Propagação de erros

J.Kogler/2008

Objetivos:

Rever conceitos e procedimentos de como realizar a propagação dos erros

A.1. Erros instrumentais versus erros aleatórios

Erros *instrumentais* são intrínsecos à imprecisão dos instrumentos de medida e ao método de medição. Esses erros ocorrem de maneira conhecida, em contraposição aos chamados erros *aleatórios*. Erros instrumentais inerentes aos instrumentos utilizados são normalmente especificados pelo fabricante do instrumento, mas não podem ser eliminados, decorrem de fatores que vão do princípio de funcionamento à dispersão das características dos componentes usados para fabricá-lo. Todavia, os erros instrumentais podem ser estimados ou avaliados *a priori*, de modo a considerá-los na apresentação e processamento dos dados experimentais.

Os erros aleatórios advêm da flutuação estatística dos fenômenos, e da interferência de ruído (tanto o ruído externo, ambiental, quanto o ruído intrínseco ao processo), das irregularidades dos meios e materiais e de aspectos fenomenológicos que são intrinsecamente aleatórios.

É importante entender claramente essa distinção por que essas categorias de erros são tratadas de formas distintas, segundo diferentes técnicas ao se apresentar os resultados experimentais. Os erros instrumentais são conhecidos *a priori* e devem ser considerados usando-se métodos de propagação de erros, ao passo que os erros aleatórios são desconhecidos *a priori* e devem ser estimados utilizando-se métodos estatísticos.

A.2. Apresentação dos resultados experimentais

Independentemente da natureza do erro ser de origem sistemática ou aleatória, adotam-se alguns procedimentos para apresentação de dados experimentais que, desejavelmente, devem sempre ser utilizados em qualquer tipo de documentação técnica reportando grandezas medidas, seja um relatório de um experimento, seja em uma especificação técnica.

Uma grandeza medida é inexoravelmente afetada por um erro, ou desvio de medida. Todo instrumento apresenta uma incerteza inerente e a observação de um fenômeno físico não pode ser realizada sem a intervenção de uma incerteza de medida. A incerteza resulta das limitações e das imperfeições do instrumento ou do método de medida.

A incerteza de uma medida é representada por um intervalo (simétrico ou não) em torno do valor medido com a precisão que lhe é atribuída. A precisão dos extremos desse intervalo deve ser a mesma do valor da medida. A precisão é caracterizada pelos algarismos significativos da medida.

Exemplo A-2.1: em geral a leitura em uma escala graduada é considerada afetada de uma incerteza igual à metade da menor divisão da escala. Portanto, em uma escala em que a menor graduação é de 1 mA, poder-se-ia obter uma leitura como 3,3 mA $\pm$ 0,5 mA. Não haveria sentido nenhum em admitir um valor, obtido com o mesmo instrumento, como por exemplo 3,25 mA $\pm$ 0,5 mA, visto que a precisão da incerteza é menor.

Para a apresentação gráfica dos resultados, indica-se o erro em cada ponto experimental na forma de uma barra de tamanho igual ao comprimento do intervalo de incerteza em torno do ponto representado no gráfico. Note que a incerteza poderá estar presente tanto na variável independente quanto na dependente.

Muitas vezes não se apresentam as incertezas nas variáveis independentes, porém isso não quer dizer que as incertezas sejam nulas. Em geral, esses casos correspondem a situações em que a incerteza é de mesma amplitude para todo o domínio da variável independente. Outras vezes significa que não se dispõe do valor da incerteza ou não é possível estimá-la.

Todavia, o texto deve sempre mencionar qualquer um desses fatos em que se omite a apresentação gráfica da incerteza.

A figura A.1 apresenta um exemplo de gráfico com os valores das incertezas em ambas variáveis.

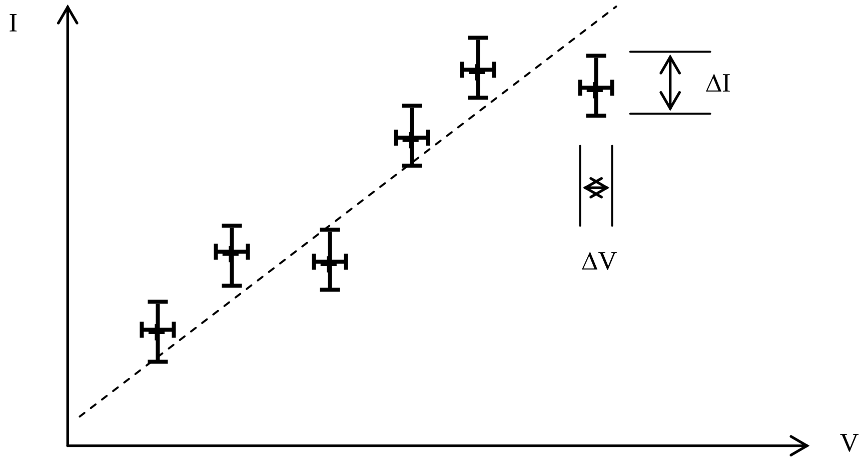

Figura A.1 – Gráfico com os valores das incertezas em ambas variáveis

As incertezas, tanto as instrumentais quanto as aleatórias, podem ser apresentadas como valores absolutos ou relativos. No caso de valor absoluto, apresenta-se o próprio valor numérico da incerteza em sua unidade de medida. No caso de valor relativo, apresenta-se o valor resultante da divisão do valor numérico da incerteza pelo valor da medida correspondente.

Exemplo A-2.2: suponha que uma dada tensão foi medida encontrando-se o valor de 6,2 V com um instrumento que apresenta uma incerteza de 0,1 V. Então a incerteza absoluta é de 0,1 V e a incerteza relativa é de (0,1 / 6,2) = 0,02 , ou 2%.

A.3. Propagação das incertezas

Os erros instrumentais são devidos às incertezas inerentes aos instrumentos e aos métodos de medida. Busca-se sempre diminuir ao máximo possível a extensão desses erros:

- através da seleção de instrumentos adequados
- operando-se corretamente os instrumentos (p.ex., usando-se as escalas mais apropriadas)
- cuidando para que a montagem do experimento seja bem feita e estável

- cuidando-se das condições ambientes de operação dos instrumentos e estabilizando-se o ambiente (quanto a temperatura, umidade e todas as demais variáveis relevantes)

Respeitadas essas condições, os desvios obtidos em cada medida individual das variáveis envolvidas devem ser propagados seguindo-se as regras de dependência funcional entre as variáveis. Isto é, devem-se usar diferentes tipos de regras de propagação de incertezas dependendo se as variáveis se combinam por adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação ou alguma outra forma de dependência funcional representável analiticamente. Note que, no caso de erros instrumentais, não há aspectos estatísticos envolvidos na propagação dos erros. Ademais, quando se faz uma análise estatística para avaliar os erros aleatórios, os erros instrumentais aparecem como tendências visíveis nas estatísticas e podem, em geral, ser facilmente separados das flutuações características dos erros aleatórios.

Casos de Propagação de Incertezas

A.3.1. Somas de grandezas

Seus erros absolutos somam-se também. Sejam $G1 \pm \Delta G1$ e $G2 \pm \Delta G2$ essas grandezas. Então, a grandeza $G3 \pm \Delta G3$ resultante da soma de G1 e G2 será dada por:

$$G3 \pm \Delta G3 = (G1 \pm \Delta G1) + (G2 \pm \Delta G2) =$$
$$= (G1 + G2) \pm (\Delta G1 + \Delta G2) \rightarrow \boxed{\Delta G3 = \Delta G1 + \Delta G2}$$

A.3.2. Diferenças de grandezas

Os erros absolutos somam-se novamente, como veremos a seguir.

Sejam $G1 \pm \Delta G1$ e $G2 \pm \Delta G2$ essas grandezas. Então, a grandeza $G3 \pm \Delta G3$ resultante da diferença de G1 e G2 será dada por:

$$G3 \pm \Delta G3 = (G1 \pm \Delta G1) - (G2 \pm \Delta G2) =$$
$$= (G1 - G2) \pm (\Delta G1 + \Delta G2) \rightarrow \Delta G3 = \Delta G1 + \Delta G2$$

já que, no pior caso, seria $\Delta G1$ positivo e $\Delta G2$ negativo (ou vice-versa).

A.3.3. Produtos de grandezas

Neste caso os erros relativos somam-se.

Sejam G1 $\pm$ ΔG1 e G2 $\pm$ ΔG2 essas grandezas. Então, a grandeza G3 $\pm$ ΔG3 resultante do produto de G1 e G2 será dada por:

$$G3 \pm \Delta G3 = (G1 \pm \Delta G1) \times (G2 \pm \Delta G2) =$$
$$= G1 \cdot G2 \pm G1 \cdot \Delta G2 \pm G2 \cdot \Delta G1 \pm \Delta G1 \cdot \Delta G2$$

A parcela ΔG1 . ΔG2 é uma variação de segunda ordem e seu valor situa-se abaixo da precisão admitida, portanto é descartada. Logo, resulta:

$$G3 \pm \Delta G3 = G1 \cdot G2 \pm (G1 \cdot \Delta G2 \pm G2 \cdot \Delta G1) \rightarrow \Delta G3 = G1 \cdot \Delta G2 \pm G2 \cdot \Delta G1$$

Como a grandeza G3 = G1 . G2 , então a incerteza relativa em G3 será dada por:

$$\frac{\Delta G3}{G3} = \frac{G1 \cdot \Delta G2 \pm G2 \cdot \Delta G1}{G1 \cdot G2} \rightarrow \boxed{\frac{\Delta G3}{G3} = \frac{\Delta G1}{G1} + \frac{\Delta G2}{G2}}$$

A.3.4. Quocientes de grandezas

Neste caso, novamente os erros relativos somam-se. Demonstre esse fato como exercício. Siga passos similares aos do caso anterior.

$$G3 = \frac{G1}{G2} \rightarrow \boxed{\frac{\Delta G3}{G3} = \frac{\Delta G1}{G1} + \frac{\Delta G2}{G2}}$$

A.3.5. Potenciação de uma grandeza

Quando uma grandeza G é elevada a uma potência de expoente k, seu erro relativo fica multiplicado por k. Isso decorre do caso mais geral, a ser visto no item A.3.6. Demonstre.

$$G2 = (G1)^k \rightarrow \boxed{\frac{\Delta G2}{G2} = k \cdot \frac{\Delta G1}{G1}}$$

A.3.6. Dependência funcional genérica

Quando uma grandeza G2 depende funcionalmente de outra grandeza G1, através de uma regra genérica G2 = f (G1) , pode-se obter o erro relativo de G2 através de uma expansão em série de Taylor. Para facilitar a notação , chamemos G2 de *y* e G1 de *x*, de modo que $y = f(x)$. Temos, então, expandindo-se $f(x)$ em série de Taylor em torno do ponto x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3f}{dx^3}(x - x_0)^3 + \ldots$$

Considerando-se : $x - x_0 = \Delta x$
vem, então :

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3f}{dx^3}\Delta x^3 + \ldots$$

Como fizemos anteriormente, vamos descartar os termos com expoente superior a 1 pois representam variações que vão além da precisão admitida. Portanto, resulta:

$$f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + \frac{df}{dx}\Delta x$$

Lembrando que a variação em y é : $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, vem:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{df}{dx}\Delta x \quad \rightarrow \quad \Delta y = \frac{df}{dx}\Delta x$$

Conclui-se então que: $\boxed{\Delta G2 = \frac{df}{dG1}\Delta G1}$

Exemplo A-3.1: seja G2 = log(G1). Então tem-se, com base no que foi visto no item A.3.6:

$$\frac{df}{dG1} = \frac{d}{dG1}\log G1 = \frac{1}{ln10}\frac{1}{G1} \quad \rightarrow \quad \Delta G2 = \frac{1}{ln10}\frac{\Delta G1}{G1}$$

A.4. Tratamento estatístico dos erros

Os erros aleatórios são tratados estatisticamente. Diferentemente dos erros instrumentais, os erros aleatórios não são conhecidos *a priori* e devem ser estimados como parte da caracterização dos resultados experimentais. Devem ser feitas diversas repetições das medidas para cada condição experimental, de modo a se obter uma estatística significativa.

Os erros instrumentais tornam-se conhecidos após um procedimento de calibração dos instrumentos e dos processos de medição. Essa calibração é também um procedimento estatístico, porém ela é feita antes da realização do experimento, por isso se diz que os erros instrumentais são conhecidos a priori. No caso dos instrumentos, os fabricantes devem fornecê-los calibrados. Entretanto, periodicamente é necessário realizar-se um processo de aferição para verificar se a calibração continua valendo ou se houve algum desvio devido ao envelhecimento dos componentes ou às condições de uso do instrumento.

Nesta experiência, consideram-se apenas os erros instrumentais, cujos valores fornecidos pelos fabricantes são apresentados ao longo da experiência. Portanto, não empregaremos o tratamento estatístico dos dados ou resultados.

Bibliografia

[1] – Bell, D.A. – Electronic Instrumentation and Measurements, Prentice-Hall, New York, NY. EUA, 1983

[2] – Vuolo, J.H. – Fundamentos da Teoria dos Erros. Editora Edgard Blücher, Ltda, São Paulo, SP, Brasil, 1992 – 2ª edição