Instituto de Física de São Carlos, USP – FCM 0101 – Física I – 2016

Diferenciação e integração para afobados.

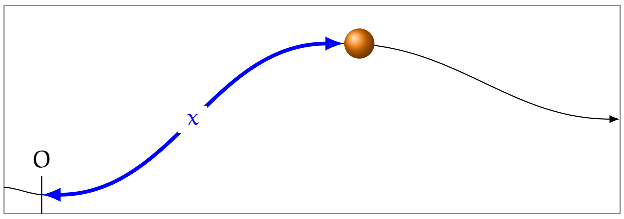
A disciplina Física I trabalha com alguns conceitos de Cálculo Diferencial e Integral que são discutidos, profunda e abrangentemente, na disciplina Cálculo I. Estas notas procuram apresentar os mesmos conceitos com ênfase em aspectos operacionais. Os objetivos são dois: (1) desenvolver rapidamente a linguagem matemática em que serão discutidas as Leis do Movimento de Newton e (2) oferecer uma visão esquemática da diferenciação e da integração que poderá servir de motivação para o aprendizado mais sistemático do Cálculo.

Aqui, nem tudo será demonstrado, e as demonstrações não terão o rigor que você encontrará nas disciplinas de Matemática. Mesmo assim, elas ajudarão a ganhar familiaridade com a notação, com as operações e com algumas expressões que serão repetidamente escritas no quadro negro ao longo do ano.

I. POSIÇÃO

Para descrever o movimento de uma partícula, precisamos saber onde ela está. Se conhecermos a trajetória da partícula, o procedimento simples mostrado na Fig. 1 associará um comprimento x a sua posição. Nas condições da figura, x é a distância a que o corpo está de um ponto de referência O, chamado de *origem*.

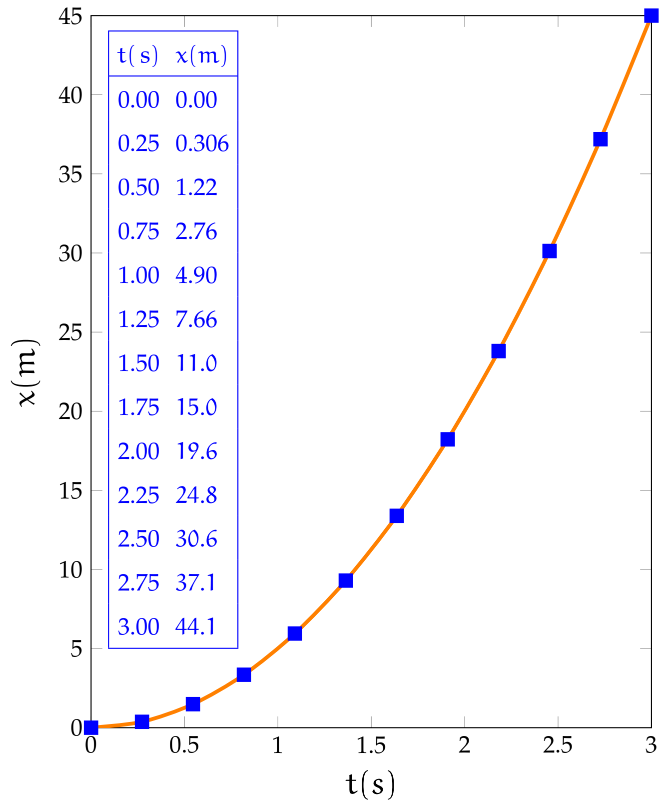
Figura 1 Movimento unidimensional. A posição da partícula é a distância x a que ela está da origem, medida ao longo da trajetória que a curva negra, mais fina, representa. Se ela estivesse à esquerda de O, na contramão do sentido indicado pela pequena seta na extremidade direita da trajetória, sua posição seria $-x$, negativa.



A história do movimento, isto é, a relação entre a posição x e o tempo t, pode ser apresentada de três formas: por meio de uma função, de uma tabela ou de um gráfico. Considere, por exemplo, uma pedra que cai a partir do repouso. Se o ponto de partida for a origem e o sentido descendente for positivo, a equação horária para a pedra no sistema MKS será

$$x = \alpha t^2, \tag{1}$$

onde $\alpha = 4.90\,\mathrm{m/s^2}$.



t(s)	x(m)
0.00	0.00
0.25	0.306
0.50	1.22
0.75	2.76
1.00	4.90
1.25	7.66
1.50	11.0
1.75	15.0
2.00	19.6
2.25	24.8
2.50	30.6
2.75	37.1
3.00	44.1

Figura 2 Posição de pedra que cai, em função do tempo. Os quadrados azuis representam os pontos da tabela, e a linha cheia representa a Eq. (1).

Se estivermos interessados apenas no intervalo $0 \leqslant t \leqslant 3\,\mathrm{s}$, poderemos fornecer aproximadamente a mesma informação por meio da tabela ou do gráfico da Fig. 2.

A. Velocidade

Intuitivamente, temos a noção de que velocidade é a distância percorrida por unidade de tempo. Vamos imaginar que no instante $t = t_1$ a partícula da Fig. 1 esteja na posição x_1 e que, pouco depois, em $t = t_2$, ela esteja em $x = x_2$. A distância andada será $\Delta x = x_2 - x_1$, e o tempo gasto, $\Delta t = t_2 - t_1$. Poderíamos então definir a velocidade como o quociente

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \tag{2}$$

mas essa expressão não é satisfatória.

Para entender por quê, vamos aplicar a Eq. (2) a três intervalos de tempo da tabela da Fig. 2: os intervalos $I_1 = (0:1)$

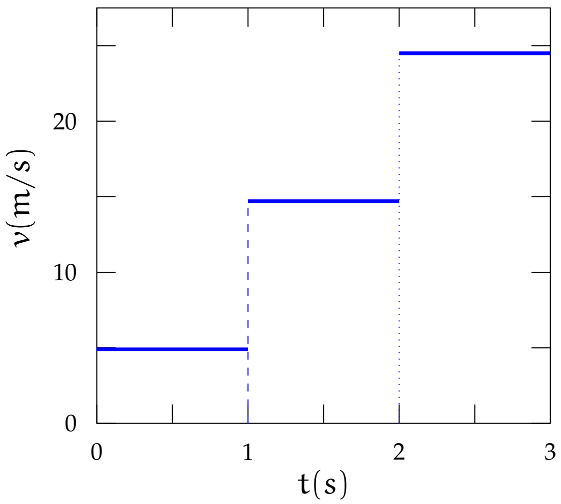


Figura 3 Velocidade média para o movimento descrito na Fig. 2, calculada em intervalos de um segundo, isto é, $I_1 = (0:1)$, $I_2 = (1:2)$ e $I_3 = (2:3)$.

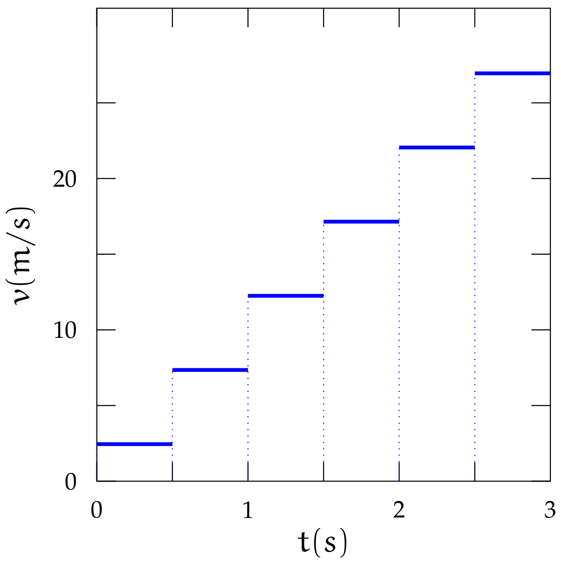


Figura 4 Velocidade média para o movimento descrito na Fig. 2, calculada em intervalos de 0.5 s.

(isto é, o intervalo que vai de 0 a 1 s); $I_2 = (1,2)$; e $I_3 = (2,3)$. Para o primeiro intervalo, a Eq. (2) nos diz que $v_{I_1} = 4.90\,\mathrm{m/s}$. Para o segundo, ela diz que $v_{I_2} = 14.7\,\mathrm{m/s}$. E para o terceiro, $v_{I_3} = 24.5\,\mathrm{m/s}$. O gráfico na Fig. 3 exibe os três resultados.

Como indica a figura, e como se espera de uma pedra que cai, a velocidade é crescente. Entretanto, ao contrário do que se espera, a velocidade na Fig. 3 cresce aos saltos. Além disso, para intervalos menores, tais como $I'_1 = (0:0.5)$, $I'_2 = (0.5:1)$, $\ldots$, $I'_6 = (2.5:3)$, como na Fig. 4, os resultados são diferentes. Assim, a definição (2) não parece promissora e a alternativa de se tomar $\Delta t = 0$ conduz ao resultado indefinido $v = 0/0$. Temos a impressão de ter entrado em uma rua sem saída.

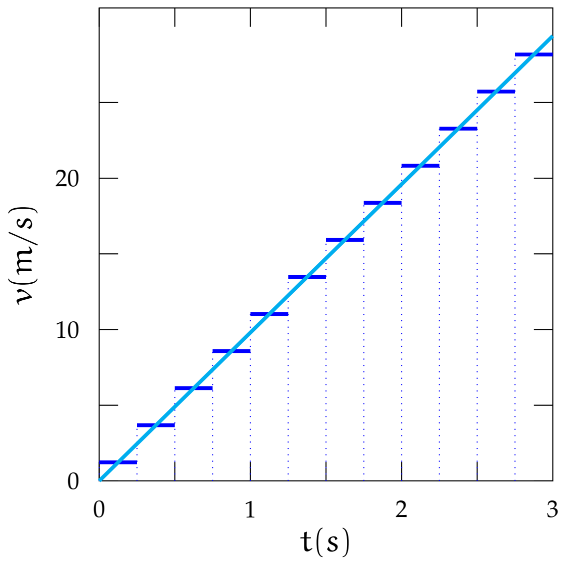


Figura 5 Velocidade média para o movimento descrito na Fig. 2, calculada em intervalos de 0.25s. Examinado na seqüência das Figs. 3 e 4, isto é, na seqüência de Δt decrescente, este gráfico indica que as velocidades médias se aproximam de uma função independente do intervalo de tempo, representada pela reta inclinada.

No entanto, se dermos mais um passo e dividirmos o tempo em intervalos ainda menores, tais como os $I''_1 = (0:0.25)$,$I''_2 = (0.25:0.5)$, $\ldots$, $I''_{12} = (2.75:3)$ da Fig. 5, poderemos ver luz no final do túnel. Ainda que os resultados sejam mais uma vez diferentes dos anteriores, vemos agora que a seqüência de velocidades calculadas em intervalos de tempo progressivamente menores se aproxima de uma curva suave — a reta tracejada da Fig. 5. Matematicamente, dizemos que a sequência tem um limite. Fisicamente, dizemos que a linha inclinada representa a velocidade em função do tempo.

B. Velocidade instantânea

Será que a seqüência de velocidades tende mesmo a uma função suave? Poderíamos continuar com a sucessão de cálculos aritméticos e gráficos como os das Figs. 3-5. Em algum momento, os intervalos Δt ficariam tão pequenos que seria impossível distinguir um gráfico do próximo a olho nu. Nesse ponto, poderíamos dizer que alcançamos a função suave que procurávamos, isto é, a função que descreve a velocidade em função do tempo. Dispomos, portanto, de um procedimento gráfico para encontrar a velocidade.

Na prática, em lugar do método gráfico, que é muito trabalhoso e pouco preciso, emprega-se um procedimento algébrico que acompanha o raciocínio definido pela sequência de Figs. 3-5. Calcula-se o lado direito da Eq. (2) para um intervalo de tempo Δt e procura-se mostrar que existe um valor limite $\bar{v}$ tal que a diferença entre $\bar{v}$ e o quociente $\Delta x/\Delta t$ diminua sistematicamente à medida que Δt diminui.

Vejamos como isso funciona para a posição dada pela Eq. (1). Escolhemos um instante inicial t_i e um final t_f. Segundo a Eq. (1), as posições nesses momentos são $x_i = \alpha t_i^2$ e $x_f = \alpha t_f^2$, respectivamente. O deslocamento $\Delta x = x_f - x_i$ é portanto $\Delta x = \alpha(t_f^2 - t_i^2)$, e a velocidade no intervalo é

$$v(t_i : t_f) = \frac{\alpha(t_f^2 - t_i^2)}{t_f - t_i}. \qquad (3)$$

O fator entre parênteses no numerador da fração à direita na Eq. (3) é o produto notável $t_f^2 - t_i^2 = (t_f + t_i)(t_f - t_i)$. Vemos portanto que

$$v(t_i : t_f) = \alpha(t_i + t_f). \qquad (4)$$

É fácil verificar que esse resultado reproduz cada uma das velocidades que encontramos nos 18 intervalos que consideramos na Seção I.A. Para o intervalo $I_1 = (0 : 1)$, por exemplo, a Eq. (4) dá $v = \alpha(0 + 1) = 4.90\,m/s$. E o que é mais importante, já que o denominador $t_f - t_i$ foi eliminado, ela permite que tomemos intervalos Δt arbitrariamente pequenos. Na Eq. (3), parece imprudente escolher t_f muito próximo de t_i porque o denominador se aproxima perigosamente de zero, mas a Eq. (4) está livre desse problema.

É verdade que a divisão por $\Delta t = t_f - t_i$ entre as Eqs. (3) e (4) nos proíbe de fazer $t_f = t_i$, mas podemos tomar t_f tão perto do ponto proibido quanto quisermos. Quanto mais próximos estivermos, mais próxima de $2t_i$ será a velocidade.

Assim, com erro arbitrariamente pequeno, tudo se passa como se pudéssemos fazer $t_f = t_i$. Dizemos que a velocidade se aproxima do limite $2t_i$ quando t_f *tende* a t_i e re-escrevemos a Eq. (4) na forma

$$v(t_i) = 2\alpha t_i \qquad (t_f \to t_i). \qquad (5)$$

O símbolo $t_f \to t_i$ indica que, fixado um erro tolerável qualquer, poderemos sempre escolher um instante t_f suficientemente próximo de t_i para garantir que, com desvio inferior ao erro prefixado, a velocidade média no intervalo $t_f - t_i$ seja aproximadamente igual a $2t_i$.

O gráfico da Eq. (5) em função do tempo é a linha inclinada na Fig. 5. Os degraus horizontais representam a aproximação dada pela Eq. (2). O procedimento que nos levou dos degraus até a reta inclinada empregou vários intervalos de tempo, mas no final o lado direito da Eq. (5) depende somente do instante t_i — independe de Δt.

Para recapitular, o procedimento consiste em (a) considerar o deslocamento $\Delta x = x_f - x_i$ entre dois instantes t_i e t_f, (b) simplificar algebricamente o cálculo de $v = \Delta x/\Delta t$ e (c) fazer $t_f \to t_i$. Matematicamente, ele é conhecido como tomar o *limite de* $\Delta x/\Delta t$ *quando* Δt *tende a zero* e denotado

$$v = \lim_{t\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (6)$$

Quando for necessário distinguir esse procedimento da expressão simples para a velocidade definida na Seção I.A, chamaremos o lado esquerdo da Eq. (6) de *velocidade instantânea* e o da Eq. (2) de *velocidade média*.

II. DERIVADA

Qualquer seja o movimento, o raciocínio que conduziu da Eq. (3) à Eq. (5) pode ser repetido. É claro que sempre precisaremos de uma precaução: simplificar a expressão $\Delta x/\Delta t$ para eliminar o intervalo Δt do denominador antes de fazer $t_f = t_i$. Se, por precipitação, quisermos fazer $t_f \to t_i$ antes de simplificar o quociente, cairemos inevitavelmente na expressão vazia $v = 0/0$.

Eliminar o intervalo Δt do denominador requer alguma habilidade matemática. Por exemplo, somente pudemos simplificar a Eq. (3) e obter a Eq. (4) porque conhecíamos o produto notável $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Em outras circunstâncias, as identidades algébricas exigidas poderão ser menos conhecidas. O procedimento, entretanto, é sempre relativamente simples. E como já foi explicado, nos casos de interesse físico o limite à direita na Eq. (6) sempre pode ser tomado.

A sequência de operações descrita resumidamente pela Eq. (6) foi descoberta na segunda metade do Século XVII, por Isaac Newton, na Inglaterra, e Gottfried Leibnitz, na Alemanha. Antes deles, a noção de que a velocidade $v = \Delta x/\Delta t$ tinha de ser calculada para $\Delta t = 0$ causava perplexidade. Os dois grandes matemáticos perceberam que não é necessário efetuar o quociente com $\Delta t = 0$: basta mostrar que existe um valor limite $\bar{v}$ do qual o quociente $\Delta x/\Delta t$ se torna arbitrariamente próximo à medida que Δt se aproxima de zero.

A Eq. (6) pode ser vista como um procedimento que extrai de uma função $v(t)$ de outra função $x(t)$. A velocidade é a função derivada de $x(t)$ por meio desses procedimento. Mais especificamente se diz que $v(t)$ é a *derivada de* $x(t)$ *em relação ao tempo*. Para simplificar, em lugar da complicada composição de símbolos no lado direito da Eq. (6), se adota a notação equivalente

$$v = \frac{dx}{dt}. \qquad (7)$$

A expressão compacta $v = \dot{x}(t)$ é também empregada, mas a Eq. (7), notação introduzida por Leibnitz, é mais instrutiva, porque nos faz lembrar que a Eq. (6) é uma versão refinada da Eq. (2). Quando calculamos $v(t)$ a partir de $x(t)$, dizemos que estamos *derivando* ou *diferenciando* a função $x(t)$.

O conceito de derivada, como veremos mais adiante, tem muitas outras aplicações além do cálculo de velocidades. Dada uma função $f(x)$, onde x é uma variável qualquer, podemos calcular sua derivada df/dx em relação a x:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \qquad (8)$$

Tabela I Regras elementares de derivação. Os símbolos c e n denotam constantes, que podem até ser complexas. Nas colunas da esquerda, g e h são duas funções quaisquer de x, e $g[h(x)]$ indica a função g da função h de x. A última regra no painel A somente será discutida na Seção III.

Painel I.A		Painel I.B	
$f(x)$	df/dx	$f(x)$	df/dx
c	0	x^n	nx^{n-1}
$c\,g(x)$	$c\,dg/dx$	$\mathrm{sen}(x)$	$\cos(x)$
$g(x)+h(x)$	$dg/dx+dh/dx$	$\cos(x)$	$-\mathrm{sen}(x)$
$g(x)\,h(x)$	$h\,dg/dx+g\,dh/dx$	$\mathrm{tg}(x)$	$\sec^2(x)$
$g(x)/h(x)$	$(h\,dg/dx-g\,dh/dx)/h^2$	$\mathrm{cotg}(x)$	$-\mathrm{cossec}^2(x)$
$g[h(x)]$	$(dg/dh)(dh/dx)$	$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\int g(x)\,dx$	$g(x)$	$\ln(x)$	$1/x$

A Eq. (6) é um caso particular.

Se um dia você se esquecer da Eq. (8), a notação df/dx ajudará a recuperar o significado da derivada. Acostume-se a imaginar que df e dx representam Δf e Δt nas vizinhanças de $\Delta t = 0$. Não é bem verdade, mas ajuda a pensar, assim como imaginar que os personagens têm vontade própria ajuda a jogar video game. De quebra, a notação de Leibnitz nos faz lembrar que a dimensão da derivada é a dimensão da variável f dividida pela dimensão de x. A velocidade, por exemplo, é a derivada dx/dt. Logo, tem dimensão de m/s.

A. Regras elementares de derivação

O movimento nem sempre é tão simples como a queda de uma pedra. A posição de uma massa presa a uma mola, por exemplo, pode ser dada por $x(t) = e^{-t}\Big(\cos(t) + \mathrm{sen}(t)\Big)$. Para calcular a velocidade, poderíamos aplicar a definição de derivada, isto é, computar $x_i = x(t_i)$, em seguida $x_f = x(t_f)$, efetuar a subtração, manipular o resultado até conseguir fatorar Δt, dividir por Δt e finalmente deixar $\Delta t \to 0$.

Se tivéssemos de fazer tudo isso toda vez que encontrássemos uma função nova, diferenciar seria mais cansativo do que correr a maratona numa perna só. Felizmente, há uma alternativa bem mais prática. A Tabela I lista regras simples que permitem diferenciar qualquer função de interesse prático.

O Painel I.A lista regras gerais, válidas para quaisquer funções. No Painel I.B aparecem as derivadas das funções mais frequentemente encontradas. Entre estas, as mais importantes são a função potência, na primeira linha, as funções seno e cosseno, na segunda e na terceira, respectivamente, e a função exponencial, na penúltima. A primeira linha é conhecida como *regra do tombo*, porque a diferenciação traz o expoente n para baixo. A função exponencial é notável porque permanece invariante sob diferenciação.

No lado esquerdo, sobressaem a quarta linha, conhecida como *regra de Leibniz*, e a sexta, conhecida como *regra da cadeia*. A regra da cadeia é importantíssima, porque sem ela estaríamos restritos a funções relativamente simples, como as que aparecem no Painel I.B.

A função $f(x) = \exp(\pi x)$, por exemplo, não aparece na tabela. Não obstante, podemos escrevê-la na forma $f(x) = g[h(x)]$, onde $g(h) = \exp(h)$ e $h(x) = \pi x$. A tabela nos diz que $dg/dh = \exp(h)$ (penúltima linha à direita) e que $dh/dx = \pi x$ (segunda linha à esquerda). Assim, a regra da cadeia mostra que $df/dx = \pi \exp(\pi x)$.

De maneira geral, para calcular a derivada de uma função complicada basta re-escrevê-la como soma, produto ou quociente de funções mais simples ou de funções de funções e calcular, uma a uma, as derivadas das partes.

Para demonstrar as regras listadas na Tabela I precisamos escrever $\Delta f = f(x_f) - f(x_i)$ na forma fatorada $\Delta f = \tilde{f}\Delta x$, onde $\tilde{f}$ é uma expressão matemática que assume um valor bem definido quando $\Delta x \to 0$.

B. Regra do tombo para $n = 3$

Como primeior exemplo, vamos diferenciar a função

$$f(x) = x^3, \tag{9}$$

um caso particular da regra do tombo. Para calcular a derivada, temos de notar que

$$\Delta f = x_f^3 - x_i^3 = (x_f^2 + x_i x_f + x_f^2)(x_f - x_i), \tag{10}$$

ou seja que

$$x_f^2 - x_i^2 = (x_f^2 + x_i x_f + x_f^2)\Delta x. \tag{11}$$

Dito de outra forma, temos que $\Delta f = \tilde{f}\Delta x$, onde $\tilde{f} = x_f^2 + x_i x_f + x_f^2$. Como $\tilde{f}$ tende a um valor bem definido ($\tilde{f} = 3x_i^2$) quando $\Delta x \to 0$, o nosso problema está resolvido, e concluímos que

$$\frac{df}{dx} = 3x^2. \tag{12}$$

Em outros casos, o fatoramento é menos evidente e pode exigir dedução. Para ajudar, a Tabela II lista cinco resultados que se tornam progressivamente mais precisos quando $\epsilon \to 0$ e que simplificam a tarefa de fatorar Δx nas três primeiras e nas duas últimas linhas do Painel I.B. A demonstração dessas igualdade pertence à disciplina Cálculo I.

Tabela II Expressões matemáticas úteis para se demonstrarem as regras de derivação no painel I.A da Tabela I. Em todos os casos, o erro é também indicado, para mostrar que as relações se tornam mais precisas à medida que $\epsilon \to 0$: o símbolo $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, por exemplo, significa que o erro é proporcional a ϵ^2, pequeníssimo quando ϵ é pequeno. Na primeira linha, n é um número qualquer.

$(1+\epsilon)^n =$	$1 + n\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$
$\mathrm{sen}(\epsilon) =$	$\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^3)$
$\cos(\epsilon) =$	$1 - \epsilon^2/2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)$
$\exp(\epsilon) =$	$1 + \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$
$\ln(1+\epsilon) =$	$\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$

C. Regra de Leibnitz

Trataremos, agora, da regra de Leibnitz, para o produto de duas funções (quarta linha do Painel I.A). Para isso, calcularemos a razão $\Delta f/\Delta x$ em dois pontos vizinhos, $x = x_i$ e $x = x_f$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{g(x_f)h(x_f) - g(x_i)h(x_i)}{x_f - x_i}. \tag{13}$$

Como sempre acontece, o denominador à direita se anula quando $x_f = x_i$.

Para eliminar a diferença $x_f - x_i$ do denominador, somamos e subtraímos $g(x_i)h(x_f)$ ao numerador:

$$\frac{df}{dx} = \frac{g(x_f)h(x_f) - g(x_i)h(x_f) + g(x_i)h(x_f) - g(x_i)h(x_i)}{x_f - x_i}. \tag{14}$$

Podemos agora fatorar $h(x_f)$ nos dois primeiros termos do numerador e $g(x_i)$ nos dois últimos:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\Big(g(x_f) - g(x_i)\Big)h(x_f) + g(x_i)\Big(h(x_f) - h(x_i)\Big)}{x_f - x_i}. \tag{15}$$

Quando $x_f \to x_i$, a fração $\Big(g(x_f) - g(x_i)\Big)/(x_f - x_i)$ se aproxima de dg/dx e a fração $\Big(h(x_f) - h(x_i)\Big)/(x_f - x_i)$ se aproxima de dh/dx. A Eq. (15) é portanto equivalente à igualdade

$$\frac{df}{dx} = h(x)\frac{dg}{dx} + g(x)\frac{dh}{dx}, \tag{16}$$

onde, para simplificar, escrevemos x em lugar de x_i e de x_f no limite em que $x_f \to x_i$.

Como exemplo de aplicação da regra de Leibnitz, podemos calcular a velocidade v que corresponde a $x(t) = e^t\,\mathrm{sen}(t)$. Segundo o Painel I.B, a derivada da função e^t é a própria exponencial, e a derivada de $\mathrm{sen}(t)$ é $\cos(t)$. Assim, $v(t) = e^t\,\mathrm{sen}(t) + e^t\cos(t)$, ou seja, $v(t) = e^t[\mathrm{sen}(t) + \cos(t)]$.

D. A função seno

Para derivar o seno, partimos da definição de derivada:

$$\frac{\Delta\,\mathrm{sen}(x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{sen}(x+\Delta x) - \mathrm{sen}(x)}{\Delta x}, \tag{17}$$

e expandimos o seno da soma no numerador, à direita:

$$\frac{\Delta\,\mathrm{sen}(x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{sen}(x)\cos(\Delta x) + \mathrm{sen}(\Delta x)\cos(x) - \mathrm{sen}(x)}{\Delta x}. \tag{18}$$

Para pequenos Δx, a Tabelal II nos diz que $\mathrm{sen}(\Delta x) \approx \Delta x$, enquanto $\cos(\Delta x) \approx 1 - (\Delta x)^2/2$. Assim, a Eq. (18) pode ser escrita como

$$\frac{\Delta\,\mathrm{sen}(x)}{\Delta x} \approx \frac{\mathrm{sen}(x)\Big(1 - (\Delta x)^2/2\Big) + \Delta x\cos(x) - \mathrm{sen}(x)}{\Delta x}, \tag{19}$$

ou, após simplificação do lado direito,

$$\frac{\Delta\,\mathrm{sen}(x)}{\Delta x} \approx \frac{-\,\mathrm{sen}(x)(\Delta x)^2/2 + \Delta x\cos(x)}{\Delta x}. \tag{20}$$

Efetuada a divisão por Δx, teremos que

$$\frac{\Delta\,\mathrm{sen}(x)}{dx} \approx \cos(x) - \mathrm{sen}(x)\Delta x/2. \tag{21}$$

Podemos finalmente deixar $\Delta x \to 0$, o que elimina o segundo termo à direita e transforma a aproximação na Eq. (21) em uma relação exata:

$$\frac{d\,\mathrm{sen}(x)}{dx} = \cos(x). \tag{22}$$

E. A função exponencial

Mais uma vez, partimos da definição:

$$\frac{\Delta\exp(x)}{\Delta x} = \frac{\exp(x+\Delta x) - \exp(x)}{\Delta x}, \tag{23}$$

e, lembrando que $\exp(x+\Delta x) = \exp(x)\exp(\Delta x)$, fatoramos o $\exp(x)$ que comparece nos dois termos do numerador à direita:

$$\frac{\Delta\exp(x)}{\Delta x} = \frac{\exp(x)\Big(\exp(\Delta x) - 1\Big)}{\Delta x}. \tag{24}$$

Para pequenos Δx's, a Tabela II nos mostra que $\exp(\Delta x) - 1 \approx \Delta x$. Assim, a Eq. (24) se converte em

$$\frac{\Delta\exp(x)}{\Delta x} \approx \frac{\exp(x)\Delta x}{\Delta x}, \tag{25}$$

e, dividido o numerador por Δx, vemos que, para $\Delta x \to 0$,

$$\frac{d\exp(x)}{dx} = \exp(x). \tag{26}$$

F. A regra da cadeia

A regra da cadeia segue imediatamente da identidade

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta g}\frac{\Delta g}{\Delta x}; \tag{27}$$

basta tomar o limite em que $\Delta x \to 0$, o que faz com que Δg também se aproxime de zero.

Na prática, para aplicar a regra, convém pensar na função $g(x)$ como se fosse uma nova variável. Como exemplo, considere a função $f(x) = \text{sen}(2x)$. Convém escrever $f(x) = \text{sen}(g)$, onde $g(x) = 2x$. A regra da cadeia nos dá então que

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}. \tag{28}$$

Cada uma das duas derivadas à direita aparece no Painel I.B: $d\,\text{sen}(g)/dg = \cos(g)$ e $d(2x)/dx = 2$. Assim,

$$\frac{df}{dx} = 2\cos(2x). \tag{29}$$

O argumento do cosseno é $g = 2x$ — e não x.

Como outra ilustração, vamos obter a derivada da função logaritmo. Este exemplo é mais complexo e você poderá querer deixá-lo de lado numa primeira leitura.Seja, pois, $f(x) = \ln(x)$. O logaritmo (neperiano) é o inverso da função exponencial. Assim,

$$\exp(f) = x. \tag{30}$$

Vamos diferenciar os dois lados em relação a x. À esquerda, aplicamos a regra da cadeia e com isso temos que

$$\frac{d\exp(f)}{df}\frac{df}{dx} = 1. \tag{31}$$

Assim vemos que

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\exp(f)}. \tag{32}$$

Esse resultado é insatisfatório, porque expressa a derivada em função de f, e nós queremos a derivada em função de x. Dada a Eq. (30), porém, podemos imediatamente ver que

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x}, \tag{33}$$

que é a regra elementar encontrada na última linha do Painel I.B.

G. Interpretação gráfica da derivada

Dada uma função $f(x)$, podemos sempre mostrá-la em gráfico, como o da Fig. 2. Podemos também acompanhar graficamente os passos que, em um ponto x qualquer, definem a derivada. A Fig. 6 mostra a função $f(x)$, que queremos diferenciar em $x = x_A$. O ponto A tem abscissa x_A e ordenada $f(x_A)$.

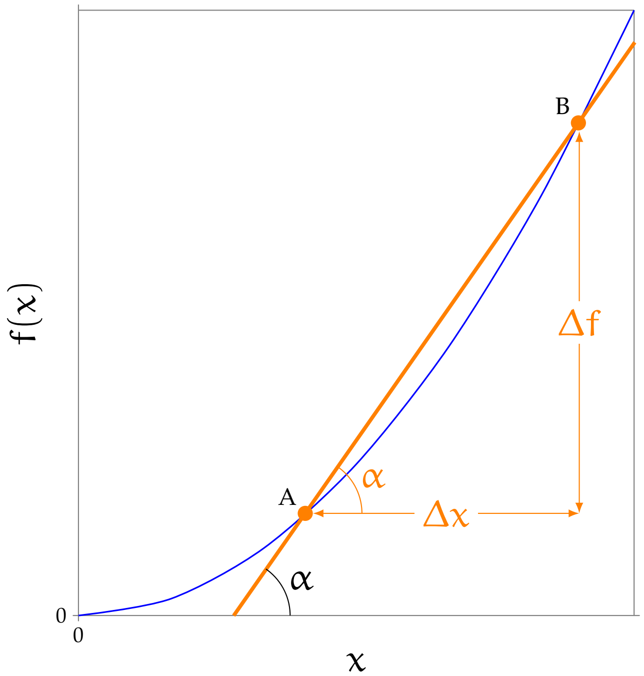


Figura 6 Interpretação gráfica do quociente $\Delta f/\Delta x$. A partir de dois pontos A e B sobre a curva, podemos construir o triângulo retângulo indicado, cuja base é $\Delta x = x_B - x_A$ e cuja altura é $\Delta f = f(x_B) - f(x_A)$. A tangente do ângulo α é então a razão entre o cateto oposto e o adjacente, isto é, $\text{tg}\ \alpha = \Delta f/\Delta x$.

Para obter uma aproximação $\Delta f/\Delta x$ para a derivada df/dx, escolhemos um segundo ponto B e tomamos $\Delta x = x_B - x_A$. Assim, $\Delta f = f(x_B) - f(x_A)$. No triângulo retângulo indicado em laranja na figura, a tangente do ângulo α é a razão entre o cateto oposto Δf e o cateto adjacente Δx. Em outras palavras, a tangente do ângulo entre a reta que passa por A e B e a horizontal coincide com nossa aproximação para a derivada: $\text{tg}\,\alpha = \Delta f/\Delta x$.

O primeiro ponto mantido fixo, podemos agora aproximar B de A. O valor de $\Delta f/\Delta x$ e o ângulo α poderão mudar, mas a relação $\text{tg}\ \alpha = \Delta f/\Delta x$ será preservada, como mostra a Fig. 7

Podemos portanto aproximar o ponto B de A sem alterar a igualdade $\text{tg}(\alpha) = df/dx$. Para Δx suficientemente pequeno, o triângulo retângulo indicado nas Figs. 6 e 7 se tornará microscópico. Ainda assim, como mostra a Fig. 8, não teremos dificuldade em traçar a reta AB, que se aproxima da tangente à curva $f(x)$ no ponto A. No limite em que $\Delta x \to 0$, portanto, α é o ângulo entre a reta tangente e a horizontal, e $df/dx = \text{tg}\ \alpha$.

Vejamos o que acontece no caso particularmente simples de uma função linear, $f(x) = ax + b$. Sabemos da geometria analítica que o gráfico de $f(x)$ em função de x é uma reta que intercepta o eixo das ordenadas no ponto $y = b$ e tem inclinação igual a a. Significa que $\text{tg}(\alpha) = a$, onde α é o ângulo que a reta faz com a horizontal.

A interpretação geométrica mostra, portanto, que a derivada da função $f(x) = ax + b$ é o coeficiente a, para qualquer

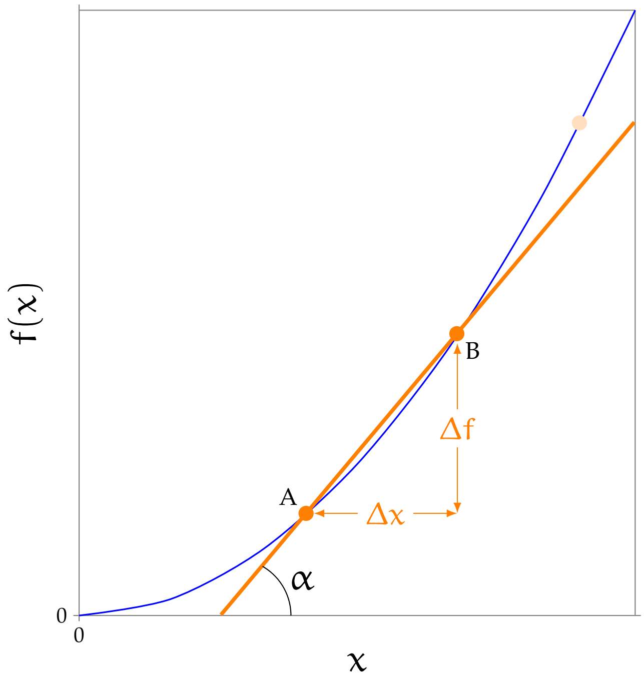


Figura 7 Repetição do procedimento gráfico da Fig. 6 para um valor menor de Δx. O ângulo α é alterado, mas tg α ainda é igual a $\Delta f/\Delta x$

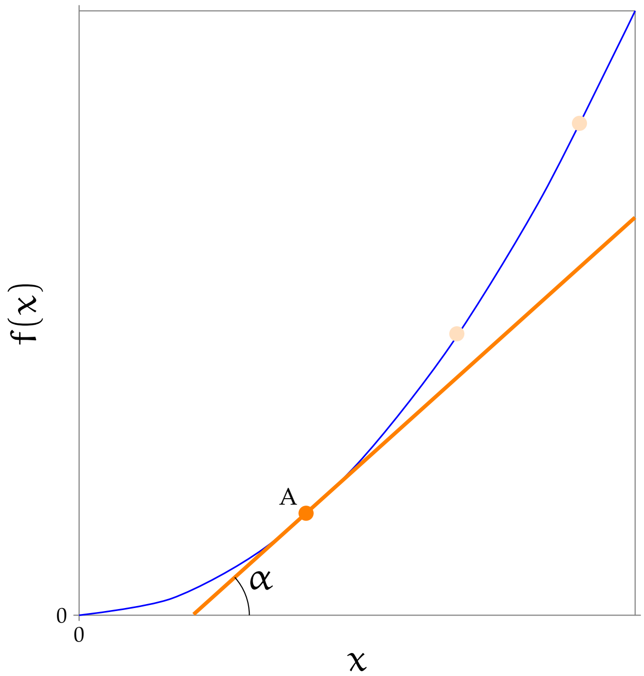


Figura 8 Repetição do procedimento das Figs. 6 e 7 para $\Delta x \to 0$. Com o ponto B muito próximo de A, o triângulo cuja hipotenusa é o segmento AB se torna invisível na escala da figura, e a reta que passa por A e B se aproxima da tangente à curva $f(x)$ no ponto A. A derivada df/dx é portanto a inclinação da reta tangente, isto é, $df/dx = \text{tg } \alpha$, onde α é o ângulo que a tangente forma com a horizontal.

valor de x. Com ajuda do Painel I.B você poderá facilmente chegar à mesma conclusão, isto é, mostrar analiticamente que $df/dx = a$.

Vemos que df/dx nada mais é que uma extensão do conceito de inclinação. Para uma função linear $ax + b$, a derivada é a inclinação a da reta que a representa. Para qualquer outra função, a derivada em um dado ponto é a inclinação da reta que a tangencia naquele ponto.

Em particular, se a tangente à curva for horizontal, df/dx será zero. A derivada nula, portanto, indica que a função está passando por um extremo, normalmente um máximo ou um mínimo. Assim, por exemplo, podemos facilmente identificar o extremo do trinômio $y(x) = ax^2 + bx + c$: basta calcular $dy/dx = 2ax + b$ e igualar a zero. Encontramos então que $x = -b/2a$, que como você deve saber, é a abscissa do extremo.

III. INTEGRAÇÃO

Nas Seções I.B-II.A aprendemos a calcular a velocidade de uma partícula a partir de sua posição. Dada a função $x(t)$, as regras elementares da Tabela I permitem encontrar $v = dx/dt$. Cabe perguntar, agora, se o problema inverso tem solução, isto é, se poderemos encontrar a posição $x(t)$ a partir da função $v(t)$.

A primeira vista, pode parecer fácil responder. Lido de trás para a frente, o lado direito do Painel I.B associa uma função $f(x)$ a cada derivada df/dx ali listada. Se a velocidade for $dx/dt = \cos(t)$, por exemplo, a tabela parece dizer que $x(t) = \text{sen}(t)$ — muito simples. Na prática, porém, quem precisa calcular a posição a partir da velocidade encontra duas dificuldades. A primeira delas, que pode ser facilmente contornada, será discutida na Seção III.A. Trataremos da segunda, que é mais complexa, na Seção III.C.

A. Função primitiva

Para calcular a posição de uma partícula, não basta conhecer a sua velocidade. Saber que um ônibus provindo de São Paulo se dirige a São Carlos pela Rodovia dos Bandeirantes a $90\,\text{km/h}$ não é suficiente para localizar o veículo. Uma informação adicional é sempre necessária: a posição em que ele se encontrava há meia hora, por exemplo.

Assim, para determinar a posição x da partícula em função do tempo, precisamos conhecer a sua velocidade em função do tempo e a sua posição em um dado instante. Sem essa informação adicional, somente poderemos encontrar $x(t)$ a menos de uma constante, que permanecerá desconhecida até dispormos do dado que falta.

Matematicamente, é fácil chegar à mesma conclusão. Digamos que, dada a velocidade $v(t)$ de uma partícula, um indivíduo A encontra uma função $x_A(t)$ tal que $dx_A/dt = v(t)$.

Seria incorreto ele inferir que a posição da partícula é dada por $x_A(t)$ porque qualquer função $x(t) = x_A(t) + c$, onde c é uma constante, também satisfaria à condição $dx/dt = v(t)$. De fato, a diferença entre $x(t)$ e $x_A(t)$ é a constante c. A diferença entre as derivadas dx/dt e dx_A/dt é portanto dc/dt, que é igual a zero. Concluímos que, embora diferentes, as posições descritas por $x(t)$ e por $x_A(t)$ geram a mesma velocidade $dx/dt = dx_A/dt = v(t)$.

Dizemos que as $x_A(t)$ e $x(t)$ são funções *primitivas* da velocidade, já que suas derivadas são iguais a $v(t)$. Como a constante c pode ser um número qualquer, vemos que $v(t)$ tem uma infinidade de primitivas, que diferem umas das outras por constantes. Para identificar a primitiva que descreve corretamente o movimento da partícula, precisamos conhecer a posição em um instante dado, pois a partir da posição poderemos determinar a constante c.

B. Integral indefinida

Para que possamos trabalhar antes de encontrar a constante c, é conveniente escolher um nome para denominar as funções primitivas de forma geral, sem referência específica a c. Chama-se, assim, de *integral indefinida de* $v(t)$ *em relação ao tempo* a uma primitiva genérica da velocidade. O adjetivo *indefinida* nos ajuda a lembrar que ela é imperfeitamente conhecida: falta encontrar a constante.

A notação $\int v(t)\,dt$ descreve a integral indefinida. O termo entre o sinal de integração ($\int$) e o *diferencial* (dt) é chamado de *integrando*. Toda integral tem um integrando e um diferencial. Se o integrando for unitário, é dispensável escrevê-lo, mas em todos os outros casos, tanto ele como o diferencial deverão aparecer, à direita do sinal de integral. Acostume-se a pensar no sinal de integração e no diferencial como um par indissociável. A variável que aparece no diferencial (t, no caso) é chamada de *variável de integração*.

Um exemplo de integral indefinida aparece na última linha do Painel I.A, a qual enuncia uma regra que agora podemos entender: dada uma função $g(x)$ qualquer, a integral indefinida $\int g(x)\,dx$ é uma sua primitiva. Assim, a derivada da integral indefinida é a própria função $g(x)$. No caso da função velocidade, a regra se escreve da seguinte forma:

$$x(t) = \int v(t)\ dt \Rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt}. \tag{34}$$

C. Regras elementares de integração

Para calcular a integral indefinida de uma função $f(x)$, precisamos encontrar uma primitiva — uma função $F(x)$ tal que $dF/dx = f(x)$. Isso nem sempre é fácil, mas o Painel I.B, lido de trás para a frente, atende à maioria de nossas necessidades. Para ajudar, o Painel III.B da Tabela III reproduz os resultados numa forma que facilita identificar as primitivas. Para provar os

Tabela III Regras práticas de integração. Toda as integrais são indefinidas — uma constante pode ser adicionada ao lado direito de cada igualdade. Como na Tabela I, c e n são constantes. Nas primeiras linhas, $u(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ são funções quaisquer. G e H [abreviações de $G(x)$ e $H(x)$] são as primitivas de g e h, respectivamente.

$\int cg(x)\,dx =$	$c\int g(x)\,dx$
$\int g(x)+h(x)\,dx =$	$\int g(x)\,dx + \int h(x)\,dx$
$\int G(x)\,h(x)\,dx =$	$GH - \int g(x)H(x)\,dx$
$\int g(x)\,dx =$	$\int g(u)\frac{dx}{du}\,du$
$\int x^n\,dx =$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\int \operatorname{sen} x\,dx =$	$-\cos x$
$\int \cos x\,dx =$	$\operatorname{sen} x$
$\int (\operatorname{sen} x)^{-2}\,dx =$	$-\operatorname{cotg} x$
$\int (\cos x)^{-2}\,dx =$	$\operatorname{tg} x$
$\int \exp(x)\,dx =$	$\exp(x)$
$\int (1/x)\,dx =$	$\ln(x)$
$\int 1/(1+x^2)\,dx =$	$\operatorname{arctg}(x)$
$\int 1/\sqrt{1-x^2}\,dx =$	$\operatorname{arcsen}(x)$

resultados nas sete primeiras linhas, basta derivar ambos os lados em relação a x, com auxílio do Painel I.B. Os resultados nas duas últimas linhas do Painel III.B exigem diferenciação das funções $\operatorname{arctg}(x)$ e $\operatorname{arcsen}(x)$, dois exercícios que você deve deixar para uma segunda leitura deste texto. Alternativamente, os dois resultados podem ser obtidos via mudança de variável, como explicado no final desta seção.

As terceira e quarta linhas da Tabelal III têm nomes especiais: a terceira é chamada de *integração por partes* e a quarta de *regra da cadeia para integração*. O exercício pleno dessas duas regras requer prática que só a disciplina Cálculo I poderá oferecer. Aqui, faremos algumas aplicações, a título de ilustração.

Quando o integrando é um produto de duas funções, a integração por partes pode ser útil. Para isso, a derivada de uma das funções precisa ser mais simples do que a própria função. Por exemplo, considere a integral

$$I(x) = \int xe^x\,dx. \tag{35}$$

O integrando é o produto de x por e^x. Para integrar por partes, na notação do Tabelal III, precisamos escolher uma função como $G(x)$ e a outra como $h(x)$. Não convém escolher a exponencial para ser G, porque a derivada da exponencial é a própria exponencial. Melhor é escolher $G(x) = x$ e $h(x) = e^x$. Segue então que $g(x) = 1$ (a derivada da função

x) e $H(x) = e^x$ (a integral indefinida da exponencial). Concluímos portanto que

$$I(x) = xe^x - \int e^x \, dx, \tag{36}$$

ou seja,

$$I(x) = xe^x - e^x, \tag{37}$$

ou se fatorarmos o exponencial do lado direito

$$I(x) = e^x(x-1). \tag{38}$$

De maneira geral, para efetuar uma integração por partes, precisamos (1) conhecer a integral $H(x)$ da função $h(x)$ e (2) saber efetuar a integral $\int g(x)H(x)\,dx$. Isso nem sempre é fácil. Mesmo assim, convém memorizar a terceira linha da Tabela III porque ela pode ser bem conveniente, como no exemplo acima.

Na prática, a regra da cadeia para integração é mais útil. Quase sempre precisamos mudar de variável porque só excepcionalmente encontraremos integrais como $\int e^x \, dx$ ou $\int \mathrm{tg}(x)\,dx$. Na física, os argumentos das funções geralmente vêm multiplicados por constantes. Funções como $e^{t/\tau}$, onde τ é uma constante com dimensão de tempo, ou $\mathrm{tg}(\pi x)$ são a regra.

Em tais casos, as expressões nas linhas de baixo da Tabela III seriam inúteis se não pudéssemos mudar a variável de integração. O seguinte exemplo serve como ilustração.

A integral indefinida $\int e^{-x/L}\,dx$, onde L é uma constante com dimensão de x, aparece com frequência em todas as áreas da física. Na Tabela III encontramos a integral da exponencial simples, mas não a exponencial de $-x/L$. Felizmente, é fácil transformar a integral que desejamos na que conhecemos por meio de uma mudança de variáveis. Para isso, definimos a variável adimensional

$$u = -\frac{x}{L}. \tag{39}$$

Segue que $x = -Lu$ e, portanto,

$$\frac{dx}{du} = -L \tag{40}$$

Poemos agora empregar a regra da cadeia para integração, segundo a qual

$$\int e^{-x/L}\,dx = \int e^u \frac{dx}{du}\,du.. \tag{41}$$

Substituímos, então, a derivada no lado direito pelo resultado expresso na Eq. (40), e concluímos que

$$\int e^u \,dx = -L\int e^u \,du, \tag{42}$$

pois $-L$ é uma constante, que pode sair da integral.

Por outro lado, a Tabela III nos diz que $\int e^u\,du = e^u$, e assim vemos que

$$\int e^{-x/L}\,dx = -Le^{-x/L}. \tag{43}$$

Como o exemplo das Eqs. (39)-(43) mostra, sempre que o argumento do integrando for uma constante multiplicada pela variável de integração [$-(1/L)x$, no caso], basta mudar a variável de integração para eliminar a constante. Em casos mais complexos, a mudança de variáveis que simplifica o integrando poderá estar longe de ser evidente. Um exemplo é dado pela integral na penúltima linha da Tabelal III.B, que se simplifica com a mudança de variáveis

$$x = \mathrm{tg}\,u. \tag{44}$$

A variável u é mais conveniente do que x porque a identidade trigonométrica $1 + \mathrm{tg}^2(u) \equiv \sec^2(u)$ mostra que

$$\frac{1}{1+x^2} = \cos^2 u. \tag{45}$$

Por outro lado, da Eq. (44) podemos encontrar a derivada que a mudança de variáveis exige:

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\cos^2 u}, \tag{46}$$

e a substituição na regra que controla a mudança de variáveis mostra que

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \cos^2 u \frac{1}{\cos^2 u}\,du, \tag{47}$$

ou seja,

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int du. \tag{48}$$

É fácil ver que $\int du = u$, já que a derivada de u em relação a u é a unidade. Você pode chegar à mesma conclusão fazendo $n = 0$ na quinta linha da Tabela III. De qualquer forma, uma vez que $u = \mathrm{arctg}\,x$ [veja a Eq. (44)], a Eq. (48) se reduz à expressão na penúltima linha da mesma tabela:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{arctg}(x). \tag{49}$$

De forma análoga você poderá demonstrar a regra na última linha do Tabela III, por meio da mudança de variáveis $u = \mathrm{sen}\,x$. Na disciplina Cálculo I você terá oportunidade de trabalhar com muitos outros exemplos e adquirirá intuição valiosa. Verá que, enquanto a diferenciação pode sempre ser reduzida a problemas simples, integrar certas funções pode ser uma tarefa muito difícil, somente executável por meio de cálculo numérico. Para as necessidades de Física I, porém, bastará a Tabela III, complementada por mudanças simples de variáveis.

D. Integral definida

Já vimos que conhecer a velocidade é insuficiente para determinar a posição. Uma informação adicional é necessária. Frequentemente, essa informação é dada pela posição no tempo inicial $t = 0$. Suponhamos, pois, que a velocidade de uma partícula é $v(t)$ e que sua posição inicial é $x(t = 0) = x_0$ e que queremos encontrar a sua posição $x(t)$. Sabemos que

$$x(t) = \int v(t)\,dt, \tag{50}$$

o que na prática significa que a posição é dada por uma função primitiva de $v(t)$ mais uma constante c, até aqui desconhecida:

$$x(t) = F(t) + c. \tag{51}$$

A Eq. (51) vale em qualquer instante t. No instante $t = 0$, ela assume a forma

$$x_0 = F(0) + c, \tag{52}$$

que determina a constante c:

$$c = x_0 - F(0). \tag{53}$$

Podemos agora substituir a constante no lado direito da Eq. (51) pela expressão (53), e resulta que

$$x(t) = x_0 + F(t) - F(0). \tag{54}$$

A Eq. (54) resolve nosso problema, mas seu lado direito é pouco atraente. Felizmente, há uma notação alternativa, proposta por Leibnitz, que explora a interpretação geométrica discutida na Seção. III.G. Na notação de Leibnitz, a Eq. (54) é escrita como

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t')\,dt'. \tag{55}$$

Na Eq. (55), o segundo termo é chamado de *integral definida* de $v(t')$ em relação a t' entre o *limite inferior* 0 e o *limite superior* t, ou mais abreviadamente *integral de* $v(t')$ *de 0 a* t. A integral definida é igual à diferença entre a integral indefinida calculada no limite superior e a integral indefinida calculada no limite inferior.

A integral definida depende dos limites inferior e superior, mas não depende da variável de integração. Para evitar confusão, nunca se usa o mesmo símbolo para denotar a variável de integração e os limites. No caso, chamamos a variável de integração de t', para não confundi-la com o limite superior t.

E. Propriedades da integral definida

De maneira mais geral, dada uma função $f(x)$, a sua integral definida entre um valor inicial $x = a$ e outro final $x = b$ é dada pela expressão

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{56}$$

onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

Uma vez que a integral definida aparece com muita frequência, define-se o símbolo $F(x)|_a^b$ para indicar a diferença entre o valor de $F(x)$ em $x = b$ e o seu valor em $x = a$. Se for necessário, adotam-se parênteses ou colchetes em lugar da barra vertical: $[F(x)]_a^b$. Com essa notação, a Eq. (56) pode ser escrita na forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{57}$$

Poderíamos também ter escrito o lado esquerdo como $\int_a^b f(x')\,dx'$, mas não foi necessário, porque não há nenhum risco de confusão entre x (a variável de integração) e a ou b (valores fixos que x pode tomar).

A integral definida pode também ser vista como diferença entre duas integrais indefinidas e portanto herda da integral indefinida todas as propriedades listadas na Tabela III. Além disso, da Eq. (56) decorrem imediatamente as seguintes propriedades:

1) *Aditividade:*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx; \tag{58}$$

2) *Inversão dos limites:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx; \tag{59}$$

3) *Diferenciação:*

$$\frac{d\int_a^x f(x')\,dx'}{dx} = f(x). \tag{60}$$

F. Exemplos

Para discutir exemplos, convém voltar à integral definida da velocidade. Digamos que a posição inicial de uma partícula é $x(t = 0) = x_0$ e que seu movimento é uniformemente variado (MUV). No MUV, a velocidade varia com o tempo de acordo com a expressão

$$v(t) = v_0 + at, \tag{61}$$

onde v_0 é a velocidade inicial e a a aceleração. Tanto v_0 como a são constantes.

Queremos encontrar a posição x em função do tempo. Da Eq. (55), temos que

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + at')\,dt'. \tag{62}$$

Precisamos efetuar a integração no segundo termo à direita na Eq. (62). Significa que temos de encontrar a integral indefinida $\int(v_0 + at')\,dt'$. De acordo com a Tabela III, a integral indefinida de uma soma é a soma das integrais, e uma constante multiplicativa sempre pode ser deslocada para fora de uma integral indefinida. Assim, temos que

$$\int (v_0 + at')\,dt' = v_0 \int dt' + a \int t'\,dt'. \tag{63}$$

Já vimos que $\int dt' = t'$. A segunda integral à direita na Eq. (63) pode ser computada com ajuda da quinta linha da Tabela III. Basta tomar $n = 1$ para mostrar que

$$\int t'\,dt' = \frac{t'^2}{2}. \tag{64}$$

Obtidas as duas integrais indefinidas, podemos calcular as definidas:

$$\int_0^t dt' = t'\Big|_0^t = t, \tag{65}$$

e

$$\int_0^t t'\,dt' = \frac{t'^2}{2}\Big|_0^t = \frac{t^2}{2}. \tag{66}$$

Substituídas as Eqs. (65) e (66) na Eq. (62), obtemos a equação desejada:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}t^2, \tag{67}$$

que você deve reconhecer como a equação horária do MUV.

Mais um exemplo. Suponhamos agora que a posição inicial de uma partícula é $x(0) = 0$ e que a velocidade é dada pela igualdade

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}, \tag{68}$$

onde v_0 e τ são constantes.

A partir da Eq. (55), encontramos a seguinte expressão para a posição:

$$x(t) = v_0 \int_0^t e^{-t'/\tau}\,dt'. \tag{69}$$

Aqui, a constante v_0 foi deslocada para fora da integral.

Para calcular a integral definida no lado direito da Eq. (69), precisamos da integral indefinida da exponencial, que já encontramos na Eq. (43). Substituímos L por τ e x por t' naquela igualdade para obter a integral indefinida

$$\int e^{-t'/\tau}\,dt' = -\tau e^{-t'/\tau}. \tag{70}$$

Com isso, podemos calcular a integral definida na Eq. (69):

$$\int_0^t e^{-t'/\tau}\,dt' = -\tau e^{-t'/\tau}\Big|_0^t = -\tau\Big(e^{-t/\tau} - 1\Big), \tag{71}$$

e portanto a Eq. (69) se reduz à forma

$$x(t) = v_0\tau(1 - e^{-t/\tau}). \tag{72}$$

Fisicamente, a velocidade na Eq. (68) decai com o tempo. Inicialmente, em $t = 0$, a velocidade é v_0, mas no instante $t = 3\tau$ a velocidade é cerca de um vigésimo de v_0 (verifique). Apesar disso, a velocidade nunca chega a ser nula, e você poderia achar que a partícula acabaria avançando uma distância infinita. A Eq. (72) entretanto mostra que ela nunca passa do ponto $x = v_0\tau$.

Antes do desenvolvimento do Cáculo, o problema de um corpo que avança com velocidade cada vez menor era tido como grande enigma. Argumentava-se que o movimento seria ilimitado, e x tenderia para o infinito com o correr do tempo. O exemplo que discutimos mostra que nem sempre é assim. O movimento pode ou não ser limitado, dependendo da rapidez com que a velocidade decai. Se a expressão da velocidade for $v(t) = v_0/(1 + t/\tau)$, por exemplo, o deslocamento será ilimitado, como você poderá mostrar, se quiser.

G. Interpretação geométrica da integral definida

Queremos agora demonstrar que a integral definida tem a interpretação geométrica indicada na Fig. 9, isto é, que a integral definida de uma função $f(x)$ entre $x = x_A$ e $x = x_B$ é a área entre a curva que representa $f(x)$ e o eixo horizontal delimitada pelas abscissas x_A e x_B, expressa em unidade de $f(x)$ vezes a unidade de x. Assim, se as ordenadas forem velocidades e as abscissas forem tempos, a integral será a área em unidades de $(m/s) \times s$, ou seja, em m. As áreas dos trechos em que $f(x) < 0$ contribuem negativamente para a área total.

A demonstração de que a área é a integral definida principia com uma função especialmente simples, $f(x) = f_0$, a função constante. Nesse caso, a integral indefinida de que precisamos para calcular a integral definida pode ser prontamente computada:

$$\int f_0\,dx = f_0 \int dx, \tag{73}$$

ou se lembrarmos que $\int dx = x$,

$$\int f_0\,dx = f_0 x. \tag{74}$$

Assim, a integral definida é dada pela igualdade

$$\int_{x_A}^{x_B} f_0\,dx = f_0\,x\Big|_{x_A}^{x_B} = f_0(x_B - x_A). \tag{75}$$

Basta então inspecionar a Fig. 10 para vermos que a integral definida é a área do retângulo entre a linha azul que representa f_0 e o eixo horizontal delimitado pelas abscissas x_A e x_B. Verificamos assim que a área sob a função constante é a integral definida.

Claro que não estamos interessados apenas na função constante. Apesar disso, o resultado contido na Eq. (75) é muito importante, porque qualquer função de interesse prático pode ser

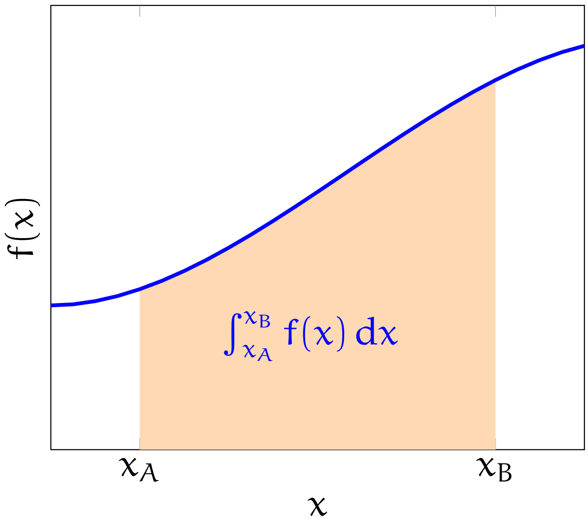


Figura 9 Interpretação geométrica da integral definida. A integral $\int_{x_A}^{x_B} f(x)\,dx$ é a área laranja, delimitada verticalmente pela curva e pelo eixo x e horizontalmente pelas retas verticais que definem as coordenadas x_A e x_B. A área é medida em unidades de $f \times x$, isto é, o produto da unidade de $f(x)$ pela unidade de x. No caso, a curva está acima do eixo x; se uma parte dela estivesse abaixo, a contribuição dessa parcela para a integral seria negativa.

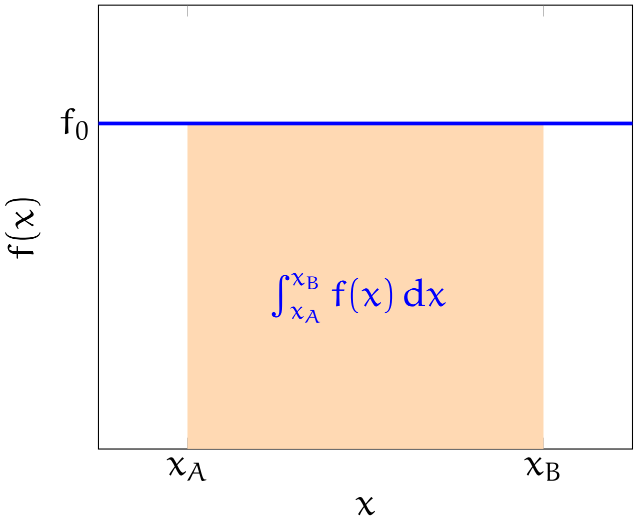


Figura 10 Área sob o gráfico da função constante $f(x) = f_0$. A área do retângulo entre as abscissas x_A e x_B, que tem base $\Delta x = x_B - x_A$ é $f_0(x_B - x_A)$, valor que coincide com a integral definida calculada na Eq. (75).

aproximada por uma sequência de constantes. Para isso, basta tomar o intervalo $\Delta x = x_B - x_A$ e dividi-lo em N segmentos iguais, onde N é um número inteiro que pode ser tão grande quanto queiramos. Como mostra a Fig. 11, resultam pequenos segmentos de largura $\delta x = \Delta x/N$. Dentro de cada segemento, a função $f(x)$ é aproximadamente constante, e a aproximação se torna tão mais perfeita quanto menor for o intervalo δx, isto

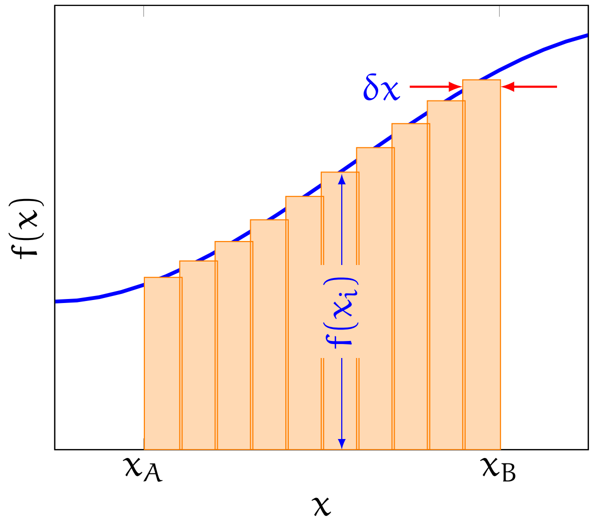


Figura 11 Cálculo da área sob a curva na aproximação por retângulos. O intervalo $\Delta x = x_B - x_A$ é dividido em N partes iguais $\delta x = \Delta x/N$. Em cada pequeno intervalo δx, a função pode ser aproximada por uma constante, e a soma das áreas dos retângulos é aproximadamente a área sob a curva. Quando N cresce, a aproximação ganha precisão.

é, quanto maior for N.

Vamos agora focalizar o i-ésimo segmento (i é um número qualquer entre 1 e N) e chamar de x_i o seu ponto médio. Dentro do segmento, a área sob a curva é aproximadamente igual à área de um retângulo com base δx e altura $f(x_i)$, que vale $f(x_i)\delta x$. A área entre as abscissas x_A e x_B é portanto aproximadamente igual à soma das áreas dos pequenos retângulos. Em símbolos, temos que

$$\text{Área} = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\delta x. \tag{76}$$

Esse resultado é aproximado, mas ele se torna progressivamente mais correto à medida que N cresce. Como podemos fazer N tão grande quanto quisermos, podemos fazer a Eq. (76) tão precisa quanto quisermos.

Até aqui falamos de áreas. Sabemos, porém, da Fig. 10, que a área de cada retângulo é a integral definida de $f(x_i)$ no intervalo δx centrado em x_i. A Eq. (76) portanto equivale à expressão

$$\begin{aligned}\text{Área} = &\int_{x_A}^{x_A+\delta x_i} f(x)\,dx + \int_{x_A+\delta x_i}^{x_A+2\delta x_i} f(x)\,dx \\ &+ \ldots + \int_{x_B-\delta x_i}^{x_B} f(x)\,dx,\end{aligned} \tag{77}$$

que também se torna progressivamente mais precisa à medida que N cresce.

O lado direito da Eq. (77) pode ser simplificado, porque já vimos, na Eq. (58), que a soma de integrais definidas em intervalos contíguos é a integral sobre a soma dos intervalos. Portanto, podemos somar o primeiro intervalo com o segundo, depois somar o resultado com o terceiro e assim por diante até estender a integral sobre todo o intervalo Δx, de x_A a x_B. Vemos assim que

$$\text{Área} = \int_{x_B}^{x_A} f(x)\,dx, \tag{78}$$

como queríamos demonstrar.

Leibnitz tomou por base a interpretação geométrica para definir o símbolo de integração. Ele comparou a Eq. (78) com a Eq. (76) para concluir que a integral definida é aproximadamente uma soma de valores da função multiplicados pela largura δx dos segmentos em que o intervalo de integração $\Delta x = x_B - x_A$ foi dividido e que a aproximação tende a ser exata quando o número N de intervalos cresce. A partir daí, ele definiu o símbolo da integração como um ícone que imita o lado direito da Eq. (76):

$$\int_{x_B}^{x_A} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\delta x, \tag{79}$$

assim como o símbolo df/dx é um ícone que imita a razão $\Delta f/\Delta x$ que aparece na definição da derivada.

O sinal de integração $\int$ e o diferencial dx nos fazem lembrar da soma e do fator δx no lado direito da Eq. (76), respectivamente. A notação de Leibnitz também nos faz lembrar que a integral tem dimensão de $f(x)$ vezes x. Além disso, ela nos ajuda a memorizar a regra da cadeia, que encontramos na quarta linha da Tabela III:

$$\int f(x)\,dx = \int f(u)\frac{dx}{du}\,du. \tag{80}$$

Aqui, tudo se passa como se dx/du fosse a razão entre dx e du.

A rigor, essa associação não é correta. Afinal, o diferencial numa integral é apenas um símbolo, uma anotação que identifica a variável de integração. No entanto, como a notação de Leibnitz para a integral imita o lado direito da Eq. (79) e como a notação para a derivada imita a razão entre Δf e Δx, a associação $(dx/du)\,du = dx$ imita a igualdade $(\Delta x/\Delta u)\Delta u = \Delta x$ e conduz a resultados corretos. Você pode confiar nela.

A Eq. (79) oferece mais do que uma imagem visual da integral definida. Ela pode ser empregada para calcular áreas (a área de um círculo, por exemplo) e grandezas físicas que recebem contribuições de várias partes de um corpo (a massa do Sol, por exemplo, levando em conta que a densidade é muito mais alta perto do centro do que na superfície). E, também importante do ponto de vista prático, ela serve de base para cálculo numérico de integrais, como você verá na disciplina Física Computacional.

H. Integral definida da função exponencial

Para entender melhor a relação entre integral e área, vale a pena fazermos uma aplicação. Vamos tentar calcular a integral definida $\int_0^\pi e^x\,dx$ de duas formas: (1) via integral indefinida e (2) a partir da Eq. (79). O limite superior π foi escolhido para tornar a análise mais clara, mas o raciocínio abaixo independe dos limites de integração.

O procedimento via integral indefinida é simples. Sabemos da Tabela III que a integral indefinida da exponencial é a própria exponencial. Segue que

$$\int_0^\pi e^x\,dx = e^x\Big|_0^\pi, \tag{81}$$

e daí extraímos imediatamente o resultado

$$\int_0^\pi e^x\,dx = e^\pi - 1. \tag{82}$$

Vejamos agora a Eq. (79). Para empregá-la, como na Fig. 11, dividimos o intervalo de integração $\Delta x = \pi - 0 = \pi$ em N segmentos. Encontramos assim a largura

$$\delta x = \frac{\pi}{N}. \tag{83}$$

O primeiro segmento vai de $x = 0$ a $x = \delta x$ e seu ponto médio está em $x = \delta x/2$. É mais prático pensar que ele se encontra a uma distância $\delta x/2$ do final do segmento. De forma análoga podemos encontrar os pontos médios x_2, x_3, $\dots x_N$ dos demais segmentos:

$$\begin{aligned} x_1 &= (1-\frac{1}{2})\delta x\\ x_2 &= (2-\frac{1}{2})\delta x\\ x_3 &= (3-\frac{1}{2})\delta x\\ &\vdots\\ x_N &= (N-\frac{1}{2})\delta x. \end{aligned} \tag{84}$$

Com $f(x) = e^x$, a Eq. (79) assume a forma aproximada

$$\int_0^\pi e^x\,dx = (e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3} + \dots + e^{x_N})\delta x, \tag{85}$$

e com os x_i $(i = 1,\dots,N)$ dados pela Eq. (84), podemos escrever que

$$\int_0^\pi e^x\,dx = e^{(\delta x/2)}\left(1 + e^{\delta x} + e^{2\delta x} + \dots + e^{(N-1)\delta x}\right)\delta x. \tag{86}$$

As parcelas entre parênteses no lado direito da Eq. (86) formam uma progressão geométrica com razão $q = e^{\delta x}$.

Dado que a soma da progressão geométrica com N termos é $(q^N-1)/(q-1)$, vemos que a Eq. (86) equivale à igualdade

$$\int_0^{\pi} e^x\,dx = e^{(\delta x/2)}\frac{e^{N\delta x}-1}{e^{\delta x}-1}\delta x. \tag{87}$$

Trata-se de uma expressão aproximada, mas a aproximação se torna progressivamente mais precisa à medida que N cresce. Aumentar N equivale a diminuir δx. Para δx pequeno a penúltima linha da Tabela II nos diz que $e^{(\delta x/2)} \approx 1+\delta x/2$.

Podemos também escrever que $e^{\delta x}-1 \approx \delta x$, para mostrar que o denominador da fração à direita na Eq. (87) cancela o fator δx à direita da fração. Da Eq. (83), por outro lado, temos que $N\delta x = \pi$, e assim a Eq. (87) se reduz à forma

$$\int_0^{\pi} e^x\,dx = (1+\frac{\delta x}{2})(e^{\pi}-1), \tag{88}$$

e como podemos fazer δx tão pequeno quanto quisermos, podemos desconsiderar a parcela $\delta x/2$ dentro dos primeiros parênteses à direita. Resulta então a Eq. (82).

A Eq. (88) mostra que associar a integral definida à soma das áreas dos retângulos na Fig. 11 introduz erro da ordem de δx. Assim, se desejarmos calcular integral definida a partir da área com uma dada precisão (desvio máximo de 0.001%, por exemplo), basta escolher N suficientemente grande ($N = 1\,000\,000$, no caso) para tornar o erro inferior ao máximo desvio tolerado. Essa noção, de que poderemos efetuar o cálculo com precisão arbitrariamente fixada, é traduzida pelo $\lim_{N\to\infty}$ à direita na Eq. (79).

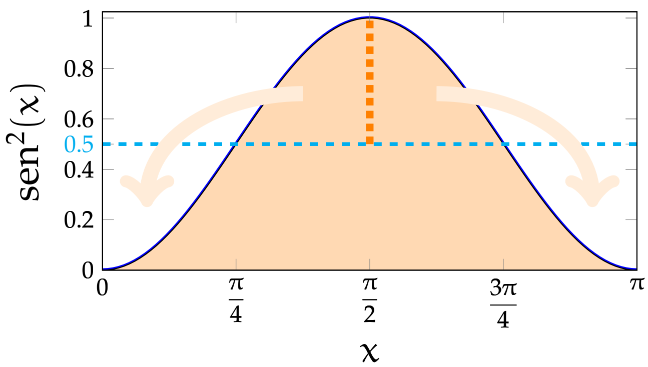


Figura 12 Função $\mathrm{sen}^2(x)$ em função de x. A área da região laranja é a integral definida da função entre 0 e π. Como indicado pelas setas, a linha tracejada horizontal, na ordenada $1/2$, divide a região laranja em duas áreas iguais.

I. Tabela de integrais definidas

A Tabela IV lista algumas integrais que serão úteis ao longo de seu curso. As funções $1/(1+x^2)$ e $\exp(-x^2)$, que aparecem nos integrandos da quarta e da última linha, são conhecidas como *Lorentziana* e *Gaussiana*, respectivamente, e são frequentemente empregadas na interpretação de dados experimentais. Com exceção da última linha, que depende de conhecimentos que você adquirirá na disciplina Cálculo II, as integrais estão a seu alcance.

Tabela IV Integrais definidas que aparecem com freqüência. Na quarta linha, n é um inteiro não negativo

$\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^2x\,dx = \int_0^{\pi}\cos^2x\,dx =$	$\frac{\pi}{2}$
$\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,x\,dx =$	2
$\int_0^{\pi}\cos x\,dx =$	0
$\int_{-\infty}^{\infty}1/(1+x^2)\,dx =$	π
$\int_0^{\infty}x^n\exp(-x)\,dx =$	$n!$
$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)\,dx =$	$\sqrt{\pi}$

Como exemplo, calcularemos a seguir a primeira integral na Tabela e discutiremos o gráfico do integrando. O ponto de partida é a identidade trigonométrica

$$\mathrm{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \tag{89}$$

da qual decorre que

$$\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(2x)\,dx. \tag{90}$$

Na segunda integral à direita na Eq. (90), mudamos agora a variável para $u \equiv 2x$. Significa que $x = u/2$ e portanto $dx/du = 1/2$. A regra da cadeia para integração (linha 4 na Tabela III) mostra então que

$$\int_0^{\pi}\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(u)\,du. \tag{91}$$

No lado direito, mudamos o limite superior da integral porque $x = \pi$ se traduz em $u = 2\pi$. Como a integral do cosseno é o seno, vemos que

$$\int_0^{\pi}\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(u)\Big|_0^{2\pi} = 0. \tag{92}$$

Assim, lembrando que $\int dx = x$, vemos que a Eq. (90) se reduz à forma simples

$$\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^2(x)\,dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi}, \tag{93}$$

o que nos leva ao resultado na Tabela IV:

$$\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{94}$$

A Eq. (94) nos diz que, no que diz respeito a sua integral definida entre 0 e π, a função $\mathrm{sen}^2(x)$ se comporta como se fosse uma constante, igual a $1/2$. O gráfico da função na Fig. 12 oferece uma interpretação mais clara. A linha tracejada horizontal divide a área sob a curva no intervalo de integração em duas partes iguais: como mostram as setas, cada uma das duas regiões delimitadas pela linhas tracejadas horizontal e vertical e pela curva azul cabe exatamente num dos dois vazios abaixo da reta horizontal.

A área abaixo da curva azul é portanto igual à área abaixo da horizontal tracejada, que vale $\pi \times (1/2) = \pi/2$. Para memorizar esse resultado, costuma-se dizer que, num intervalo que é múltiplo de π, a função $\operatorname{sen}^2(x)$ assume valor médio $1/2$. Como indica a primeira linha da Tabela IV, a mesma afirmação vale para a função $\cos^2(x)$ — não poderia ser de outra forma, já que $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

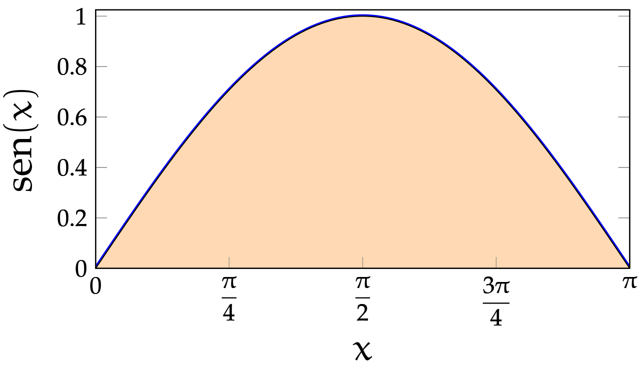


Figura 13 Função $\operatorname{sen}(x)$ no intervalo de integração na Tabela IV. A integral é positiva porque a função está sempre acima do eixo x.

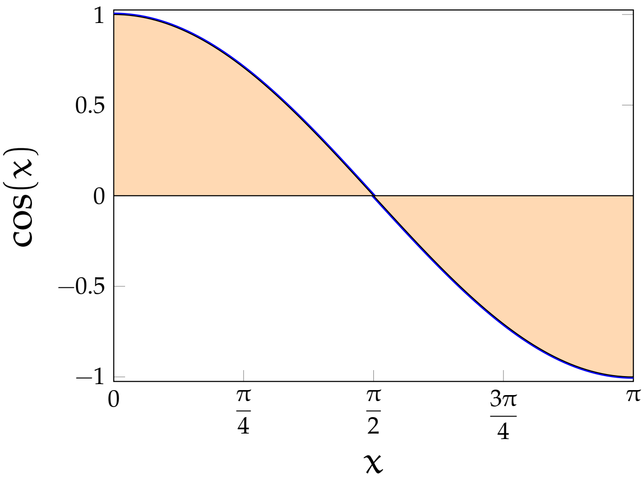


Figura 14 Função $\cos(x)$ no intervalo de integração na Tabela IV. Aqui a integral definida é nula, porque a função se distribui simetricamente entre valores positivos e negativos.

As Figs. 13-16 mostram os gráficos das demais funções na Tabela IV. Examine com atenção cada um deles, e desenhe triângulos para reproduzir, aproximadamente, as áreas laranja. A partir deles faça uma estimativa para as áreas sob as curvas e compare com os resultados na tabela. Essas funções e suas in-

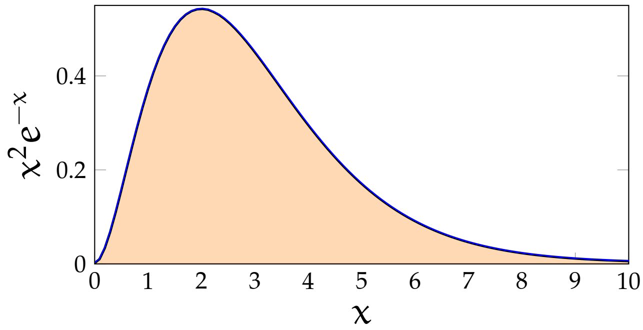


Figura 15 Função $x^2 \exp(-x)$. Este é um caso particular, com $n = 2$, da função na quarta linha da Tabela IV.

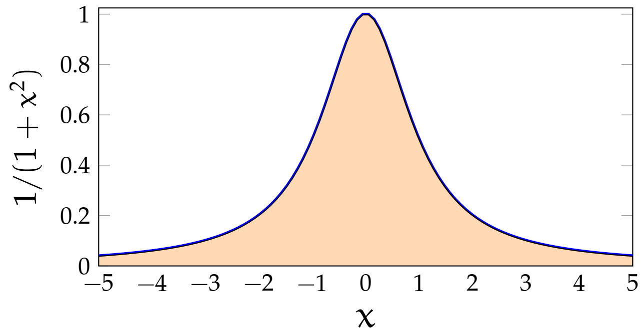


Figura 16 Função Lorentziana. A Tabela IV mostra que, estendida de $x = -\infty$ a $x = \infty$, a área sob a curva é π.

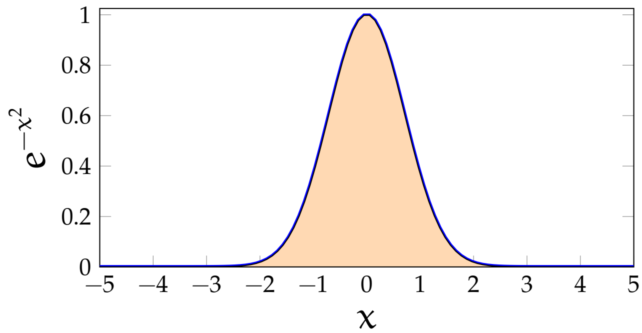


Figura 17 Função Gaussiana. Os eixos das abscissas e das ordenadas reproduzem os da Fig. 16 para mostrar que a Gaussiana se aproxima de zero muito mais rápido do que a Lorentziana. Por isso, a área sob a curva é subtancialmente menor.

tegrais aparecerão repetidas vezes ao longo de seu curso. Vale a pena familiarizar-se com elas.

IV. ACELERAÇÃO

Definiremos agora a aceleração a de uma partícula. Assim como a velocidade mede a variação da posição com o tempo, a aceleração mede a variação da velocidade em função do tempo. Por analogia com a Eq. (7), escrevemos que

$$a = \frac{dv}{dt}, \tag{95}$$

ou em termos da posição,

$$a = \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt}. \tag{96}$$

Para abreviar, define-se uma notação para a derivada da derivada:

$$\frac{d^2f}{dx^2} \equiv \frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dx}, \tag{97}$$

que permite re-escrever a Eq. (96) na forma

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{98}$$

Dizemos que a aceleração é a *segunda derivada* da posição em relação ao tempo. Enquanto (no Sistema MKS) a velocidade é medida em m/s, a aceleração é expressa em m/s^2. Essas unidades significam que a velocidade está variando tantos m/s em tantos s. A aceleração da gravidade g, por exemplo, faz a velocidade de uma pedra aumentar de 0 a $9.8m/s$ em um segundo —um variação bem elevada, em pouco tempo. Os automóveis comerciais mais potentes, de preço astronômico, conseguem de ir de 0 a $100\,km/h$ em $2.6\,s$, o que equivale a uma aceleração aproximadamente igual a g. Já um modelo comum tipicamente leva $8\,s$ para chegar aos mesmos $100\,km/h$, uma aceleração inferior a $3.5\,m/s^2$.

Uma pulga, quando salta, sofre uma aceleração mais de 100 vezes superior à aceleração g da gravidade. Um ser humano, no entanto, não resiste às acelerações substancialmente superiores a $10\,g$ que podem ocorrer, por exemplo, em uma colisão automobilística. Na Lua, a aceleração da gravidade é bem menor do que a nossa, inferior a $2\,m/s^2$.

Em todos esses casos, a aceleração é dada pela Eq. (95). A velocidade é, portanto, a integral indefinida da aceleração, assim como a posição é a integral indefinida da velocidade. Segue então que a variação da velocidade entre dois instantes é a integral definida da aceleração entre o tempo inicial e o final:

$$v(t) - v(0) = \int_0^t a(t')\,dt', \tag{99}$$

igualdade que pode ser reescrita na forma

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t')\,dt'. \tag{100}$$

Conhecidas a aceleração e a velocidade inicial, a determinação da velocidade depende apenas do cálculo da integral à direita da Eq. (100). A partir daí, se também conhecermos a posição inicial, poderemos empregar a Eq. (55) para calcular a posição em função do tempo. Em resumo, dadas (1) a aceleração em função do tempo, (2) a posição inicial e (3) a velocidade inicial, duas integrações são suficientes para determinar a posição e a velocidade em função do tempo.

A. Movimento Uniformemente Variado

Como exemplo, vamos voltar ao movimento uniformemente variado, no qual a é constante. A aceleração pode então ser extraída da integral à direita na Eq. (100):

$$v(t) = v(0) + a\int_0^t dt', \tag{101}$$

e resulta que

$$v(t) = v(0) + at'\Big|_0^t, \tag{102}$$

ou seja,

$$v(t) = v(0) + at. \tag{103}$$

Você deve reconhecer a Eq. (103), que descreve a velocidade em função do tempo no MUV, serviu de ponto de partida para a análise na Seção III.E e conduziu à Eq. (67), que descreve a posição em função do tempo no movimento uniformemente variado.