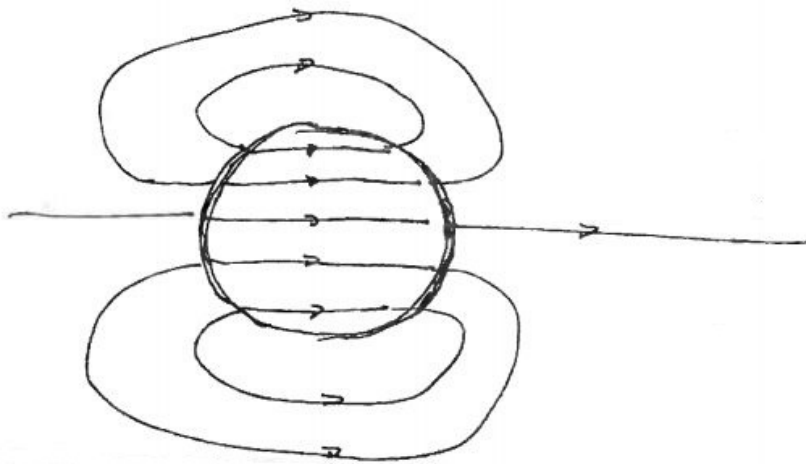


Figura 32.6: Fio visto de frente: linhas de campo devidas ao deslocamento de cargas.

• **(c) - densidades de carga** A densidade de carga em um ponto da superfície do fio, *determinada determinado* pela coordenada  $\vec{r} = R (\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{k})$ , pode ser obtida por meio da lei de Gauss, com uma superfície gaussiana  $S$  na forma de um cilindro com eixo na direção radial e altura muito pequena, metade dentro e metade fora do fio. A aplicação da lei fornece

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \left( \vec{E}_{\text{ext}} \cdot \hat{r} - \vec{E}_{\text{int}} \cdot \hat{r} \right) A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}, \quad (32.44)$$

onde  $A$  é a área da base do cilindro. Usando as eqs.(32.41) e (32.42), obtemos

$$\sigma = -\rho \Delta \cos\theta. \quad (32.45)$$

Esta densidade é negativa para  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$  e positiva nos dois outros quadrantes.

A carga negativa total contida em um trecho de comprimento  $L$  do fio é dada por

$$q_- = - \int_0^L dz \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta R \rho \Delta \cos\theta = -2 \rho \Delta R L \quad (32.46)$$

e corresponde a um número de elétrons dado por  $q_-/(-e)$ . Usando os valores numéricos empregados no cálculo de  $\Delta$  e supondo  $L = 1$  m, concluímos que a carga negativa total corresponde à de 31 elétrons.

• **(d) - tensão** O campo elétrico no interior do fio é constante e a tensão entre dois pontos diametralmente opostos do fio ao longo do eixo  $x$  é dada por

$$\Delta V = |\vec{E}| 2R = \frac{\rho R \Delta}{\epsilon_0} . \quad (32.47)$$

Os mesmos valores numéricos usados anteriormente fornecem  $\Delta V = 3,3 \times 10^{-7}$  V.

Em resumo, notamos que os valores de  $\Delta$ ,  $q_-$  e  $\Delta V$  são bastante pequenos mas, mesmo assim, eles estão diretamente relacionados a um observável macroscópico, a força  $\vec{F}$  dada pela eq.(32.33), que age no fio como um todo.

### • exercícios

1. Verifique que o resultado dado pela eq.(32.8) tem dimensão de carga elétrica.
2. Numa região do espaço existe um campo magnético uniforme  $\vec{B} = B \hat{i}$  e uma placa metálica quadrada, de lado  $L$ , espessura  $a$ ,  $a \ll L$ , e paralela ao plano  $xy$ , arrastada com velocidade  $\vec{v} = v \hat{j}$ .
  - a) Determine a força de origem magnética que age sobre um elétron da placa.
  - b) Determine o campo elétrico  $\vec{E}$  no interior da placa.
  - c) Determine as densidades superficiais de carga em cada uma das faces da placa.

### • respostas

2. a)  $\vec{F} = evB \hat{k}$ , sendo  $-e$  a carga do elétron.
- b)  $\vec{E} = vB \hat{k}$ .
- c)  $|\sigma| = \epsilon_0 v B$ , com cargas negativas na face superior e cargas positivas na inferior.

# Capítulo 33

## forças sobre correntes: aplicações

### • força magnética sobre um fio

Como discutimos na aula anterior, a determinação da força resultante sobre um fio percorrido por uma corrente elétrica  $I$  em presença de um campo magnético externo  $\vec{B}$  envolve fenômenos complexos, nos quais campos elétricos também desempenham um papel importante. De modo geral, a força magnética  $\vec{f}_{B-}$  que age sobre um elétron no interior do fio com velocidade de arrasto  $\vec{v}$  é dada por

$$\vec{f}_{B-} = -e \vec{v} \times \vec{B}. \quad (33.1)$$

A expressão da densidade de corrente  $\vec{j} = -en\vec{v}$  permite escrever

$$\vec{f}_{B-} = \frac{1}{n} \vec{j} \times \vec{B}. \quad (33.2)$$

Supondo que a seção transversal do fio seja  $S$ , o número de elétrons livres contido em um trecho de comprimento  $d\ell$  é  $N = nS d\ell$  e, portanto, a força resultante  $d\vec{F}$  neste elemento é

$$d\vec{F}_{B-} = d\ell S \vec{j} \times \vec{B}. \quad (33.3)$$

Como esta força é transmitida para a estrutura iônica do metal por meio de campos elétricos, associados ao efeito Hall, a força magnética resultante sobre o trecho do fio é dada por

$$d\vec{F} = d\ell S \vec{j} \times \vec{B}. \quad (33.4)$$

Este resultado pode ser expresso em termos da corrente  $I$ . Para preservar a sua estrutura vetorial notamos que, em um fio,  $\vec{j}$  é longitudinal e, por isso, podemos escrever

$$d\ell S \vec{j} = I d\vec{\ell}, \quad (33.5)$$

sendo que o vetor  $d\vec{\ell}$  tem o mesmo significado do usado na expressão da lei de Biot e Savart, eq.(29.2) [((((((29.2)))))). Ele corresponde a um elemento de fio, orientado paralelamente à corrente e permite que a força de origem magnética sobre ele seja escrita como

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}. \quad (33.6)$$

Este é um resultado muito útil em aplicações.

### • exemplo 1

Uma espira quadrada rígida, de lado  $L$ , percorrida por uma corrente  $I$ , está em presença de um fio infinito, percorrido por uma corrente  $I'$ , como mostra a fig.33.1. Calculamos a força que o fio exerce sobre a espira.

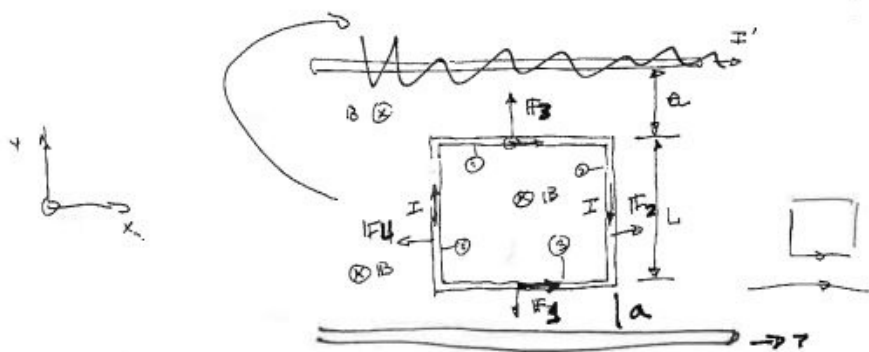


Figura 33.1: Espira quadrada com corrente e forças devidas ao campo magnético de um fio longo.

O campo magnético criado pela corrente  $I'$  pode ser calculado pela lei de Ampère e, na região onde a espira está, vale

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I'}{2\pi y} \hat{k}, \quad (33.7)$$

sendo  $y$  a distância do fio ao ponto considerado.

A força sobre a espira pode ser calculada a partir do resultado (33.6). No lado 1,  $d\vec{\ell}_1 = dx \hat{i}$  e a força sobre um elemento de fio é dada por

$$d\vec{F}_1 = I \left[ dx \hat{i} \times \left( \frac{\mu_0 I'}{2\pi a} \right) \hat{k} \right] = -\frac{\mu_0 I I'}{2\pi a} dx \hat{j}. \quad (33.8)$$

Esta força é constante ao longo do lado 1 e temos

$$\vec{F}_1 = -\frac{\mu_0 I I'}{2\pi a} L \hat{j}. \quad (33.9)$$

No lado oposto, o mesmo tipo de cálculo fornece

$$\vec{F}_3 = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi (a + L)} L \hat{j}. \quad (33.10)$$

No lado 2,  $d\vec{\ell}_2 = dy \hat{j}$  e

$$d\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi y} dy \hat{i}. \quad (33.11)$$

Como  $\vec{B}$  depende de  $y$ , a força total sobre este lado é

$$\vec{F}_2 = \int_a^{a+L} dy \frac{\mu_0 I I'}{2\pi y} \hat{i} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi} \ln \left[ \frac{a+L}{L} \right] \hat{i}. \quad (33.12)$$

Finalmente, no lado 4,  $\vec{F}_4 = -\vec{F}_2$ .

A força total que age na espira é dada por

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = -\frac{\mu_0 I I'}{2\pi} \frac{L^2}{a(a+L)} \hat{j} \quad (33.13)$$

e indica que ela é atraída pelo fio.

## • exemplo 2

Dois fios retilíneos, longos e paralelos, separados pela distância  $a$ , são percorridos por correntes  $I_1$  e  $I_2$  com sentidos opostos, como mostra a fig.33.2. Calculamos a força entre eles.

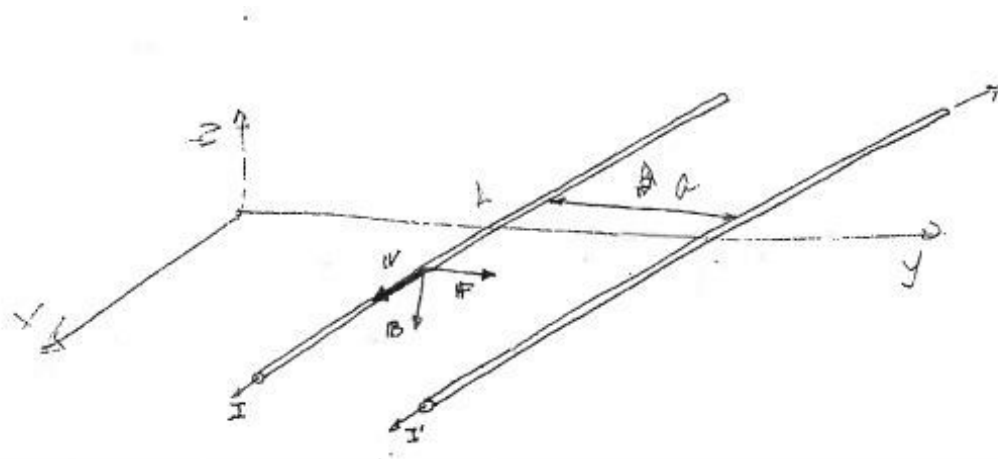


Figura 33.2: Dois fios paralelos, com correntes em sentidos opostos.

Se considerarmos os dois fios como sendo infinitos, as forças sobre eles também serão infinitas. Por isso, neste tipo de problema, costuma-se calcular a força por unidade de comprimento que age sobre cada fio. Na aproximação de fio infinito, os campos magnéticos  $\vec{B}_1$ , criado pelo fio 1 na região onde está o fio 2 e  $\vec{B}_2$ , criado pelo fio 2 na região onde se encontra o fio 1, são dados por

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \hat{k}, \quad (33.14)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \hat{k}. \quad (33.15)$$

Usando esses resultados na eq.(33.6), com  $d\vec{\ell}_1 = dl \hat{i}$  e  $d\vec{\ell}_2 = -dl \hat{i}$ , obtemos as forças que cada

um dos fios exerce sobre um elemento do outro

$$d\vec{F}_1 = I_1 d\vec{\ell}_1 \times \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} d\ell \hat{j}, \quad (33.16)$$

$$d\vec{F}_2 = I_2 d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} d\ell \hat{j}. \quad (33.17)$$

Assim, as forças que agem sobre trechos de comprimento  $L$  dos fios 1 e 2 são dadas por

$$\vec{F}_1 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi a} \hat{j}, \quad (33.18)$$

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi a} \hat{j}. \quad (33.19)$$

Estes resultados indicam que fios paralelos percorridos por correntes de sentidos opostos se repelem. Caso uma das correntes fosse invertida, estas forças passariam a ser atrativas.

### • exemplo 3: torque sobre uma espira

Em uma região do espaço, existe um campo magnético  $\vec{B} = B \hat{k}$  e uma espira quadrada, de lado  $L$ , inclinada de um ângulo  $\theta$  em relação ao plano  $xy$  e percorrida por uma corrente  $I$ , como mostra a fig.33.3.

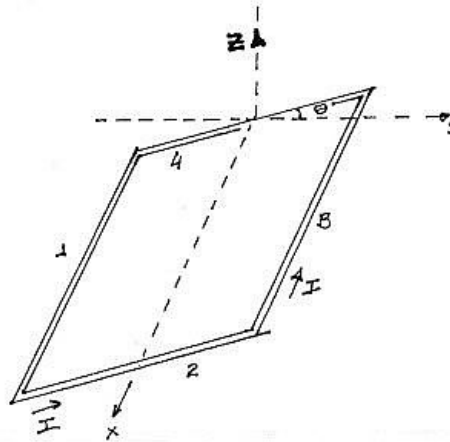


Figura 33.3: Torque sobre uma espira quadrada percorrida por uma corrente  $I$  em presença de campo magnético na direção do eixo  $z$ .

As forças sobre os lados da espira são calculadas por meio do resultado (33.6). Usando  $d\vec{\ell}_1 = d\ell_1 \hat{i}$ ,  $d\vec{\ell}_2 = d\ell_2 (\cos\theta \hat{j} + \sin\theta \hat{k})$ ,  $d\vec{\ell}_3 = -d\ell_3 \hat{i}$  e  $d\vec{\ell}_4 = -d\ell_4 (\cos\theta \hat{j} + \sin\theta \hat{k})$ , obtemos

$$\vec{F}_1 = -I L B \hat{j}, \quad (33.20)$$

$$\vec{F}_2 = I L B \cos\theta \hat{i}, \quad (33.21)$$

$$\vec{F}_3 = I L B \hat{j}, \quad (33.22)$$

$$\vec{F}_4 = -I L B \cos\theta \hat{i}. \quad (33.23)$$



Estas forças estão aplicadas sobre os pontos médios de cada lado da espira. A força resultante que age sobre ela é  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$  e, portanto, o seu centro de massa não se move. As forças  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_4$ , que agem sobre seus lados inclinados, são colineares, mas o mesmo não acontece com  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_3$  e, por isso, estas produzem um torque sobre a espira. Os seus pontos de aplicação são descritos pelos vetores

$$\vec{r}_1 = \frac{L}{2} \hat{i} - \frac{L}{2} (\cos\theta \hat{j} + \sin\theta \hat{k}) , \quad (33.24)$$

$$\vec{r}_3 = \frac{L}{2} \hat{i} + \frac{L}{2} (\cos\theta \hat{j} + \sin\theta \hat{k}) , \quad (33.25)$$

o os torques sobre a espira são dados por

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \frac{L^2 B}{2} [-\sin\theta \hat{i} - \hat{k}] , \quad (33.26)$$

$$\vec{\tau}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \frac{L^2 B}{2} [-\sin\theta \hat{i} + \hat{k}] . \quad (33.27)$$

As componentes na direção  $\hat{i}$  são paralelas entre si enquanto que as na direção  $\hat{k}$  têm sinais opostos. O torque resultante é dado por

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_3 = -I L^2 B \sin\theta \hat{i} . \quad (33.28)$$

Este resultado mostra que as forças de origem magnética sobre a espira tendem a causar uma rotação em torno do eixo  $x$  e, se a espira estiver livre, esta rotação ocorre. Como o torque depende de  $\sin\theta$ , existem dois pontos de equilíbrio, em  $\theta = 0$  e em  $\theta = \pi$ . No primeiro deles, o equilíbrio é estável e, no segundo, instável. No intervalo  $0 < \theta < \pi$ , o torque é antiparalelo a  $\hat{i}$  e a espira tende a girar a no sentido de  $\theta$  decrescente, horário. Já no intervalo  $\pi < \theta < 2\pi$ , o torque é paralelo a  $\hat{i}$  e a espira tende a girar no sentido anti-horário, segundo o qual  $\theta$  cresce.

## • o campo da espira e o campo externo

Na situação descrita no exemplo anterior, a espira também cria um campo magnético  $\vec{B}_{\text{esp}}$ . Se usarmos a regra da mão direita para definir uma normal  $\vec{n}_{\text{esp}}$  ao plano da espira, o campo magnético  $\vec{B}_{\text{esp}}$  na região central é paralelo a  $\vec{n}_{\text{esp}}$ . Na configuração mostrada na fig.33.3, onde a espira está inclinada de um ângulo  $\theta$  em relação ao plano  $xy$ , esta normal está desalinhada com o campo externo, como mostra a fig.33.4. Entretanto, se a espira puder girar livremente e se acomodar na sua posição de equilíbrio estável, os vetores  $\vec{n}_{\text{esp}}$  e  $\vec{B}$  tendem a ficar alinhados. Quando isto acontece, o campo  $\vec{B}_{\text{esp}}$  fica alinhado a  $\vec{B}$  na região central da espira e desalinhado nas demais regiões.

Esta tendência de os campos  $\vec{B}$  e  $\vec{B}_{\text{esp}}$  sobre o eixo da espira se alinharem na configuração de equilíbrio estável do sistema é um efeito geral, que independe da forma da espira e pode ser usada como uma regra intuitiva para explicar o comportamento de ímãs em presença de campos externos. Entretanto é preciso ter cuidado com a explicação deste alinhamento, porque campo não age sobre campo! Este tipo de alinhamento é sempre causado pela ação de campos sobre correntes, ou seja, pela força de Lorentz.

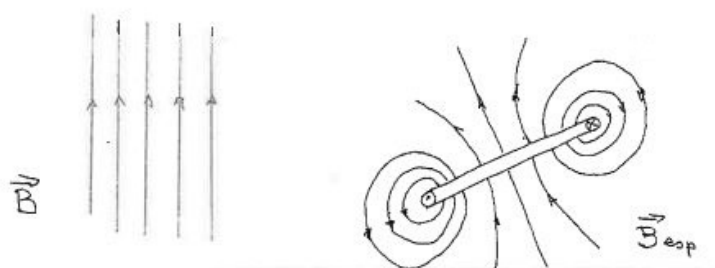


Figura 33.4: Linhas de campo magnético: (a) externo; (b) da espira.

Como sabemos, bússolas são instrumentos que se alinham a campos magnéticos externos. As mais simples são constituídas por agulhas metálicas imantadas, contendo átomos de ferro. Como discutimos na aula 28, os átomos de Fe num corpo imantado estão predominantemente orientados segundo uma dada direção. No que diz respeito ao campo magnético, cada átomo de Fe é análogo a uma espira microscópica percorrida por uma corrente. Como na agulha do ímã existem muitos átomos de Fe, ela é análoga a um conjunto de espiras macroscópicas percorridas por correntes. Por isso o torque produzido pela ação do campo da Terra sobre uma bússola é qualitativamente análogo ao discutido no exemplo 3.

### • motores

Torques sobre espiras são o princípio de funcionamento de motores elétricos. Se a espira discutida no exemplo 3 puder girar livremente em torno do eixo  $x$  e for abandonada a partir de um ângulo no intervalo  $0 < \theta < \pi$ , o torque sobre ela tenderia a produzir uma rotação no sentido horário, cuja velocidade angular aumentaria até o ângulo  $\theta = \pi$ . A partir daí, esta velocidade passaria a diminuir, devido à inversão do sentido do torque. Para que a espira possa girar continuamente, é preciso que o sentido da corrente seja invertido quando ela passa pela situação de equilíbrio estável. Se fizermos isto, este ponto passa a ter equilíbrio instável. Como a espira tem inércia e chega a este ponto com alguma velocidade, a rotação acaba por ocorrer sempre no mesmo sentido. Na prática, esta inversão do sentido da corrente pode ser feita por meio de sistemas mecânicos bastante simples.

### • exercícios

1. São dados três fios muito longos, paralelos ao eixo  $x$  e percorridos por correntes  $I$  de mesmo sentido. O fio 1 passa pelo ponto  $P_1 : (0, 0, 0)$ , o fio 2, pelo ponto  $P_2 : (0, a, 0)$  e o fio 3, pelo ponto  $P_3 : (0, 0, a)$ .

a) Determine as forças magnéticas  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$ , que agem em trechos de comprimento  $L$  dos fios 1, 2 e 3.

b) Qual deve ser o valor da soma  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ ?

2. Numa região do espaço existe um campo magnético  $\vec{B} = B \hat{i}$  e uma espira circular, de raio

$R$ , com centro na origem do sistema de coordenadas e percorrida por uma corrente  $I$ . A normal ao plano da espira é dada pelo vetor  $\hat{n} = \sin\theta \hat{j} + \cos\theta \hat{k}$  e o sentido da corrente é relacionado a  $\hat{n}$  pela regra da mão direita. Determine o torque que age sobre a espira, em função do ângulo  $\theta$ . Sugestão: a solução do problema fica muito mais fácil se considerarmos um outro sistema  $S'$ , com eixos  $x, y', z'$ , no qual a espira esteja assentada sobre o plano  $x'y'$ , cujos versores são  $\hat{i}, \hat{j}'$  e  $\hat{k}'$ .

### • respostas

1. a)  $\vec{F}_1 = \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi a} [\hat{j} + \hat{k}]$ ,  $\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I^2 L}{4\pi a} [-3\hat{j} + \hat{k}]$ ,  $\vec{F}_3 = \frac{\mu_0 I^2 L}{4\pi a} [\hat{j} - 3\hat{k}]$ .

b) Como  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$  são forças internas ao sistema formado pelos três fios, a soma delas deve ser nula.

2. Chamando de  $\phi$  o ângulo azimutal em  $S'$ , a posição de um ponto da espira é  $\vec{r} = R(\cos\phi \hat{i} + \sin\phi \hat{j}')$ , um elemento da sua circunferência é  $d\vec{\ell} = R d\phi (-\sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j}')$  e a eq.(33.6) fornece  $d\vec{F} = I R B d\phi (\cos\phi \cos\theta \hat{i} + \sin\phi \cos\theta \hat{j}' - \sin\phi \sin\theta \hat{k}')$ . A contribuição desta força para o torque vale  $d\vec{\tau} = I R^2 B d\phi (-\sin^2\phi \sin\theta \hat{i} + \sin\phi \cos\phi \hat{j})$  e o torque total é dado por  $\vec{\tau} = -\pi I R^2 B \sin\theta \hat{i}$ .



# Capítulo 34

## lei de Faraday

### • introdução

Nas primeiras décadas do século 19, eletricidade e magnetismo eram tratados como ramos independentes do conhecimento. Esta situação começa a se alterar em 1820 quando o pesquisador dinamarquês Hans Christian Oersted mostra que corrente elétrica em um fio provoca o movimento de uma bússola. Este resultado, possibilitado pelas pilhas desenvolvidas por Volta duas décadas antes, sugere a existência de algum tipo de relação entre eletricidade e magnetismo.

O experimento de Oersted gerou grande interesse na comunidade científica que passou a reproduzi-lo e a buscar explicações para o seu resultado. Neste contexto, Michael Faraday, pesquisador inglês, também motivado pela observação de Oersted, iniciou, em 1821, uma longa série de experimentos que, em agosto de 1831, culminaram com a observação do surgimento de corrente elétrica em um circuito quando, próximo dele, outro circuito era conectado ou desconectado de uma bateria. Em outubro deste mesmo ano, Faraday constatou que o movimento de um ímã induz corrente elétrica em um condutor. Em sua longa busca intencional, Faraday acabou por perceber que a indução de corrente elétrica em um condutor é provocada tanto pela *variação* de corrente em outro como pelo *movimento* de ímãs. De fato, correntes constantes e ímãs parados não induzem correntes elétricas em circuitos.

Na época de Faraday, os fenômenos eletromagnéticos não eram compreendidos com base nas ideias de campos e, ao longo da história, tiveram diferentes explicações. Em termos atuais, consideramos que o experimento de Oersted estabeleceu que o campo elétrico de uma pilha gera corrente elétrica em condutores ( $\vec{E} \rightarrow I$ ) e esta, por sua vez, cria campo magnético ( $I \rightarrow \vec{B}$ ). Já os resultados de Faraday correspondem à ideia de que apenas a variação temporal de campo magnético gera campo elétrico ( $\partial\vec{B}/\partial t \rightarrow \vec{E}$ ), conteúdo físico da lei que leva seu nome.

A lei de Faraday, uma das quatro equações de Maxwell, tem papel muito importante na percepção de que a eletricidade e o magnetismo são, de fato, facetas diferentes de uma única teoria, o eletromagnetismo. Também permite a compreensão de muitos fenômenos físicos, dentre eles a propagação de ondas eletromagnéticas. Em uma perspectiva mais tecnológica, é esta lei que está

por trás de toda a geração de energia elétrica em grande escala, tal como acontece em usinas. A profunda relação entre eletricidade e magnetismo somente fica clara com a formulação, em 1905, da teoria da relatividade restrita de Einstein e, para compreender isto, é preciso avançar mais no curso. No entanto, mesmo no contexto da física clássica já podemos perceber alguns indícios desta relação uma vez que cargas elétricas criam campos elétricos, enquanto correntes elétricas criam campos magnéticos. Entretanto, correntes elétricas são cargas em movimento. Ou seja, as mesmas cargas que, em repouso, criam campos elétricos, quando em movimento também criam campos magnéticos. Isto dá margem a uma relação direta entre os campos elétrico e magnético associada a movimento que, por sua vez, envolve relações entre o espaço e o tempo...

### • a lei de Faraday

Na forma integral, a lei de Faraday é expressa pela relação

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS, \quad (34.1)$$

onde a integral de linha deve ser efetuada sobre um caminho fechado  $C$  qualquer e a integral do lado direito, sobre uma superfície orientada  $S$ , apoiada neste caminho. A relação entre o caminho  $C$  e a superfície  $S$  é exatamente a mesma utilizada na lei de Ampère, sendo o sentido da normal  $\hat{n}$  relacionado ao sentido de percurso do caminho pela regra da mão direita: se os dedos da mão direita acompanharem o caminho, o polegar indica a normal. Deste modo, a lei de Faraday relaciona a circuitação de  $\vec{E}$  sobre o caminho fechado  $C$  ao fluxo de  $\partial \vec{B} / \partial t$  sobre qualquer superfície  $S$  apoiada neste caminho.

O teorema de Stokes, discutido na aula 22, permite escrever

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \hat{n} dS \quad (34.2)$$

e a eq.(34.1) torna-se

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \hat{n} dS = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS. \quad (34.3)$$

Como esta relação vale para qualquer superfície  $S$ , podemos concluir a igualdade entre os integrandos e escrever a lei de Faraday na forma diferencial, como

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (34.4)$$

A lei de Faraday, representada pelas eqs.(34.1) e (34.4), é uma das quatro equações de Maxwell e tem papel fundamental na formulação do eletromagnetismo.

## • qual fluxo ...

É muito importante notar que o lado direito da expressão da lei de Faraday na forma integral, eq.(34.1), representa o *fluxo da variação temporal do campo magnético*,  $\Phi_{\partial\vec{B}/\partial t}$  e, não, a variação temporal do fluxo do campo magnético,  $\partial\Phi_{\vec{B}}/\partial t$ . Estas duas grandezas são equivalentes em algumas situações e, em outras, não. A apresentação da lei de Faraday expressa em termos de  $\partial\Phi_{\vec{B}}/\partial t$  pode ser encontrada em muitos textos e tende a sugerir que o fluxo do campo magnético tem algum tipo de realidade física. Ela pode causar problemas quando tratamos de mudanças de referencial, que são especialmente importantes em relatividade e, também dá origem a paradoxos, que deixam de existir quando a forma dada na eq.(34.1) é empregada. Por este motivo, a forma integral apresentada aqui deve ser preferida, uma vez que ela representa a ideia de que o campo elétrico é, de fato, criado pela variação temporal do campo magnético.

## • campos elétricos não-conservativos

A condição para que um campo elétrico seja conservativo, discutida nas aulas xxx, é que

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = 0 ,$$

para qualquer caminho fechado  $C$ . Já a lei de Faraday indica que esta condição não é satisfeita quando  $\partial\vec{B}/\partial t \neq 0$ . Assim, os campos elétricos produzidos por  $\partial\vec{B}/\partial t$  não são conservativos e, conseqüentemente, a eles não se pode associar um potencial. Entretanto a expressão

$$\frac{dU}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$$

para a densidade de energia do campo elétrico continua válida, pois ela se aplica a quaisquer tipos de campo, sejam ele eletrostáticos ou não.

## • um pouco de intuição

Para adquirir alguma intuição acerca do modo como a lei de Faraday funciona, recorreremos ao que já sabemos sobre a lei de Ampère. Do ponto de vista formal, as duas leis são bastante semelhantes:

$$\text{Ampère} : \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \iint_S [\mu_0 \vec{j}] \cdot \hat{n} dS ,$$

$$\text{Faraday} : \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = \iint_S \left[ -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \right] \cdot \hat{n} dS .$$

Esta semelhança indica que  $[-\partial\vec{B}/\partial t]$  cria  $\vec{E}$  do mesmo modo como o fator  $[\mu_0 \vec{j}]$  cria  $\vec{B}$ . Por isso, toda a intuição desenvolvida no estudo da criação de campos magnéticos por correntes pode ser transferida à lei de Faraday. A lei de Ampère indica que uma corrente elétrica cria um

campo  $\vec{B}$  com linhas circulares, com centro na corrente e orientadas pela regra da mão direita. Usando a analogia matemática, podemos afirmar que a variação temporal do campo magnético,  $\partial\vec{B}/\partial t$ , cria um campo elétrico  $\vec{E}$  com linhas circulares centradas nele. Entretanto, como a lei de Faraday incorpora um sinal negativo, a orientação das linhas de  $\vec{E}$  é dada pelos dedos da mão esquerda.

### • exemplo 1

Consideramos o caso de um solenóide cilíndrico muito longo, de raio  $a$ , cujo eixo coincide com o da direção  $z$ , percorrido por uma corrente  $I(t)$  dependente do tempo

$$I(t) = \alpha t, \quad (34.5)$$

onde  $\alpha$  é uma constante positiva e  $t$  é o instante considerado. Esta corrente produz um campo magnético  $\vec{B}$  que varia com o tempo e que, por sua vez, pela lei de Faraday, dá origem a um campo elétrico. Nosso objetivo, aqui, é determinar as características deste campo elétrico.

A função  $I(t)$ , embora matematicamente simples, não é muito realista, pois é impossível que um circuito seja alimentado indefinidamente por uma corrente que cresce continuamente com o tempo. Por isso, supomos que a condição (34.5) seja válida apenas durante o intervalo  $0 \leq t < T$ , onde  $T$  é um limite superior.

Esta corrente dá origem a um campo magnético que, conforme discutimos na aula 30, está praticamente localizado no interior do solenóide cilíndrico. As linhas de campo são retas paralelas, características de um campo uniforme. No caso de um solenóide com  $n$  espiras por unidade de comprimento, o campo magnético na região interna é dado por  $\vec{B} = \mu_0 n I \hat{k}$  e a sua variação temporal vale

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \mu_0 n \frac{dI}{dt} \hat{k} = \mu_0 n \alpha \hat{k} \rightarrow \text{para } r < a, \quad (34.6)$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \simeq 0 \rightarrow \text{para } r > a. \quad (34.7)$$

Por isso, este sistema é formalmente, análogo, no contexto da lei de Ampère, ao caso de um fio cilíndrico muito longo, de raio  $a$ , percorrido por uma corrente constante, distribuída uniformemente pela sua seção transversal, discutido no exemplo 1 da aula 30. Isto se deve ao fato de  $[-\partial\vec{B}/\partial t]$ , o análogo a  $[\mu_0 \vec{j}]$ , estar confinado no interior de um cilindro com as mesmas dimensões do fio e ser, também, paralelo ao seu eixo.

No estudo da lei Ampère vimos que, no caso de um fio cilíndrico infinito percorrido por uma corrente  $I'$ , as linhas de campo magnético são circunferências centradas no seu eixo e orientadas segundo a regra da mão direita, como na fig.34.1(a). O módulo do campo magnético para pontos internos e externos ao fio é dado, respectivamente, por  $|\vec{B}(r \leq a)| = \mu_0 I' r / (2\pi a^2)$  e  $|\vec{B}(r \geq a)| = \mu_0 I' / (2\pi r)$ , onde  $r$  é a distância medida a partir do eixo de simetria.



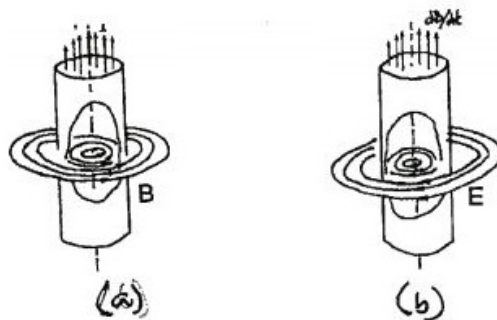


Figura 34.1: Linhas de campo: (a) magnético do fio infinito com densidade de corrente  $\vec{j}$  constante; (b) elétrico do solenóide infinito com  $\partial\vec{B}/\partial t$  constante.

O fato de as estruturas matemáticas das leis de Faraday e Ampère serem as mesmas indica que a regra da mão direita também é válida para a grandeza  $[-\partial\vec{B}/\partial t]$ , o que nos permite concluir que as linhas do campo elétrico criadas pela corrente dependente do tempo no solenóide são circulares, com centro no seu eixo. A orientação dessas linhas é obtida colocando o polegar da mão direita paralelamente a  $[-\partial\vec{B}/\partial t]$ , ou seja, *no sentido contrário* a  $[\partial\vec{B}/\partial t]$ . Deste modo, um campo variando como na eq.(34.3) cria, em todo espaço, linhas circulares concêntricas com o eixo do solenóide, com os sentidos dados pelos dedos da mão esquerda, como mostra a figura (b).

O módulo de  $\vec{E}$  é obtido a partir da lei de Faraday, eq.(34.1). Neste problema, tomando o caminho  $C$  sobre uma das linhas de campo e orientado paralelamente a ela, o membro esquerdo da lei pode ser escrito como

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = \oint_C E dc = 2\pi r E. \quad (34.8)$$

Para calcular o membro direito da lei, apoiamos uma superfície orientada plana sobre o caminho  $C$ , cuja normal é dada por  $\hat{n} = -\hat{k}$ . Quando  $r \leq a$ , temos

$$-\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = -\iint_S \mu_0 [n\alpha\hat{k}] \cdot (-\hat{k}) dS = \mu_0 n\alpha \iint_S dS = \mu_0 n\alpha\pi r^2 \quad (34.9)$$

e, portanto,

$$|\vec{E}(r \leq a)| = \frac{\mu_0 n\alpha r}{2}. \quad (34.10)$$

Se  $r \geq a$ , temos

$$-\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = -\iint_S \mu_0 [n\alpha\hat{k}] \cdot (-\hat{k}) dS = \mu_0 n\alpha \iint_S dS = \mu_0 n\alpha\pi a^2 \quad (34.11)$$

e

$$|\vec{E}(r \geq a)| = \frac{\mu_0 n\alpha a^2}{2r}. \quad (34.12)$$

As direções e sentidos dos campos estão mostradas na fig.34.2.

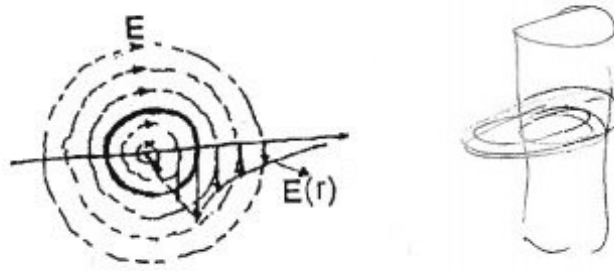


Figura 34.2: O solenóide visto de frente: linhas de campo elétrico e sua intensidade em função da distância ao eixo.

### • exemplo 2

Numa região cilíndrica de raio  $a$ , no interior de um solenóide, existe um campo magnético uniforme dado por  $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t) \hat{k}$ . Calculamos o campo elétrico  $\vec{E}$  devido a  $\partial\vec{B}/\partial t$  em todo o espaço.

O campo  $\vec{B}$  oscila com o tempo e o mesmo acontece com a sua derivada temporal, dada por

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = B_0 \omega \cos(\omega t) \hat{k} \rightarrow \text{para } r \leq a, \quad (34.13)$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{para } r > a, \quad (34.14)$$

sendo  $r$  a distância ao eixo da região cilíndrica. O campo elétrico induzido é calculado por meio da lei de Faraday na forma integral, eq.(34.1). A simetria axial do problema indica que as linhas de campo são circunferências concêntricas com o eixo do solenóide. Por isso, tomamos um caminho matemático sobre uma linha de campo, como mostra a fig.34.3. Conseqüentemente, segundo as nossas convenções, uma superfície orientada plana, apoiada sobre esse caminho tem normal  $\hat{n}$  paralela ao versor  $\hat{k}$ .

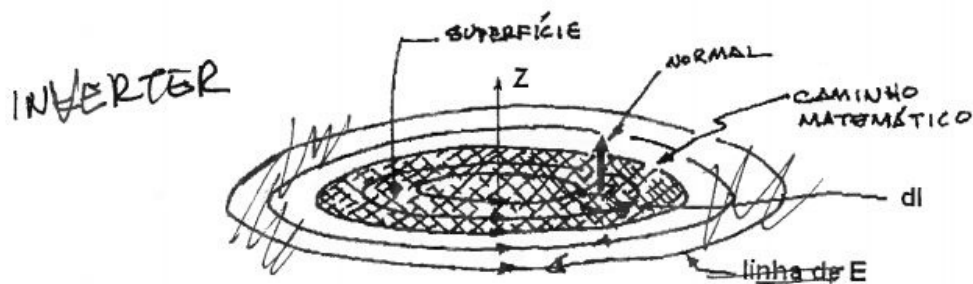


Figura 34.3: O caminho e a superfície orientada utilizados na aplicação da lei de Faraday.

A integral de linha do campo elétrico na eq.(34.1) é dada por

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = \int_C E dc = E 2\pi r , \quad (34.15)$$

usando o fato de que  $|\vec{E}|$  é constante ao longo do caminho  $C$ . O lado direito da eq.(34.1) envolve o fluxo de  $\partial\vec{B}/\partial t$  sobre a superfície  $S$  apoiada no caminho  $C$ .

No caso  $r \leq a$ , temos

$$- \iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = - \iint_S B_0 \omega \cos(\omega t) dS = -B_0 \omega \cos(\omega t) \pi r^2 \quad (34.16)$$

e a lei de Faraday fornece

$$E(r \leq a) = - \frac{B_0 \omega r}{2} \cos(\omega t) . \quad (34.17)$$

Quando o raio  $r$  do caminho  $C$  é maior do que o do solenóide,  $\partial\vec{B}/\partial t$  é não nulo apenas em uma superfície  $S'$  de raio  $a$ , na parte central da superfície  $S$ , como indicam as eqs.(34.13) e (34.14). Por isso, no caso  $r \geq a$ , o lado direito da eq.(34.1) é dado por

$$- \iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = - \iint_{S'} B_0 \omega \cos(\omega t) dS = -B_0 \omega \cos(\omega t) \pi a^2 , \quad (34.18)$$

a intensidade do campo  $E$  determinado pela lei de Faraday tem a forma

$$E(r \geq a) = - \frac{B_0 \omega a^2}{2r} \cos(\omega t) . \quad (34.19)$$

O sinal negativo nas eqs.(34.17) e (34.19) indica que o sentido de  $\vec{E}$  varia com o tempo, sendo contrário ao do percurso de  $C$  quando  $\cos(\omega t) > 0$  e o mesmo quando  $\cos(\omega t) < 0$ . Estes resultados mostram que o campo elétrico oscila com o tempo, com frequência  $\omega$ , e é conveniente definir uma amplitude  $E_0$  pela relação

$$E = -E_0 \cos(\omega t) , \quad (34.20)$$

sendo que ela tem formas diferentes nas regiões interna e externa ao solenóide, com

$$E_0 = \frac{B_0 \omega r}{2} \rightarrow \text{para } r \leq a , \quad (34.21)$$

$$E_0 = \frac{B_0 \omega a^2}{2r} \rightarrow \text{para } r \geq a . \quad (34.22)$$

O gráfico da fig.34.4 mostra a dependência da amplitude  $E_0$  com a distância  $r$  ao eixo do solenóide.

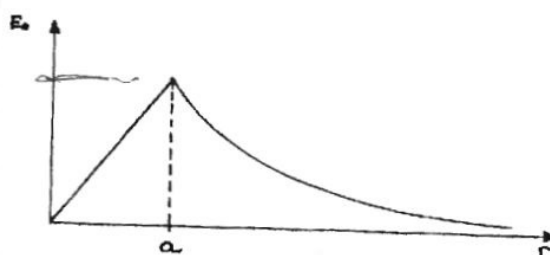


Figura 34.4: Amplitude do campo elétrico em função da distância ao eixo do solenóide.

No que diz respeito à dependência com o tempo, os resultados indicam que o campo elétrico induzido oscila com a mesma frequência  $\omega$  que o campo magnético no interior do solenóide. Entretanto, estes dois campos estão fora de fase, já que  $B = B_0 \text{sen}(\omega t)$  e  $E = -E_0 \text{cos}(\omega t)$ . Este tipo de relação é característico da lei de Faraday, pois ela afirma que  $E$  deve estar em fase com  $-\partial \vec{B} / \partial t = -\omega B_0 \text{cos}(\omega t)$ . As linhas dos campos  $\vec{B}$  e  $\vec{E}$ , em alguns instantes particulares, são mostradas na fig.34.5.

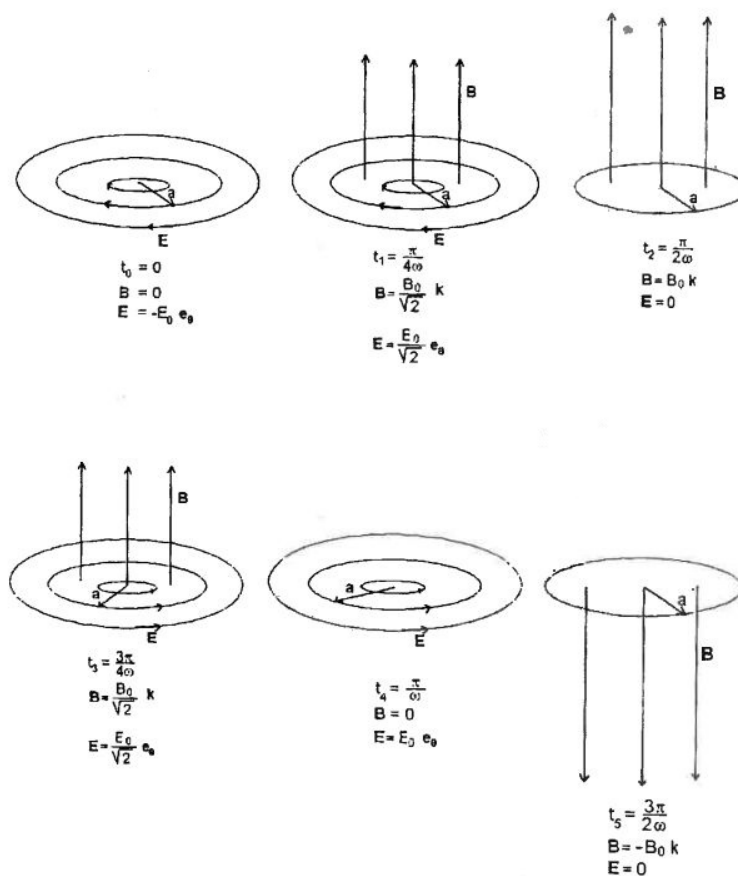


Figura 34.5: Campos elétrico e magnético oscilantes do solenóide.

É importante ressaltar que sistemas oscilantes emitem ondas eletromagnéticas, fenômeno que

não foi considerado neste exemplo. Assim, a abordagem empregada aqui só vale para distâncias  $r \ll cT$ , onde  $c$  é a velocidade da luz e  $T = 2\pi/\omega$  é o período de oscilação do campo magnético.



# Capítulo 35

## lei de Faraday - aplicações

### • introdução

A lei de Faraday é uma das quatro equações de Maxwell. Ela foi apresentada na aula anterior e determina a relação do campo elétrico com a variação temporal do campo magnético que, na forma integral, pode ser expressa como

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS ,$$

onde  $C$  é um caminho fechado e  $S$ , uma superfície orientada apoiada sobre ele. Já na forma diferencial,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} .$$

Nesta aula, consideramos algumas aplicações da lei de Faraday a sistemas simples, enfatizando o seu conteúdo físico.

### • exemplo 1

Um fio retilíneo, muito longo, orientado paralelamente ao eixo  $z$ , percorrido por uma corrente  $I$  no sentido  $z > 0$ , desloca-se com velocidade constante  $\vec{v} = v \hat{j}$ . Devido ao movimento do fio, o campo magnético gerado pela corrente nas suas proximidades varia com o tempo e há a indução de um campo elétrico  $\vec{E}$ . Neste exemplo, estudamos as características deste campo.

A solução deste problema pode ser encontrada sem grandes dificuldades usando a teoria da relatividade, como mostra o exercício xx.yy, do volume 2. Como ainda não temos acesso a estes métodos, aqui nos restringimos ao cálculo de  $\vec{E}$  em um ponto genérico  $P: (0, y, z)$ , fixo no plano  $yz$  e convencionamos que no instante  $t = 0$ , o fio está sobre o eixo  $z$ , como indica a fig.35.1.

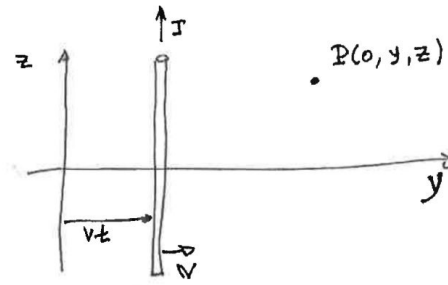


Figura 35.1: Fio com corrente constante, em movimento em relação ao eixo  $z$ .

Usando a lei de Ampère em um instante  $t$  fixo, concluímos que a intensidade do campo  $\vec{B}$  produzido pela corrente  $I$  em um ponto que dista  $r(t)$  do fio é dada por

$$B(t) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r(t)}, \quad (35.1)$$

com  $r(t) = \sqrt{x^2 + (y - vt)^2}$ . Sobre o plano  $yz$ , a coordenada  $x$  é nula e a regra da mão direita permite escrever o vetor  $\vec{B}$  como

$$\vec{B}(t) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi (y - vt)} \hat{i} \quad (35.2)$$

e a sua derivada temporal é dada por

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi (y - vt)^2} \hat{i}. \quad (35.3)$$

Usando a lei de Faraday na forma diferencial, eq.(34.4) [(((34.4)))]], obtemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi (y - vt)^2} \hat{i}, \quad (35.4)$$

que corresponde a

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi (y - vt)^2}. \quad (35.5)$$

Como o fio é muito longo, as características do problema independem do valor de  $z$  e, portanto,  $\partial E_y / \partial z = 0$ . Assim, a eq.(35.5) fornece

$$E_z = \int dy \frac{\mu_0 I v}{2\pi (y - vt)^2} = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi (y - vt)} + K, \quad (35.6)$$

onde  $K$  é uma constante. Ela é determinada notando que esta solução deve ser válida para qualquer valor de  $v$ , incluindo o caso  $v = 0$ , no qual não há campo elétrico. Usando  $E_z = 0$  para  $v = 0$ , concluímos que  $K = 0$ . Deste modo, o campo elétrico induzido pelo movimento do fio é dado por

$$\vec{E} = E_z \hat{k} = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi (y - vt)} \hat{k}. \quad (35.7)$$



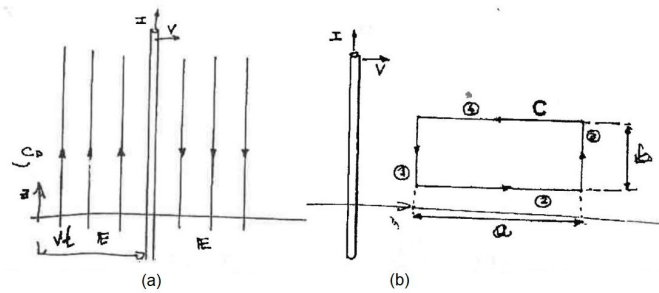


Figura 35.2: (a) Linhas de campo elétrico do fio em movimento; (b) caminho  $C$  para aplicação da lei de Faraday na forma integral.

Este resultado mostra que, em um instante  $t$  fixo, as linhas de campo elétrico são paralelas ao fio e apontam no sentido  $z < 0$  para  $(y - vt) > 0$  e no sentido  $z > 0$ , para  $(y - vt) < 0$ , como mostra a fig.35.2(a). Em ambos os casos, a intensidade de  $\vec{E}$  diminui à medida que nos afastamos do fio.

Para complementar esta discussão, mostramos a validade da lei de Faraday na forma integral, adotando o caminho  $C$  indicado na figura (b). O seu lado esquerdo é dado por

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = \int_1 \vec{E}_1 \cdot d\vec{c}_1 + \int_2 \vec{E}_2 \cdot d\vec{c}_2 + \int_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{c}_3 + \int_4 \vec{E}_4 \cdot d\vec{c}_4. \quad (35.8)$$

As contribuições ao longo dos lados 2 e 4 se anulam, pois neles o campo é perpendicular ao trecho do caminho. Assim, obtemos

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = (E_1 - E_3) b = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \left[ \frac{1}{y - vt} - \frac{1}{y + a - vt} \right] b. \quad (35.9)$$

Para calcular o lado direito, notamos que a normal a uma superfície plana apoiada sobre o caminho  $C$  é  $\hat{n} = \hat{i}$  e, usando (35.3), escrevemos

$$- \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = \int_0^b dz \int_y^{y+a} dy' \frac{\mu_0 I v}{2\pi (y' - vt)^2} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \left[ \frac{1}{y - vt} - \frac{1}{y + a - vt} \right] b, \quad (35.10)$$

resultado idêntico ao da eq.(35.9).

## • a geração de correntes

As implicações conceituais da lei de Faraday no âmbito da ciência são muito extensas e profundas. Mas, ela tem também enorme importância econômica e social, já que está por trás de toda a geração de energia em grande escala, tal como acontece em usinas hidroelétricas, termoeletricas, nucleares e eólicas, onde turbinas transformam a rotação de elementos mecânicos em corrente elétrica. Antes de a lei de Faraday ser conhecida e compreendida, não havia energia elétrica doméstica ou industrial. Para perceber o impacto deste fato, basta atentar para quantas vezes por dia você se beneficia, como se isso fosse natural, da energia elétrica em sua vida.

A aplicação em larga escala da lei de Faraday a problemas práticos levou ao desenvolvimento de alguns jargões. Por exemplo, no caso de circuitos, é costume chamar o campo elétrico produzido por  $\partial\vec{B}/\partial t$  de *campo elétrico induzido* e representá-lo por  $\vec{E}_{\text{ind}}$ . O adjetivo *induzido* corresponde apenas a um jargão, que é útil para distinguir o campo de origem magnética dos produzidos por baterias ou cargas acumuladas nas superfícies dos fios. Entretanto ele é, de fato, um campo elétrico indistinguível dos demais.

No estudo de correntes em circuitos, é útil associar uma força eletromotriz ao campo induzido, representada por  $\mathcal{E}_{\text{ind}}$  e dada por

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \oint_C \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{c}, \quad (35.11)$$

onde  $C$  é um caminho matemático sobre o circuito. Relembramos que a palavra *força* presente na fem apenas tem razões históricas, já que a eq.(35.11) representa o trabalho do campo e, não, uma força. No SI, a fem é medida em volts (V), como no caso de uma bateria.

Em problemas práticos, se estivermos interessados somente nos aspectos macroscópicos do funcionamento de circuitos, não é necessário obter o campo  $\vec{E}_{\text{ind}}$  para determinar a fem. Basta utilizar a lei de Faraday para escrevê-la diretamente em termos de  $\partial\vec{B}/\partial t$ , como

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = - \iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS, \quad (35.12)$$

onde  $S$  é uma superfície orientada apoiada sobre o caminho  $C$ . Deste modo, podemos conhecer diretamente a fem, sem passar pelo campo elétrico induzido.

## • exemplo 2

Considere novamente o solenóide discutido no exemplo 1 da aula anterior, percorrido pela corrente que cresce linearmente com o tempo dada pela eq.(34.5) [eq.(34.5)]. Uma espira metálica circular, de raio  $b$  ( $b < a$ ) e resistência  $R$  é colocada no interior do solenóide, coaxialmente, como mostra a fig.35.3. Determinamos a corrente que percorre a espira empregando as leis de Ohm microscópica e macroscópica.

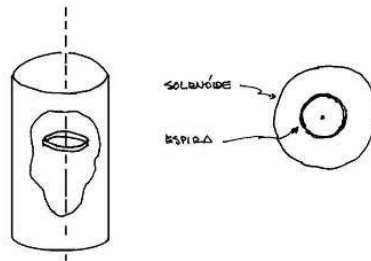


Figura 35.3: Solenóide cilíndrico de raio  $a$  e espira circular de raio  $b < a$ .

Consideramos, inicialmente, a solução microscópica. A partir do resultado dado na eq.(34.10)

[[[[[(34.10)]]]], sabemos que a intensidade do campo elétrico no interior da espira é

$$E_{\text{ind}}(r = b < a) = \frac{\mu_0 n \alpha b}{2} . \quad (35.13)$$

Como as linhas de campo elétrico são paralelas à espira, não há cargas eletrostáticas acumuladas na sua superfície. Assim, pela lei de Ohm microscópica, eq.(27.7) [[[(27.7)]]], este campo deve dar origem a uma densidade de corrente  $\vec{j} = \vec{E}/\rho$ , onde  $\rho$  é a resistividade do metal. Chamando de  $S$  a seção transversal do fio que constitui a espira, obtemos uma relação entre a corrente e a intensidade do campo elétrico, dada por

$$I = \frac{S E}{\rho} . \quad (35.14)$$

Usando a expressão da resistência da espira  $R = \rho 2\pi b/S$ , encontramos a corrente

$$I = \frac{\mu_0 n \alpha \pi b^2}{R} . \quad (35.15)$$

No caso da solução macroscópica, inicialmente notamos que a lei de Ohm microscópica e a equação da continuidade determinam que  $|\vec{E}_{\text{int}}|$  é constante no interior da espira. Usando a eq.(35.11) escrevemos

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \oint_C \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{c} = |\vec{E}_{\text{ind}}| 2\pi b = \rho |\vec{j}| 2\pi b = \frac{\rho 2\pi b}{S} I = R I . \quad (35.16)$$

Por outro lado, empregando a eq.(35.12) juntamente com o resultado (34.6) [[[(34.6)]]], obtemos

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = - \iint_S [\mu_0 n \alpha \hat{k}] \cdot [-\hat{k} dS] = \mu_0 n \alpha \pi b^2 . \quad (35.17)$$

A comparação entre estas duas expressões fornece

$$R I = \mu_0 n \alpha \pi b^2 , \quad (35.18)$$

que também corresponde à corrente dada na eq.(35.15).

Neste exemplo, as soluções microscópica e macroscópica para a corrente  $I$  puderam ser obtidas com dificuldades equivalentes porque a espira é circular e o seu eixo coincide com o do solenóide. Este arranjo faz com que, no interior do metal, as linhas de campo induzido por  $\partial \vec{B}/\partial t$  sejam sempre paralelas ao fio e não existam cargas estáticas acumuladas sobre ele, como mostra a fig.35.4(a).

### • exemplo 3

Consideremos agora uma outra espira, quadrada, de lado  $L$ , com a mesma resistividade e seção transversal que a anterior, colocada no interior do solenóide, como mostra a fig.35.4(b). Para que a a resistência desta espira seja a mesma que a circular do exemplo 2, supomos que  $L = \pi b/2$ . Desejamos calcular a corrente  $I'$  que percorre a espira quadrada.

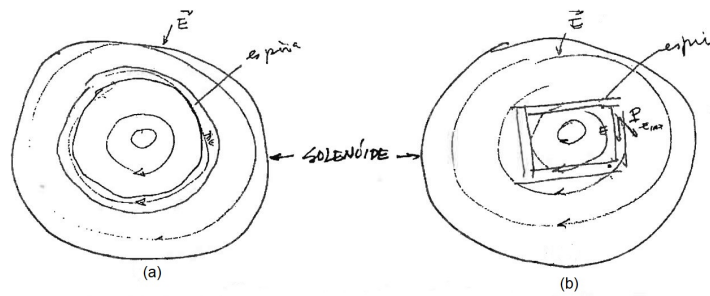


Figura 35.4: (a) Espira circular e (b) quadrada, no interior do solenóide cilíndrico do exemplo 1.

Neste caso, o fio da espira não acompanha as linhas de campo induzido e temos uma situação análoga à que acontece quando um fio é ligado a uma bateria, discutida na aula 28. Como o campo resultante  $\vec{E}$  no interior do fio deve ser paralelo à corrente, satisfazendo a lei de Ohm microscópica  $\vec{j} = \vec{E}/\rho$ , devem existir acúmulos superficiais de cargas, que geram um campo eletrostático  $\vec{E}_q$ . Sabemos que existem cargas na superfície do fio, mas não é fácil conhecer as suas quantidades e localizações, o que torna a determinação do campo  $\vec{E}_q$  bastante complicada. Isto inviabiliza o cálculo da corrente  $I$  que percorre a espira usando a lei de Ohm microscópica.

No caso da lei de Ohm macroscópica, por outro lado, o cálculo da corrente é bastante simples. Como o módulo do campo elétrico resultante  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{ind}} + \vec{E}_q$  é constante ao longo da espira, escolhemos o caminho  $C$  sobre ela e podemos escrever

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = |\vec{E}_{\text{ind}}| 4L = \rho |\vec{j}| 4L = \frac{\rho 4L}{S} I' = R I', \quad (35.19)$$

com  $R = \rho 4L/S$ . Este resultado pode ser expresso em termos da fem, dada pela eq.(35.11) pois,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = \oint_C \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{c} + \oint_C \vec{E}_q \cdot d\vec{c} = \oint_C \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{c} = \mathcal{E}_{\text{ind}}, \quad (35.20)$$

já que  $\vec{E}_q$  é conservativo e a sua integral em qualquer caminho fechado é nula. Assim,

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = R I', \quad (35.21)$$

como no exemplo 2.

Usando a eq.(35.12), e a eq.(34.6) [((34.6))], temos

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = - \iint_S [\mu_0 n \alpha \hat{k}] \cdot [-\hat{k} dS] = \mu_0 n \alpha L^2. \quad (35.22)$$

A corrente  $I'$  é, portanto, dada por

$$I' = \frac{\mu_0 n \alpha L^2}{R}. \quad (35.23)$$

Este resultado mostra que a abordagem macroscópica permite que a corrente na espira possa ser determinada sem que se conheçam os campos elétricos.

Finalmente, para mostrar a influência da forma da espira sobre este resultado, o comparamos com o dado pela eq.(35.15). Usando  $L = \pi b/2$  e obtemos

$$I' = \frac{\pi}{4} I < I. \quad (35.24)$$

#### • exemplo 4

Consideramos a mesma espira circular de raio  $b$  do exemplo 2 mas, agora, colocada do lado de fora do solenóide, como mostra a fig.35.5. A questão que colocamos é se, nesta configuração, há, ou não, corrente induzida na espira.

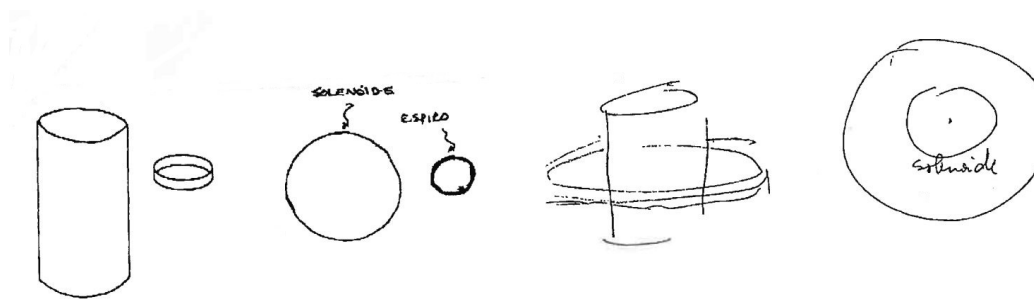


Figura 35.5: Solenóide cilíndrico do exemplo 1, com espira (a) no seu lado externo (b) que o envolve.

Na região onde está a espira, existe um campo elétrico induzido  $\vec{E}_{\text{ind}}$  com linhas circulares e módulo dado pela eq.(34.12) [(((34.12)))]], na aproximação em que o solenóide é considerado muito longo. Como no exemplo anterior, há acúmulos de cargas estáticas sobre a espira e o módulo do campo elétrico resultante  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{ind}} + \vec{E}_q$  é constante ao longo dela. Como  $\vec{E}_q$  é um campo eletrostático, este resultado pode ser relacionado à fem pois

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = \oint_C \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{c} + \oint_C \vec{E}_q \cdot d\vec{c} = \oint_C \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{c} = \mathcal{E}_{\text{ind}}. \quad (35.25)$$

Escolhendo o caminho  $C$  sobre a espira temos

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = |\vec{E}_{\text{ind}}| 2\pi b = \rho |\vec{j}| 2\pi b = \frac{\rho 2\pi b}{S} I = RI, \quad (35.26)$$

sendo  $R = \rho 2\pi b/S$ .

No caso de um solenóide muito longo,  $\vec{B}$  pode ser desprezado na sua região externa e, portanto  $\partial\vec{B}/\partial t \simeq 0$  para  $r > a$ , como indicado na eq.(34.7) [(((34.7)))]]. Assim, o fluxo de  $\partial\vec{B}/\partial t$  através de uma superfície matemática apoiada sobre a espira é nulo e, usando a eq.(35.12), concluímos que  $I = 0$ . Já a lei de Ohm microscópica determina que o campo *resultante*  $\vec{E}$  é nulo em cada ponto do interior do metal, indicando que o campo induzido  $\vec{E}_{\text{ind}}$  é cancelado pelo campo eletrostático  $\vec{E}_q$  devido às cargas sobre a superfície do fio.

A situação muda radicalmente se a espira envolver o solenóide, mesmo estando fora dele, como mostra a figura (b). Neste caso, usando o resultado (34.6) [(((34.6)))] nas eqs.(35.25) e

(35.26), encontramos

$$I = \frac{\mu_0 n \alpha \pi a^2}{R}. \quad (35.27)$$

### • exercícios

1. Considere a situação do exemplo 3, na qual um campo magnético uniforme, dado por  $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t) \hat{k}$ , existe no interior de um solenóide cilíndrico de raio  $a$ . Determine a corrente  $I'$  induzida em uma espira de resistência  $R$ ,
- a) com raio  $b < a$  e colocada no interior do solenóide, como na fig.35.3;
  - b) com raio  $b < a$  e colocada no exterior do solenóide, como na fig.35.5(a);
  - c) com raio  $b > a$  e colocada no exterior do solenóide, envolvendo-o, como na fig.35.5(b).

### • respostas

1. a)  $I = \frac{B_0 \omega \pi b^2 \cos(\omega t)}{R}$ ;    b)  $I = 0$ ;    c)  $I = \frac{B_0 \omega \pi a^2 \cos(\omega t)}{R}$ .

# Capítulo 36

## geração de correntes: Lorentz ou Faraday ?

- o ímã e a espira

Em muitas situações o comportamento de um sistema eletromagnético pode induzir correntes elétricas em outro. Por exemplo, o movimento de um ímã pode gerar correntes em uma espira em repouso e um ímã em repouso também pode gerar correntes em uma espira em movimento. Ainda que a relação entre estas duas situações possa parecer simples, o eletromagnetismo clássico propõe, para este fenômeno, duas explicações diferentes, que dependem do referencial adotado. No referencial da espira, o ímã se move e, ao fazê-lo, induz um campo elétrico que provoca o movimento dos elétrons livres no interior do condutor. Neste caso, portanto, o fenômeno é explicado com base na lei de Faraday. No referencial do ímã, por outro lado, o campo magnético não varia com o tempo e não existe campo elétrico induzido. A explicação da corrente fica por conta da força de Lorentz, pois o deslocamento da espira faz com que seus elétrons se movam em presença de um campo magnético. Tais situações são indicadas na fig.36.1.

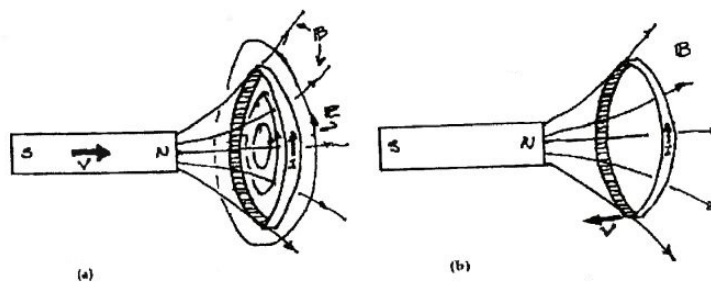


Figura 36.1: (a) No referencial da espira existe  $\partial \vec{B} / \partial t$  e, conseqüentemente, um campo elétrico induzido  $\vec{E}$ , que gera a corrente; (b) no referencial do ímã a corrente existe porque os elétrons livres se movem sob a ação da força  $\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$ .

Esta situação envolvendo ímã e espira é uma questão clássica que tem importância histórica,

pois foi abordada por Einstein na introdução do seu artigo *Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento*, de 1905, no qual ele introduz a teoria da relatividade restrita. Lá, ele enfatiza que a explicação dos fenômenos eletromagnéticos depende do referencial adotado. Este tema é discutido em maior profundidade na aula 24 da segunda parte do curso. Nesta aula e na seguinte, apresentamos alguns exemplos.

### • exemplo 1: o fio com corrente e a espira

Um sistema é formado por um fio muito longo, percorrido por uma corrente  $I$  constante e uma espira quadrada, de lado  $L$ , coplanar com ele, feita com um fio de condutividade  $\sigma$ , resistência  $R$  e seção transversal  $S$ . O fio e a espira aproximam-se a uma velocidade constante  $v$ , ao longo do eixo  $y$  sendo que, no instante  $t = 0$ , a distância entre eles é  $a$ . Supomos que  $v \ll c$ , para evitar efeitos relativísticos. Nesta situação, existe uma corrente  $I'$  induzida sobre a espira, cuja explicação depende do referencial adotado.

#### • referencial do fio

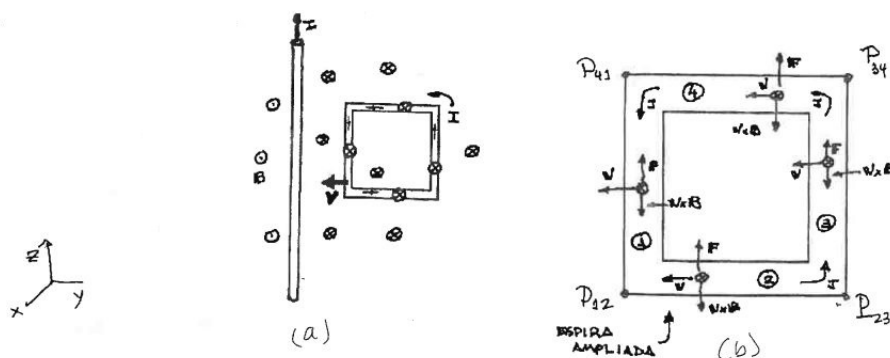


Figura 36.2: (a) O fio e a espira, no referencial do fio; espiras ampliadas (b) com forças magnéticas e (c) com campos elétricos e distribuições de carga.

Consideramos, inicialmente, a descrição do fenômeno no referencial no qual o fio está em repouso, que corresponde à fig.36.2. Neste referencial,  $\partial \vec{B} / \partial t = 0$  e a corrente na espira é atribuída à força de Lorentz. O campo magnético criado pelo fio na região da espira está entrando na folha, pode ser calculado pela lei de Ampère e sua intensidade em um ponto  $P$  distante  $r$  do fio, vale

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (36.1)$$

Como a espira é arrastada em presença deste campo, aparecem forças do tipo  $\vec{F}_{\text{mag}} = q \vec{v} \times \vec{B}$  sobre todas as cargas do metal, sejam elas íons positivos ou elétrons livres. Cada íon está preso na rede cristalina do metal e, por isso, não pode se mover relativamente aos demais. Já o mesmo não acontece com os elétrons livres, que sofrem as forças representadas na figura (b). Nos lados 2



e 4 da espira, estas forças deslocam os elétrons transversalmente ao fio, produzindo um resultado associado ao efeito Hall. Nos lados 1 e 3, as forças são paralelas ao fio e produzem deslocamentos de cargas. Como o lado 1 está mais próximo do fio do que o lado 3, as forças naquela região são mais intensas e isto dá origem a movimentos de arraste de elétrons ao longo da espira no sentido horário, o que corresponde a uma corrente convencional  $I'$  no sentido anti-horário. Entretanto, para obter a corrente a partir das forças, ainda há um caminho a ser percorrido.

Nas aulas 17 e 18, ao discutirmos a lei de Ohm e correntes em fios metálicos, enfatizamos o papel da equação da continuidade, que determina que a corrente elétrica em um circuito deve ser a mesma em todos os seus pontos, porque cargas não podem se acumular continuamente em pontos do seu interior. O mesmo acontece com a espira deste exemplo e, em cada seção transversal do fio, a corrente  $I'$  que percorre a espira é a mesma e o módulo da densidade de corrente é dado por  $j = I'/S$ . A lei de Ohm generalizada tem a forma

$$\vec{j} = \sigma \frac{\vec{f}}{(-e)}, \quad (36.2)$$

onde  $\vec{f}$  é a força *resultante* sobre um elétron livre, dada pela soma das contribuições magnética e elétrica devida às cargas acumuladas nos vários pontos da superfície externa da espira. Como  $I'$  tem o mesmo valor em qualquer ponto do fio, o mesmo acontece com  $|\vec{j}|$  e, portanto,  $|\vec{f}|$  é o mesmo em todos os lados da espira. Nos lados 2 e 4, as forças de origem magnética são transversais ao fio, o que indica que a corrente  $I'$  nestes trechos é devida a forças  $\vec{f}_2 = -e\vec{E}_2$  e  $\vec{f}_4 = -e\vec{E}_4$ , produzidas por campos elétricos uniformes  $\vec{E}_2 = E_2\hat{j}$  e  $\vec{E}_4 = -E_4\hat{j}$ , criados pelas cargas distribuídas na superfície externa do fio, como indica a figura (c). Estas cargas criam, também, campos  $\vec{E}_1$  e  $\vec{E}_3$  nos lados 1 e 3 e as forças resultantes são

$$\vec{f}_1 = -e[-vB_1 + E_1]\hat{k}, \quad (36.3)$$

$$\vec{f}_3 = -e[-vB_3 + E_3]\hat{k}, \quad (36.4)$$

onde  $B_1$  e  $B_3$  são, respectivamente, os campos magnéticos nos lados 1 e 3 da espira. No caso de  $\vec{f}_1$ , a componente magnética é maior do que a elétrica, enquanto que o oposto ocorre em  $\vec{f}_3$ . Deste modo, a igualdade  $|\vec{f}_1| = |\vec{f}_2| = |\vec{f}_3| = |\vec{f}_4|$  permite escrever

$$vB_1 - E_1 = E_2 = E_3 - vB_3 = E_4. \quad (36.5)$$

Estes resultados dependem dos campos elétricos nos vários lados da espira, que ainda são desconhecidos. Para determiná-los, recorremos ao fato que eles são devidos a cargas acumuladas na superfície do fio, que correspondem a um sistema eletrostático. Por isso, para os campos gerados por estas cargas, vale a condição

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = 0, \quad (36.6)$$

onde  $C$  é um caminho qualquer. Escolhendo este caminho sobre a espira, orientando-o no sentido anti-horário e notando que os campos elétricos são constantes sobre cada um dos seus lados, escrevemos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{c} = [-E_1 + E_2 + E_3 + E_4]L = 0. \quad (36.7)$$

Manipulando as eqs.(36.5) e (36.7), obtemos

$$E_1 = \frac{v(3B_1 + B_3)}{4}, \quad (36.8)$$

$$E_3 = \frac{v(B_1 + 3B_3)}{4}, \quad (36.9)$$

$$E_2 = E_4 = \frac{v(B_1 - B_3)}{4}. \quad (36.10)$$

Estes resultados mostram que  $|\vec{E}_1| > |\vec{E}_3| > |\vec{E}_2| = |\vec{E}_4|$  e, portanto, que as cargas induzidas na superfície da espira devem ser as mostradas qualitativamente na figura (c). Elas permitem reescrever a eq.(36.5) como

$$vB_1 - E_1 = E_2 = E_3 - vB_3 = E_4 = \frac{v(B_1 - B_3)}{4}, \quad (36.11)$$

indicando que as forças por unidade de carga que agem sobre os elétrons livres são as mesmas em todos os trechos da espira.

Voltando à lei de Ohm, eq.(36.2), temos

$$j = \sigma \frac{v(B_1 - B_3)}{4} \quad (36.12)$$

e, escrevendo a resistência da espira como  $R = \rho 4L/S$ , obtemos a corrente  $I'$  induzida na espira como

$$I' = jS = \frac{Lv(B_1 - B_3)}{R}. \quad (36.13)$$

Em um instante  $t$  genérico, as distâncias dos lados 1 e 3 da espira ao fio longo são dadas por  $r_1 = a - vt$  e  $r_3 = a + L - vt$  e, usando (35.1) [((35.1))], obtemos

$$I' = \frac{L}{R} v \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{a - vt} - \frac{1}{a + L - vt} \right]. \quad (36.14)$$

Este resultado para a corrente foi obtido a partir da lei de Ohm microscópica. Alternativamente, ele poderia ter sido obtido a partir da expressão para a força eletromotriz sobre a espira. Neste caso, a lei de Ohm macroscópica é dada por

$$\mathcal{E} = RI', \quad (36.15)$$

sendo  $\mathcal{E}$  o resultado da integral

$$\mathcal{E} = \oint_C [\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}_q] \cdot d\vec{c} \quad (36.16)$$

onde  $\vec{E}_q$  é o campo elétrico devido às cargas acumuladas na superfície do condutor e  $C$  é um caminho matemático tomado sobre a espira e orientado no sentido anti-horário. A integral do campo eletrostático é nula e, portanto,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{c} = vB_1L - vB_3L. \quad (36.17)$$

Este resultado, juntamente com a eq.(36.15), reproduz a corrente  $I'$  dada na eq.(36.13).

• referencial da espira

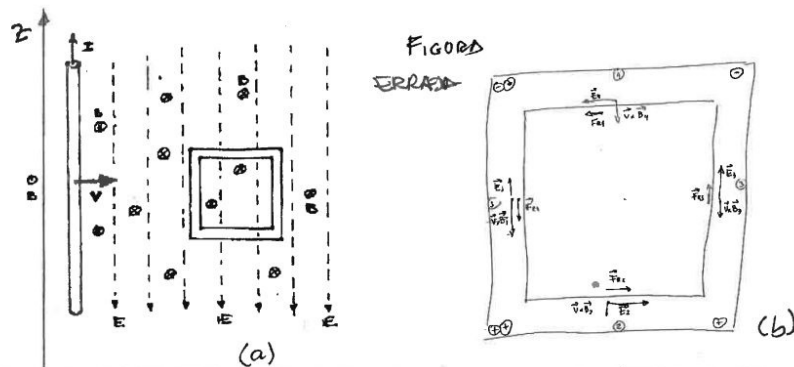


Figura 36.3: (a) O fio e a espira, no referencial da espira; (b) espira ampliada com campos elétricos e distribuições de carga.

No referencial no qual a espira está em repouso, mostrado na fig.36.3, o fio longo se move com velocidade  $\vec{v} = v \hat{j}$  e existe  $\partial \vec{B} / \partial t$  que dá origem a um campo  $\vec{E}_{\text{ind}}$  em todo o espaço. Esta situação foi discutida no exemplo 1 da aula 35, onde vimos que  $\vec{E}_{\text{ind}}$  é dado pela eq.(35.7).[[[(35.7)]]] como

$$\vec{E}_{\text{ind}} = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi(y - vt)} \hat{k}, \quad (36.18)$$

onde  $y - vt$  é a distância do ponto considerado ao fio em um instante  $t$ . Este campo é paralelo ao fio e tem sentido oposto à sua corrente.

Do ponto de vista microscópico, a corrente  $I'$  sobre a espira existe porque os seus elétrons estão imersos no campo  $\vec{E}_{\text{ind}}$ . O sentido desta corrente é anti-horário, porque os elétrons do lado 1 da espira estão sujeitos a campos ao longo do fio, que são mais intensos que os que agem no lado 3. A situação é bastante semelhante à discussão feita no referencial do fio. Só que, agora,  $\vec{E}_{\text{ind}}$  toma o lugar de  $\vec{v} \times \vec{B}$  nas eqs.(35.5) [[[(35.5)]]] e escrevemos

$$E_{1\text{ind}} - E_{1q} = E_{2q} = E_{3q} - E_{3\text{ind}} = E_{4q}, \quad (36.19)$$

onde os  $\vec{E}_{kq}$  são os campos eletrostáticos, que satisfazem a condição (36.6). As mesmas operações usadas anteriormente permitem obter um resultado análogo à eq.(36.11), dado por

$$E_{1\text{ind}} - E_{1q} = E_{2q} = E_{3q} - E_{3\text{ind}} = E_{4q} = \frac{(E_{1\text{ind}} - E_{3\text{ind}})}{4}, \quad (36.20)$$

que indica que as forças por unidade de carga que movimentam os elétrons livres são, em módulo, iguais em todos os trechos do fio. Como no caso anterior, a lei de ohm microscópica determina a corrente sobre a espira como sendo

$$I' = \frac{L(E_{1\text{ind}} - E_{3\text{ind}})}{R}, \quad (36.21)$$

com  $\vec{E}_{\text{ind}}$  dado pela eq.(36.18). Usando este resultado com  $y_1 = a$  e  $y_3 = a + L$ , encontramos

$$I' = \frac{L}{R} v \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{a - vt} - \frac{1}{a + L - vt} \right], \quad (36.22)$$

que coincide com a eq.(36.14).

Para completar esta discussão, calculamos novamente a corrente na espira por meio da fem  $\mathcal{E}$ , usando a eq.(36.15). Neste caso, ela é dada, em termos do campo  $\vec{E}$  que causa a corrente, por

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = \oint_C [\vec{E}_{\text{ind}} + \vec{E}_q] \cdot d\vec{c} = \oint_C \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{c}. \quad (36.23)$$

A fem pode ser calculada por meio da lei de Faraday, escrita como

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{c} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS. \quad (36.24)$$

e o seu cálculo pode ser feito diretamente a partir do lado direito desta equação. Usando o módulo de  $\vec{B}$  num ponto P genérico dado pela eq.(36.1) com  $r = y - vt$ , escrevemos

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{v}{(y - vt)^2} \hat{i}. \quad (36.25)$$

Para uma superfície plana apoiada sobre o caminho  $C$ , coincidente com a espira e de sentido anti-horário,  $\hat{n} = \hat{i}$  e, usando  $dS = dy dz$ , o fluxo de  $\partial \vec{B} / \partial t$  sobre esta superfície vale

$$\mathcal{E} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dS = \int_a^{a+L} dy \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{v L}{(y - vt)^2}, \quad (36.26)$$

usando  $\int_0^L dz = L$ . Efetuando a integral em  $y$ , obtemos

$$\mathcal{E} = - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{v L}{(y - vt)} \Big|_a^{a+L} = \frac{\mu_0 I v L}{2\pi} \left[ \frac{1}{a - vt} - \frac{1}{a + L - vt} \right] \quad (36.27)$$

que corresponde a uma corrente  $I'$  idêntica às obtidas anteriormente.

- em resumo ...

O movimento relativo entre um fio longo percorrido por uma corrente  $I$  e uma espira induz, sobre esta, uma corrente  $I'$  que é explicada de modos diferentes, nos referenciais do fio e da espira. Em ambos os casos, a corrente  $I'$  é devida a forças que agem sobre os elétrons livres da espira. Entretanto, no referencial em que o fio está em repouso, estas forças têm a forma  $-e [\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}_q]$ , onde  $\vec{E}_q$  representa o campo eletrostático produzido pelas cargas acumuladas na superfície externa da espira. Já no referencial no qual a espira está em repouso, as forças são dadas por  $-e [\vec{E}_{\text{ind}} + \vec{E}_q]$  sendo  $\vec{E}_{\text{ind}}$  o campo induzido pela variação temporal do campo  $\vec{B}$  do fio. O fato de  $\vec{v} \times \vec{B}$  em um referencial produzir os mesmos efeitos que  $\vec{E}_{\text{ind}}$  no outro pode ser compreendido no contexto da teoria da relatividade e é descrito na segunda parte deste texto.



# Capítulo 37

## indução de correntes

Nesta aula, continuamos o estudo de situações nas quais um sistema eletromagnético induz corrente em outro.

### • exemplo 1

Um condutor em forma de U, apoiado no plano  $xy$ , sobre o qual desliza uma barra metálica, em presença de um campo magnético uniforme e constante  $\vec{B} = B \hat{k}$ , é mostrado na fig.37.1. Todos os condutores têm a mesma seção transversal  $S$  e condutividade  $\sigma$ . Calculamos a corrente induzida no circuito, supondo que a barra deslize com velocidade constante  $\vec{v} = v \hat{j}$  e que, inicialmente, ela esteja na posição  $y = b$ . Este problema pode ser resolvido por meio de abordagens microscópica e macroscópica.

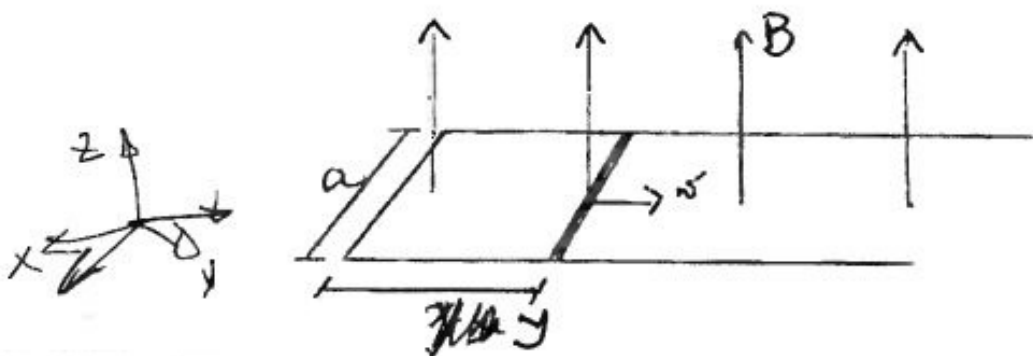


Figura 37.1: Circuito formado por uma barra metálica que desliza com velocidade  $v$ , apoiada sobre um condutor em forma de U.

### - abordagem microscópica

Nesta situação, a existência da corrente só pode ser atribuída à força de Lorentz, uma vez que

o campo magnético não varia com o tempo e, portanto, não há campo elétrico induzido. Como não existe um referencial no qual todas as partes do circuito estejam em repouso, a corrente não pode ser calculada pela lei de Faraday.

A força de Lorentz atua sobre todas as cargas da barra em movimento, íons positivos e elétrons livres. Como os íons estão fixos na rede cristalina, apenas os elétrons livres dão origem à corrente elétrica. A força que age sobre cada elétron livre é

$$\vec{f}_B = -e\vec{v} \times \vec{B} = -evB\hat{i} \quad (37.1)$$

e, se não existisse o condutor em U, o movimento da barra resultaria em um acúmulo de cargas nas suas extremidades e em um campo elétrico  $\vec{E}$  no seu interior, como mostra a fig.37.2(a). A força resultante sobre cada elétron seria  $\vec{f} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  e, depois de um tempo muito curto, o sistema se estabilizaria. As cargas acumuladas neste processo produziram, também, campo elétrico do lado de fora da barra. Neste aspecto, a barra em movimento seria análoga a uma pilha.

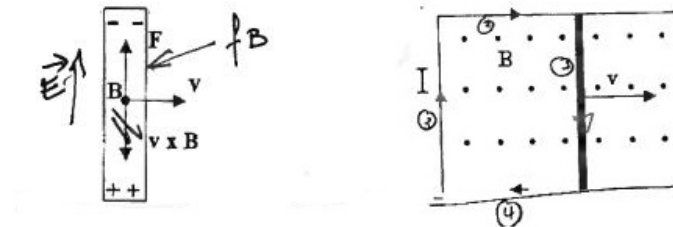


Figura 37.2: (a) Barra condutora em movimento em um campo magnético uniforme; (b) sentido da corrente no circuito.

Quando a barra é arrastada sobre o condutor em U, continua a haver acúmulos de cargas nas suas extremidades e campo elétrico tanto no seu interior como fora dela. Isto faz com que, no circuito formado pela barra e pelo trecho do condutor em U à sua esquerda, passe a haver uma corrente elétrica. Ela deve ser a mesma em todos os pontos do circuito para que não haja acúmulos contínuos de carga no seu interior, como estabelece a equação da continuidade. Pela lei de Ohm microscópica, a densidade de corrente é dada por

$$\vec{j} = \sigma \frac{\vec{f}}{(-e)}, \quad (37.2)$$

onde  $\vec{f}$  é a força *resultante* que causa o movimento dos elétrons. Numerando os lados do circuito como na figura (b), podemos escrever

$$|\vec{f}_1| = |\vec{f}_2| = |\vec{f}_3| = |\vec{f}_4|. \quad (37.3)$$

Em todos os trechos do circuito existem campos eletrostáticos  $\vec{E}_q$ , produzidos por cargas acumuladas em sua superfície externa e, no lado 1 existe, também a força  $\vec{f}_B$ , dada pela eq.(37.1). Assim, temos

$$vB - E_{1q} = E_{2q} = E_{3q} = E_{4q}. \quad (37.4)$$



Como as cargas sobre o fio podem ser pensadas como uma distribuição estática, o campo  $\vec{E}_q$  é conservativo e, escolhendo um caminho matemático sobre o circuito, cujos lados são  $a$  e  $(b + vt)$ , orientado no sentido anti-horário, podemos escrever

$$\oint_C \vec{E}_q \cdot d\vec{c} = -E_{1q} a + E_{2q} (b + vt) + E_{3q} a + E_{4q} (b + vt) = 0. \quad (37.5)$$

Manipulando este resultado juntamente com a eq.(37.4), encontramos

$$E_{1q} = v B \left[ \frac{a + 2(b + vt)}{2(a + b + vt)} \right], \quad (37.6)$$

$$E_{2q} = E_{3q} = E_{4q} = \frac{v B a}{2(a + b + vt)}. \quad (37.7)$$

Estes resultados garantem que, de fato,  $|\vec{f}/(-e)|$  tem o mesmo valor em todos os pontos do circuito, embora os valores do campo elétrico no condutor em U e na barra sejam diferentes.

A lei de Ohm microscópica é escrita como

$$j = \sigma \frac{v B a}{2(a + b + vt)} \quad (37.8)$$

e a corrente  $I$  depende do tempo, sendo dada por

$$I = j S = \sigma S \frac{v B a}{2(a + b + vt)}. \quad (37.9)$$

Para expressar este resultado em função da resistência  $R$  do circuito, notamos que num instante genérico  $t$ ,  $y = b + vt$  e, conseqüentemente,

$$R(t) = \frac{2(a + b + vt)}{\sigma S}. \quad (37.10)$$

Assim,

$$I(t) = \frac{v B a}{R(t)} = \frac{\sigma S v B a}{2(a + b + vt)}. \quad (37.11)$$

### - abordagem macroscópica

A forma macroscópica da lei de Ohm é

$$\mathcal{E} = R I, \quad (37.12)$$

sendo a fem dada por

$$\mathcal{E} = \oint_C \frac{\vec{f}}{(-e)} \cdot d\vec{c}, \quad (37.13)$$

onde  $C$  é um caminho fechado apoiado sobre o circuito e orientado no sentido horário e  $\vec{f}$  é a força resultante que movimenta cada elétron livre e que tem componentes magnética e eletrostática. Os campos eletrostáticos  $\vec{E}_q$  obedecem a condição (37.5) e, por isso, a fem é dada por

$$\mathcal{E} = \int_{\text{barra}} [\vec{v} \times \vec{B}] \cdot d\vec{c} = v B a, \quad (37.14)$$

onde a integração é feita apenas sobre a barra móvel. A eq.(37.12) fornece

$$I(t) = \frac{v B a}{R(t)}, \quad (37.15)$$

idêntica à eq.(37.11). Esta corrente decresce com o tempo porque a fem é constante e a resistência aumenta com o tempo.

### • a conservação de energia

O movimento da barra produz uma corrente elétrica e, como o fio possui resistência, há dissipação de energia por efeito Joule. Mostramos, a seguir, que esta energia é fornecida ao sistema pelo trabalho de uma força externa que deve ser aplicada à barra móvel para que a sua velocidade se mantenha constante.

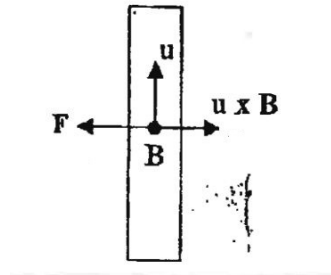


Figura 37.3: Força devida à velocidade  $\vec{u}$  sobre os elétrons livres da barra com corrente  $I$ .

Quando a barra é arrastada com  $\vec{v} = v \hat{j}$ , os elétrons livres no seu interior possuem uma outra velocidade devida à corrente, designada por  $\vec{u}$ . A fig.37.3 ilustra esta situação, onde a velocidade  $\vec{u} = -u \hat{i}$  é dirigida ao longo da barra. Seu módulo pode ser extraído da relação  $\vec{j} = -en\vec{u}$ , onde  $n$  é o número de elétrons livres por unidade de volume e  $j = I/S$ . Assim,

$$u = \frac{j}{en} = \frac{I}{enS}. \quad (37.16)$$

Este deslocamento ocorre em presença do campo externo  $\vec{B}$  e, sobre cada um dos elétrons livres em movimento na corrente aparece uma segunda força  $\vec{f}_u$ , dada por

$$\vec{f}_u = -e\vec{u} \times \vec{B} = -euB\hat{j} = -\frac{IB}{nS}\hat{j}. \quad (37.17)$$

No interior da barra existem  $naS$  elétrons livres e a força total  $\vec{F}_u$  sobre ela é

$$\vec{F}_u = -naS \frac{IB}{nS} = -IBa\hat{j}, \quad (37.18)$$

que é antiparalela a  $\vec{v}$  e tende a frear a barra. Para que a barra móvel possa ser deslocada com velocidade constante, é preciso que exista uma força externa  $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_u$ , que forneça energia a ela. Neste caso, a potência fornecida à barra vale

$$P_{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v} = IBav \quad (37.19)$$

e a eq.(37.11) permite escrever

$$P_{\text{ext}} = R I^2 . \quad (37.20)$$

Assim, a potência fornecida ao sistema pela força externa é idêntica à potência dissipada no circuito por efeito Joule, resultado consistente com a conservação de energia.

## • exemplo 2

Uma espira condutora, quadrada e rígida, de lado  $L$ , apoiada sobre o plano  $xy$ , com resistência  $R$ , atravessa com velocidade constante  $\vec{v} = v \hat{j}$ , um eletroímã, no interior do qual existe uma região também quadrada, de lado  $A > L$ , com um campo magnético uniforme  $\vec{B} = B \hat{k}$ . Nesta situação, pode haver corrente na espira e, dependendo do referencial que se adote, ela pode ser atribuída à força de Lorentz ou ao campo elétrico induzido pela variação temporal do campo magnético. Este problema pode ser tratado a partir das leis de Ohm microscópica e macroscópica mas, aqui, consideramos apenas a segunda abordagem.

### • referencial do eletroímã

No referencial em que o eletroímã está em repouso, o campo magnético é constante e as correntes observadas são atribuídas à força de Lorentz. Existem várias situações a serem consideradas, dependendo da posição relativa entre espira e eletroímã.

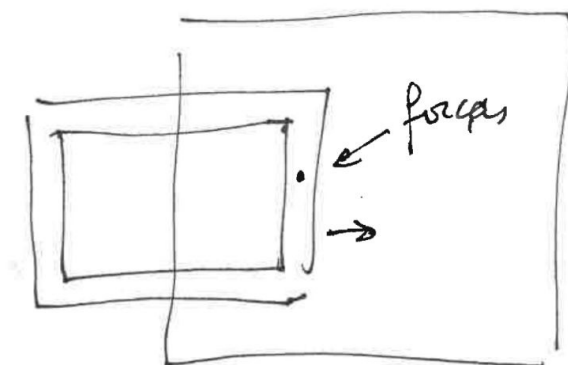


Figura 37.4: A espira, entrando na região onde há  $\vec{B}$ , é percorrida por corrente  $I$  no sentido horário.

- **situação a:** a espira está fora da região de campo, não existem forças nos elétrons livres da espira e, portanto,  $I = 0$ .

- **situação b:** a espira está entrando na região de campo como mostra a fig.37.4. Os elétrons livres das partes da espira imersa no campo  $\vec{B}$  estão sujeitos a forças dadas por

$$\vec{f}_B = -e \vec{v} \times \vec{B} = -ev B \hat{i} . \quad (37.21)$$

Ao longo do lado 1, essa força contribui para a fem enquanto que, ao longo dos lados 2 e 4 isso não acontece, pois a força é perpendicular ao fio. Assim,

$$\mathcal{E} = \oint_C \frac{\vec{f}_B}{(-e)} \cdot d\vec{c} = v B L, \quad (37.22)$$

onde  $C$  é um caminho sobre a espira e orientado no sentido horário. A corrente na espira, contrária ao movimento dos elétrons, é no sentido horário e o seu valor é obtido a partir da lei de Ohm, como

$$I = \frac{v B L}{R}. \quad (37.23)$$

É importante notar que a força eletromotriz é devida apenas às forças que agem sobre o lado 1. Entretanto, a corrente existe em todos os trechos da espira, inclusive no lado 3, que está fora da região do campo magnético. Estas correntes são devidas ao campo eletrostático  $\vec{E}_q$ , produzido por cargas acumuladas na superfície externa da espira. A uniformidade da corrente sobre a espira garante que a força *resultante* que age num elétron é a mesma em qualquer ponto do seu interior. As duas situações anteriores são ilustradas nas figs.37.5 (a) e (b).

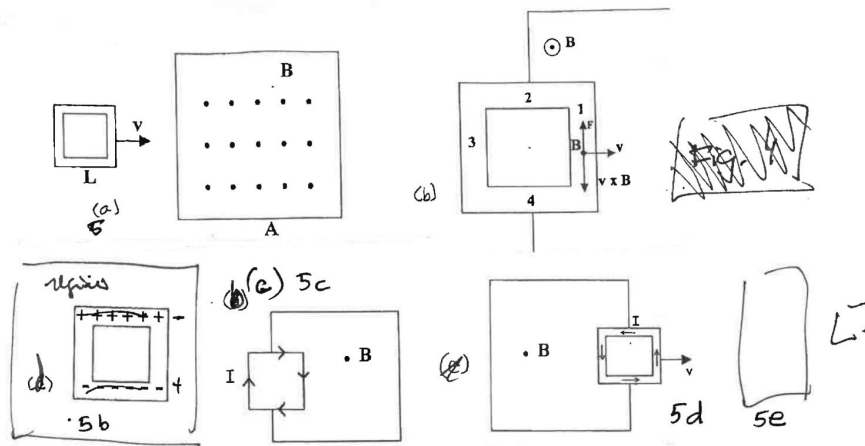


Figura 37.5: A espira: (a) fora da região onde há campo magnético; (b) entrando na região onde há  $\vec{B}$ , percorrida por corrente  $I$  no sentido horário; (c) totalmente imersa no campo  $\vec{B}$ , sem corrente; (d) saindo da região onde há  $\vec{B}$ , percorrida por corrente  $I$  no sentido anti-horário; (e) fora da região onde há campo.

- **situação c:** a espira está totalmente imersa no campo  $\vec{B}$ . Neste caso, existem forças dadas pela eq.(37.21) em todos os elétrons livres da espira. Isso resulta em acúmulos de cargas negativas no lado 2 e positivas, lado 4, como na fig.37.5 (c). A fem na espira é nula, pois as forças nos lados 1 e 3 contribuem com parcelas iguais e de sinais opostos e  $I = 0$ .

- **situação d:** a espira está saindo da região de campo. Esta situação é bastante semelhante à da espira entrando na região de campo. Como naquele caso, nos trechos da espira que estão no interior da região de campo  $\vec{B}$ , os elétrons livres sofrem a ação de forças dadas pela eq.(37.21), aparece uma fem sobre o lado 3 da espira. A corrente é novamente dada pela eq.(37.23), mas o seu sentido é anti-horário, como ilustrada a figura (d).

- **situação e:** a espira está novamente fora do eletroímã, não existem forças sobre os elétrons livres e  $I = 0$ , figura (e).

Se considerarmos como positiva a corrente na espira no sentido horário, o seu comportamento nas cinco situações descritas, em função do tempo, é o mostrado na fig.37.6.

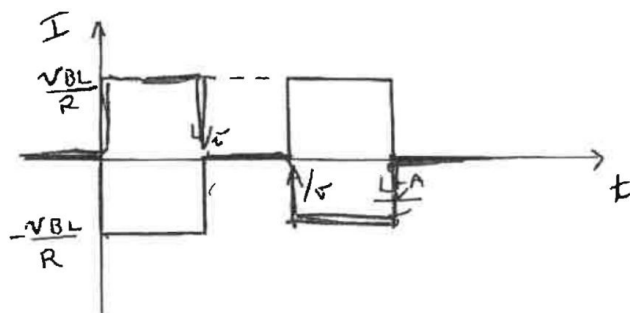


Figura 37.6: Corrente  $I$  na espira em função do tempo  $t$ , tomando como  $t = 0$  o instante em que o lado (1) da espira começa a entrar na região onde há  $\vec{B}$ .

#### • referencial da espira

No referencial em que a espira está em repouso, o eletroímã se move, o campo magnético varia com o tempo e há um campo elétrico induzido, consistente com a lei de Faraday. Este campo age nos elétrons livres da espira, causando a mesma sucessão de correntes mostradas nas figs.37.5 e 37.6.

Como no caso anterior, devemos considerar cinco situações, análogas às representadas na fig.37.4 só que, agora, a espira está em repouso e é o eletroímã que se move. Consideremos, por exemplo, a situação b, na qual parte da espira está imersa no campo do eletroímã, como mostra a fig.37.7.

A variação temporal de  $\vec{B}$  ocorre na região hachurada, sobre a qual o campo magnético passa de zero ao valor final  $\vec{B}$  durante um intervalo de tempo  $dt$ . Nesta região de transição,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\vec{B}}{dt} = \frac{B}{dt} \hat{k}. \quad (37.24)$$

Para aplicar a lei de Faraday, escolhemos um caminho  $C$ , sobre a espira e percorrido no sentido anti-horário, o que faz com que uma superfície apoiada sobre ele tenha normal  $\hat{n} = \hat{k}$ . Assim, escrevemos

$$\oint_C \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{c} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = - \frac{B}{dt} [L v dt] = -v B L, \quad (37.25)$$

notando que a integral de superfície deve ser feita apenas sobre a intersecção da região hachurada com a espira, cuja área é  $L v dt$ . Do lado esquerdo desta equação aparece a circuitação do campo elétrico induzido, que é idêntica à fem, já que

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = \oint_C [\vec{E}_{\text{ind}} + \vec{E}_q] \cdot d\vec{c} = \oint_C \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{c}, \quad (37.26)$$

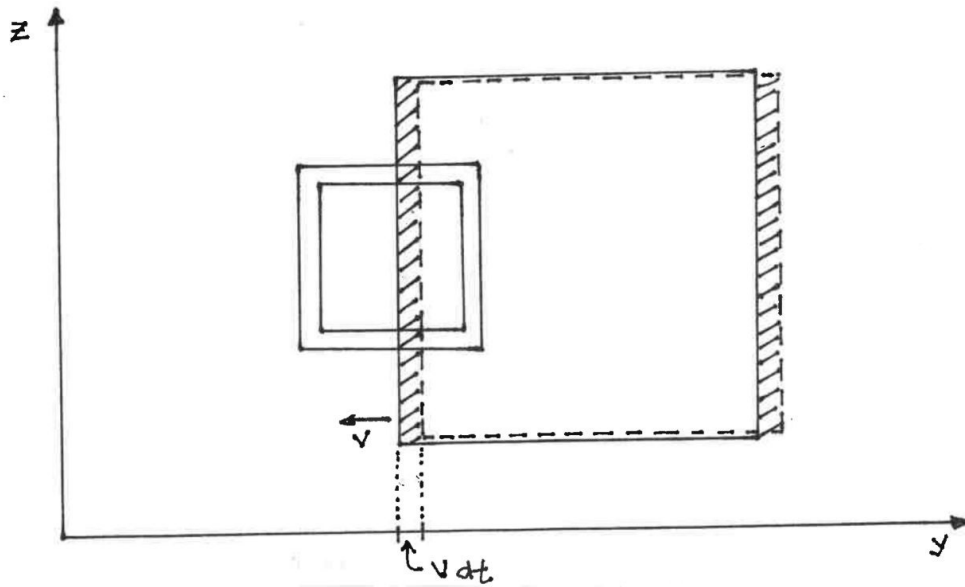


Figura 37.7: No referencial da espira, ela está fixa e o eletroímã move-se para a esquerda com velocidade  $v$ ; as áreas hachuradas indicam as regiões onde houve variação de  $\vec{B}$  no intervalo de tempo  $dt$ .

onde  $\vec{E}$  é o campo resultante em um ponto do interior do fio e  $\vec{E}_q$  é a contribuição das cargas acumuladas na superfície do fio, cuja integral é nula sobre qualquer caminho fechado. A lei de Ohm macroscópica, expressa por  $\mathcal{E} = RI$ , juntamente com as eqs.(37.25) e (37.26), fornece

$$I = - \frac{vBL}{R}. \quad (37.27)$$

O sinal negativo indica que a corrente flui no sentido oposto ao escolhido para o caminho  $C$ , ou seja, que ela flui no sentido horário e este resultado é idêntico ao obtido anteriormente, na eq.(37.23). As outras situações são totalmente análogas e também fornecem os resultados já obtidos, indicando que as explicações alternativas para a corrente da espira, baseadas na força de Lorentz ou na lei de Faraday são fisicamente equivalentes, apesar de conceitualmente diferentes. Este fato reflete a coerência profunda do eletromagnetismo por mudanças de referencial. De modo geral, a força de Lorentz que age sobre um elétron com velocidade  $\vec{v}$  é dada por  $\vec{f} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ . No presente exemplo, entretanto, as correntes que aparecem na espira quando ela está parcialmente imersa no eletroímã são atribuídas a  $\vec{f}_B = -e(\vec{v} \times \vec{B})$  no referencial do eletroímã e a  $\vec{f}_E = -e(\vec{E}_{\text{ind}})$  no referencial da espira. O significado deste campo elétrico, que está sendo chamado de  $\vec{E}_{\text{ind}}$  aqui, somente fica claro no contexto da relatividade, discutido na segunda parte deste texto.

#### • a conservação da energia

Na situação discutida no referencial do eletroímã, supusemos que a velocidade da espira permanece constante durante o seu movimento de translação. Como há produção de corrente neste processo, a conservação de energia indica a necessidade de realização de trabalho por alguma fonte externa. Nos intervalos de tempo em que há corrente, os elétrons livres se movem com

velocidade  $\vec{u}$  ao longo do fio, além da velocidade de arrastamento da espira  $\vec{v}$ . Na situação b, quando a espira está entrando na região de campo, para os elétrons em seu lado 1, essa velocidade é  $\vec{u} = -u \hat{i}$ , e dá origem às forças mostradas na fig.37.8.

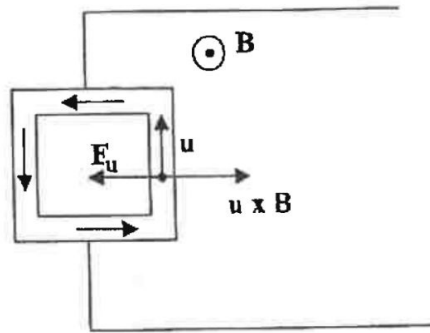


Figura 37.8: Os elétrons se movem com velocidade  $\vec{u}$ , sofrendo uma força  $\vec{F}_u$ ; as forças devidas à velocidade  $\vec{v}$ , também presentes, não estão desenhadas.

A força que age sobre um elétron no lado 1 da espira é

$$\vec{f}_u = -e \vec{u} \times \vec{B} = -e u B \hat{j} \quad (37.28)$$

e há uma força resultante

$$\vec{F}_u = -n L S \vec{f}_I, \quad (37.29)$$

onde  $n$  é o número de elétrons livres por unidade de volume e  $S$  é a seção do fio. O módulo da velocidade  $\vec{u}$  está relacionada à corrente na espira por

$$u = \frac{I}{e n S} \quad (37.30)$$

e, usando as eqs.(37.28) e (37.29), obtemos

$$\vec{F}_u = -I L B \hat{j}. \quad (37.31)$$

Usando a expressão (37.23) para eliminar  $B$ , temos

$$\vec{F}_u = -\frac{R I^2}{v} \hat{j}. \quad (37.32)$$

Na situação em que a espira entra na região de  $\vec{B}$ , esta força age sobre o lado 1 e aponta no sentido contrário ao movimento. Assim, para manter a velocidade da espira constante, é preciso que algum agente externo ao sistema aplique sobre ela uma força  $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_u$ . Durante todo o processo de introdução da espira na região de campo, esse agente externo fornece uma potência

$$P_{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v} = R I^2. \quad (37.33)$$

Como a velocidade da espira é mantida constante, sua energia cinética não varia e esta potência é dissipado por efeito Joule.

Quando a espira está totalmente imersa no campo, a força que age sobre ela é nula. Ao sair da região de  $\vec{B}$ , aparece sobre ela uma força também contrária ao movimento, como se espera do princípio da conservação da energia. Neste caso, o balanço energético é idêntico ao apresentado acima.

### • exemplo 3

Uma espira condutora, quadrada e rígida, de lado  $L$  e resistência  $R$ , gira com velocidade angular  $\omega$  constante, em presença de um campo magnético uniforme  $\vec{B} = B\hat{k}$ , criado por um eletroímã como mostra a fig.37.9. Nesta situação, também, podemos abordar o problema tanto no referencial do eletroímã como no da espira.

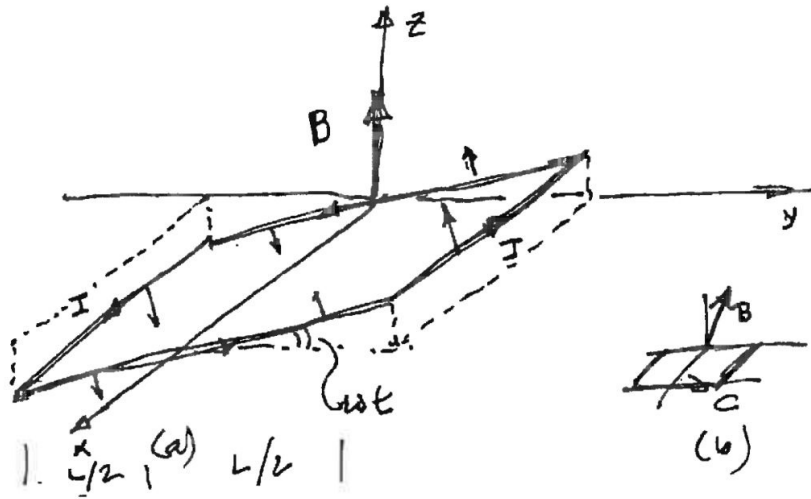


Figura 37.9: Espira girando com velocidade angular  $\omega$  em um campo magnético  $\vec{B}$ .

### • referencial do eletroímã

Neste referencial o eletroímã está em repouso, o campo magnético não varia com o tempo e a corrente induzida é atribuída à força de Lorentz. Em um dado instante, o ângulo entre os planos  $xy$  e o da espira é  $\omega t$  e a velocidade de um ponto  $P_D$  do fio, que dista  $d$  do eixo  $x$  e está à sua direita, é dado por

$$\vec{v}_D = \omega d [-\text{sen}(\omega t) \hat{j} + \text{cos}(\omega t) \hat{k}], \quad (37.34)$$

enquanto que um ponto simétrico  $P_E$ , à esquerda, tem velocidade

$$\vec{v}_E = \omega d [\text{sen}(\omega t) \hat{j} - \text{cos}(\omega t) \hat{k}]. \quad (37.35)$$

Assim, forças de origem magnética que agem sobre os elétrons livres localizados nestes pontos são dadas por

$$\vec{f}_D = -e \vec{v}_D \times \vec{B} = e \omega d B \text{sen}(\omega t) \hat{i}, \quad (37.36)$$

$$\vec{f}_E = -e \vec{v}_E \times \vec{B} = -e \omega d B \text{sen}(\omega t) \hat{i}. \quad (37.37)$$



Estas forças agem sobre quaisquer elétrons livres da espira. Nos trechos ortogonais ao eixo  $x$ , elas tendem a deslocar estes elétrons transversalmente ao fio, produzindo efeito Hall. Nos lados paralelos ao eixo  $x$ , estas forças tendem a empurrar os elétrons ao longo do fio. O resultado global é um acúmulo de cargas eletrostáticas nas superfícies externas do fio e o aparecimento de uma força eletromotriz  $\mathcal{E}$ , que produz uma corrente elétrica  $I$ , indicada na figura (b). Tomando um caminho matemático  $C$  sobre a espira, orientado paralelamente à corrente e usando  $d = L/2$  nas eqs.(37.36) e (37.37), obtemos

$$\mathcal{E} = \oint_C \frac{\vec{f}}{(-e)} \cdot d\vec{c} = 2 \left[ \frac{\omega L^2 B \text{sen}(\omega t)}{2} \right]. \quad (37.38)$$

A lei de Ohm macroscópica  $\mathcal{E} = RI$  fornece a corrente  $I$ , dada por

$$I = \frac{\omega B L^2}{R} \text{sen}(\omega t). \quad (37.39)$$

A presença do fator  $\text{sen}(\omega t)$  indica que esta corrente oscila com o tempo. A rotação de espiras em presença de campos magnéticos permite a geração de correntes alternadas e é empregada em usinas.

### • referencial da espira

No referencial em que a espira está em repouso, o campo magnético varia com o tempo, sendo dado por

$$\vec{B}(t) = B \left[ \text{sen}(\omega t) \hat{j} + \text{cos}(\omega t) \hat{k} \right] \quad (37.40)$$

Neste caso, podemos empregar a lei de Faraday para calcular a fem, usando

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \omega B \left[ \text{cos}(\omega t) \hat{j} - \text{sen}(\omega t) \hat{k} \right] \quad (37.41)$$

e um caminho  $C$  sobre a espira, com o sentido indicado na figura (b) e uma superfície matemática  $S$  apoiada sobre ele, com normal  $\hat{n} = \hat{k}$ . Assim,

$$\mathcal{E} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = \iint \omega B \text{sen}(\omega t) dS = \omega B L^2 \text{sen}(\omega t). \quad (37.42)$$

Usando a lei de Ohm, obtemos novamente a corrente dada pela eq.(37.39).

### • exercícios

1. Considere duas barras metálicas idênticas 1 e 2, com comprimentos paralelos ao eixo  $z$ , que se deslocam com velocidade  $\vec{v} = v \hat{j}$  relativamente à origem do sistema de coordenadas em uma região onde há um campo magnético uniforme e constante  $\vec{B} = B \hat{k}$ . A barra 1 está isolada e a barra 2 desliza sobre um condutor em forma de U, como no caso do exemplo 1.

- Determine a razão entre as intensidades dos campos elétricos  $\vec{E}_2$  e  $\vec{E}_1$  no interior das barras;
- Explique fisicamente o resultado encontrado.

2. Nas situações (b) e (d) do exemplo 2, as correntes na espira têm, respectivamente, sentidos horário e anti-horário. Isto significa que as forças necessárias para manter constante a velocidade da espira nestas duas situações têm sentidos opostos?

• **respostas**

1. a)  $\frac{E_2}{E_1} = \frac{a+2(b+vt)}{2(a+b+vt)} < 1$ .

2. Não; nos dois casos, as forças externas realizam trabalho sobre a espira e têm a mesma direção e sentido da velocidade.

# Capítulo 38

## auto-indução

### • introdução

Nas aulas anteriores, ao discutir a lei de Faraday, apresentamos exemplos nos quais campos magnéticos variáveis com o tempo induziam correntes elétricas em espiras colocadas nas suas proximidades. Uma característica comum a todas aquelas situações era o fato de o campo magnético variável ser devido a uma parte do sistema, fosse ela um solenoide com corrente variável, um fio ou um eletroímã em movimento, enquanto a corrente induzida ocorria em uma outra parte, a espira. Nesta aula, introduzimos um fenômeno relacionado, o da *auto-indução*, que ocorre quando os efeitos do campo elétrico induzido influenciam o próprio circuito que gera o campo magnético. Como discutimos na sequência, isto permite que uma corrente influencie a si mesma. A auto-indução é muito comum e ocorre sempre que correntes em um circuito variam com o tempo. Ela está presente, por exemplo, quando ligamos ou desligamos o interruptor de uma lâmpada em casa e, também, durante todo o tempo em que ela permanece acesa, pois a corrente que a percorre varia com a frequência de 60 Hz. O fenômeno da auto-indução é conceitualmente importante e está associado a características semelhantes à inércia. Nesta aula, discutimos este efeito na situação específica de um solenoide cilíndrico.

### • o circuito com o solenoide cilíndrico

Um circuito é formado por um fio de comprimento  $\ell$ , seção transversal  $A$  e resistividade  $\rho$ , parte do qual é enrolado na forma de um solenoide cilíndrico de raio  $a$ , altura  $h$ , com  $N$  espiras, como mostra a fig.38.1. Assim, a resistência do fio é dada por

$$R_f = \frac{\rho \ell}{A}, \quad (38.1)$$

e o comprimento  $\lambda$  do trecho que forma o solenoide vale

$$\lambda = N 2\pi a. \quad (38.2)$$

O fio contém uma chave  $c$  e está ligado a uma fonte de fem  $\mathcal{E}_b$  constante e resistência interna  $R_b$ , o que faz com que a resistência total do circuito seja  $R = R_b + R_f$ .

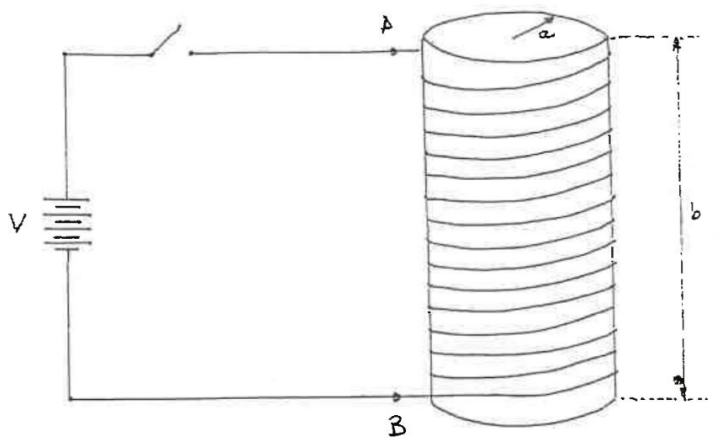


Figura 38.1: Um solenoide cilíndrico acoplado a uma bateria.

Com a chave aberta, não há correntes no circuito. Quando ela é fechada, começa a fluir uma corrente, que é influenciada pela auto-indução. Nosso objetivo é determinar esta influência no comportamento da corrente com o decorrer do tempo. Se ignorássemos a auto-indução, como vimos fazendo até aqui, a nossa previsão seria que, *imediatamente* após o fechamento da chave, passaria a haver uma corrente constante  $I_c$  no circuito, dada por

$$I_c = \frac{\mathcal{E}_b}{R}. \quad (38.3)$$

Entretanto, esta previsão é incompleta. Ela não leva em conta que a corrente que surge após o fechamento da chave cria um campo magnético variável no tempo e que este, pela lei de Faraday, produz um campo elétrico induzido que também influencia o circuito. Esta cadeia de processos é um exemplo de auto-indução e o seu efeito sobre o circuito é fazer com que a corrente passe a crescer continuamente quando a chave é ligada.

### • a auto-indução no solenoide

Para estudar a corrente  $I(t)$  no circuito em função do tempo, chamamos de  $t = 0$  o instante no qual a chave é fechada, e temos  $I(t) = 0$  para  $t < 0$ . Para determinar o que acontece quando  $t > 0$ , é preciso considerar, além da fem  $\mathcal{E}_b$ , também os efeitos do campo elétrico  $\vec{E}_{\text{ind}}$ , produzido pelo  $\partial\vec{B}/\partial t$  devido à variação temporal da corrente. Este último existe em toda a região ocupada pelo circuito, mas seus efeitos são muito mais intensos nas proximidades do solenoide. Por isso, para simplificar a discussão, supomos que o campo magnético do solenoide seja importante apenas no seu interior.

Na situação mostrada na fig.38.1, a corrente  $I(t)$  percorre o solenoide no sentido horário e em um instante genérico  $t > 0$ , ela gera um campo magnético  $\vec{B}(t) = -B(t)\hat{k}$  no seu interior. Usando os resultados obtidos a partir da lei de Ampère no exemplo 5 da aula 30, escrevemos

$$\vec{B}(t) = -\frac{\mu_0 N}{h} I(t) \hat{k}. \quad (38.4)$$

Este campo depende do tempo e, pela lei de Faraday, dá origem a um campo elétrico induzido  $\vec{E}_{\text{ind}}$ , que existe dentro do solenoide, fora dele e, também, sobre o próprio fio metálico que o constitui. Este fio está enrolado em forma de uma hélice, cujo passo é muito pequeno se comparado com a altura  $h$ . Por isso, para simplificar os cálculos, supomos que cada volta do fio do solenoide possa ser aproximada por uma espira circular fechada.

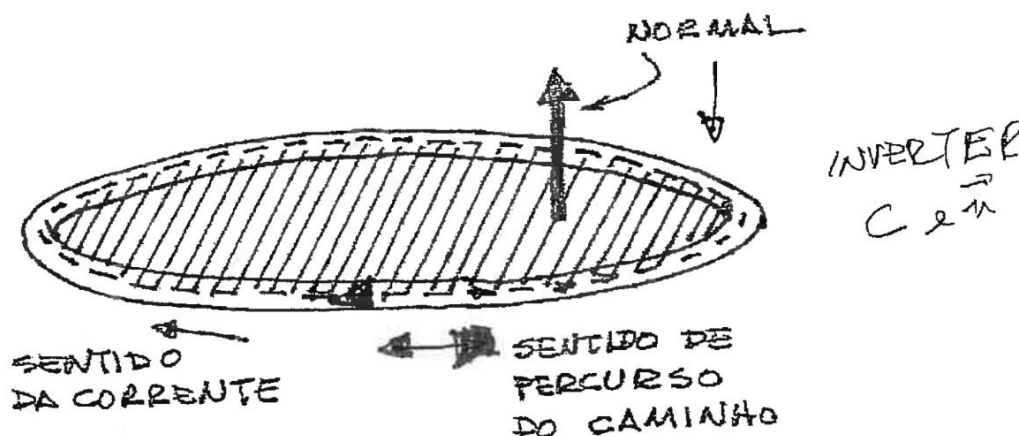


Figura 38.2: Uma espira do solenóide com os sentidos da corrente  $I$ , do caminho  $C$  e da normal à superfície orientada  $S$ .

Para calcular  $\vec{E}_{\text{ind}}$  sobre uma destas espiras, tomamos um caminho matemático  $C$  no interior do fio, orientado paralelamente à corrente, como indica a fig.38.2 e apoiamos sobre ele uma superfície matemática orientada  $S$ , cuja normal é  $\hat{n} = -\hat{k}$ . Usando o resultado (38.4), a lei de Faraday permite escrever

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{c} &= 2\pi a E_{\text{ind}} \\ &= - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot [-\hat{k}] dS = - \iint_S \left[ \frac{\mu_0 N}{h} \frac{dI}{dt} \right] dS = - \frac{\mu_0 N \pi a^2}{h} \frac{dI}{dt} \end{aligned} \quad (38.5)$$

e, portanto, a intensidade de  $\vec{E}_{\text{ind}}$  é

$$E_{\text{ind}} = - \frac{\mu_0 N a}{2h} \frac{dI}{dt}. \quad (38.6)$$

O sinal negativo nesta equação é importante e indica que o campo elétrico induzido é anti-paralelo ao caminho da fig.38.2. Assim, se não houvesse  $\vec{E}_{\text{ind}}$ , a corrente no fio naquele instante seria maior do que ela realmente é, pois  $\vec{E}_{\text{ind}}$  se opõe ao crescimento da corrente  $I$ . Este é o efeito da auto-indução, que corresponde a uma ação da corrente sobre ela mesma.

### • a fem induzida e a auto-indutância

O campo elétrico induzido pela variação da corrente dá origem a uma força eletromotriz induzida  $\mathcal{E}_{\text{ind}}$ , expressa por

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \oint_{C'} \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{c}, \quad (38.7)$$

sendo  $C'$  um caminho fechado que, em princípio, passa pelo interior do fio e da bateria. Entretanto, como o campo elétrico  $\vec{E}_{\text{ind}}$  é muito mais intenso na região do solenoide, a fem  $\mathcal{E}_{\text{ind}}$  pode ser aproximada usando o resultado (38.5) ao longo do trecho de fio que o constitui, cujo comprimento é  $\lambda$ , dado na eq.(38.2).

Assim,  $\mathcal{E}_{\text{ind}}$  corresponde a  $N$  vezes a contribuição de uma espira, dada pela eq.(38.5) e escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{ind}} &= N \oint_C \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{c}, \\ &= - \left[ \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{h} \right] \frac{dI}{dt}. \end{aligned} \quad (38.8)$$

O fator que multiplica  $dI/dt$  neste resultado depende apenas de  $\mu_0$  e de características geométricas do solenoide e representa a sua *auto-indutância*, que costuma ser designada pelo símbolo  $L$ . No SI, sua unidade é o henry, representado por H, sendo  $H=Vs/A$ . Assim, no caso do solenoide,

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt}, \quad (38.9)$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{h}. \quad (38.10)$$

### • a corrente

A corrente no circuito em um instante  $t > 0$  é determinada a partir da lei de Ohm macroscópica  $\mathcal{E} = RI$ , sendo  $R$  a resistência total do circuito e  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_b + \mathcal{E}_{\text{ind}}$ . Assim, a lei de Ohm macroscópica corresponde à equação diferencial de primeira ordem

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_b - L \frac{dI}{dt} = RI. \quad (38.11)$$

Este resultado é interessante porque mostra que  $I$  é linear com  $dI/dt$ . A corrente elétrica  $I$  no circuito é determinada pela solução desta equação, que pode ser reescrita como

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}_b}{L} - \frac{R}{L} I. \quad (38.12)$$

Para obter a sua solução, é conveniente usar provisoriamente uma nova variável  $Y = I - \mathcal{E}_b/R$ , que fornece

$$\frac{dY}{dt} = -\frac{R}{L} Y. \quad (38.13)$$

Nesta equação,  $dY/dt$  é proporcional a  $Y$  e a sua solução é a exponencial

$$Y = \gamma e^{-Rt/L}, \quad (38.14)$$

onde  $\gamma$  é uma constante arbitrária. Assim, a corrente  $I$  é escrita como

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_b}{R} + \gamma e^{-Rt/L}. \quad (38.15)$$

Esta é a solução mais geral possível da equação (38.12), sendo válida para qualquer valor da constante  $\gamma$ , sendo este fixado pelas condições iniciais do problema em questão. No presente caso, no instante  $t = 0$ , quando a chave é ligada, a corrente é nula. Impondo a condição  $I(0) = 0$  na eq.(38.15), temos

$$I(0) = \frac{\mathcal{E}_b}{R} + \gamma = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma = -\frac{\mathcal{E}_b}{R}. \quad (38.16)$$

Assim, a corrente no circuito em função do tempo é dada por

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_b}{R} \left[ 1 - e^{-Rt/L} \right]. \quad (38.17)$$

Para explicitar o conteúdo deste resultado, é conveniente reescrevê-la como

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_b}{R} - \frac{\mathcal{E}_b}{R} e^{-Rt/L}, \quad (38.18)$$

para tornar mais claro que a corrente  $I(t)$  envolve duas contribuições. A primeira delas é dada por  $\mathcal{E}_b/R$ , independe do tempo e corresponde à corrente  $I_c$  dada na eq.(38.3). Já a segunda é proporcional a uma exponencial, que decresce de 1 em  $t = 0$  até zero em  $t \rightarrow \infty$ . Este decréscimo é determinado pelo fator  $L/R$  presente no expoente, que tem dimensão de tempo. Na prática, a exponencial é importante apenas durante tempos da ordem de poucas unidades de  $L/R$ . Por exemplo, para  $t = 4L/R$ , temos  $\exp(-Rt/L) = \exp(-4) = 0.018$ , um valor que já é pequeno. Assim, as características do solenoide, incorporadas na indutância  $L$ , são relevantes para o funcionamento do circuito apenas para valores de  $t$  inferiores a  $\sim 10L/R$ . Para tempos mais longos, tudo se passa como se o solenoide não existisse. O fato de o tempo característico para o desaparecimento da exponencial depender de  $L$  indica que a auto-indução é responsável pelo tempo que a corrente no circuito leva para se estabilizar no valor  $I_c$ . Maior o  $L$ , maior a demora. E, no limite  $L \rightarrow 0$ , a estabilização seria instantânea. É importante notar que este tempo depende também de  $R$ , que representa a resistência de todo o circuito, incluindo a bateria, o solenoide e o fio externo a ele. Deste modo, o tempo característico de estabilização resulta de um compromisso entre o solenoide e o restante do circuito. O comportamento da corrente em função do tempo é mostrado na fig.38.3.

## • ordens de grandeza

Para termos uma ideia das ordens de grandeza das quantidades discutidas no exemplo anterior, consideramos o caso de um indutor cilíndrico com 2 cm de raio e 10 cm de altura, enrolado com 1.000 voltas de fio de cobre de seção transversal  $A$  de  $0,1 \text{ mm}^2$ , ligado a uma bateria com  $\mathcal{E}_b = 9 \text{ V}$  e resistência  $R_b = 4 \Omega$ . A resistividade do cobre a  $20^\circ \text{ C}$  é  $\rho = 1,7 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ . O

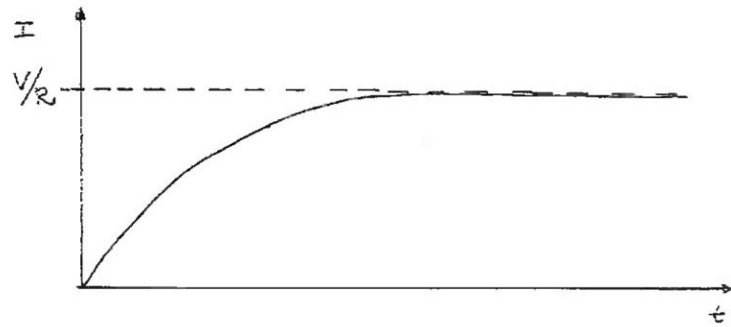


Figura 38.3: A corrente em função do tempo, com a chave fechada em  $t = 0$ .

comprimento da parte do fio que forma o solenoide é  $\lambda = N 2\pi a = 125,7$  m, o restante dele tem 1,3 m e, portanto, o seu comprimento total é  $\ell = 127$  m. A resistência  $R_f = \rho \ell / A = 21,6 \Omega$ , somada à da bateria corresponde a um valor total  $R = 25,6 \Omega$ . O valor de  $L$ , obtido a partir da eq.(38.10), usando o valor de  $\mu_0$  do apêndice XXX, é  $L = 1,58 \times 10^{-2}$  H. A escala típica de tempo deste problema é dada pela razão  $L/R$ , que vale  $0,62 \times 10^{-3}$  s. Assim, já para tempos da ordem de poucos milésimos de segundo, a corrente é muito próxima do valor assintótico  $I = \mathcal{E}_b / R = 9 / 25,6 = 0,35$  A.

### • desconectando a bateria

Considere o circuito mostrado na fig.38.4, formado pelo mesmo solenoide e mesma bateria considerados anteriormente. A novidade é que, agora, a chave  $c$  permite que o solenoide seja desconectado da bateria e, no mesmo instante, conectado a um resistor de resistência  $R_r$ .

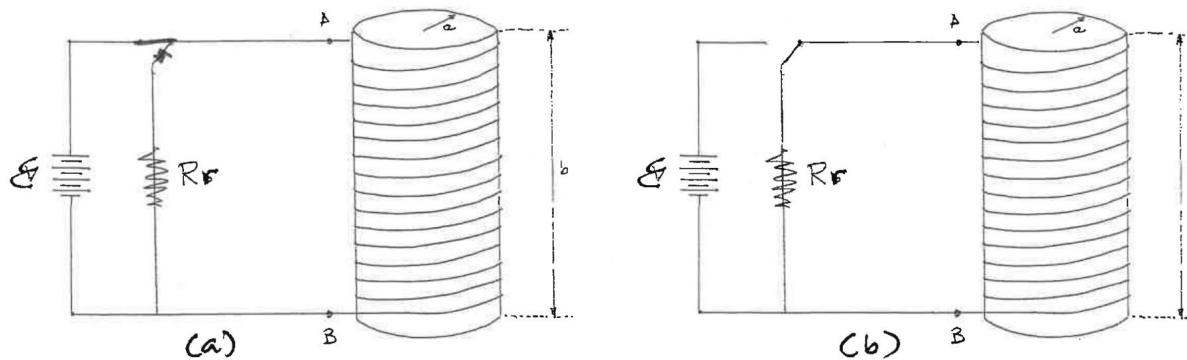


Figura 38.4: Indutor conectado: (a) à bateria; (b) ao resistor.

A bateria é ligada ao solenoide em  $t = 0$  e, em  $t = T$ , a corrente que percorre o circuito, obtida a partir da eq.(38.17), é dada por

$$I(T) = \frac{\mathcal{E}_b}{R} \left[ 1 - e^{-RT/L} \right]. \quad (38.19)$$

No instante  $t = T$  acionamos a chave, desconectamos a bateria, conectamos o resistor ao solenoide e, para  $t > T$ , a resistência muda de  $R = R_b + R_f$  para  $R' = R_r + R_f$  e a corrente no



sistema passa a ser determinada pela lei de Ohm na forma

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt} = R' I . \quad (38.20)$$

O mesmo procedimento adotado anteriormente determina a solução geral desta equação diferencial, dada por

$$I(t \geq T) = \eta e^{-R' t/L} , \quad (38.21)$$

sendo  $\eta$  uma constante arbitrária. Para fixá-la, impomos que a eq.(38.19) deve ser igual à (39.21) em  $t = T$ , obtemos

$$\eta = \frac{\mathcal{E}_b}{R} \left[ 1 - e^{-RT/L} \right] e^{R' T/L} \quad (38.22)$$

e, portanto,

$$I(t \geq T) = \frac{\mathcal{E}_b}{R} \left[ 1 - e^{-RT/L} \right] e^{-R' (t-T)/L} . \quad (38.23)$$

Este resultado indica que, depois que a bateria é desconectada, a corrente tende a zero exponencialmente. Aqui também, a escala de tempo para o desaparecimento da corrente é determinada pelo fator  $L/R'$ , presente no expoente. O comportamento da corrente em função do tempo, no intervalo  $0 \leq t < \infty$ , é mostrado na fig.38.5 (a).

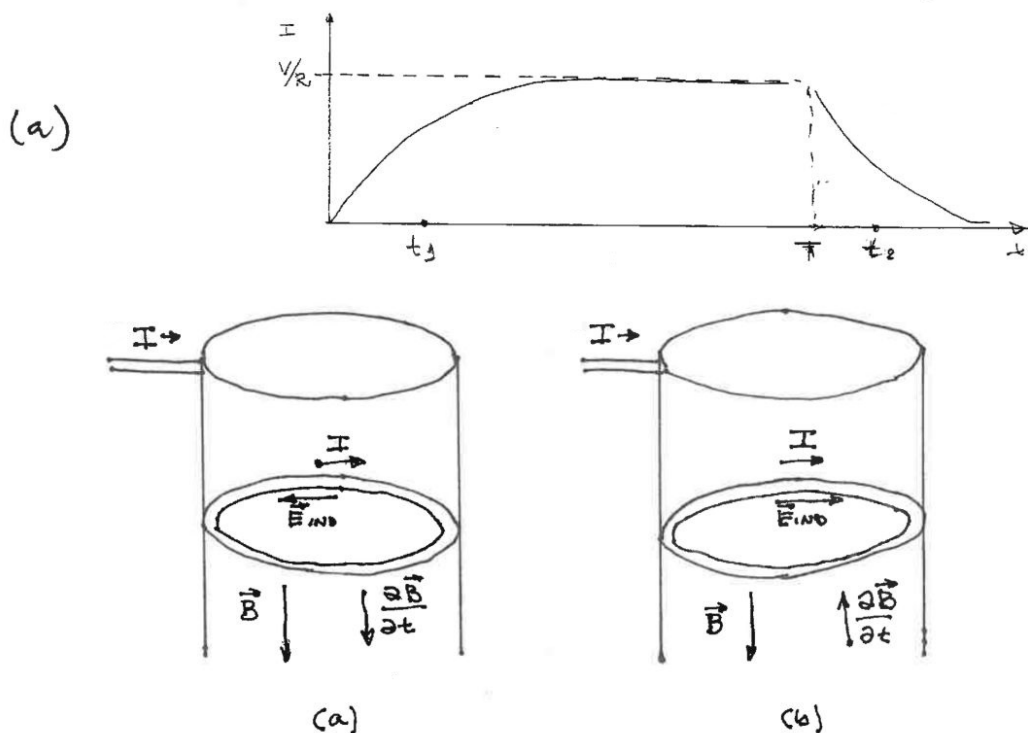


Figura 38.5: (a) A corrente em função do tempo; (b) correntes e campos nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ .

Na fig.38.5 (b), mostramos as características da corrente  $I(t)$  e do campo magnético  $\vec{B}(t)$  nos instantes  $t_1$  e  $t_2$  da figura (a). Nestes dois instantes, as correntes, dadas por

$$I(t_1) = \frac{\mathcal{E}_b}{R} \left[ 1 - e^{-Rt_1/L} \right], \quad (38.24)$$

$$I(t_2) = \frac{\mathcal{E}_b}{R} \left[ 1 - e^{-RT/L} \right] e^{-R'(t_2-T)/L}, \quad (38.25)$$

têm o mesmo sentido e os campos  $\vec{B}(t_1)$  e  $\vec{B}(t_2)$  são paralelos. Entretanto, o mesmo não acontece com as derivadas destas grandezas. No caso das correntes,

$$\frac{dI(t_1)}{dt} = \frac{\mathcal{E}_b}{L} e^{-Rt_1/L}, \quad (38.26)$$

$$\frac{dI(t_2)}{dt} = -\frac{\mathcal{E}_b}{L} e^{-R'(t_2-T)/L}. \quad (38.27)$$

Como em  $t_1$ ,  $dI/dt$  tem o mesmo sentido de  $I$  e  $\partial\vec{B}/\partial t$  é paralelo a  $\vec{B}$ , o campo  $\vec{E}_{\text{ind}}$  é contrário à corrente e atrapalha o seu crescimento. Já em  $t_2$ ,  $dI/dt$  tem sentido contrário a  $I$  e  $\partial\vec{B}/\partial t$  é antiparalelo a  $\vec{B}$ , fazendo com que  $\vec{E}_{\text{ind}}$  seja favorável à corrente e contribua para a sua manutenção. Esta característica repercute na forma da fem induzida, dada por

$$\mathcal{E}_{\text{ind}}(t_1) = \mathcal{E}_b e^{-Rt/L}, \quad (38.28)$$

$$\mathcal{E}_{\text{ind}}(t_2) = -\mathcal{E}_b e^{-R'(t-T)/L}. \quad (38.29)$$

sendo explicitada pela mudança de sinal de um caso para o outro. É interessante notar que, nos instantes  $t = 0$  em que a bateria é introduzida e  $t = T$ , quando ela é desconectada, temos  $\mathcal{E}_{\text{ind}}(t = 0) = \mathcal{E}_b$  e  $\mathcal{E}_{\text{ind}}(t = T) = -\mathcal{E}_b$ .

## • auto-indutância e inércia

A discussão precedente, apesar de centrada em um solenoide particular, tem características muito gerais, pois a auto-indução é um fenômeno que está presente em qualquer circuito onde existe uma corrente que varia com o tempo. Ela é particularmente importante nos circuitos elétricos que são abertos ou fechados e, também, nos alimentados por fontes de tensão variável com o tempo.

A auto-indução é devida ao seguinte encadeamento de efeitos:

- se, em um circuito, existe uma corrente elétrica  $I(t)$  que varia com o tempo, ela cria um campo magnético  $\vec{B}(t)$ ;
- o campo  $\vec{B}(t)$ , por variar com o tempo dá origem, pela lei de Faraday, a um campo elétrico  $\vec{E}_{\text{ind}}$  em todo o espaço, proporcional a  $dI/dt$ ;
- o condutor pelo qual a corrente passa fica imerso no campo  $\vec{E}_{\text{ind}}$  que, juntamente com outros campos, passa a influenciar a corrente  $I(t)$ , por meio da lei de Ohm.

Deste modo, a corrente  $I(t)$  influencia a si mesma. É importante notar que esta seqüência de efeitos é lógica e não, cronológica. Com isso, queremos dizer que ela representa apenas um

modo de descrever o que acontece e não, uma sucessão temporal de eventos, já que todos os efeitos mencionados ocorrem simultaneamente.

O campo  $\vec{E}_{\text{ind}}$  sempre se opõe à variação  $dI/dt$  da corrente, seja  $dI/dt > 0$  ou  $dI/dt < 0$ , e está diretamente relacionado à fem  $\mathcal{E}_{\text{ind}}$ . É por isso que esta é escrita como

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt}, \quad (38.30)$$

envolvendo um sinal negativo explícito, sendo a auto-indutância  $L$  uma constante de proporcionalidade. No estudo de circuitos elétricos, a auto-indutância é associada a um elemento conhecido como *indutor* e representada pelo símbolo mostrado na fig.38.6.



Figura 38.6: O símbolo do indutor em circuitos.

A auto-indução está presente em qualquer tipo de circuito, sendo que é apenas o valor de  $L$  que se altera de um caso a outro. Nenhum circuito aceita mudanças de corrente instantâneas. Variações de correntes levam tempos característicos para ocorrer, que são proporcionais a  $L$ . Maior o  $L$ , maior o tempo que a corrente leva para *variar*, tanto para aumentar como para diminuir. Este comportamento evidencia uma semelhança entre  $L$  e a massa  $m$  de um corpo, que é associada à sua inércia.

Os efeitos da auto-indução assumem muitas faces. Uma delas se manifesta quando abrimos chaves. Considere novamente o circuito mostrado na fig.38.1. Ao fecharmos a chave, o comportamento da corrente é o dado na fig.38.3. O que acontece, naquele circuito, quando a chave é aberta depois de algum tempo? Esta situação parece ser contraditória pois, se a auto-indução obriga a corrente a continuar fluindo no mesmo sentido, existe um hiato no condutor que impede o transporte de elétrons livres por meio do metal. O que acontece neste caso é que a corrente continua de fato a fluir, só que na forma de uma faísca que salta pelo ar na região do vão metálico. Este tipo de faísca pode ser observada em interruptores domésticos, quando ligamos ou desligamos computadores da tomada e, principalmente, quando acionamos a chave geral de uma casa.

## • exercícios

1. Este é um teste para a sua intuição. Considere o solenoide descrito no exemplo 1. Sem consultar as expressões matemáticas, como varia o tempo para que a corrente  $I_c = \mathcal{E}_b/R$  seja atingida, quando

- o raio do solenoide é dobrado?
- o raio do fio é dobrado?
- a altura do solenoide é dobrada?

2. Considere o processo descrito na fig.38.5 e:

- a) determine a função  $\mathcal{E}_{\text{ind}}(t)$ , no intervalo  $-\infty < t < \infty$ ;  
 b) esboce um gráfico de  $\mathcal{E}_{\text{ind}}(t)$  em função de  $t$ .
- 3.** Considere o gráfico da função  $I(t)$  da corrente de um circuito contendo um solenoide, mostrado na fig.38.3. Quais seriam as mudanças naquele gráfico quando
- a) a auto-indutância  $L$  é dobrada?  
 b) E, em seguida, a resistência  $R$  também é dobrada?
- 4.** Na aula 36 mostramos que o movimento relativo entre um fio retilíneo e uma espira quadrada produz correntes  $I'$  nela. Naquela abordagem, o efeito da auto-indução da espira foi ignorado. Discuta qualitativamente o que acontece com a corrente na espira quando este efeito é considerado.

• **respostas**

**2.** a)  $\mathcal{E}_{\text{ind}} = 0$ , para  $t \leq 0$ ;  $\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\mathcal{E}_b e^{-Rt/L}$ , para  $0 \leq t \leq T$ ;  
 $\mathcal{E}_{\text{ind}} = \mathcal{E}_b [1 - e^{-RT/L}] e^{-R'(t-T)/L}$ , para  $t \geq T$ .

# Capítulo 39

## auto-indução - campos...

### • introdução

A auto-indução é um fenômeno muito importante que, na aula anterior, foi estudado por meio de forças eletromotrizes e da lei de Ohm macroscópica. Nesta aula, aprofundamos aquela discussão, enfatizando o papel dos campos elétricos. Esta abordagem, que não é muito comum, permite entender como a influência de um indutor não fica restrita à região onde ele está e pode se estender a pontos mais distantes de um circuito. Para fixar ideias, retomamos o caso do solenóide cilíndrico da aula anterior.

### • o campo resultante no interior do fio

Consideramos novamente o circuito da aula anterior, formado por uma bateria e um solenóide cilíndrico, ligados por um fio contendo uma chave, mostrado na fig.39.1.

No estudo dos campos elétricos, é mais conveniente descrever as propriedades da bateria pela diferença de potencial  $V_b$  entre os seus polos ao invés da fem  $\mathcal{E}_b$ . Quando a chave está aberta, vale a relação  $V_b = \mathcal{E}_b$  e, quando ela está fechada, temos

$$V_b = \frac{R_f}{R} \mathcal{E}_b . \quad (39.1)$$

A corrente neste circuito, obtida na aula anterior, pode ser escrita como

$$I(t) = 0 \quad \text{para } t \leq 0 , \quad (39.2)$$

$$I(t) = \frac{V_b}{R_f} \left[ 1 - e^{-Rt/L} \right] \quad \text{para } t \geq 0 . \quad (39.3)$$

Quando correntes fluem através de circuitos elétricos, não ocorrem acúmulos espontâneos de cargas de sinais opostos no seu interior. Segundo a equação da continuidade, esta ideia determina

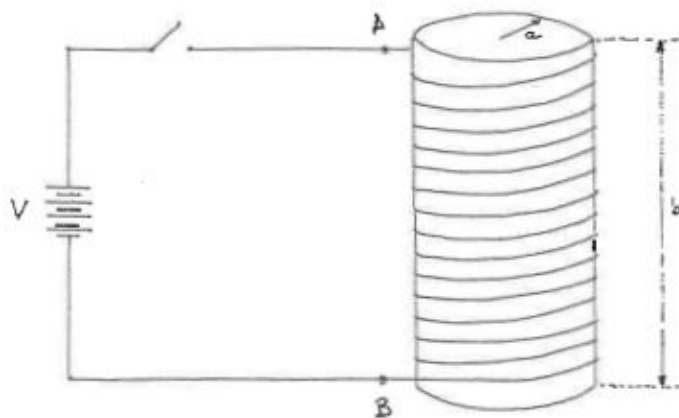


Figura 39.1: Um solenóide cilíndrico acoplado a uma bateria; pelos pontos A e B passa um plano matemático que divide o circuito em duas regiões.

que a corrente elétrica deve ser a mesma em todas as seções transversais do condutor que forma o circuito. Para descrever esta característica espacial da corrente usamos a palavra uniforme. Assim, os resultados (39.2) e (39.3) descrevem correntes uniformes sobre o circuito, mas não, constantes no tempo.

Se conhecermos a corrente em um circuito, podemos obter o valor do campo elétrico resultante  $\vec{E}$  no interior do condutor metálico usando a lei de Ohm microscópica. Como, neste caso, a seção transversal A do fio não varia de um ponto a outro, o módulo da densidade de corrente,

$$|\vec{j}(t)| = \frac{I(t)}{A}, \quad (39.4)$$

é uniforme sobre o fio. Já a lei de Ohm microscópica afirma que, em cada ponto, vale a relação,

$$\vec{j}(t) = \frac{\vec{E}(t)}{\rho}, \quad (39.5)$$

onde  $\vec{E}(t)$  é o campo resultante. Assim, a equação da continuidade e a lei de Ohm permitem afirmar que

$$|\vec{E}(t)| = \frac{\rho I(t)}{A}. \quad (39.6)$$

Usando as eqs.(39.2), (39.3) e  $R_f = \rho \ell / A$ , obtemos

$$|\vec{E}(t)| = 0 \quad \text{para } t \leq 0, \quad (39.7)$$

$$|\vec{E}(t)| = \frac{V_b}{\ell} [1 - e^{-Rt/L}] \quad \text{para } t \geq 0. \quad (39.8)$$

Estes resultados se aplicam a qualquer ponto do interior do condutor metálico. É importante ressaltar que esta afirmação só vale para  $|\vec{E}(t)|$ , já que o vetor  $\vec{E}(t)$  resultante é sempre paralelo a  $\vec{j}(t)$  e alinhado ao fio. Consequentemente, sua direção e sentido mudam de ponto a ponto.

Os resultados (39.7) e (39.8) permitem conhecer o campo resultante em função do tempo. Para prosseguir, precisamos determinar a contribuição do campo elétrico induzido  $\vec{E}_{\text{ind}}$  a este campo resultante. Por isso, na sequência, discriminamos as origens das várias componentes dos campos elétricos.

### • campos em $t \leq 0$

A diferença de potencial  $V_b$  entre os seus polos da bateria está associada a um campo  $\vec{E}_b$ , que existe em todo o espaço, tanto fora quanto dentro dos condutores metálicos. Um dos efeitos de  $\vec{E}_b$  é produzir acúmulos de cargas nas superfícies externas do condutor metálico, que criam um campo  $\vec{E}_q$ , também eletrostático. Devido à existência de pontas metálicas na chave, o campo  $\vec{E}_q$  é particularmente intenso nas suas proximidades. Os campos  $\vec{E}_b$  e  $\vec{E}_q$  são eletrostáticos e se superpõem em todo o espaço.

Com a chave aberta, esta superposição tem características muito particulares na região interna ao fio. De fato, o campo resultante  $\vec{E} = \vec{E}_b + \vec{E}_q = 0$  em qualquer ponto do interior do condutor metálico e, por isso, não há corrente no circuito. Quando a chave é fechada, as cargas na superfície do fio, em especial as próximas às pontas abertas da chave, se redistribuem muito rapidamente, o campo  $\vec{E}_q$  se altera e passa a existir uma corrente  $I(t)$ , dada pela eq.(39.3), que ainda é nula em  $t = 0$ .

### • campos em $t \rightarrow \infty$

Com a chave fechada, o módulo do campo no interior do fio é dado pela expressão (39.8), que envolve a soma de dois termos com dependências temporais e significados diferentes. A contribuição da auto-indução decresce exponencialmente com o tempo e, para  $t \rightarrow \infty$ , o campo torna-se constante,  $|\vec{E}| \rightarrow E_c$ . Este campo constante é determinado pelas contribuições  $\vec{E}_b$ , da bateria e  $\vec{E}_q$ , das cargas acumuladas na superfície do condutor e, em cada ponto,  $\vec{E}_c = \vec{E}_b + \vec{E}_q$  é paralelo a  $\vec{E}$ . Para tempos grandes, ele é responsável pela existência de uma corrente constante  $I_c = \mathcal{E}_b/R = V_b/R_f$  no circuito.

### • o campo $\vec{E}_{\text{ind}}$

A estrutura da parte dependente do tempo do campo  $\vec{E}(t)$  é o foco desta discussão. Esta componente representa um efeito efêmero, devido à auto-indução e tem sentido oposto ao campo resultante  $\vec{E}$ , como indica o sinal negativo na eq.(39.8). Ele é o mais intenso possível em  $t = 0$ , quando a chave é fechada e, a partir daí, decresce exponencialmente. O solenóide tem papel especial nesta discussão e, por isso, é conveniente cortar a fig.39.1 por um plano matemático passando pelos pontos A e B, e chamar de região 1 a parte da esquerda, que inclui a bateria, a chave e os trechos retilíneos de fio e de região 2 a da direita, que contém o solenóide.

O tratamento do solenóide cilíndrico da aula anterior foi baseado na suposição, bastante razoável, de que o campo magnético  $\vec{B}$  no seu interior é muito maior do que na região externa e, para simplificar a discussão, este foi desprezado. Com esta aproximação, o campo magnético fica confinado à região 2. Entretanto, o mesmo não acontece com o campo elétrico  $\vec{E}_{\text{ind}}$ , induzido por  $\partial\vec{B}/\partial t$ , que existe em todo o espaço: dentro do solenóide, sobre as suas espiras metálicas e, também, fora dele. Em todos estes casos, as linhas de campo são circunferências, com centro no eixo do solenóide.

Os efeitos de  $\vec{E}_{\text{ind}}$  sobre a corrente nas regiões 1 e 2 são muito diferentes. Na região 2, o campo  $\vec{E}_{\text{ind}}$  no interior do condutor, tem direção paralela ao fio, sentido contrário à corrente, módulo

$$|\vec{E}_{\text{ind}}| = \frac{\mu_0 N a}{2h} \frac{dI}{dt}, \quad (39.9)$$

e, como discutimos na aula anterior, sua influência sobre o funcionamento do circuito é determinante. Já na região 1, as linhas deste campo, que cruzam os condutores metálicos obliquamente, tendem a produzir acúmulos de cargas sobre as suas superfícies externas e não influenciam significativamente a corrente. Por isso, nesta região, os efeitos devidos a  $\vec{E}_{\text{ind}}$  são incorporados a  $\vec{E}_q$ .

Esta é uma característica geral. Em um sistema no qual o campo magnético está bastante concentrado no interior de um solenóide, a influência do campo elétrico induzido  $\vec{E}_{\text{ind}}$  sobre a corrente é importante apenas nas partes do fio que constituem as suas espiras e não, nas demais.

### • uma aparente contradição

Segundo a discussão anterior, o campo  $\vec{E}_{\text{ind}}$  influencia o comportamento da corrente  $I(t)$ , dada pela eq.(39.3), apenas na região 2. Por outro lado, de acordo com a equação da continuidade, esta corrente é uniforme sobre todo o circuito e, portanto, em cada instante, deve ser a mesma nos condutores das regiões 1 e 2.

A consistência entre estas duas afirmações decorre de um mecanismo interessante. Quando um indutor está presente em um circuito, a variação de  $\vec{B}$  no seu interior é acompanhada por um pequeno, mas importante, acúmulo de cargas na seção transversal do condutor nas vizinhanças dos pontos A e B. Como mostramos adiante, estas cargas são positivas em A e negativas em B e, por isso, correspondem a um dipolo elétrico. Deste modo, o campo  $\vec{E}_{\text{dip}}$  que elas criam está distribuído em todo o espaço, tanto fora como dentro dos condutores. Se considerarmos as cargas como eletrostáticas, podemos também atribuir a elas uma diferença de potencial  $V_{BA}$  entre os pontos A e B.

Por este motivo, os acúmulos de carga  $+q_{\text{dip}}(t)$  em A e  $-q_{\text{dip}}(t)$  em B simulam os efeitos de uma bateria de tensão variável, que tende a diminuir a corrente na região 1 e a aumentá-la na região 2. É este mecanismo que permite que a corrente seja uniforme em todo o circuito.

### • os campos durante a auto-indução

O processo de auto-indução é mais importante logo após o fechamento da chave. No interior dos condutores da região 1, temos

$$\vec{E}_1(t) = \left[ \vec{E}_b + \vec{E}_q + \vec{E}_{\text{dip}} \right]_1, \quad (39.10)$$

sendo  $\vec{E}_b$  o campo produzido pela bateria,  $\vec{E}_q$  devido às cargas acumuladas na superfície externa e  $\vec{E}_{\text{dip}}$  a contribuição do dipolo. Na região 2, no interior do fio do solenóide, além destas contribuições, existe o campo induzido  $\vec{E}_{\text{ind}}$  e escrevemos

$$\begin{aligned} \vec{E}_2(t) &= \left[ \vec{E}_b + \vec{E}_q + \vec{E}_{\text{dip}} + \vec{E}_{\text{ind}} \right]_2 \\ &= \left[ \vec{E}_b + \vec{E}_q + \vec{E}_{\text{dip}} \right]_2 + \vec{E}_{\text{ind}} \end{aligned} \quad (39.11)$$



A uniformidade da corrente no circuito e a lei de Ohm garantem que o módulo do campo elétrico  $\vec{E}(t)$ , dado pela eq.(39.8) é o mesmo em qualquer ponto do interior do fio. Como  $\vec{E}_{\text{ind}}$  é antiparalelo a  $\vec{E}_2$  podemos escrever

$$|\vec{E}_b + \vec{E}_q + \vec{E}_{\text{dip}}|_1 = \frac{V_b}{\ell} \left[ 1 - e^{-Rt/L} \right], \quad (39.12)$$

$$|\vec{E}_b + \vec{E}_q + \vec{E}_{\text{dip}}|_2 - |\vec{E}_{\text{ind}}| = \frac{V_b}{\ell} \left[ 1 - e^{-Rt/L} \right]. \quad (39.13)$$

As eqs.(39.9) e (39.3) permitem escrever  $|\vec{E}_{\text{ind}}|$  como

$$|\vec{E}_{\text{ind}}| = \frac{\mu_0 N a V_b R}{2 h L R_f} e^{-Rt/L} = \frac{V_b}{\ell} \left( \frac{\ell R}{\lambda R_f} e^{-Rt/L} \right), \quad (39.14)$$

onde usamos o resultado  $L = \mu_0 N^2 \pi a^2 / h$  dado em (38.10) e o comprimento do fio no solenóide  $\lambda = N 2\pi a$ . Assim, a eq.(39.13) fornece

$$|\vec{E}_b + \vec{E}_q + \vec{E}_{\text{dip}}|_2 = \frac{V_b}{\ell} \left[ 1 + \left( \frac{\ell R}{\lambda R_f} - 1 \right) e^{-Rt/L} \right]. \quad (39.15)$$

Observe que, nesta expressão,  $\ell R / \lambda R_f > 1$ . Comparando este resultado com a eq.(39.13), aprendemos que a combinação de campos  $\vec{E}_b + \vec{E}_q + \vec{E}_{\text{dip}}$  é descontínua na interface entre as regiões 1 e 2, indicando a existência de uma distribuição de cargas em torno do ponto A.

## • as densidades superficiais de carga

A densidade de carga  $\sigma_A$  na interface entre as duas regiões é determinada por meio da lei de Gauss elétrica. Para tratar o problema formalmente, é conveniente definir um versor  $\hat{u}$ , paralelo à densidade de corrente  $\vec{j}$  nas vizinhanças do ponto A, para que o caráter vetorial dos resultados (39.12) e (39.15) seja explicitado e escrevemos

$$\left( \vec{E}_b + \vec{E}_q + \vec{E}_{\text{dip}} \right)_1 = \frac{V_b}{\ell} \left[ 1 - e^{-Rt/L} \right] \hat{u}, \quad (39.16)$$

$$\left( \vec{E}_b + \vec{E}_q + \vec{E}_{\text{dip}} \right)_2 = \frac{V_b}{\ell} \left[ 1 + \left( \frac{\ell R}{\lambda R_f} - 1 \right) e^{-Rt/L} \right] \hat{u}. \quad (39.17)$$

Aplicando a lei de Gauss sobre uma superfície fechada  $S$ , envolvendo a distribuição de cargas, mostrada na fig.39.2, e lembrando que as normais a ela nas regiões 1 e 2 são, respectivamente,  $\hat{n}_1 = -\hat{u}$  e  $\hat{n}_2 = \hat{u}$ , escrevemos

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS &= \left\{ -|\vec{E}_b + \vec{E}_q + \vec{E}_{\text{dip}}|_1 + |\vec{E}_b + \vec{E}_q + \vec{E}_{\text{dip}}|_2 \right\} S \\ &= \left\{ \frac{V_b R}{\lambda R_f} e^{-Rt/L} \right\} S = \frac{\sigma_A S}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (39.18)$$

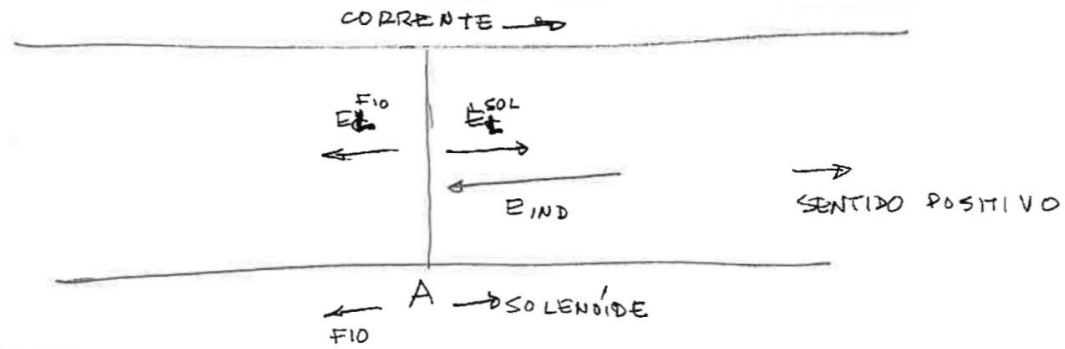


Figura 39.2: O fio em torno do ponto A e os campos no seu interior, nas regiões 1 e 2.

Assim, obtemos uma densidade positiva, dada por

$$\sigma_A = \epsilon_0 \frac{V_b R}{\lambda R_f} e^{-Rt/L}. \quad (39.19)$$

Usando a eq.(39.14), podemos também escrever

$$\sigma_A = \epsilon_0 E_{\text{ind}}. \quad (39.20)$$

Este último resultado é muito interessante pois, nas proximidades da interface, os campos  $\vec{E}_\sigma$  criados por esta distribuição de carga são dados por

$$\vec{E}_\sigma = -\frac{E_{\text{ind}}}{2} \hat{u}, \quad \text{na região 1,} \quad (39.21)$$

$$\vec{E}_\sigma = +\frac{E_{\text{ind}}}{2} \hat{u}, \quad \text{na região 2.} \quad (39.22)$$

Como na região 2 existe um  $\vec{E}_{\text{ind}} = -E_{\text{ind}} \hat{u}$  o efeito global da indução na interface, dado pelo campo e pela densidade de carga, é contínuo sobre a interface.

Para o ponto B, o mesmo tipo de cálculo fornece  $\sigma_A = -\sigma_B$ , como esperado em um fio neutro. Como as cargas nos pontos A e B, são iguais e opostas, na junção do solenóide com o fio aparece um dipolo elétrico, cuja carga depende do tempo. Este dipolo está disposto em paralelo com a bateria e, por isso, ele tende a boicotar o efeito dela, enfraquecendo as correntes. As cargas presentes neste dipolo são grandes no instante inicial, fazendo com que a corrente no circuito seja nula, e diminuem à medida que o tempo avança, permitindo que a corrente aumente gradativamente. Depois de um tempo grande, o dipolo induzido desaparece e a corrente se estabiliza no valor  $I_c = V_b/R_f$ .

## • circuitos

Até este momento do curso, falamos de resistores, baterias, capacitores e indutores, discutindo isoladamente as características de cada um destes elementos. Entretanto, circuitos formados pela

junção de vários deles em configurações diferentes têm grande importância prática e, por isso, é necessário conhecer as equações que determinam os comportamentos de cargas e correntes no seu interior. O circuito mais simples que envolve todos os quatro elementos mencionados é o conhecido como RLC em série, mostrado na fig.39.3, e o seu funcionamento é discutido em detalhe na segunda parte do texto.

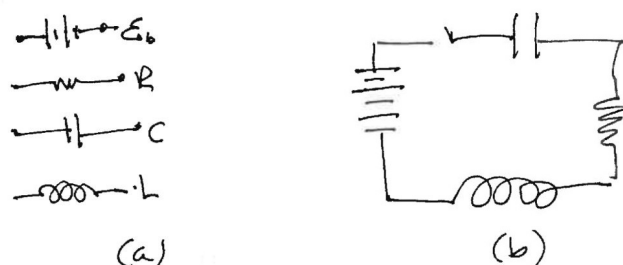


Figura 39.3: (a) Os elementos do circuito; (b) o circuito RLC.

Nós, aqui, tratamos apenas de uma importante questão preliminar. Numa situação como a da figura, mesmo antes de a chave ser fechada, a influência da bateria já se estende sobre todo o circuito, devido às cargas acumuladas nos seus polos. Isto provoca o acúmulo de cargas nas superfícies externas dos condutores, incluindo as placas do capacitor e as pontas abertas da chave. Cada uma destas cargas cria um campo elétrico em toda a região onde está o circuito, exercendo forças sobre todas as demais. O resultado deste complexo jogo de interações é fazer com que o campo elétrico resultante seja nulo em todos os pontos internos dos condutores metálicos e, conseqüentemente, que não haja corrente.

Quando a chave é fechada, as distribuições de cargas existentes em suas pontas desaparecem e passa a haver corrente no circuito. Simultaneamente, a resistência dificulta a sua circulação, cargas de sinais opostos se acumulam nas superfícies internas do capacitor e a auto-indução opera no indutor. Com isso, estes elementos tornam-se ativos, passando a influenciar todo o circuito. No caso do capacitor, isso acontece porque as cargas de sinais opostos existentes nas suas placas criam campo elétrico tanto no vão entre elas como nas demais regiões do espaço, devido aos efeitos de borda. No caso do indutor, são as densidades de carga de sinais opostos existentes nas suas extremidades que distribuem a sua influência por todo o espaço, por meio de campos elétricos. Assim, em um circuito, todos os elementos contribuem simultaneamente, por meio de interações elétricas para o comportamento da corrente.

## • exercícios

1. Faça um gráfico das intensidades dos campos elétricos da bateria  $\vec{E}_b$  e induzido no interior do fio  $\vec{E}_{ind}$ , em função do tempo, para a situação representada na fig.39.1. Interprete os seus resultados para  $t \sim 0$  e  $t \rightarrow \infty$ .



# Capítulo 40

## energia do campo magnético

### • introdução

Em qualquer circuito alimentado por uma bateria, é ela que fornece energia ao sistema. Entretanto, o destino desta energia depende dos componentes do circuito. Se ele é formado apenas por um resistor, toda a energia fornecida pela bateria é dissipada na forma de calor, por efeito Joule. Se, além do resistor, houver um indutor no circuito, parte da energia fornecida pela bateria fica acumulada no sistema. Isto acontece porque, no processo de auto-indução, quando há corrente  $I$  em um condutor, pela lei de Ampère,  $I \rightarrow \vec{B}$  e, portanto,  $dI/dt \rightarrow \partial\vec{B}/\partial t$ ; pela lei de Faraday,  $\partial\vec{B}/\partial t$  gera  $\vec{E}_{\text{ind}}$ . Este campo dá origem a uma força  $\vec{f} = -e\vec{E}_{\text{ind}}$ , que age sobre cada elétron livre do condutor e realiza trabalho, modificando a energia do sistema. Nesta aula, discutimos a relação entre auto-indução e energia.

### • balanço energético

O balanço energético de um circuito percorrido por uma corrente, no qual a auto-indução é importante, envolve vários tipos de energia. Para discutir este balanço, retomamos o caso tratado na aula 38, formado por um fio de comprimento  $\ell$ , seção transversal  $A$  e resistividade  $\rho$ , parte do qual é enrolado para formar um solenoide cilíndrico de raio  $a$ , altura  $h$ , com  $N$  espiras, alimentado por uma bateria de fem  $\mathcal{E}_b$  e resistência interna  $R_b$ , mostrado novamente na fig.40.1.

A partir do instante em que a chave é fechada, o campo elétrico  $\vec{E}_b$  da bateria, juntamente com o campo  $\vec{E}_q$  das cargas acumuladas nas superfícies metálicas, causa forças sobre os elétrons livres do condutor, fazendo com que eles se movam e, conseqüentemente, há realização de trabalho. Com esta corrente, passa a existir um campo magnético  $\vec{B}$ , que não existia anteriormente. Deste modo, o fechamento da chave acarreta, necessariamente, um  $\partial\vec{B}/\partial t$  não nulo, que dá origem a um campo elétrico induzido  $\vec{E}_{\text{ind}}$ . Este campo também atua sobre os elétrons livres, boicotando o crescimento da corrente e realizando trabalho. Por isso, neste circuito, além da dissipação de energia por efeito Joule, há, ainda, uma energia associada à auto-indução.

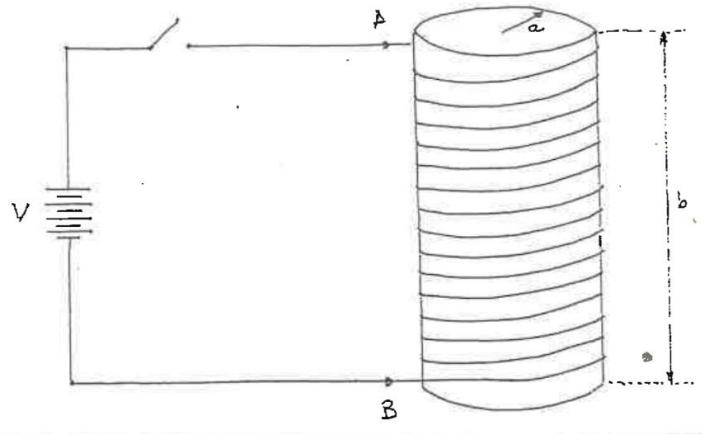


Figura 40.1: Indutor conectado a uma bateria.

Para estudar este encadeamento complexo de efeitos, dividimos a discussão sobre o que acontece com o fluxo de energia no circuito ao longo do tempo em duas partes. Inicialmente, mostramos que a energia fornecida pela bateria durante um certo tempo é maior do que aquela dissipada por efeito Joule. Em seguida, discutimos a energia associada à auto-indutância.

• **a bateria e o resistor**

Considerando que a chave tenha sido fechada no instante  $t = 0$ , a corrente que percorre o circuito em um instante posterior  $T$  é dada por (38.17) [[[38.17)]]]

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_b}{R} \left( 1 - e^{-Rt/L} \right), \quad (40.1)$$

onde  $R$  é a sua resistência total e  $L$ , a auto-indutância do solenoide. Para calcular a energia  $U_b$  que a bateria fornece ao sistema entre os instantes  $t = 0$  e  $T$ , partimos da expressão da potência instantânea

$$P_b(t) = \mathcal{E}_b I(t) \quad (40.2)$$

e escrevemos

$$\begin{aligned} U_b &= \int_0^T dt P_b(t) = \int_0^T dt \mathcal{E}_b I(t) \\ &= \int_0^T dt \frac{\mathcal{E}_b^2}{R} \left( 1 - e^{-Rt/L} \right) = \frac{\mathcal{E}_b^2}{R} \left[ t + \frac{L}{R} e^{-Rt/L} \right] \Big|_0^T \\ &= \frac{\mathcal{E}_b^2}{R} \left[ T + \frac{L}{R} \left( e^{-RT/L} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (40.3)$$

Já a potência dissipada por efeito Joule no resistor é

$$P_R(t) = RI(t)^2 \quad (40.4)$$

e a energia correspondente entre os instantes 0 e  $T$  vale

$$\begin{aligned}
 U_R &= \int_0^T dt P_R(t) = \int_0^T dt R \frac{\mathcal{E}_b^2}{R^2} (1 - e^{-Rt/L})^2 \\
 &= \frac{\mathcal{E}_b^2}{R} \left[ t + \frac{L}{R} \left( 2e^{-Rt/L} - \frac{e^{-2Rt/L}}{2} \right) \right] \Big|_0^T \\
 &= \frac{\mathcal{E}_b^2}{R} \left[ T + \frac{L}{R} \left( 2e^{-RT/L} - \frac{e^{-2RT/L}}{2} - \frac{3}{2} \right) \right]. \tag{40.5}
 \end{aligned}$$

Estes resultados mostram que  $U_b$  é diferente de  $U_R$ , indicando que nem toda a energia fornecida pela bateria é dissipada pelo resistor. A diferença entre esses dois valores é dada por

$$\begin{aligned}
 U_b - U_R &= \frac{L}{2} \frac{\mathcal{E}_b^2}{R^2} [1 - 2e^{-RT/L} + e^{-2RT/L}] \\
 &= \frac{L}{2} \frac{\mathcal{E}_b^2}{R^2} [1 - e^{-RT/L}]^2 \tag{40.6}
 \end{aligned}$$

e corresponde a um número positivo, mostrando que, até o instante  $T$ , a bateria fornece mais energia ao sistema do que a dissipada pelo resistor.

#### • a energia do indutor

Para interpretar a diferença entre  $U_b$  e  $U_R$ , usamos a lei de Ohm macroscópica, eq.(38.11) [[[(38.11)]]], que tem a forma

$$\mathcal{E}_b + \mathcal{E}_{\text{ind}} = RI, \tag{40.7}$$

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt}, \tag{40.8}$$

Multiplicando a eq.(40.7) por  $I$  e usando (40.2), (40.4) e (40.8), obtemos

$$P_b - LI \frac{dI}{dt} = P_R. \tag{40.9}$$

Reescrevendo este resultado como

$$P_b = P_R + \frac{d}{dt} \left[ \frac{LI^2}{2} \right], \tag{40.10}$$

isolamos, em lados distintos da equação, a potência fornecida pela fonte e aquela absorvida pelo circuito, tornando explícita a conservação da energia. Ele permite, também, identificar uma energia  $U_B$ , associada ao indutor, dada por

$$U_B = \frac{LI^2}{2}, \tag{40.11}$$

já que, na eq.(40.10),  $dU_B/dt$  corresponde a uma potência. Usando a expressão (40.1) na eq.(40.6), podemos constatar a conservação da energia, escrita na forma

$$U_b - U_R = U_B. \tag{40.12}$$

A energia  $U_B$  não é dissipada mas, sim, armazenada no indutor. Isto fica mais claro quando expressamos  $I$  em termos da intensidade  $B = \mu_0 N I/h$ , eq.(??), do campo magnético no interior do solenoide e usamos o valor de  $L = \mu_0 N^2 \pi a^2/h$ , dado na eq.(38.10) [[[38.10)]], pois podemos reescrever a eq.(40.11) como

$$U_B = [\pi a^2 h] \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (40.13)$$

O fator  $[\pi a^2 h]$  corresponde ao volume do interior do solenoide que é a região ocupada pelo campo magnético e, por isso, este resultado sugere que a energia  $U_B$ , armazenada no indutor, está acumulada na forma de campo magnético, com uma densidade volumétrica dada por

$$\frac{dU_B}{dV} = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (40.14)$$

Este resultado foi obtido no contexto de um caso bem definido, o do solenoide. Entretanto, ele é muito geral. Sempre que houver um campo magnético numa região do espaço, há ali uma energia magnética, cuja densidade é dada pela eq.(40.14).

## • a energia do campo

Onde há campo, seja ele elétrico ou magnético, há uma densidade de energia. Em ambos os casos, as densidades volumétricas são dadas por

$$\frac{dU_E}{dV} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad \frac{dU_B}{dV} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

A importância relativa destas duas formas de energia depende do problema tratado. No caso de cargas paradas, só existe  $dU_E/dV$  enquanto que, no caso de correntes constantes  $dU_B/dV$  é mais importante. Já no caso da luz do Sol que chega à Terra, como discutimos na segunda parte do texto, cada um dessas densidades representa metade da energia incidente, pois  $dU_E/dV = dU_B/dV$ .

A importância conceitual destes resultados também é muito grande. Ondas eletromagnéticas que se propagam no vácuo têm inércia e possuem momentos linear e angular. Sem terem massa! Ao introduzir estas ideias na física, o eletromagnetismo abriu caminho para uma compreensão nova do mundo, que só ficou clara com a teoria da relatividade.

## • exemplo 1 - energia magnética de um solenoide toroidal

Um solenoide toroidal, de seção retangular, com raio interno  $a$  e externo  $b$ , altura  $h$  e  $N$  espiras, é percorrido por uma corrente  $I$ , como mostra a fig.40.2. Calculamos a energia magnética do toroide de dois modos diferentes: usando a auto-indutância determinada a partir da fem, eq.(8), e a densidade de energia magnética armazenada no sistema, eq.(14).



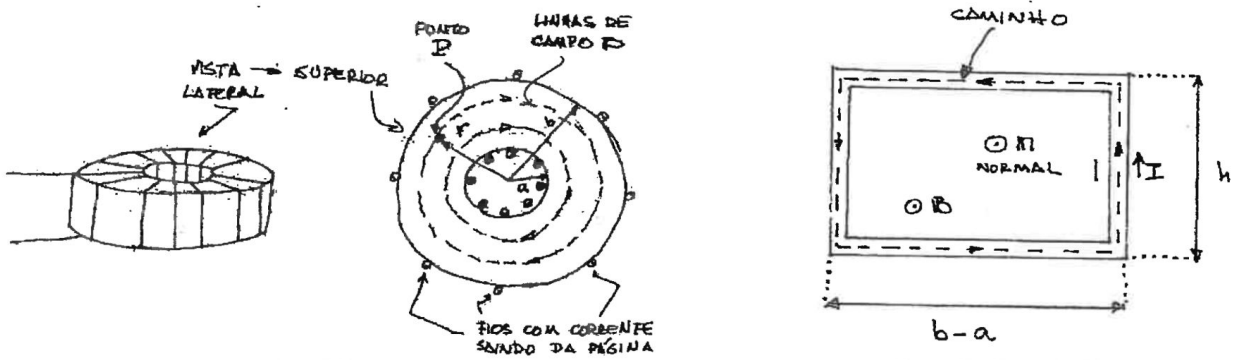


Figura 40.2: Toroide: vistas (a) lateral e (b) superior; (c) detalhe de uma espira.

### - cálculo a partir da fem

Como a fem é devida à variação temporal de  $\vec{B}$ , precisamos obter o valor desse campo no interior do solenoide. Para isso, usamos a lei de Ampère, escolhendo um caminho  $C_1$  circular, de raio  $a < r < b$ , concêntrico com o toroide, mostrado na figura (b) e obtemos

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 N I \quad \rightarrow \quad 2\pi r B = \mu_0 N I \quad (40.15)$$

e, portanto,

$$B = \frac{\mu_0 N}{2\pi r} I. \quad (40.16)$$

A fem auto-induzida numa única espira de lados  $(b - a)$  e  $h$  é dada por

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \oint_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{c} = - \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS. \quad (40.17)$$

Para o cálculo do lado direito, usamos a superfície orientada  $S_2$ , apoiada num caminho  $C_2$ , que passa pelo interior do fio, mostrado na figura (c), percorrido no sentido indicado, com normal apontando para fora da folha. Com estas escolhas, podemos escrever

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS &= \iint_{S_2} \frac{\partial B}{\partial t} dS = \iint_{S_2} \frac{\mu_0 N}{2\pi r} \frac{dI}{dt} dS \\ &= \frac{\mu_0 N}{2\pi} \frac{dI}{dt} \int_0^h dz \int_a^b dr \frac{1}{r} = \frac{\mu_0 N}{2\pi} h \ln \left[ \frac{b}{a} \right] \frac{dI}{dt}. \end{aligned} \quad (40.18)$$

Assim, a auto-indutância por espira é

$$L_{\text{esp}} = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln \left[ \frac{b}{a} \right] \quad (40.19)$$

e a auto-indutância total vale  $L = N L_{\text{esp}}$  e é dada por

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \left[ \frac{b}{a} \right]. \quad (40.20)$$

A energia acumulada no solenoide é obtida a partir da eq.(40.11) e vale

$$U_B = \frac{\mu_0 N^2 h}{4\pi} \ln \left[ \frac{b}{a} \right] I^2 . \quad (40.21)$$

### - cálculo a partir da densidade de energia

A energia magnética está armazenada no campo no interior do solenoide, como indica a eq.(40.13). Este campo, calculado pela lei de Ampère tem a intensidade dada pela eq.(40.16). Lembrando que o elemento de volume em coordenadas cilíndricas é  $dV = r dr d\theta dz$  escrevemos

$$\begin{aligned} U_B &= \iiint dV \left[ \frac{B^2}{2\mu_0} \right] = \int_0^h dz \int_a^b dr \int_0^{2\pi} d\theta r \left[ \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 N}{2\pi r} I \right)^2 \right] \\ &= \int_0^h dz \int_a^b dr 2\pi r \left[ \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2} \frac{1}{r^2} \right] = \frac{\mu_0 N^2 h}{4\pi} \ln \left[ \frac{b}{a} \right] I^2 . \end{aligned} \quad (40.22)$$

Este resultado é, como esperado, idêntico ao da eq.(40.21).

### • exercícios

1. É dado um sistema composto por duas cascas cilíndricas muito longas, coaxiais, de raios  $a$  e  $b > a$ , percorridas por correntes  $I$ , iguais e em sentidos opostos. Detemine:
  - a) a energia magnética contida em um trecho de comprimento  $\ell$  deste sistema;
  - b) a auto-indutância deste trecho do sistema.

### • respostas

1. a)  $U_B = \frac{\mu_0 \ell}{4\pi} \ln \left[ \frac{b}{a} \right] I^2$ ;      b)  $L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \left[ \frac{b}{a} \right]$ .

# Capítulo 41

## corrente de deslocamento

### • uma inconsistência

As leis do eletromagnetismo envolvendo campos, que estudamos até aqui, são expressas pelas quatro equações diferenciais

$$\text{lei de Gauss elétrica} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (41.1)$$

$$\text{lei de Faraday} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (41.2)$$

$$\text{lei de Ampère} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (41.3)$$

$$\text{lei de Gauss magnética} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (41.4)$$

Estudamos, também, a equação que representa a conservação da carga elétrica e que, na forma diferencial, é dada pela

$$\text{equação da continuidade} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (41.5)$$

Estas equações abrangem muitas facetas importantes do eletromagnetismo. Mesmo assim, elas ainda não constituem a sua estrutura teórica porque existe uma inconsistência entre a lei de Ampère e a equação da continuidade. Para explicitar isto, calculamos o divergente de  $\vec{j}$  a partir da equação (41.3), escrevendo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}). \quad (41.6)$$

Usando o resultado geral

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\psi}) = 0, \quad (41.7)$$

válido para qualquer campo vetorial  $\vec{\psi}$ , demonstrado no apêndice XXX, concluímos que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ . Este resultado é inconsistente com a eq.(41.5), cujo lado direito pode ser não nulo.

### • a lei de Ampère-Maxwell

A inconsistência entre a equação da continuidade e a lei de Ampère pode ser eliminada pela introdução de um termo nesta última, de modo que ela passe a ser escrita como

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left[ \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]. \quad (41.8)$$

O termo  $[\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t]$  é chamado de *corrente de deslocamento* e a eq.(41.8) é conhecida como *lei de Ampère-Maxwell* na forma diferencial. Esta modificação da lei de Ampère resolve o problema da inconsistência com a equação da continuidade, como podemos constatar calculando o divergente de  $\vec{j}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{\nabla} \cdot \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}), \quad (41.9)$$

usando o resultado (41.7). Recorrendo à lei de Gauss elétrica, eq.(41.1), obtemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (41.10)$$

que é a equação da continuidade.

A lei de Ampère-Maxwell também pode ser expressa na forma integral, usando o teorema de Stokes, discutido na aula 22. Assim, obtemos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \iint_S \mu_0 \left[ \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \hat{n} dS. \quad (41.11)$$

Em ambas as formas da equação de Ampère-Maxwell, a densidade de corrente  $\vec{j}$  aparece somada à variação temporal do campo elétrico, indicando que essas duas grandezas são totalmente equivalentes quanto à sua relação com o campo magnético. Assim, tanto uma distribuição de corrente elétrica como uma variação temporal de campo elétrico criam campo magnético.

O termo  $[\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t]$  nas eqs.(41.8) e (41.11) foi chamado de corrente de deslocamento por razões históricas mas, de fato, ele não corresponde a um transporte de carga elétrica. Apesar disto, o fato de ele aparecer somado a  $[\vec{j}]$  nas duas equações indica que o seu efeito na criação de  $\vec{B}$  é o mesmo da da corrente usual. Consideremos, por exemplo, uma superfície cilíndrica com eixo paralelo à direção  $z$ . Se, no seu interior, houver uma densidade de corrente  $[\vec{j} = |\vec{j}| \hat{k}]$  ou, alternativamente, uma densidade de corrente de deslocamento  $[\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t = |\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t| \hat{k}]$ , as linhas de campo magnético no seu exterior são circulares e centradas no eixo do cilindro, com sentido dado pela regra da mão direita, como mostra a fig.41.1.

### • as equações de Maxwell

Foi Maxwell quem modificou a lei da Ampère, introduzindo a corrente de deslocamento. Ao fazer isso, ele tornou o eletromagnetismo uma teoria consistente, sem ambiguidades internas e

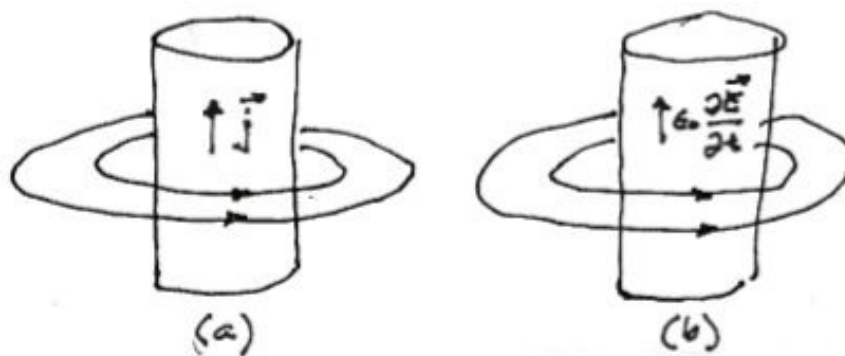


Figura 41.1: Linhas de campo magnético criado por (a)  $[\vec{j}]$ ; (b)  $[\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t]$ .

o sistema

$$\text{lei de Gauss elétrica} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (41.12)$$

$$\text{lei de Faraday} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (41.13)$$

$$\text{lei de Ampère–Maxwell} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (41.14)$$

$$\text{lei de Gauss magnética} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (41.15)$$

é conhecido como *equações de Maxwell*, na forma diferencial. A consistência deste sistema teórico tem consequências muito importantes. Foi ela, por exemplo, que permitiu compreender a luz como uma onda eletromagnética.

## • correntes através de capacitores

Além de estabelecer a consistência interna da teoria do eletromagnetismo, a equação de Ampère-Maxwell, também, elimina incoerências que podem ser causadas pelo uso da lei de Ampère em alguns sistemas, sendo os mais comuns os circuitos que envolvem capacitores. Como discutimos nas aulas XXX, capacitores são formados por placas metálicas que não se tocam, o que impede o fluxo de carga entre elas.]] Ainda assim, correntes podem fluir através do circuito, devido à indução de cargas de sinais diferentes nas placas do capacitor.

A fig.41.2 mostra um capacitor e trechos de fios metálicos, partes de um circuito maior, e três superfícies matemáticas orientadas fechadas  $S_1, S_2$  e  $S_3$ , usadas para aplicar a equação da continuidade na forma integral, escrita como

$$\oiint_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS = -\frac{dq_{\text{int}}}{dt}, \quad (41.16)$$

onde  $q_{\text{ind}}$  é a carga interna à superfície  $S$ . No caso da figura, devido ao fato de a normal  $\hat{n}$  ser orientada para fora de  $S$ , o lado esquerdo da equação vale  $-I$  para uma corrente que entra na

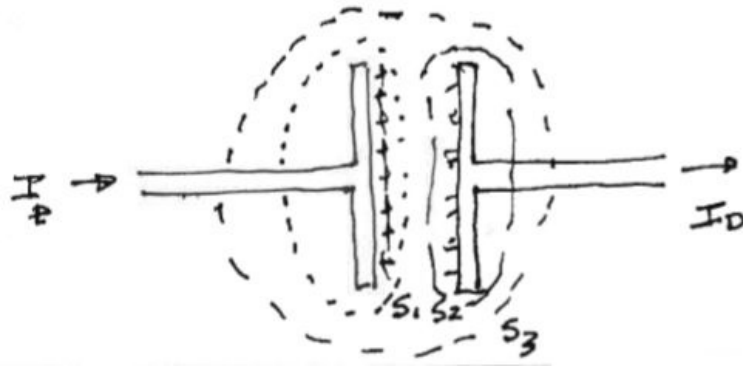


Figura 41.2: Capacitor visto de perfil e superfícies fechadas  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ .

superfície e  $+I$  para uma que sai dela. Aplicando a eq.(41.16) à superfície  $S_1$ , e chamando de  $I_E$  a corrente no fio esquerdo, encontramos

$$-I_E = -\frac{dQ_E}{dt}, \quad (41.17)$$

ou seja,  $I_E = dQ_E/dt$ , onde  $Q_E > 0$  é a carga contida no interior de  $S_1$ . No caso do capacitor, ocorre indução entre as duas placas e esta carga  $Q_E$  fica acumulada na placa esquerda do capacitor, como mostra a figura. Assim, a carga que flui pelo fio fica acumulada na placa do capacitor.

A indução entre as cargas nas placas do capacitor faz com que a carga na placa da direita seja  $Q_D = -Q_E$ . Por isso, aplicando a equação da continuidade à superfície  $S_2$ , temos

$$I_D = -\frac{dQ_D}{dt} \rightarrow I_D = \frac{dQ_E}{dt} \quad (41.18)$$

e, portanto, comparando com (41.17), concluímos que  $I_E = I_D$ . Assim, devido à indução de cargas nas placas, a corrente que chega ao capacitor é igual à que sai dele. Ou seja, apesar do espaço aberto entre as placas do capacitor, a corrente flui através do circuito.

A mesma conclusão poderia ter sido obtida empregando a equação da continuidade à superfície  $S_3$ . Neste caso, teríamos

$$-I_E + I_D = -\frac{d(Q_E + Q_D)}{dt} = 0. \quad (41.19)$$

Exemplos envolvendo capacitores são apresentados a seguir.

### • exemplo 1 - Ampère x Ampère-Maxwell

Consideremos um circuito no qual uma bateria está ligada a um capacitor feito por placas planas, paralelas e circulares de raio  $R$  como mostra a fig.41.3(a). Quando a chave  $c$  é fechada, uma corrente flui pelo circuito até que o capacitor fique totalmente carregado, apesar de as placas do capacitor estarem separadas uma da outra. Calculamos o campo magnético no ponto  $P$

mostrado na figura num instante em que a corrente vale  $I(t)$ . Tomamos o ponto P suficientemente próximo do fio para que este possa ser considerado infinito e que os campos das outras partes do circuito possam ser desprezados. Neste caso, temos a situação esquematizada na figura (b), onde as placas do capacitor são mostradas de perfil.

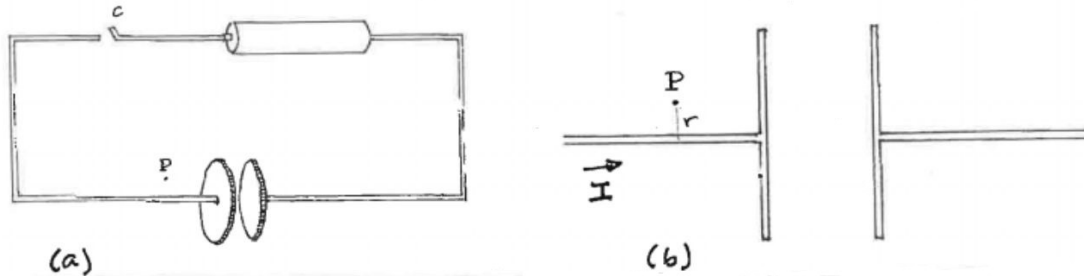


Figura 41.3: Capacitor de placas paralelas (a) ligado a uma bateria; (b) visto de perfil.

Quando a corrente flui, as linhas de campo magnético  $\vec{B}$  nas proximidades do fio são circulares, com centro nele. Para calcular a intensidade deste campo em um ponto P a uma distância  $r$  do fio, consideramos um caminho C sobre a linha de campo que passa por este ponto e orientado paralelamente a ela. Na aplicação da lei de Ampère-Maxwell na forma dada pela eq.(41.11), uma vez determinado o caminho C, qualquer superfície cuja fronteira esteja sobre ele pode ser empregada e todas elas devem fornecer o mesmo resultado. Se isto não acontecer, a lei fica ambígua. Nesta discussão, consideramos as superfícies orientadas  $S_1, S_2$  e  $S_3$ , mostradas na fig.41.4.

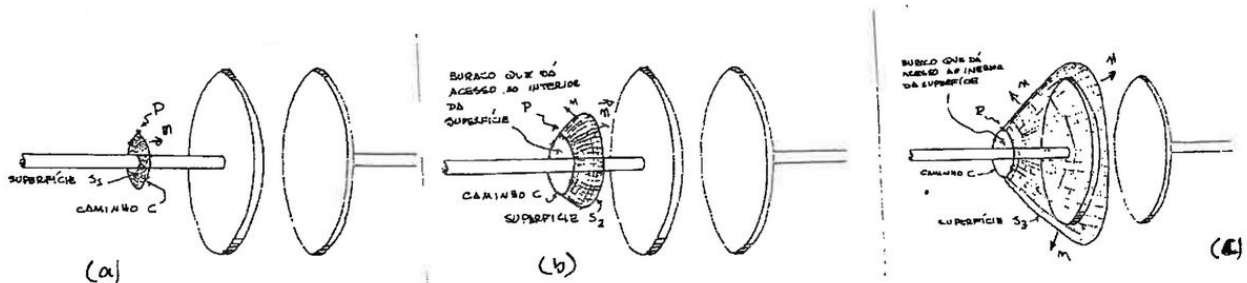


Figura 41.4: Caminho C e superfícies orientadas apoiadas sobre ele: (a)  $S_1$ , na forma de um disco plano; (b)  $S_2$ , com forma parecida a um cesto de palha, cuja boca é C; (c)  $S_3$ , com forma parecida a um grande cesto de palha, cuja boca é C.

Para evidenciar a inconsistência da lei de Ampère neste caso, consideramos, inicialmente, a superfície  $S_1$  apoiada sobre ele e furada pela corrente  $I$ . O cálculo baseado nela fornece

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = 2\pi r B = \mu_0 \iint_{S_1} \vec{j} \cdot \hat{n} dS = \mu_0 I \quad (41.20)$$

e, assim,

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (41.21)$$

O caso da superfície  $S_2$ , apesar de ter a forma de um cesto de palha, é equivalente à superfície  $S_1$ , porque ambas são furadas pela mesma corrente, o que permite escrever

$$\iint_{S_1} \vec{j} \cdot \hat{n} dS = \iint_{S_2} \vec{j} \cdot \hat{n} dS = I \quad (41.22)$$

e obtemos para  $B(r)$  o mesmo resultado da eq.(41.21). A superfície  $S_3$ , também apoiada em C, com a forma de um cesto maior, não é furada por nenhuma corrente porque ela passa pelo espaço vazio no interior do capacitor. Aplicando a lei de Ampère a esta superfície, temos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = 2\pi r B = \mu_0 \iint_{S_3} \vec{j} \cdot \hat{n} dS = 0, \quad (41.23)$$

o que fornece  $B(r) = 0$ , em contradição com o resultado (41.21).

A introdução do termo de Maxwell  $[\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t]$  na lei de Ampère elimina esta contradição. Isto ocorre porque a ausência de uma corrente  $I$  que possa furar a superfície  $S_3$  é compensada pela presença de um campo elétrico dependente do tempo entre as placas do capacitor. Na lei de Ampère-Maxwell, no que diz respeito à criação de campo magnético,  $[\vec{j}]$  e  $[\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t]$  são equivalentes. No presente exemplo, mostramos que o fluxo de  $[\mu_0 \vec{j}]$  sobre as superfícies  $S_1$  e  $S_2$  é igual ao fluxo de  $[\mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t]$  sobre a superfície  $S_3$ .

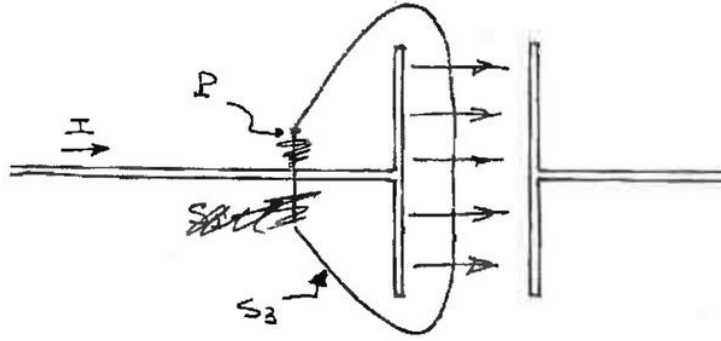


Figura 41.5: Capacitor de perfil, com superfície  $S_3$  e linhas de campo elétrico.

A lei de Ampère-Maxwell **pode ser aplicada em todas as situações**. No caso da superfície  $S_1$ , temos

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} &= 2\pi r B = \mu_0 \iint_{S_1} \left[ \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \hat{n} dS \\ &= \mu_0 \iint_{S_1} [\vec{j}] \cdot \hat{n} dS = \mu_0 I \end{aligned} \quad (41.24)$$

como na eq.(41.20). O resultado para  $S_2$  é totalmente análogo.

No caso de  $S_3$ , notamos que em um instante no qual as cargas nas placas do capacitor são  $+Q(t)$  e  $-Q(t)$ , com  $Q(t) > 0$ , a lei de Gauss determina que a intensidade do campo elétrico na região entre elas é dada por

$$E(t) = \frac{Q(t)}{\pi R^2 \epsilon_0}, \quad (41.25)$$



com direção e sentido indicados na fig.41.5 e, portanto,

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{dQ(t)/dt}{\pi R^2 \epsilon_0}. \quad (41.26)$$

A eq.(41.17), decorrente da equação da continuidade, mostra que o fator  $dQ(t)/dt$  é igual à corrente  $I(t)$  e

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{I(t)}{\pi R^2 \epsilon_0}. \quad (41.27)$$

Por isso, sobre a superfície  $S_3$ , a equação de Ampère-Maxwell fornece

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} &= 2\pi r B = \mu_0 \iint_{S_3} \left[ \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \hat{n} dS \\ &= \mu_0 \iint_{S_3} \left[ \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \hat{n} dS = \mu_0 \left[ \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right] \pi R^2 = \mu_0 I. \end{aligned} \quad (41.28)$$

A introdução da corrente de deslocamento na lei de Ampère elimina as suas inconsistências. Se escolhermos as superfícies  $S_1$  ou  $S_2$ , a existência do campo magnético é atribuída à corrente elétrica, enquanto que, se optarmos pela superfície  $S_3$ , ela é atribuída à corrente de deslocamento. O importante é que qualquer dessas opções leva ao mesmo resultado final.

## • exemplo 2 - capacitor no caminho da corrente: cálculo de $\vec{B}$

Retomamos uma parte de um circuito, formada por um fio longo e retilíneo, interceptado por um capacitor de placas planas, próximas entre si, circulares, de raio  $R$ , mostrado na fig.41.6, para calcular o campo magnético nos pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , quando o circuito é percorrido por uma corrente  $I$ . As linhas de campo que passam por esses pontos são circulares, com o sentido dado pela regra da mão direita.

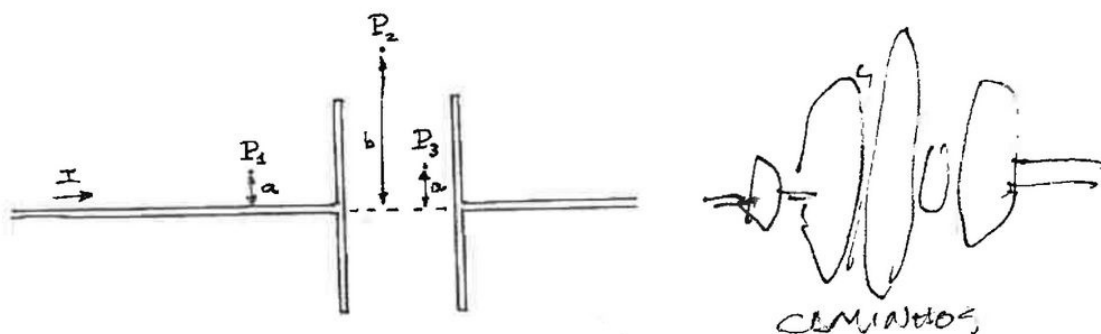


Figura 41.6: Parte de um circuito formado por um fio longo e por um capacitor de placas paralelas.

Para o cálculo do campo magnético no ponto  $P_i$ , usamos a lei de Ampère-Maxwell e um caminho  $C_i$  sobre a linha de campo que passa por ele, orientada paralelamente a  $\vec{B}$ . No caso

de  $P_1$ , escolhemos uma superfície orientada plana  $S_1$ , usamos o fato que  $\partial \vec{E}/\partial t = 0$  sobre ela e temos

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{c} &= 2\pi a B_1 = \iint_{S_1} \left[ \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \hat{n} dS \\ &= \iint_{S_1} \left[ \mu_0 \vec{j} \right] \cdot \hat{n} dS = \mu_0 I \end{aligned} \quad (41.29)$$

e, portanto,

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}. \quad (41.30)$$

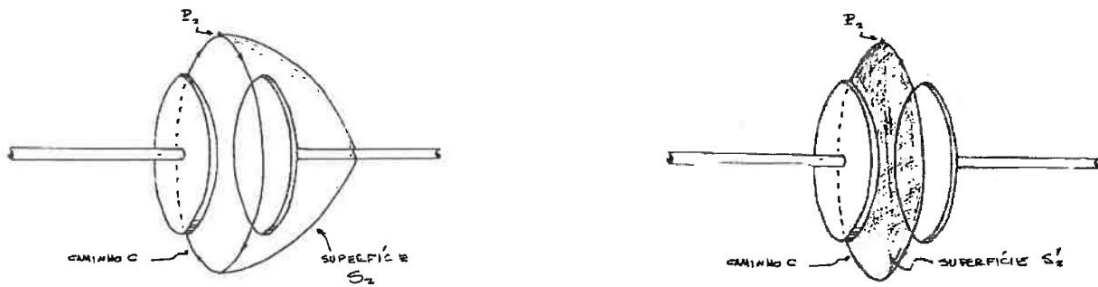


Figura 41.7: Caminho  $C_2$  e superfície (a)  $S_2$  e (b)  $S'_2$  utilizadas no cálculo de  $\vec{B}_2$ .

Para o cálculo de  $\vec{B}$  no ponto  $P_2$ , empregamos duas superfícies alternativas  $S_2$  e  $S'_2$ , mostradas na fig.41.7, supondo que o campo elétrico do capacitor fique totalmente confinado em seu interior. No caso de  $S_2$ , escrevemos

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{c} &= 2\pi b B_2 = \iint_{S_2} \left[ \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \hat{n} dS \\ &= \iint_{S_2} \left[ \mu_0 \vec{j} \right] \cdot \hat{n} dS = \mu_0 I, \end{aligned} \quad (41.31)$$

pois  $\partial \vec{E}/\partial t = 0$  sobre ela. Assim, concluímos que

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}. \quad (41.32)$$

Considerando a superfície alternativa  $S'_2$  e, notando que a direção e o sentido de  $d\vec{E}/dt$  são os mostrados na fig.41.8, temos

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{c} &= 2\pi b B_2 = \iint_{S'_2} \left[ \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \hat{n} dS \\ &= \iint_{S'_2} \left[ \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \hat{n} dS = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \pi R^2, \end{aligned} \quad (41.33)$$

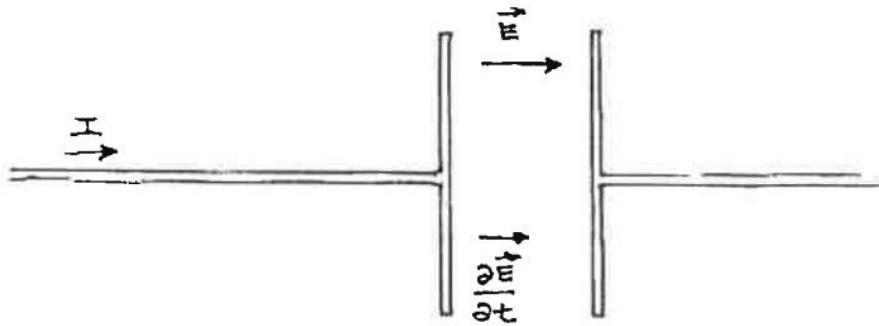


Figura 41.8: Direção e sentido de  $\vec{E}$  e de  $\partial\vec{E}/\partial t$  entre as placas do capacitor

já que  $\vec{j}$  é nulo sobre  $S'_2$  e  $\partial\vec{E}/\partial t$  só é não nulo na região  $r < R$ . Para calcular  $\partial\vec{E}/\partial t$ , usamos o fato de que, no interior do capacitor, a intensidade do campo  $\vec{E}$  é dada por

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 \pi R^2}, \quad (41.34)$$

onde  $Q$  é a carga no capacitor. Assim,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{(dQ/dt)}{\epsilon_0 \pi R^2}. \quad (41.35)$$

Pela equação da continuidade, a corrente  $I$  é dada por

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (41.36)$$

e, portanto,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{I}{\epsilon_0 \pi R^2}. \quad (41.37)$$

Reescrevendo a eq.(41.33) como

$$2\pi b B_2 = \mu_0 I, \quad (41.38)$$

obtemos novamente

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}. \quad (41.39)$$

Deste modo, mostramos que o valor do campo magnético no ponto  $P_2$  *não depende* da particular superfície apoiada sobre o caminho  $C_2$  usada no cálculo.

Finalmente, o campo magnético no ponto  $P_3$  é calculado usando a superfície  $S_3$ , plana, mostrada na fig.41.9 (a), o que permite escrever

$$\begin{aligned} \oint_{C_3} \vec{B} \cdot d\vec{c} &= 2\pi b B_3 = \iint_{S_3} \left[ \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \hat{n} dS \\ &= \iint_{S_3} \left[ \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \hat{n} dS = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \pi a^2 = \mu_0 I \frac{a^2}{R^2}, \end{aligned} \quad (41.40)$$

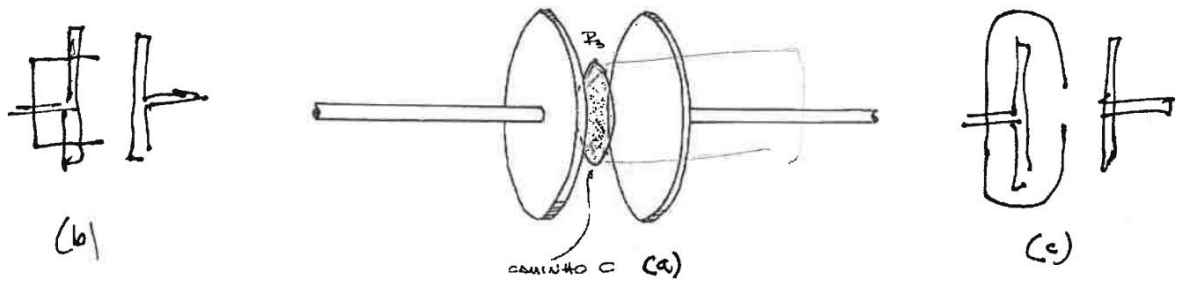


Figura 41.9: Caminho C e superfícies utilizados no cálculo de  $B_3$

usando a eq.(41.37). Assim, obtemos.

$$B_3 = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R^2} . \quad (41.41)$$

O mesmo resultado também pode ser obtido usando as superfícies  $S_3'$  e  $S_3''$ , mostradas nas figuras (b) e (c) e os cálculos são deixados como exercícios.

O conteúdo importante deste exemplo é que o cálculo do campo magnético por meio da lei de Ampère-Maxwell pode ser feito de muito modos diferentes, mas o resultado é sempre livre de ambiguidades.

### • exemplo 3 - corrente com simetria esférica

Uma quantidade de carga  $Q$  positiva é abandonada em um ponto P e, devido à repulsão eletrostática, elas passam a se mover radialmente. Este fluxo de partículas carregadas corresponde a uma corrente elétrica com simetria esférica e discutimos o campo magnético criado por ela.

Num instante qualquer  $t$ , a quantidade de carga na região interna de uma esfera matemática de raio  $r$  com centro em P é  $Q(t) < Q$  e a equação da continuidade permite escrever

$$-\frac{dQ(t)}{dt} = \oiint \vec{j} \cdot \hat{n} dS = j 4\pi r^2 . \quad (41.42)$$

O vetor  $\vec{j}$  no ponto  $\vec{r}$  é dado por

$$\vec{j} = -\frac{dQ(t)/dt}{4\pi r^2} \hat{r} , \quad (41.43)$$

onde  $\hat{r}$  é o versor da direção radial, sendo  $dQ/dt < 0$ , uma vez que a carga positiva diminui no interior da esfera. O campo elétrico no mesmo ponto é

$$\vec{E} = \frac{Q(t)}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (41.44)$$

e, portanto

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{dQ(t)/dt}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} . \quad (41.45)$$

Deste modo, usando a eq.(41.45) na eq.(41.43), concluímos que

$$\vec{j} = -\epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}, \quad (41.46)$$

e a lei de Ampère-Maxwell fornece

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \iint_S \left[ \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \hat{n} dS = 0, \quad (41.47)$$

para qualquer caminho  $C$  e qualquer superfície orientada apoiada sobre ele. Consequentemente,  $\vec{B} = 0$  em todo o espaço.

Este resultado decorre do fato de a corrente ter simetria esférica. Como todas as direções são equivalentes em torno de um eixo que passa pelo ponto P, o campo  $\vec{B}$  não pode ter nenhuma direção perpendicular a ele ali. Por isso, ele tem de ser nulo.

## ● exercício

1. Considere o sistema formado por um trecho de fio e um capacitor apresentado no exemplo 2. Mostre que o valor calculado para a intensidade do campo magnético  $\vec{B}_3$  no ponto  $P_3$  também é o dado pela eq.(41.41) quando:

- a superfície apoiada no caminho  $C_3$  é a  $S'_3$  dada na fig.41.9(b); sugestão: para calcular a corrente que flui sobre a placa, divida-a em duas regiões, uma interna e outra externa a  $S'_3$  e use a equação da continuidade supondo que, em cada instante, a densidade superficial  $\sigma$  é uniforme;
- a superfície apoiada no caminho  $C_3$  é a  $S''_3$  dada na fig.41.9(c).



# Capítulo 42

## o eletromagnetismo

Neste texto, estudamos as seis leis básicas do eletromagnetismo que descrevem as interações de sistemas de cargas. Quatro dessas leis formam as equações de Maxwell, que descrevem como campos elétricos e magnéticos são criados. A quinta lei é a equação da continuidade que expressa a conservação da carga elétrica. A última é a chamada força de Lorentz, que descreve a força que cargas sentem em presença de campos elétricos e magnéticos. Este conjunto de equações constitui o núcleo da estrutura conceitual do eletromagnetismo clássico. Na maioria dos casos, problemas envolvendo interações entre cargas e correntes são complexos e somente podem ser resolvidos tratando a teoria como um todo. Estas leis estão resumidas na tabelas abaixo.

equações de Maxwell			
nome	conceito	forma integral	forma diferencial
Gauss elétrica	$q \rightarrow E$	$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = \int_V \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$
Faraday	$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow E$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
Ampère Maxwell	$I \rightarrow B$ $\frac{\partial E}{\partial t} \rightarrow B$	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \left[ \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \cdot \hat{n} dS$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
Gauss magnética	$\cancel{q}_{MAC}$	$\oiint_S \mathbf{B} \cdot \hat{n} dS = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

equação da continuidade		
conceito	forma integral	forma diferencial
$q \leftrightarrow I$	$\oint \mathbf{j} \cdot \hat{n} dS = - \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$	$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

força de Lorentz
$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

### exemplo - solenoide toroidal entre as placas de um capacitor

Um solenoide toroidal, de seção retangular, com raio interno  $a$  e externo  $b$ , altura  $h$ ,  $N$  espiras e resistência  $R$ , é colocado no interior de um capacitor plano, de placas circulares, de raio  $\rho$  e separadas por uma distância  $d$ , como mostra a fig42.1. Os fios conectados ao capacitor são retilíneos, muito longos e por eles passa uma corrente  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ . Neste exemplo, calculamos a corrente induzida no solenoide, enfatizando os elementos da teoria necessários a cada passo. Como o problema tem simetria axial, empregamos coordenadas cilíndricas.

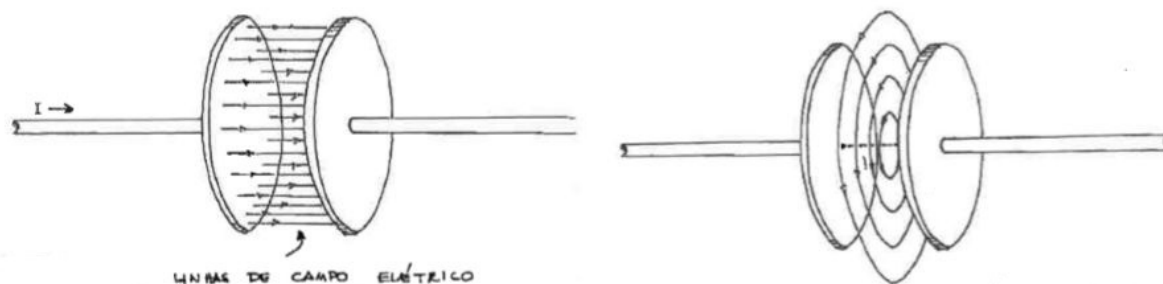


Figura 42.1: Solenoide toroidal entre as placas de um capacitor.

#### • os campos

Na situação considerada, a corrente  $I(t)$  no fio produz acúmulos de cargas nas placas do capacitor, gerando um campo elétrico variável com o tempo entre elas. Este campo, por sua vez, cria um campo magnético na mesma região, também variável com o tempo, que induz uma corrente no solenoide toroidal.

Como vimos na aula anterior, a carga  $Q$  acumulada nas placas do capacitor em um dado instante está relacionada à corrente  $I$  no fio pela equação da continuidade, sendo válida a relação

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (42.1)$$

e, portanto,

$$Q(t) = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t) . \quad (42.2)$$

Estas cargas produzem um campo entre as placas do capacitor que, pela lei de Gauss, é dado por

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k} = \frac{Q}{\pi \rho^2 \epsilon_0} \hat{k} , \quad (42.3)$$

com linhas de campo representadas na fig.42.2(a).

O campo elétrico  $\vec{E}_1$  varia com o tempo e, pela lei de Ampère-Maxwell, é responsável pela criação de um campo magnético  $\vec{B}_1$ , cujas linhas circulares são mostradas na fig.42.2(b). Para



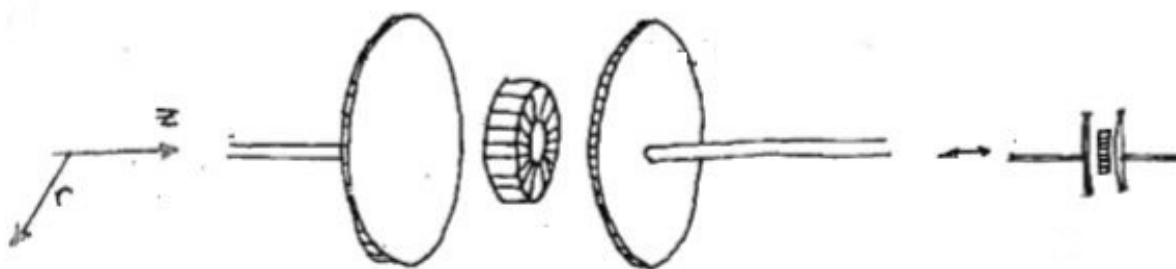


Figura 42.2: Linhas de campo (a) elétrico e (b) magnético entre as placas do capacitor em um dado instante.

aplicar a lei, tomamos um caminho circular  $C$ , de raio  $r$ , concêntrico com o eixo do sistema, sobre uma das linhas de  $\vec{B}_1$  e uma superfície orientada  $S$  apoiada sobre ele, com normal  $\hat{k}$ . Lembrando que a densidade de corrente  $\vec{j}$  é nula entre as placas do capacitor, temos

$$2\pi r B_1 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{dE_1}{dt} \pi r^2 . \quad (42.4)$$

A partir da eq.(42.3), obtemos

$$\frac{dE_1}{dt} = \frac{I}{\pi \rho^2 \epsilon_0} \quad (42.5)$$

e a eq.(42.4) fornece

$$B_1 = \frac{\mu_0 \epsilon_0 r}{2} \frac{dE_1}{dt} = \frac{\mu_0 r I}{2\pi \rho^2} = \frac{\mu_0 r}{2\pi \rho^2} I_0 \cos(\omega t) . \quad (42.6)$$

• isto não é tudo...

Neste ponto, estamos preparados para refletir sobre a estrutura de problemas de eletromagnetismo. No exemplo considerado, o campo magnético  $\vec{B}_1$ , gerado pela variação temporal de  $\vec{E}_1$ , também varia com o tempo. Por isso, pela lei de Faraday, o fator  $\partial \vec{B}_1 / \partial t$  dá origem a um campo elétrico  $\vec{E}_2$  que também varia com o tempo e que, pela lei de Ampère-Maxwell, gera um  $\vec{B}_2$ , que gera um  $\vec{E}_3$ , que gera um  $\vec{B}_3$ , que gera ...

Felizmente, problemas deste tipo podem ser resolvidos a partir das equações de Maxwell por meio de técnicas matemáticas mais poderosas que permitem evitar esta sucessão infinita de efeitos. Elas estão fora do escopo deste curso e, aqui, nos limitamos a informar que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  gerados neste processo correspondem a uma onda eletromagnética.

- a corrente no solenoide

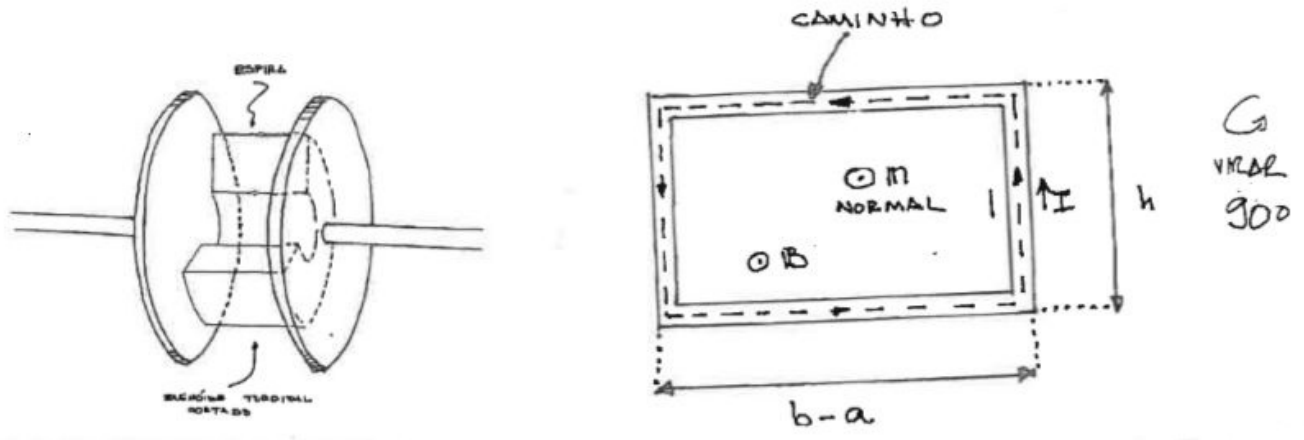


Figura 42.3: (a) Corte do solenoide; (b) uma espira em detalhe.

O cálculo da corrente  $I'$  induzida no solenoide é feito aqui considerando apenas os efeitos dos campos  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{B}_1$  e  $\vec{E}_2$ . Para obter a fem  $\mathcal{E}_2$  devida a  $\vec{E}_2$  consideramos a espira retangular mostrada na fig.42.3(a). Pela lei de Faraday, a variação temporal do campo magnético  $\vec{B}_1$  induz um campo elétrico  $\vec{E}_2$  que produz uma fem em cada uma das espiras do toroide, dada por

$$\mathcal{E}_{\text{esp}} = \oint_{C_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{c} = - \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \cdot \hat{n} dS, \quad (42.7)$$

sendo que o caminho  $C_2$  está sobre a espira e é percorrido no sentido indicado na fig.42.3(b) e  $S_2$  é uma superfície orientada apoiada sobre ele, cuja normal  $\hat{n}$  aponta para fora da página. Usando a eq.(42.6), temos

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \cdot \hat{n} = \frac{\partial B_1}{\partial t} = - \frac{\mu_0 r \omega}{2\pi \rho^2} I_0 \text{sen}(\omega t) \quad (42.8)$$

e, assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{esp}} &= \int_0^h dz \int_a^b dr \left[ \frac{\mu_0 r \omega I_0 \text{sen}(\omega t)}{2\pi \rho^2} \right] \\ &= \frac{\mu_0 \omega h (b^2 - a^2)}{4\pi \rho^2} I_0 \text{sen}(\omega t). \end{aligned} \quad (42.9)$$

A fem  $\mathcal{E}_2$  sobre todas as espiras do solenoide é dada por

$$\mathcal{E}_2 = N \mathcal{E}_{\text{esp}} = N \frac{\mu_0 \omega h (b^2 - a^2)}{4\pi \rho^2} I_0 \text{sen}(\omega t), \quad (42.10)$$

que é uma função oscilante, sendo conveniente escrevê-la como

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 \text{sen}(\omega t), \quad (42.11)$$

$$\mathcal{E}_0 = N \frac{\mu_0 \omega h (b^2 - a^2)}{4\pi \rho^2} I_0. \quad (42.12)$$

Esta fem promove a existência de uma corrente  $I'$  no solenoide, que aciona o mecanismo da auto-indução, associado a uma outra fem  $\mathcal{E}_{ai}$ , expressa por

$$\mathcal{E}_{ai} = -L \frac{dI'}{dt}, \quad (42.13)$$

contrária a  $\mathcal{E}_2$ . Assim, a corrente  $I'$  é obtida resolvendo a equação

$$\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_{ai} = R I' \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) - L \frac{dI'}{dt} = R I'. \quad (42.14)$$

Os métodos para resolver este tipo de equação são discutidos na parte 2 deste texto. Nós, aqui, apenas apresentamos a sua solução, que é dada por

$$I'(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R^2 + L^2\omega^2} [R \sin(\omega t) - \omega L \cos(\omega t)] \quad (42.15)$$

e pode ser verificada por substituição na eq.(42.14). Esta corrente oscila com a mesma frequência da corrente  $I$ , mas está defasada em relação a ela. O papel da auto-indutância  $L$  do solenoide neste resultado fica evidente quando o comparamos com o caso  $L \rightarrow 0$ , que corresponde a

$$I'(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sin(\omega t), \quad \text{no limite } L = 0. \quad (42.16)$$

## • o eletromagnetismo

O eletromagnetismo é a teoria que descreve interações de sistemas de cargas e correntes por meio de campos. Segundo a teoria, cargas e correntes em uma região do espaço criam campos, que podem causar forças sobre outras cargas e correntes, localizadas em outros lugares. Neste sentido, os campos são os mediadores das interações. Como vimos ao longo deste texto, a parte mais complexa da teoria é a que trata da criação dos campos, expressa matematicamente pelas quatro equações de Maxwell. Devido ao seu caráter introdutório, por razões pedagógicas, tratamos estas leis como entidades relativamente autônomas. No eletromagnetismo, entretanto, as quatro equações de Maxwell correspondem a facetas de uma única e poderosa estrutura conceitual. Tão poderosa e rica que possibilitou a Einstein perceber que a relatividade restrita estava escondida dentro dela. O tempo desempenha um papel muito importante no eletromagnetismo, pois é a presença dele na lei de Faraday e no termo de Maxwell da lei de Ampère-Maxwell que relaciona campos elétricos e magnéticos. Por isso, problemas envolvendo situações estáticas, nas quais cargas ou correntes não dependem do tempo, são relativamente simples. Quando estas cargas e correntes dependem do tempo, os campos elétrico e magnético se acoplam, dando origem a ondas eletromagnéticas, um dos fenômenos mais espetaculares preditos pela teoria.

## • exercícios

1. Mostre que a corrente  $I'(t)$  dada na eq.(42.15) é solução da eq.(42.14).

2. Este exercício trata do campo elétrico  $\vec{E}_2$  induzido pela variação temporal de  $\vec{B}_1$  entre as placas do capacitor discutido no exemplo.

a) Use argumentos qualitativos para justificar o fato de  $\vec{E}_2$  ser nulo no eixo do sistema.

b) Calcule o campo  $\vec{E}_2$  em função de  $r$ , a distância ao eixo do sistema e mostre que  $E_2/E_1 = -\omega^2 r^2/c^2$ , sendo  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  a velocidade da luz.