

# Centro de Massa e Momento Linear

## 9-1 CENTRO DE MASSA

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

- 9.01** Dada a posição de várias partículas em um eixo ou um plano, determinar a posição do centro de massa.
- 9.02** Determinar a posição do centro de massa de um objeto usando princípios de simetria.
- 9.03** No caso de um objeto bidimensional ou tridimensional com uma distribuição homogênea de massa, determinar a posição do centro de massa (a) dividindo mentalmente o objeto em figuras geométricas simples, (b) substituindo cada uma por uma partícula no centro da figura, e (c) calculando o centro de massa dessas partículas.

### Ideia-Chave

- O centro de massa de um sistema de  $n$  partículas é definido como o ponto cujas coordenadas são dadas por

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad z_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i,$$

ou

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i,$$

em que  $M$  é a massa total do sistema.

### O que É Física?

Todo engenheiro mecânico contratado como perito para reconstituir um acidente de trânsito usa a física. Todo treinador que ensina uma bailarina a saltar usa a física. Na verdade, para analisar qualquer tipo de movimento complicado é preciso recorrer a simplificações que são possíveis apenas com um entendimento da física. Neste capítulo, discutimos de que forma o movimento complicado de um sistema de objetos, como um carro ou uma bailarina, pode ser simplificado se determinarmos um ponto especial do sistema: o *centro de massa*.

Eis um exemplo: Quando arremessamos uma bola sem imprimir muita rotação (Fig. 9-1a), o movimento é simples. A bola descreve uma trajetória parabólica, como discutimos no Capítulo 4, e pode ser tratada como uma partícula. Quando, por outro lado, arremessamos um taco de beisebol (Fig. 9-1b), o movimento é mais complicado. Como cada parte do taco segue uma trajetória diferente, não é possível representar o taco como uma partícula. Entretanto, o taco possui um ponto especial, o centro de massa, que *segue* uma trajetória parabólica simples; as outras partes do taco se movem em torno do centro de

massa. (Para localizar o centro de massa, equilibre o taco em um dedo esticado; o ponto estará acima do dedo, no eixo central do taco.)

É difícil fazer carreira arremessando tacos de beisebol, mas muitos treinadores ganham dinheiro ensinando atletas de salto em distância ou dançarinos a saltar da forma correta, movendo pernas e braços ou girando o torso. O ponto de partida é sempre o centro de massa da pessoa, porque é o ponto que se move de modo mais simples.

## O Centro de Massa

Definimos o **centro de massa** (CM) de um sistema de partículas (uma pessoa, por exemplo) para podermos determinar com mais facilidade o movimento do sistema.



O centro de massa de um sistema de partículas é o ponto que se move como se (1) toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e (2) todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto.

Neste módulo, discutimos a forma de determinar a posição do centro de massa de um sistema de partículas. Começamos com um sistema de poucas partículas e em seguida consideramos sistemas com um número muito grande de partículas (um corpo maciço, como um taco de beisebol). Mais adiante, discutiremos como o centro de massa de um sistema se move quando o sistema é submetido a forças externas.

### Sistemas de Partículas

**Duas Partículas.** A Fig. 9-2a mostra duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  separadas por uma distância  $d$ . Escolhemos arbitrariamente como origem do eixo  $x$  a posição da partícula de massa  $m_1$ . Definimos a posição do centro de massa (CM) desse sistema de duas partículas como

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d. \quad (9-1)$$

Suponha, por exemplo, que  $m_2 = 0$ . Nesse caso, existe apenas uma partícula, de massa  $m_1$ , e o centro de massa deve estar na posição dessa partícula; é o que realmente acontece, já que a Eq. 9-1 se reduz a  $x_{\text{CM}} = 0$ . Se  $m_1 = 0$ , temos de novo apenas uma partícula (de massa  $m_2$ ) e, como devia ser,  $x_{\text{CM}} = d$ . Se  $m_1 = m_2$ , o centro de massa deve estar a meio caminho entre as duas partículas; a Eq. 9-1 se reduz a  $x_{\text{CM}} = d/2$ , como seria de se esperar. Finalmente, de acordo com a Eq. 9-1, se nenhuma das duas massas é nula,  $x_{\text{CM}}$  só pode assumir valores entre 0 e  $d$ , ou seja, o centro de massa deve estar em algum lugar entre as duas partículas.

Não somos obrigados a colocar a origem do sistema de coordenadas em uma das duas partículas. A Fig. 9-2b mostra uma situação mais geral na qual o sistema de coordenadas foi deslocado para a

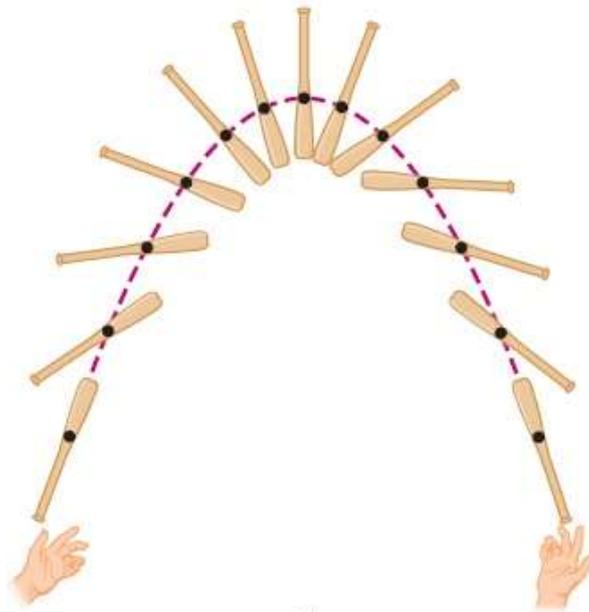
esquerda. A posição do centro de massa é agora definida como

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (9-2)$$

Observe que, se fizermos  $x_1 = 0$ ,  $x_2$  ficará igual a  $d$ , e a Eq. 9-2 se reduzirá à Eq. 9-1, como seria de se esperar. Note também que, apesar do deslocamento da origem do sistema de coordenadas, o centro de massa continua à mesma distância de cada partícula. O centro de massa é uma propriedade das partículas e não do sistema de coordenadas que está sendo usado.

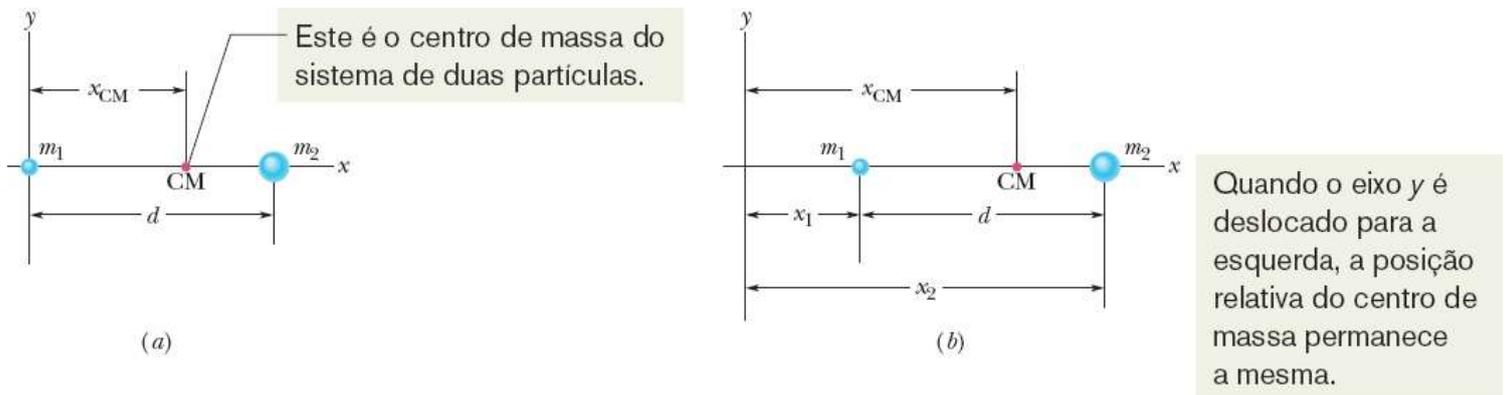


(a)



(b)

**Figura 9-1** (a) Uma bola arremessada para cima segue uma trajetória parabólica. (b) O centro de massa (ponto preto) de um taco de beisebol arremessado para cima com um movimento de rotação segue uma trajetória parabólica, mas todos os outros pontos do taco seguem trajetórias curvas mais complicadas.



**Figura 9-2** (a) Duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  estão separadas por uma distância  $d$ . O ponto marcado como CM mostra a posição do centro de massa, calculado usando a Eq. 9-1. (b) O mesmo que (a), exceto pelo fato de que a origem foi deslocada para a esquerda. A posição do centro de massa pode ser calculada usando a Eq. 9-2. A posição do centro de massa em relação às partículas é a mesma nos dois casos.

Podemos escrever a Eq. 9-2 na forma

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}, \quad (9-3)$$

em que  $M$  é a massa total do sistema. (No exemplo em discussão,  $M = m_1 + m_2$ .)

**Muitas Partículas.** Podemos estender a Eq. 9-3 a uma situação mais geral, na qual  $n$  partículas estão posicionadas ao longo do eixo  $x$ . Nesse caso, a massa total é  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ , e a posição do centro de massa é dada por

$$\begin{aligned} x_{\text{CM}} &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{M} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i. \end{aligned} \quad (9-4)$$

Aqui, o índice  $i$  assume todos os valores inteiros de 1 a  $n$ .

**Três Dimensões.** Se as partículas estão distribuídas em três dimensões, a posição do centro de massa deve ser especificada por três coordenadas. Por extensão da Eq. 9-4, essas coordenadas são dadas por

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad z_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i. \quad (9-5)$$

Também podemos definir o centro de massa usando a linguagem dos vetores. Primeiro, lembre-se de que a posição de uma partícula de coordenadas  $x_i$ ,  $y_i$  e  $z_i$  é dada por um vetor posição (que liga desde a origem até a posição da partícula):

$$\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}. \quad (9-6)$$

O índice identifica a partícula, e  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  são vetores unitários que apontam, respectivamente, no sentido

positivo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Analogamente, a localização do centro de massa de um sistema de partículas é dada por um vetor posição:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = x_{\text{CM}}\hat{i} + y_{\text{CM}}\hat{j} + z_{\text{CM}}\hat{k}. \quad (9-7)$$

As três equações escalares das Eqs. 9-5 podem ser substituídas, portanto, por uma única equação vetorial,

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (9-8)$$

em que  $M$  é a massa total do sistema. É possível confirmar se a Eq. 9-8 está correta, mediante a substituição de  $\vec{r}_i$  e  $\vec{r}_{\text{CM}}$  por seus valores, dados pelas Eqs. 9-6 e 9-7, e separando as componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$ . O resultado são as relações escalares das Eqs. 9-5.

### Corpos Maciços

Um objeto comum, como um bastão de beisebol, contém tantas partículas (átomos) que podemos aproximá-lo por uma distribuição contínua de massa. As “partículas”, nesse caso, se tornam elementos infinitesimais de massa  $dm$ , os somatórios das Eqs. 9-5 se tornam integrais, e as coordenadas do centro de massa são definidas por meio das equações

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int x \, dm, \quad y_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int y \, dm, \quad z_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int z \, dm, \quad (9-9)$$

em que  $M$  agora é a massa do objeto. Se as Eqs. 9-5 fossem usadas na forma de somatórios, o cálculo do centro de massa para um objeto macroscópico levaria vários anos.

Como o cálculo das integrais para a maioria dos objetos do mundo real (como um televisor ou um boi, por exemplo) é muito difícil, vamos considerar neste texto apenas objetos *homogêneos*, ou seja, objetos cuja *massa específica* (massa por unidade de volume), representada pelo símbolo  $\rho$  (letra grega rô), é a mesma para todos os elementos infinitesimais do objeto e, portanto, para o objeto como um todo. Nesse caso, de acordo com a Eq. 1-8, podemos escrever:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}, \quad (9-10)$$

em que  $dV$  é o volume ocupado por um elemento de massa  $dm$ , e  $V$  é o volume total do objeto. Substituindo  $dm$  na Eq. 9-9 por seu valor, obtido a partir da Eq. 9-10 [ $dm = (M/V)dV$ ], obtemos:

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{V} \int x \, dV, \quad y_{\text{CM}} = \frac{1}{V} \int y \, dV, \quad z_{\text{CM}} = \frac{1}{V} \int z \, dV. \quad (9-11)$$

**Uso da Simetria.** O cálculo fica mais simples se o objeto possui um ponto, uma reta ou um plano de simetria, pois, nesse caso, o centro de massa está no ponto, linha ou plano de simetria. Por exemplo, o centro de massa de uma esfera (que possui um ponto de simetria) está no centro da esfera (que é o ponto de simetria). O centro de massa de um cone (cujo eixo é uma reta de simetria) está no eixo do cone. O centro de massa de uma banana (que tem um plano de simetria que a divide em duas partes iguais) está em algum ponto desse plano.

O centro de massa de um objeto não precisa estar no interior do objeto. Não existe massa no centro de massa de uma rosquinha, assim como não existe ferro no centro de massa de uma ferradura.

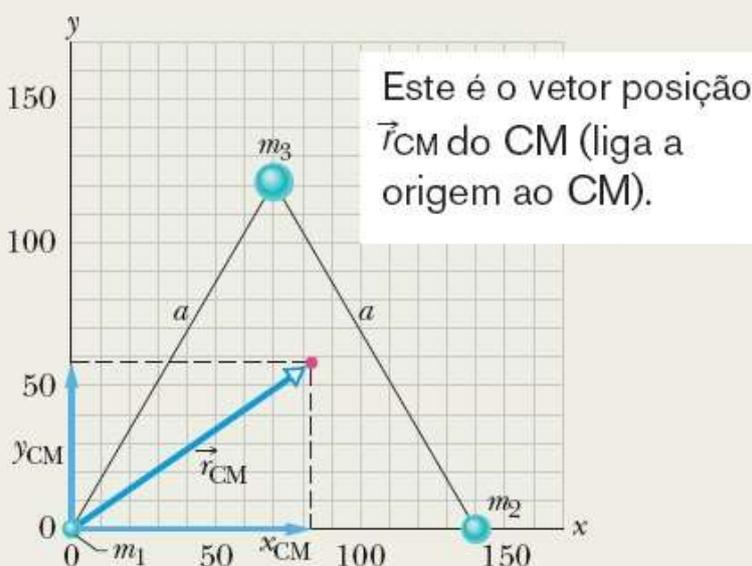
### Exemplo 9.01 Centro de massa de três partículas

Três partículas de massas  $m_1 = 1,2$  kg,  $m_2 = 2,5$  kg e  $m_3 = 3,4$  kg formam um triângulo equilátero de lado  $a = 140$  cm. Qual é a localização do centro de massa do sistema?

#### IDEIA-CHAVE

Como estamos lidando com partículas e não com um objeto macroscópico, podemos usar as Eqs. 9-5 para calcular a posição do centro de massa. Como as partículas estão no plano do triângulo equilátero, precisamos usar apenas as duas primeiras equações.

**Cálculos:** Podemos simplificar os cálculos escolhendo os eixos  $x$  e  $y$  de tal forma que uma das partículas esteja na origem e o eixo  $x$  coincida com um dos lados do triângulo (Fig. 9-3). Nesse caso, as coordenadas das partículas são as que aparecem na tabela a seguir.



**Figura 9-3** Três partículas formam um triângulo equilátero de lado  $a$ . A posição do centro de massa do sistema é indicada pelo vetor posição  $\vec{r}_{CM}$ .

Partícula	Massa (kg)	$x$ (cm)	$y$ (cm)
-----------	------------	----------	----------

1	1,2	0	0
2	2,5	140	0
3	3,4	70	120

A massa total  $M$  do sistema é 7,1 kg.

De acordo com as Eqs. 9-5, as coordenadas do centro de massa são

$$\begin{aligned}
 x_{\text{CM}} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M} \\
 &= \frac{(1,2 \text{ kg})(0) + (2,5 \text{ kg})(140 \text{ cm}) + (3,4 \text{ kg})(70 \text{ cm})}{7,1 \text{ kg}} \\
 &= 83 \text{ cm} \qquad \qquad \qquad \text{(Resposta)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e } y_{\text{CM}} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{M} \\
 &= \frac{(1,2 \text{ kg})(0) + (2,5 \text{ kg})(0) + (3,4 \text{ kg})(120 \text{ cm})}{7,1 \text{ kg}} \\
 &= 58 \text{ cm.} \qquad \qquad \qquad \text{(Resposta)}
 \end{aligned}$$

Na Fig. 9.3, a posição do centro de massa é indicada pelo vetor posição  $\vec{r}_{\text{CM}}$ , cujas componentes são  $x_{\text{CM}}$  e  $y_{\text{CM}}$ . Se tivéssemos escolhido outro sistema de coordenadas, as componentes de  $\vec{r}_{\text{CM}}$  seriam diferentes, mas a posição do centro de massa em relação às três partículas seria exatamente a mesma.

### Exemplo 9.02 Centro de massa de uma placa vazada

Este exemplo mostra como é possível calcular a posição do centro de massa de um objeto macroscópico sem usar integrais. A Fig. 9-4a mostra uma placa de metal, fina e homogênea  $P$ , de raio  $2R$ , da qual um disco de raio  $R$  foi removido em uma linha de montagem. O disco aparece na Fig. 9-4b. Determine as coordenadas do centro de massa da placa ( $\text{CM}_p$ ) em relação aos eixos  $x$  e  $y$  indicados na figura.

#### IDEIAS-CHAVE

(1) Em primeiro lugar, vamos determinar a localização aproximada do centro de massa da placa  $P$  usando conceitos de simetria. Note que a placa é simétrica em relação ao eixo  $x$  (podemos obter a parte de baixo da placa girando a parte de cima em torno do eixo  $x$ , e vice-versa). Isso significa que o centro de massa da placa deve estar localizado no eixo  $x$ . A placa (com o disco removido)

não é simétrica em relação ao eixo  $y$ ; como existe um pouco mais de massa do lado direito do eixo  $y$ ,  $CM_p$  deve estar um pouco à direita do eixo  $y$ , como na Fig. 9-4a.

(2) Como a placa  $P$  é um corpo tridimensional, devemos, em princípio, usar as Eqs. 9-11 para calcular as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  do centro de massa. Acontece que, como a placa é fina e homogênea, estamos interessados apenas nas coordenadas  $x$  e  $y$ ; se a placa tivesse uma espessura apreciável, poderíamos supor que o centro de massa estava no ponto médio da espessura. Mesmo desprezando a espessura, porém, seria difícil resolver o problema por esse método, já que teríamos que escrever uma função para descrever a forma da placa com o disco removido e integrar a função em duas dimensões.

(3) Existe um meio muito mais fácil de resolver o problema. Como vimos, é válido supor que a massa de um objeto *homogêneo* está concentrada em uma partícula localizada no centro de massa do objeto. Assim, podemos tratar a placa e o disco como partículas, o que torna dispensável qualquer integração.

**Cálculos:** Primeiro, colocamos o disco que foi removido (vamos chamá-lo de disco  $S$ ) de volta no lugar (Fig. 9-4c), para formar a placa original (que vamos chamar de placa  $C$ ). Devido à simetria, o centro de massa  $CM_S$  do disco  $S$  está no centro de  $S$ , em  $x = -R$  (como mostra a figura). Da mesma forma, o centro de massa  $CM_C$  da placa original  $C$  está no centro de  $C$ , a origem (como mostra a figura). Temos, portanto, o seguinte:

Placa	Centro de Massa	Posição do CM	Massa
$P$	$CM_p$	$x_p = ?$	$m_p$
$S$	$CM_S$	$x_S = -R$	$m_S$
$C$	$CM_C$	$x_C = 0$	$m_C = m_S + m_p$

Suponha que a massa  $m_S$  do disco  $S$  está concentrada em uma partícula em  $x_S = -R$  e que a massa  $m_p$  está concentrada em uma partícula em  $x_p$  (Fig. 9-4d). Em seguida, trate as duas partículas como um sistema e use a Eq. 9-2 para obter o centro de massa  $x_{S+p}$  do sistema. O resultado é o seguinte:

$$x_{S+p} = \frac{m_S x_S + m_p x_p}{m_S + m_p}. \quad (9-12)$$

Note que a superposição do disco  $S$  com a placa  $P$  é a placa  $C$ . Assim, a posição  $x_{S+p}$  do  $CM_{S+p}$  deve coincidir com a posição  $x_C$  do  $CM_C$  que está na origem:  $x_{S+p} = x_C = 0$ . Substituindo esse resultado na Eq. 9-12 e explicitando  $x_p$ , obtemos

$$x_p = -x_S \frac{m_S}{m_p}. \quad (9-13)$$

Podemos relacionar essas massas às áreas de  $S$  e  $P$  notando que

$$\begin{aligned} \text{massa} &= \text{massa específica} \times \text{volume} \\ &= \text{massa específica} \times \text{espessura} \times \text{área} \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{m_s}{m_p} = \frac{\text{massa específica}_s}{\text{massa específica}_p} \times \frac{\text{espessura}_s}{\text{espessura}_p} \times \frac{\text{área}_s}{\text{área}_p}$$

Como a placa é homogênea, as massas específicas e as espessuras são iguais e, portanto,

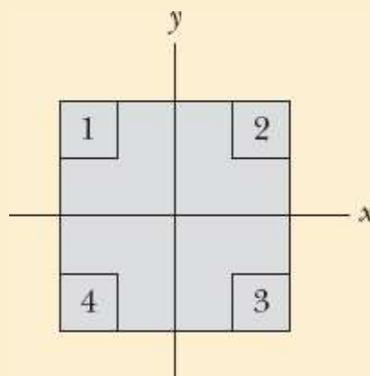
$$\begin{aligned} \frac{m_s}{m_p} &= \frac{\text{área}_s}{\text{área}_p} = \frac{\text{área}_s}{\text{área}_c - \text{área}_s} \\ &= \frac{\pi R^2}{\pi(2R)^2 - \pi R^2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

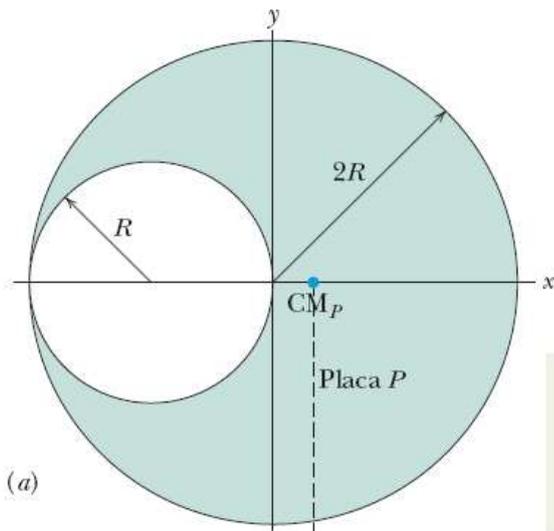
Substituindo esse resultado e fazendo  $x_s = -R$  na Eq. 9-13, obtemos:

$$x_p = \frac{1}{3}R. \quad (\text{Resposta})$$

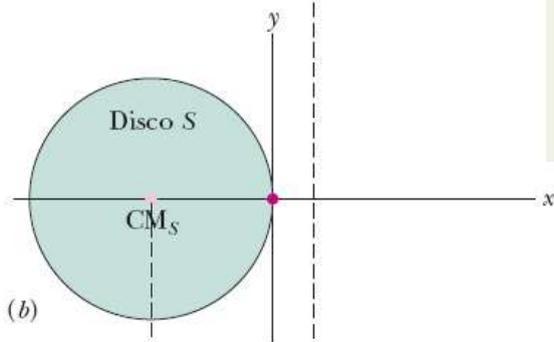
## ☑ Teste 1

A figura mostra uma placa quadrada uniforme, da qual quatro partes quadradas iguais são removidas progressivamente dos cantos. (a) Qual é a localização do centro de massa da placa original? Qual é a localização do centro de massa após a remoção (b) da parte 1; (c) das partes 1 e 2; (d) das partes 1 e 3; (e) das partes 1, 2 e 3; (f) das quatro partes? Responda em termos dos quadrantes, eixos ou pontos (sem realizar nenhum cálculo, é claro).

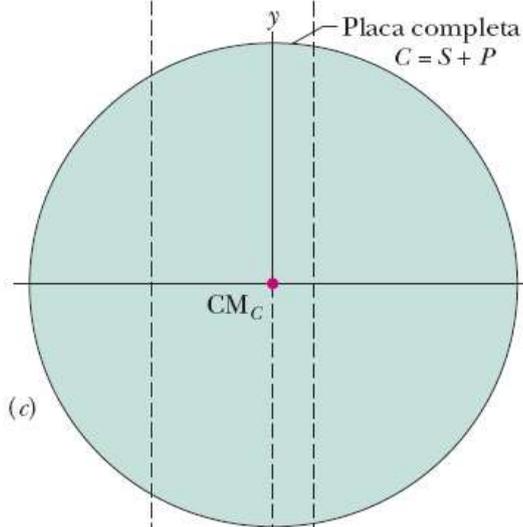




Suponha que a massa da placa esteja concentrada como uma partícula no centro de massa da placa.



Suponha que a massa deste disco também esteja concentrada como uma partícula no centro de massa.



Suponha que a massa deste disco também esteja concentrada como uma partícula no centro de massa.



Aqui estão as três partículas.

O CM da placa completa está no mesmo lugar que o CM das duas partes.

**Figura 9-4** (a) A placa  $P$  é uma placa de metal, de raio  $2R$ , com um furo circular de raio  $R$ . O centro de massa de  $P$  está no ponto  $CM_P$ . (b) O disco  $S$ . (c) O disco  $S$  foi colocado de volta no lugar para formar a placa original  $C$ . O centro de massa  $CM_S$  do disco  $S$  e o centro de massa  $CM_C$  da placa  $C$  estão indicados. (d) O centro de massa  $CM_{S+P}$  da combinação de  $S$  e  $P$  coincide com  $CM_C$ , que está em  $x = 0$ .

## 9-2 A SEGUNDA LEI DE NEWTON PARA UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

- 9.04** Aplicar a segunda lei de Newton a um sistema de partículas, relacionando a força resultante (das forças que agem sobre as partículas) à aceleração do centro de massa do sistema.
- 9.05** Aplicar as equações de aceleração constante ao movimento das partículas de um sistema e ao movimento do centro de massa do sistema.
- 9.06** Dadas a massa e a velocidade das partículas de um sistema, calcular a velocidade do centro de massa do sistema.
- 9.07** Dadas a massa e a aceleração das partículas de um sistema, calcular a aceleração do centro de massa do sistema.
- 9.08** Dada a posição do centro de massa de um sistema em função do tempo, calcular a velocidade do centro de massa.
- 9.09** Dada a velocidade do centro de massa de um sistema em função do tempo, calcular a aceleração do centro de massa.
- 9.10** Calcular a variação de velocidade de um centro de massa integrando a função aceleração do centro de massa em relação ao tempo.
- 9.11** Calcular o deslocamento de um centro de massa integrando a função velocidade do centro de massa em relação ao tempo.
- 9.12** No caso em que as partículas de um sistema de duas partículas se movem e o centro de massa do sistema permanece em repouso, determinar a relação entre os deslocamentos e a relação entre as velocidades das duas partículas.

### Ideias-Chave

- O movimento do centro de massa de qualquer sistema de partículas obedece à segunda lei de Newton para um sistema de partículas, que é expresso pela equação

$$\vec{F}_{\text{res}} = M\vec{a}_{\text{CM}}$$

em que  $\vec{F}_{\text{res}}$  é a força resultante de todas as forças *externas* que agem sobre o sistema,  $M$  é a massa total do sistema, e  $\vec{a}_{\text{CM}}$  é a aceleração do centro de massa do sistema.

## A Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas

Agora que sabemos determinar a posição do centro de massa de um sistema de partículas, vamos discutir a relação entre as forças externas e o movimento do centro de massa. Começamos com um exemplo simples, envolvendo duas bolas de sinuca.

Quando atingimos com a bola branca uma bola que está em repouso, esperamos que o sistema de duas bolas, após o choque, continue a se mover mais ou menos na direção original da bola branca. Ficaríamos surpresos, por exemplo, se as duas bolas se movessem em nossa direção ou se ambas se movessem para a direita ou para a esquerda. Temos uma ideia instintiva de que *alguma coisa* não muda com a colisão.

O que continua a se mover para a frente, sem que o movimento seja alterado pela colisão, é o centro de massa do sistema de duas bolas. Se você concentrar a atenção nesse ponto (que é sempre o ponto médio do segmento que une as duas bolas, pois elas têm massas iguais), você poderá se convencer de que isso é verdade, observando a trajetória das bolas em uma mesa de sinuca. Não importa se o choque é frontal ou de raspão; o centro de massa sempre continua a se mover na direção seguida originalmente pela bola branca, como se não tivesse havido a colisão. Vamos examinar mais de perto esse movimento do centro de massa.

**Movimento do Centro de Massa de um Sistema.** Para isso, vamos substituir o par de bolas de sinuca por um conjunto de  $n$  partículas de massas (possivelmente) diferentes. Não estamos interessados no movimento individual das partículas, mas *apenas* no movimento do centro de massa do conjunto. Embora o centro de massa seja apenas um ponto, ele se move como uma partícula cuja massa é igual à massa total do sistema; podemos atribuir-lhe uma posição, uma velocidade e uma aceleração. Afirmamos (e provaremos a seguir) que a equação vetorial que descreve o movimento do centro de massa de um sistema de partículas é

$$\vec{F}_{\text{res}} = M\vec{a}_{\text{CM}} \quad (\text{sistema de partículas}) \quad (9-14)$$

A Eq. 9-14 é a expressão da segunda lei de Newton para o movimento do centro de massa de um sistema de partículas. Note que a forma é a mesma da equação ( $\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}$ ) para o movimento de uma única partícula. Contudo, as três grandezas que aparecem na Eq. 9-14 devem ser usadas com algum critério:

1.  $\vec{F}_{\text{res}}$  é a força resultante de *todas as forças externas* que agem sobre o sistema. Forças de uma parte do sistema que agem sobre outra parte (*forças internas*) não devem ser incluídas na Eq. 9-14.
2.  $M$  é a *massa total* do sistema. Supomos que nenhuma massa entra no sistema ou sai do sistema durante o movimento, de modo que  $M$  permanece constante. Em casos como esse, dizemos que o sistema é **fechado**.
3.  $\vec{a}_{\text{CM}}$  é a aceleração do *centro de massa* do sistema. A Eq. 9-14 não fornece nenhuma informação a respeito da aceleração de outros pontos do sistema.

A Eq. 9-14 é equivalente a três equações envolvendo as componentes de  $\vec{F}_{\text{res}}$  e  $\vec{a}_{\text{CM}}$  em relação aos três eixos de coordenadas. Essas equações são:

$$F_{\text{res},x} = Ma_{\text{CM},x} \quad F_{\text{res},y} = Ma_{\text{CM},y} \quad F_{\text{res},z} = Ma_{\text{CM},z} \quad (9-15)$$

**Bolas de Sinuca.** Agora podemos voltar a examinar o comportamento das bolas de sinuca. Depois que a bola branca é posta em movimento, nenhuma força externa age sobre o sistema composto pelas duas bolas. De acordo com a Eq. 9-14, se  $\vec{F}_{\text{res}} = 0$ ,  $\vec{a}_{\text{CM}} = 0$ . Como a aceleração é a taxa de variação da velocidade, concluímos que a velocidade do centro de massa do sistema de duas bolas não varia. Quando as duas bolas se chocam, as forças que participam do processo são forças *internas* de uma bola sobre a

outra. Essas forças não contribuem para a força resultante  $\vec{F}_{\text{res}}$ , que continua a ser nula. Assim, o centro de massa do sistema, que estava se movendo para a frente antes da colisão, deve continuar a se mover para a frente após a colisão, com a mesma velocidade e a mesma orientação.

**Corpo Maciço.** A Eq. 9-14 se aplica não só a um sistema de partículas mas também a um corpo maciço, como o bastão de beisebol da Fig. 9-1b. Nesse caso,  $M$  da Eq. 9-14 é a massa do bastão e  $\vec{F}_{\text{res}}$  é a força gravitacional sobre o bastão. De acordo com a Eq. 9-14,  $\vec{a}_{\text{CM}} = \vec{g}$ . Em outras palavras, o centro de massa do bastão se move como se o bastão fosse uma única partícula de massa  $M$  sujeita à força  $\vec{F}_g$ .

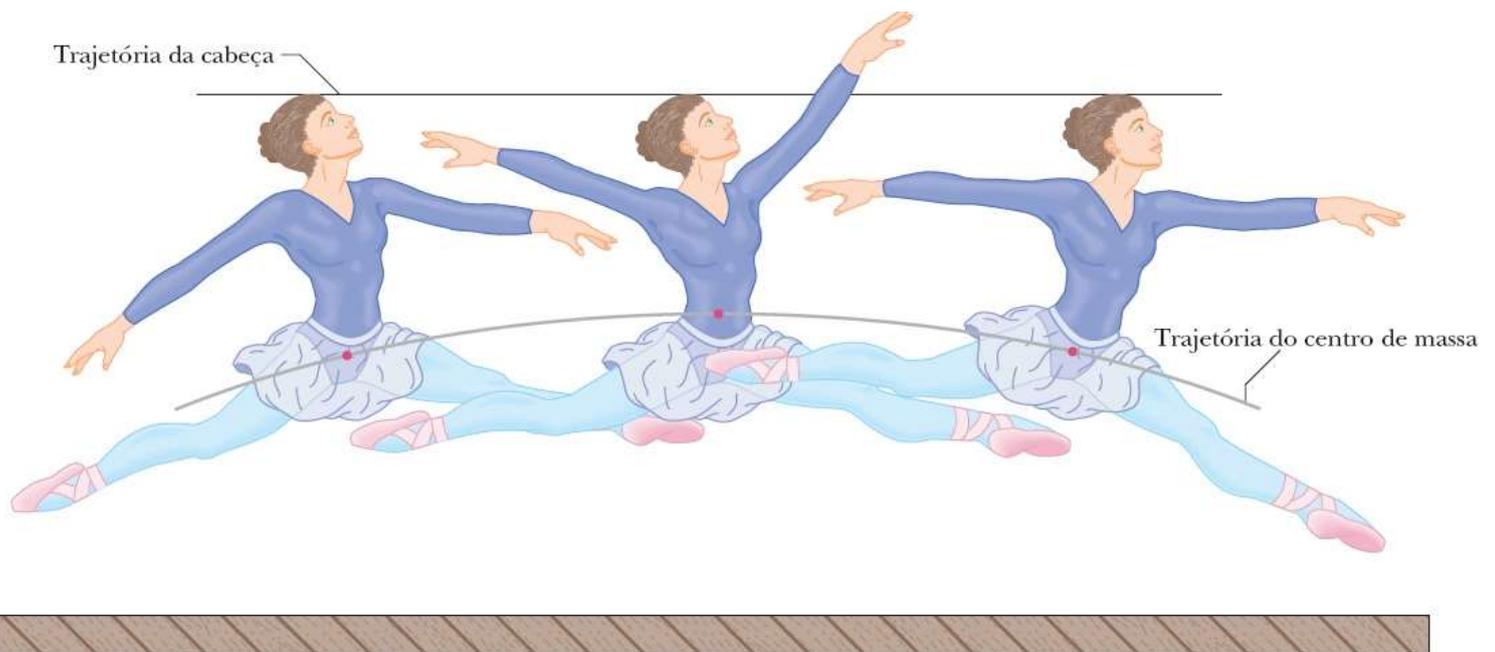
**Explosões.** A Fig. 9-5 mostra outro caso interessante. Suponha que, em um espetáculo de fogos de artifício, um foguete seja lançado em uma trajetória parabólica. Em determinado ponto, o foguete explode em pedaços. Se a explosão não tivesse ocorrido, o foguete teria continuado na trajetória parabólica mostrada na figura. As forças da explosão são *internas* ao sistema (no início, o sistema é apenas o foguete; mais tarde, é composto pelos fragmentos do foguete), ou seja, são forças que partes do sistema exercem sobre outras partes. A menos da resistência do ar, a força *externa* resultante  $\vec{F}_{\text{res}}$  que age sobre o sistema é a força gravitacional, independentemente da explosão do foguete. Assim, de acordo com a Eq. 9-14, a aceleração  $\vec{a}_{\text{CM}}$  do centro de massa dos fragmentos (enquanto estão no ar) permanece igual a  $\vec{g}$ . Isso significa que o centro de massa dos fragmentos segue a mesma trajetória parabólica que o foguete teria seguido se não tivesse explodido.

**Passo de Balé.** Quando uma bailarina executa um salto conhecido como *grand jeté*, ela levanta os braços e estica as pernas horizontalmente assim que os pés deixam o solo (Fig. 9-6). Esses movimentos deslocam para cima o centro de massa. Embora o centro de massa siga fielmente uma trajetória parabólica, o movimento para cima do centro de massa em relação ao corpo diminui a altura alcançada pela cabeça e pelo tronco da bailarina, que se movem aproximadamente na horizontal, criando a ilusão de que a bailarina flutua no ar. 

As forças internas da explosão não mudam a trajetória do centro de massa.



**Figura 9-5** Explosão de um fogo de artifício. Se não fosse a resistência do ar, o centro de massa dos fragmentos continuaria a seguir a trajetória parabólica original até que os fragmentos começassem a atingir o solo.



**Figura 9-6** Um grand jeté. (Adaptado de *The Physics of Dance*, de Kenneth Laws, Schirmer Books, 1984.)

### Demonstração da Equação 9-14

Vamos agora demonstrar essa importante equação. De acordo com a Eq. 9-8, temos, para um sistema de  $n$  partículas,

$$M\vec{r}_{\text{CM}} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots + m_n\vec{r}_n, \quad (9-16)$$

em que  $M$  é a massa total do sistema e  $\vec{r}_{\text{CM}}$  é o vetor posição do centro de massa do sistema.

Derivando a Eq. 9-16 em relação ao tempo, obtemos:

$$M\vec{v}_{\text{CM}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n, \quad (9-17)$$

em que  $\vec{v}_i (= d\vec{r}_i/dt)$  é a velocidade da partícula de ordem  $i$ , e  $\vec{v}_{\text{CM}} (= d\vec{r}_{\text{CM}}/dt)$  é a velocidade do centro de massa.

Derivando a Eq. 9-17 em relação ao tempo, obtemos:

$$M\vec{a}_{\text{CM}} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \cdots + m_n\vec{a}_n, \quad (9-18)$$

em que  $\vec{v}_i (= d\vec{v}_i/dt)$  é a aceleração da partícula de ordem  $i$  e  $\vec{a}_{\text{CM}} (= d\vec{v}_{\text{CM}}/dt)$  é a aceleração do centro de massa. Embora o centro de massa seja apenas um ponto geométrico, ele possui uma posição, uma velocidade e uma aceleração, como se fosse uma partícula.

De acordo com a segunda lei de Newton,  $m_i\vec{a}_i$  é igual à força resultante  $\vec{F}_i$  que age sobre a partícula de ordem  $i$ . Assim, podemos escrever a Eq. 9-18 na forma

$$M\vec{a}_{\text{CM}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n. \quad (9-19)$$

Entre as forças que contribuem para o lado direito da Eq. 9-19 estão as forças que as partículas do

sistema exercem umas sobre as outras (forças internas) e as forças exercidas sobre as partículas por agentes de fora do sistema (forças externas). De conformidade com a terceira lei de Newton, as forças internas formam pares do tipo ação-reação que se cancelam mutuamente na soma do lado direito da Eq. 9-19. O que resta é a soma vetorial das forças *externas* que agem sobre o sistema. Desse modo, a Eq. 9-19 se reduz à Eq. 9-14, como queríamos demonstrar.

## ☑ Teste 2

Dois patinadores em uma superfície de gelo, sem atrito, seguram as extremidades de uma vara, de massa desprezível. É escolhido um eixo de referência na mesma posição que a vara, com a origem no centro de massa do sistema de dois patinadores. Um patinador, Frederico, pesa duas vezes mais do que o outro patinador, Eduardo. Onde os patinadores se encontram se (a) Frederico puxa a vara para se aproximar de Eduardo, (b) Eduardo puxa a vara para se aproximar de Frederico, e (c) os dois patinadores puxam a vara?

## Exemplo 9.03 Movimento do centro de massa de três partículas

Se as partículas de um sistema se deslocam na mesma direção, o centro de massa acompanha o movimento; até aí, não há nenhuma novidade. O que acontece, porém, se as partículas se movem em várias direções, com acelerações diferentes? Segue um exemplo.

As três partículas da Fig. 9-7a estão inicialmente em repouso. Cada uma sofre a ação de uma força *externa* produzida por um corpo fora do sistema. A orientação das forças está indicada na figura, e os módulos são  $F_1 = 6,0 \text{ N}$ ,  $F_2 = 12 \text{ N}$  e  $F_3 = 14 \text{ N}$ . Qual é a aceleração (módulo e orientação) do centro de massa do sistema?

### IDEIAS-CHAVE

A posição do centro de massa está assinalada por um ponto na figura. Podemos tratar o centro de massa como se fosse uma partícula real, com massa igual à massa total do sistema,  $M = 16 \text{ kg}$ . Também podemos tratar as três forças externas como se fossem aplicadas ao centro de massa (Fig. 9-7b).

**Cálculos:** Podemos aplicar a segunda lei de Newton ( $\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}$ ) ao centro de massa, escrevendo

$$\vec{F}_{\text{res}} = M\vec{a}_{\text{CM}} \quad (9-20)$$

ou 
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = M\vec{a}_{\text{CM}}$$

Assim, 
$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3}{M}. \quad (9-21)$$

De acordo com a Eq. 9-20, a aceleração  $\vec{a}_{CM}$  do centro de massa tem a mesma direção que a força externa resultante  $\vec{F}_{res}$  aplicada ao sistema (Fig. 9-7b). Como as partículas estão inicialmente em repouso, o centro de massa também deve estar inicialmente em repouso. Quando o centro de massa começa a acelerar, ele se move na direção de  $\vec{a}_{CM}$  e  $\vec{F}_{res}$ .

Podemos calcular o lado direito da Eq. 9-21 usando uma calculadora, ou escrever a Eq. 9-21 em termos das componentes, calcular as componentes de  $\vec{a}_{CM}$  e, em seguida, obter  $\vec{a}_{CM}$ . Ao longo do eixo  $x$ , temos:

$$\begin{aligned} a_{CM,x} &= \frac{F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}}{M} \\ &= \frac{-6,0 \text{ N} + (12 \text{ N}) \cos 45^\circ + 14 \text{ N}}{16 \text{ kg}} = 1,03 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Ao longo do eixo  $y$ , temos:

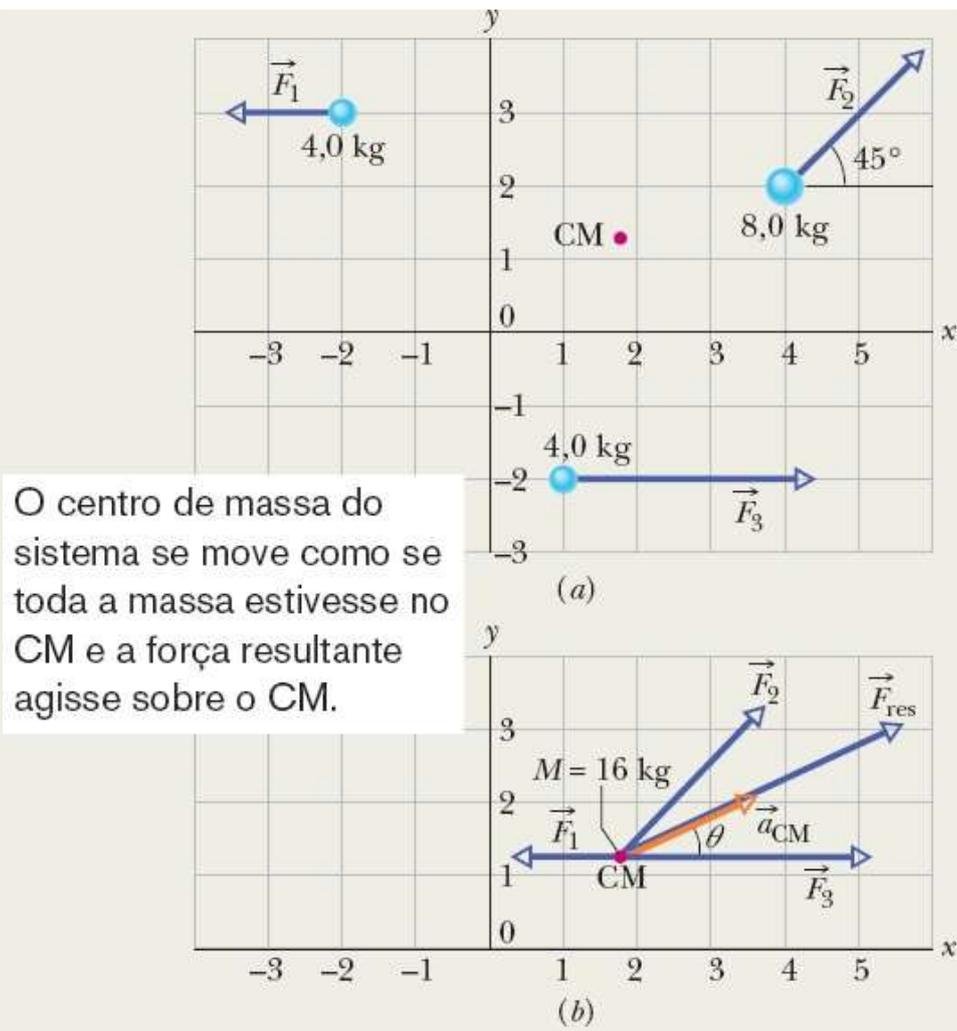
$$\begin{aligned} a_{CM,y} &= \frac{F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}}{M} \\ &= \frac{0 + (12 \text{ N}) \sin 45^\circ + 0}{16 \text{ kg}} = 0,530 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Assim, o módulo de  $\vec{a}_{CM}$  é dado por

$$\begin{aligned} a_{CM} &= \sqrt{(a_{CM,x})^2 + (a_{CM,y})^2} \\ &= 1,16 \text{ m/s}^2 \approx 1,2 \text{ m/s}^2 \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

e o ângulo (em relação ao semieixo  $x$  positivo) é dado por

$$\theta = \tan^{-1} \frac{a_{CM,y}}{a_{CM,x}} = 27^\circ. \quad (\text{Resposta})$$



**Figura 9-7** (a) Três partículas, inicialmente em repouso nas posições indicadas, são submetidas às forças externas  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$ . O centro de massa (CM) do sistema está indicado. (b) As forças são transferidas para o centro de massa do sistema, que se comporta como uma partícula de massa  $M$  igual à massa total do sistema. A força externa resultante  $\vec{F}_{res}$  e a aceleração  $\vec{a}_{CM}$  do centro de massa estão indicadas.

### 9-3 MOMENTO LINEAR

#### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

- 9.13 Saber que o momento é uma grandeza vetorial e, portanto, possui um módulo e uma orientação e pode ser representado por meio de componentes.
- 9.14 Saber que o momento linear de uma partícula é igual ao produto da massa pela velocidade da partícula.
- 9.15 Calcular a variação do momento de uma partícula a partir da variação de velocidade da partícula.
- 9.16 Aplicar a relação entre o momento de uma partícula e a força (resultante) que age sobre a partícula.
- 9.17 Calcular o momento de um sistema de partículas como o produto da massa total do sistema pela velocidade do centro de massa.

9.18 Usar a relação entre o momento do centro de massa de um sistema e a força resultante que age sobre o sistema.

## Ideias-Chave

- No caso de uma partícula isolada, definimos uma grandeza  $\vec{p}$ , conhecida como momento linear, por meio da equação

$$\vec{p} = m\vec{v},$$

que, como mostra a equação, é uma grandeza vetorial com a mesma orientação que a velocidade da partícula. Em termos do momento linear, a segunda lei de Newton assume a seguinte forma:

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

- No caso de um sistema de partículas, as equações anteriores se tornam

$$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{CM}} \quad \text{e} \quad \vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

## Momento Linear

Vamos, por enquanto, concentrar nossa atenção em uma partícula isolada, com o objetivo de definir duas grandezas importantes. Mais adiante, essas definições serão aplicadas a sistemas com muitas partículas.

A primeira definição é a de uma palavra – *momento* – que possui vários significados na linguagem comum, mas apenas um significado na física e na engenharia. O **momento linear** de uma partícula é uma grandeza vetorial  $\vec{p}$  definida por meio da equação

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (\text{momento linear de uma partícula}), \quad (9-22)$$

em que  $m$  é a massa e  $\vec{v}$  é a velocidade da partícula. (O adjetivo *linear* é frequentemente omitido, mas serve para distinguir  $\vec{p}$  do *momento angular*, que será definido no Capítulo 11 e está associado a rotações.) Como  $m$  é uma grandeza escalar positiva, a Eq. 9-22 mostra que  $\vec{p}$  e  $\vec{v}$  têm a mesma orientação. De acordo com a Eq. 9-22, a unidade de momento do SI é o quilograma-metro por segundo ( $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ ).

**Força e Momento.** Newton expressou sua segunda lei originalmente em termos do momento:



A taxa de variação com o tempo do momento de uma partícula é igual à força resultante que age sobre a partícula e tem a mesma orientação que a força resultante.

Em forma de equação, isso significa o seguinte:

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (9-23)$$

Em palavras, a Eq. 9-23 afirma que a força resultante  $\vec{F}_{\text{res}}$  aplicada a uma partícula faz variar o momento linear  $\vec{p}$  da partícula. Na verdade, o momento linear só pode mudar se a partícula estiver sujeita a uma força. Se não existe nenhuma força,  $\vec{p}$  não pode mudar. Como vamos ver no Módulo 9-5, esse último fato pode ser uma ferramenta extremamente poderosa para resolver problemas.

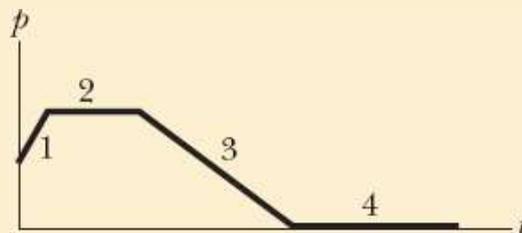
Substituindo na Eq. 9-23  $\vec{p}$  pelo seu valor, dado pela Eq. 9-22, obtemos, para uma massa  $m$  constante,

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Assim, as relações  $\vec{F}_{\text{res}} = d\vec{p}/dt$  e  $\vec{F} = m\vec{a}$  são expressões equivalentes da segunda lei de Newton para uma partícula.

### ✓ Teste 3

A figura mostra o módulo  $p$  do momento linear em função do tempo  $t$  para uma partícula que se move ao longo de um eixo. Uma força dirigida ao longo do eixo age sobre a partícula. (a) Ordene as quatro regiões indicadas de acordo com o módulo da força, do maior para o menor. (b) Em que região a velocidade da partícula está diminuindo?



## O Momento Linear de um Sistema de Partículas

Vamos estender a definição de momento linear a um sistema de partículas. Considere um sistema de  $n$  partículas, cada uma com sua massa, velocidade e momento linear. As partículas podem interagir e sofrer o efeito de forças externas. O sistema como um todo possui um momento linear total  $\vec{P}$ , que é definido como a soma vetorial dos momentos lineares das partículas. Assim,

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_n \\ &= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n. \end{aligned} \quad (9-24)$$

Comparando a Eq. (9-24) com a Eq. 9-17, vemos que

$$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{CM}} \quad (\text{momento linear de um sistema de partículas}), \quad (9-25)$$

que é outra forma de definir o momento linear de um sistema de partículas:



O momento linear de um sistema de partículas é igual ao produto da massa total do sistema pela velocidade do centro de massa.

**Força e Momento.** Derivando a Eq. 9-25 em relação ao tempo (e supondo que a massa não varia com o tempo), obtemos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} \quad (9-26)$$

Comparando as Eqs. 9-14 e 9-26, vemos que é possível escrever a segunda lei de Newton para um sistema de partículas na forma

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (\text{sistema de partículas}), \quad (9-27)$$

em que  $\vec{F}_{res}$  é a força externa resultante que age sobre o sistema. A Eq. 9-27 é a generalização para um sistema de muitas partículas da equação  $\vec{F}_{res} = d\vec{P}/dt$  válida para uma partícula isolada. Em palavras, a equação significa que a força externa  $\vec{F}_{res}$ , ao ser aplicada a um sistema de partículas, muda o momento linear  $\vec{P}$  do sistema. Na verdade, o momento linear de um sistema só pode ser mudado por uma força externa  $\vec{F}_{res}$ . Se não existe uma força externa,  $\vec{P}$  não pode mudar. Este fato constitui uma ferramenta extremamente poderosa para resolver problemas.

## 9-4 COLISÃO E IMPULSO

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

- 9.19 Saber que o impulso é uma grandeza vetorial e, portanto, possui um módulo e uma orientação e pode ser representado por meio de componentes.
- 9.20 Usar a relação entre o impulso e a variação de momento.
- 9.21 Usar a relação entre impulso, força média e a duração do impulso.
- 9.22 Usar as equações de aceleração constante para relacionar o impulso à força média.
- 9.23 Dada uma função que expressa a variação de uma força com o tempo, calcular o impulso (e a variação do momento) integrando a função.
- 9.24 Dada uma curva que representa a variação de uma força com o tempo, calcular o impulso (e a variação do momento) por integração gráfica.
- 9.25 Em uma série contínua de colisões de projéteis com um alvo, calcular a força média que age sobre o alvo a partir da taxa mássica das colisões e da variação de velocidade experimentada pelos projéteis.

---

## Ideias-Chave

- A aplicação da segunda lei de Newton na forma de momento a um corpo, que se comporta como uma partícula, envolvido em uma colisão leva ao teorema do impulso e momento linear:

$$\vec{P}_f - \vec{P}_i = \Delta\vec{P} = \vec{J},$$

em que  $\vec{P}_f - \vec{P}_i = \Delta\vec{P}$  é a variação do momento linear do corpo, e  $\vec{J}$  é o impulso associado à força  $\vec{F}(t)$  exercida sobre o corpo pelo outro corpo envolvido na colisão:

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt.$$

- Se  $F_{\text{méd}}$  é o módulo médio de  $\vec{F}(t)$  durante a colisão,  $\Delta t$  é a duração da colisão, e o movimento é retilíneo; logo, o módulo do impulso é dado por

$$J = F_{\text{méd}} \Delta t.$$

- Em uma série contínua de colisões com um alvo fixo de projéteis de massa  $m$  e velocidade  $v$ , a força média que os projéteis exercem sobre o alvo é dada por

$$F_{\text{méd}} = -\frac{n}{\Delta t} \Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m \Delta v,$$

em que  $n/\Delta t$  é a taxa com a qual os projéteis colidem com o corpo, e  $\Delta v$  é a variação de velocidade dos projéteis. A força média também pode ser escrita na forma

$$F_{\text{méd}} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} \Delta v,$$

em que  $\Delta m/\Delta t$  é a taxa mássica das colisões. A variação de velocidade é  $\Delta v = -v$  se os projéteis ficam em repouso depois de cada choque, e  $\Delta v = -2v$  se ricocheteiam com a mesma velocidade escalar.

---

## Colisão e Impulso

O momento  $\vec{P}$  de um corpo que se comporta como uma partícula permanece constante, a menos que o corpo seja submetido a uma força externa. Para mudar o momento do corpo, podemos, por exemplo, empurrá-lo. Também podemos mudar o momento do corpo de modo mais violento, fazendo-o colidir com um taco de beisebol. Em uma *colisão*, a força exercida sobre o corpo é de curta duração, tem um módulo elevado e provoca uma mudança brusca do momento do corpo. Colisões ocorrem frequentemente na vida real, mas, antes de discutir situações mais complexas, vamos falar de um tipo simples de colisão em que um corpo que se comporta como uma partícula (um *projétil*) colide com outro corpo que se comporta como outra partícula (um *alvo*).

### Colisão Simples

Suponha que o projétil seja uma bola, e o alvo seja um taco. A colisão dura pouco tempo, mas a força que age sobre a bola é suficiente para inverter o movimento. A Fig. 9-8 mostra um instantâneo da colisão. A bola sofre a ação de uma força  $\vec{F}(t)$  que varia durante a colisão e muda o momento linear  $\vec{P}$  da bola. A

variação está relacionada à força por meio da segunda lei de Newton, escrita na forma  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ . Assim, no intervalo de tempo  $dt$ , a variação do momento da bola é dada por

$$d\vec{p} = \vec{F}(t) dt. \quad (9-28)$$

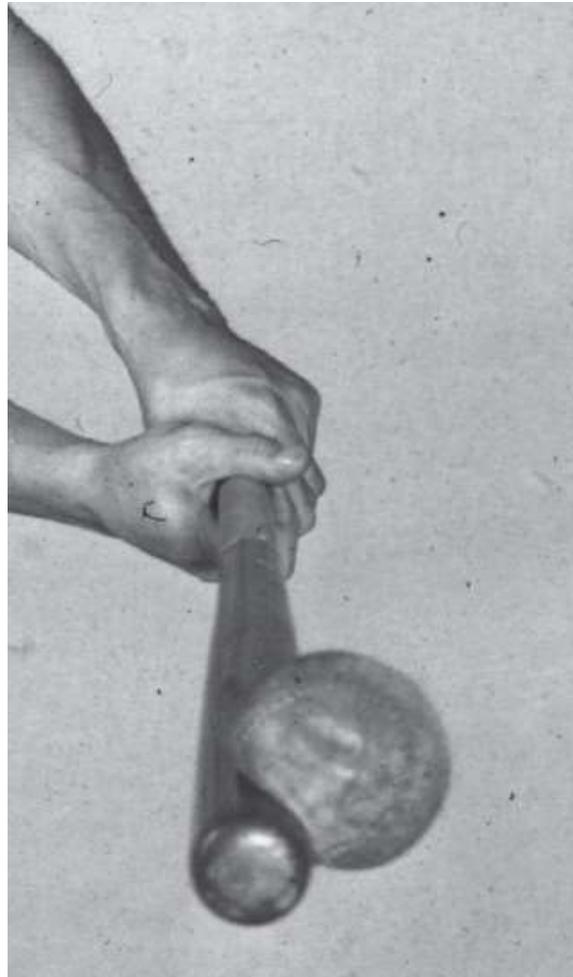
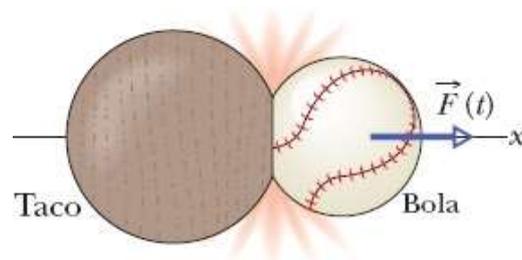


Foto de Harold E. Edgerton. © The Harold and Esther Edgerton Family Trust, courtesy de Palm Press, Inc.

A colisão de uma bola com o taco faz com que a bola se deforme.



**Figura 9-8** A força  $\vec{F}(t)$  age sobre uma bola quando a bola e um taco colidem.

Podemos calcular a variação total do momento da bola provocada pela colisão integrando ambos os membros da Eq. 9-28 de um instante  $t_i$  imediatamente antes da colisão até um instante  $t_f$  imediatamente após a colisão:

$$\int_{t_i}^{t_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt. \quad (9-29)$$

O lado esquerdo da Eq. (9-29) nos dá a variação do momento:  $\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$ . O lado direito, que é uma medida tanto da intensidade quanto da duração da força da colisão, é chamado de **impulso** e representado pelo símbolo  $\vec{J}$ :

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt \quad (\text{definição de impulso}). \quad (9-30)$$

Assim, a variação do momento de um objeto é igual ao impulso exercido sobre o objeto:

$$\Delta\vec{p} = \vec{J} \quad (\text{teorema do momento linear e impulso}). \quad (9-31)$$

A Eq. 9-31 também pode ser escrita na forma

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{J} \quad (9-32)$$

e, na forma de componentes, como

$$\Delta p_x = J_x \quad (9-33)$$

e

$$p_{fx} - p_{ix} = \int_{t_i}^{t_f} F_x dt. \quad (9-34)$$

**Integração da Força.** Se a função  $\vec{F}(t)$  for conhecida, podemos calcular  $\vec{J}$  (e, portanto, a variação do momento) integrando a função. Se temos um gráfico de  $\vec{F}$  em função do tempo  $t$ , podemos obter  $\vec{J}$  calculando a área entre a curva e o eixo  $t$ , como na Fig. 9-9a. Em muitas situações, não sabemos como a força varia com o tempo, mas conhecemos o módulo médio  $F_{\text{méd}}$  da força e a duração  $\Delta t (= t_f - t_i)$  da colisão. Nesse caso, podemos escrever o módulo do impulso como

$$J = F_{\text{méd}} \Delta t. \quad (9-35)$$

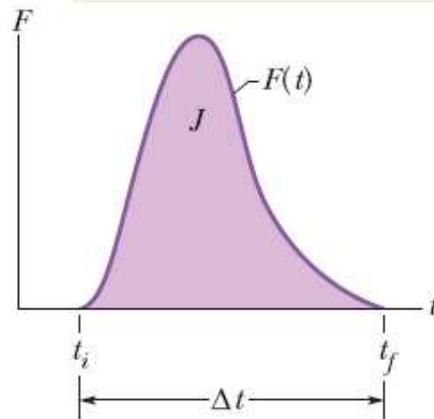
A Fig. 9-9b mostra a força média em função do tempo. A área sob a curva no gráfico é igual à área sob a curva da força real na Fig. 9-9a, uma vez que as duas áreas são iguais a  $J$ , o módulo do impulso.

Em vez de nos preocuparmos com a bola, poderíamos ter concentrado nossa atenção no taco na Fig. 9-8. De acordo com a terceira lei de Newton, a força experimentada pelo taco em qualquer instante tem o mesmo módulo que a força experimentada pela bola, mas o sentido oposto. De acordo com a Eq. 9-30, isso significa que o impulso experimentado pelo taco tem o mesmo módulo que o impulso experimentado pela bola, mas o sentido oposto.

## ☑ Teste 4

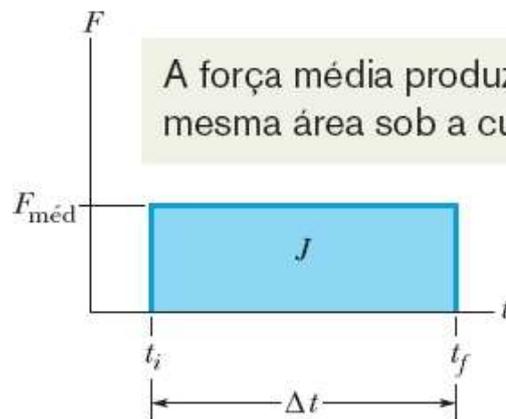
Um paraquedista, cujo paraquedas não abriu, cai em um monte de neve e sofre ferimentos leves. Se caísse em um terreno sem neve, o tempo necessário para parar teria sido 10 vezes menor e a colisão seria fatal. A presença da neve aumenta, diminui ou mantém inalterado o valor (a) da variação do momento do paraquedista, (b) do impulso experimentado pelo paraquedista e (c) da força experimentada pelo paraquedista? 

O impulso da colisão é igual à área sob a curva.



(a)

A força média produz a mesma área sob a curva.



(b)

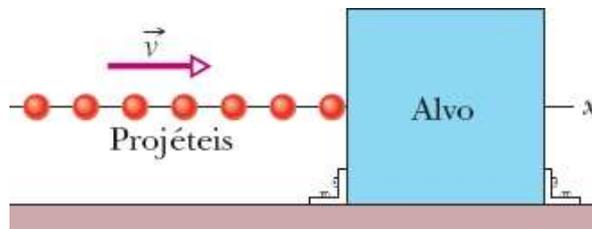
**Figura 9-9** (a) A curva mostra o módulo da força dependente do tempo  $F(t)$  que age sobre a bola na colisão da Fig. 9-8. A área sob a curva é igual ao módulo do impulso  $\vec{J}$  sobre a bola durante a colisão. (b) A altura do retângulo representa a força média  $F_{\text{méd}}$  que age sobre a bola no intervalo  $\Delta t$ . A área do retângulo é igual à área sob a curva do item (a) e, portanto, também é igual ao módulo do impulso  $\vec{J}$  durante a colisão.

## Colisões em Série

Vamos considerar agora a força experimentada por um corpo ao sofrer uma série de colisões iguais. Imagine, por exemplo, que uma daquelas máquinas de arremessar bolas de tênis tenha sido ajustada para

disparar bolas contra uma parede, uma após a outra. Cada colisão produz uma força sobre a parede, mas não é essa força que queremos calcular; o que nos interessa é a força média  $F_{\text{méd}}$  a que a parede é submetida durante o bombardeio, ou seja, a força média associada a um grande número de colisões.

Na Fig. 9-10, projéteis igualmente espaçados, de massas iguais  $m$  e momentos iguais  $m\bar{v}$ , deslocam-se ao longo de um eixo  $x$  e colidem com um alvo fixo. Seja  $n$  o número de projéteis que colidem em um intervalo de tempo  $\Delta t$ . Como o movimento é apenas ao longo do eixo  $x$ , podemos usar as componentes dos momentos ao longo desse eixo. Assim, cada projétil tem momento inicial  $mv$  e sofre uma variação  $\Delta p$  do momento linear por causa da colisão. A variação total do momento linear de  $n$  projéteis durante o intervalo  $\Delta t$  é  $n \Delta p$ . O impulso resultante  $\vec{J}$  a que é submetido o alvo no intervalo de tempo  $\Delta t$  está orientado ao longo do eixo  $x$  e tem o mesmo módulo  $n \Delta p$  que a variação do momento linear, mas o sentido oposto. Podemos escrever essa relação na forma



**Figura 9-10** Uma série de projéteis, todos com o mesmo momento linear, colide com um alvo fixo. A força média  $F_{\text{méd}}$  exercida sobre o alvo aponta para a direita e tem um módulo que depende da taxa com a qual os projéteis colidem com o alvo, ou, alternativamente, da taxa mássica dos projéteis.

$$J = -n \Delta p, \quad (9-36)$$

em que o sinal negativo indica que  $J$  e  $\Delta p$  têm sentidos opostos.

**Força Média.** Combinando as Eq. 9-35 e Eq. 9-36, podemos obter a força média  $F_{\text{méd}}$  que age sobre o alvo durante as colisões:

$$F_{\text{méd}} = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t} \Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m \Delta v. \quad (9-37)$$

A Eq. 9-37 expressa  $F_{\text{méd}}$  em termos de  $n/\Delta t$ , a taxa com a qual os projéteis colidem com o alvo, e  $\Delta v$ , a variação de velocidade dos projéteis.

**Varição de Velocidade.** Se os projéteis permanecem em repouso após o choque, a variação de velocidade é dada por

$$\Delta v = v_f - v_i = 0 - v = -v, \quad (9-38)$$

em que  $v_i (= v)$  e  $v_f (= 0)$  são as velocidades antes e depois da colisão, respectivamente. Se, em vez disso, os projéteis ricocheteiam no alvo e conservam a mesma velocidade escalar,  $v_f = -v$  e, portanto,

$$\Delta v = v_f - v_i = -v - v = -2v. \quad (9-39)$$

No intervalo de tempo  $\Delta t$ , uma quantidade de massa  $\Delta m = nm$  colide com o alvo. Sendo assim,

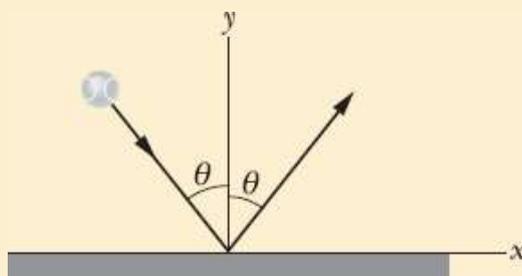
podemos escrever a Eq. 9-37 na forma

$$F_{\text{méd}} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} \Delta v. \quad (9-40)$$

A Eq. 9-40 expressa a força média  $F_{\text{méd}}$  em termos de  $\Delta m/\Delta t$ , a taxa com a qual a massa colide com o alvo, conhecida como taxa mássica. Mais uma vez, podemos substituir  $\Delta v$  pelo resultado da Eq. 9-38 ou 9-39, dependendo do que acontece com os projéteis após as colisões.

### ✓ Teste 5

A figura mostra uma vista superior de uma bola ricocheteando em uma parede vertical sem que a velocidade escalar da bola seja afetada. Considere a variação  $\Delta \vec{p}$  do momento linear da bola. (a)  $\Delta p_x$  é positiva, negativa ou nula? (b)  $\Delta p_y$  é positiva, negativa ou nula? (c) Qual é a orientação de  $\Delta \vec{p}$ ?



### 📍 Exemplo 9.04 Colisão de um carro de corrida com um muro de proteção

A Fig. 9-11a é uma vista superior da trajetória de um carro de corrida ao colidir com um muro de proteção. Antes da colisão, o carro está se movendo com uma velocidade escalar  $v_i = 70$  m/s ao longo de uma linha reta que faz um ângulo de  $30^\circ$  com o muro. Após a colisão, está se movendo com uma velocidade escalar  $v_f = 50$  m/s ao longo de uma linha reta que faz um ângulo de  $10^\circ$  com o muro. A massa  $m$  do piloto é 80 kg.

(a) Qual é o impulso  $\vec{J}$  a que o piloto é submetido no momento da colisão?

#### IDEIAS-CHAVE

Podemos tratar o piloto como uma partícula e aplicar os princípios de física discutidos neste módulo, mas não podemos calcular  $\vec{J}$  usando a Eq. 9-30 porque não conhecemos a força  $\vec{F}(t)$  que age sobre o piloto durante a colisão. Em outras palavras, não dispomos de uma função, nem de um gráfico, que permita obter o valor de  $\vec{J}$  por integração. Entretanto, podemos usar a Eq. 9-32 ( $\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$ ) para calcular  $\vec{J}$  a partir da variação do momento linear.

**Cálculos:** A Fig. 9-11b mostra o momento do piloto antes da colisão,  $\vec{p}_i$  (que faz um ângulo de  $30^\circ$  com o semieixo  $x$  positivo), e

o momento do piloto depois da colisão,  $\vec{p}_f$  (que faz um ângulo de  $-10^\circ$  com o semieixo  $x$  positivo). De acordo com as Eqs. 9-32 e 9-22 ( $\vec{p} = m\vec{v}$ ), podemos escrever

$$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i). \quad (9-41)$$

Poderíamos calcular o lado direito da Eq. 9-41 diretamente ou com o auxílio de uma calculadora, pois sabemos que  $m$  é 80 kg,  $\vec{v}_f$  tem um módulo de 50 m/s e um ângulo de  $-10^\circ$ , e  $\vec{v}_i$  tem um módulo de 70 m/s e um ângulo de  $30^\circ$ . Em vez disso, vamos resolver a Eq. 9-41 separando-a em componentes.

**Componente  $x$ :** Para o eixo  $x$ , temos:

$$\begin{aligned} J_x &= m(v_{fx} - v_{ix}) \\ &= (80 \text{ kg})[(50 \text{ m/s}) \cos(-10^\circ) - (70 \text{ m/s}) \cos 30^\circ] \\ &= -910 \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \end{aligned}$$

**Componente  $y$ :** Para o eixo  $y$ , temos:

$$\begin{aligned} J_y &= m(v_{fy} - v_{iy}) \\ &= (80 \text{ kg})[(50 \text{ m/s}) \sin(-10^\circ) - (70 \text{ m/s}) \sin 30^\circ] \\ &= -3495 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \approx -3500 \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \end{aligned}$$

**Impulso:** O impulso é, portanto,

$$\vec{J} = (-910\hat{i} - 3500\hat{j}) \text{ kg} \cdot \text{m/s}, \quad (\text{Resposta})$$

o que significa que o módulo do impulso é

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = 3616 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \approx 3600 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

O ângulo de  $\vec{J}$  é dado por

$$\theta = \tan^{-1} \frac{J_y}{J_x}, \quad (\text{Resposta})$$

que, de acordo com uma calculadora, é  $75,4^\circ$ . Lembre-se de que o resultado fisicamente correto do arco tangente pode ser o indicado pela calculadora ou o indicado pela calculadora mais  $180^\circ$ . Para verificar qual dos dois é o resultado correto, podemos desenhar as componentes de  $\vec{J}$  (Fig. 9-11c). Fazendo isso, verificamos que  $\theta$  é, na verdade,  $75,4^\circ + 180^\circ = 255,4^\circ$ , que também pode ser escrito como

$$\theta = -105^\circ.$$

(Resposta)

(b) A colisão dura 14 ms. Qual é o módulo da força média que o piloto experimenta durante a colisão?

### IDEIA-CHAVE

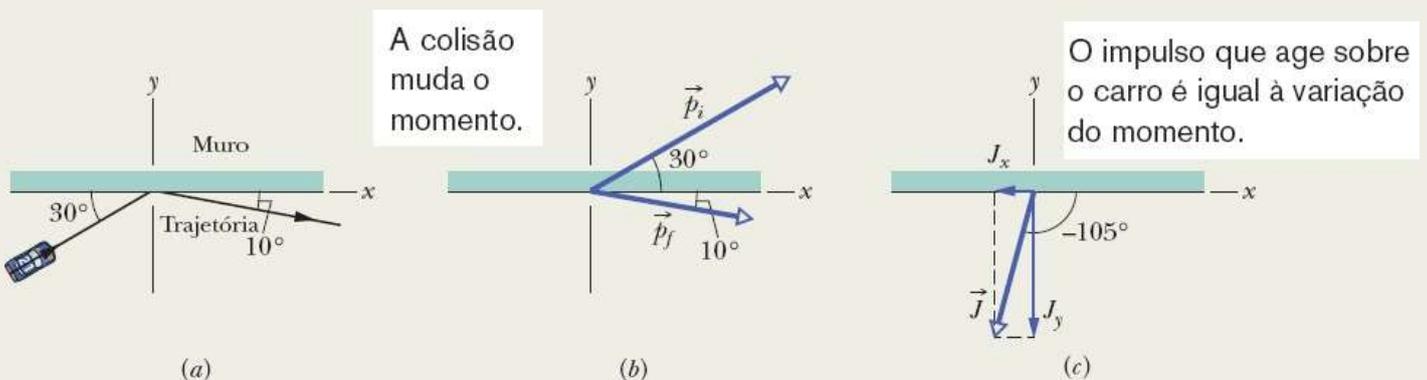
De acordo com a Eq. 9-35 ( $J = F_{\text{méd}} \Delta t$ ), o módulo  $F_{\text{méd}}$  da força média é a razão entre o módulo do impulso,  $J$ , e a duração  $\Delta t$  da colisão.

**Cálculos:** Temos

$$\begin{aligned} F_{\text{méd}} &= \frac{J}{\Delta t} = \frac{3616 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{0,014 \text{ s}} \\ &= 2,583 \times 10^5 \text{ N} \approx 2,6 \times 10^5 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Usando a equação  $F = ma$  com  $m = 80 \text{ kg}$ , é fácil mostrar que o módulo da aceleração do piloto durante a colisão é  $3,22 \times 10^3 \text{ m/s}^2 = 329g$ . Uma aceleração tão elevada seria provavelmente fatal.

**Normas de Segurança:** Os engenheiros mecânicos tentam reduzir os riscos dos pilotos de corrida projetando muros “macios” para que as colisões durem mais tempo. Se a colisão examinada neste exemplo durasse 10 vezes mais tempo e todos os outros parâmetros permanecessem iguais, os módulos da força média e da aceleração média seriam 10 vezes menores e o piloto provavelmente sobreviveria.



**Figura 9-11** (a) Vista superior da trajetória seguida por um carro de corrida e seu piloto quando o carro colide com um muro de proteção. (b) O momento inicial  $\vec{p}_i$  e o momento final  $\vec{p}_f$  do piloto. (c) O impulso  $\vec{J}$  sobre o piloto na colisão.

## 9-5 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

**9.26** No caso de um sistema isolado de partículas, usar a lei de conservação do momento linear para relacionar o momento inicial das partículas ao momento em um instante posterior.

**9.27** Saber que, mesmo que um sistema não seja isolado, a lei de conservação do momento linear pode ser aplicada à componente do momento em relação a um eixo, *contanto* que não haja uma componente de uma força externa na direção desse eixo.

## Ideias-Chave

• Se um sistema é fechado e isolado, o momento linear  $\vec{P}$  do sistema é constante:

$$\vec{P} = \text{constante} \quad (\text{sistema fechado e isolado})$$

• A lei de conservação do momento linear também pode ser escrita em termos do momento inicial do sistema e do momento do sistema em um instante posterior:

$$\vec{P} = \vec{P}_f \quad (\text{sistema fechado e isolado})$$

## Conservação do Momento Linear

Suponha que a força externa resultante  $\vec{F}_{\text{res}}$  (e, portanto, o impulso  $\vec{J}$ ) que age sobre um sistema de partículas é zero (ou seja, que o sistema é isolado) e que nenhuma partícula entra no sistema ou sai do sistema (ou seja, que o sistema é fechado). Fazendo  $\vec{F}_{\text{res}} = 0$  na Eq. 9-27, temos  $d\vec{P}/dt = 0$  e, portanto,

$$\vec{P} = \text{constante} \quad (\text{sistema fechado e isolado}). \quad (9-42)$$

Em palavras,



Se um sistema de partículas não está submetido a forças externas, o momento linear total  $\vec{P}$  do sistema não pode variar.

Este resultado, conhecido como **lei de conservação do momento linear**, também pode ser escrito na forma

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad (\text{sistema fechado e isolado}). \quad (9-43)$$

Em palavras, a Eq. 9-43 significa que, em um sistema fechado e isolado,

$$\left( \begin{array}{c} \text{momento linear total em} \\ \text{um instante inicial } t_i \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{momento linear total em} \\ \text{um instante posterior } t_f \end{array} \right).$$

**Atenção:** A conservação do momento não deve ser confundida com a conservação da energia. Nos exemplos deste módulo, o momento é conservado, mas o mesmo não acontece com a energia.

Como as Eqs. 9-42 e 9-43 são equações vetoriais, cada uma equivale a três equações para a conservação do momento linear em três direções mutuamente perpendiculares, como, por exemplo, os eixos de um sistema de coordenadas  $xyz$ . Dependendo das forças presentes no sistema, o momento linear pode ser conservado em uma ou duas direções, mas não em todas. Entretanto,



Se uma das componentes da força *externa* aplicada a um sistema fechado é nula, a componente do momento linear do sistema em relação ao mesmo eixo não pode variar.

No caso de um problema específico, como é possível saber se o momento linear é conservado, digamos, ao longo do eixo  $x$ ? Para isso, basta examinar as componentes das forças externas em relação ao eixo  $x$ . Se a soma das componentes é zero, o momento é conservado. Suponha, por exemplo, que você arremessa uma laranja de uma extremidade a outra de um aposento. Durante o percurso, a única força externa que age sobre a laranja (que estamos considerando como o sistema) é a força gravitacional  $\vec{F}_g$ , dirigida verticalmente para baixo. Assim, a componente vertical do momento linear da laranja varia, mas, já que nenhuma força externa horizontal age sobre a laranja, a componente horizontal do momento linear não pode variar.

Note que estamos falando das forças externas que agem sobre um sistema fechado. Embora forças internas possam mudar o momento linear de partes do sistema, elas não podem mudar o momento linear total do sistema. Assim, por exemplo, os órgãos do seu corpo estão sujeitos a muitas forças, mas elas (felizmente) não fazem com que você seja arremessado constantemente de um lado para outro.

Os exemplos deste módulo envolvem explosões unidimensionais (o que significa que os movimentos antes e depois da explosão ocorrem ao longo de um único eixo) ou bidimensionais (o que significa que os movimentos ocorrem em um plano que contém dois eixos). As colisões serão discutidas em outros módulos.

### Teste 6

Um artefato inicialmente em repouso em um piso sem atrito explode em dois pedaços, que deslizam pelo piso após a explosão. Um dos pedaços desliza no sentido positivo de um eixo  $x$ . (a) Qual é a soma dos momentos dos dois pedaços após a explosão? (b) O segundo pedaço pode se mover em uma direção diferente da do eixo  $x$ ? (c) Qual é a orientação do momento do segundo pedaço?

### Exemplo 9.05 Explosão unidimensional e velocidade relativa de um rebocador espacial

A Fig. 9-12a mostra um rebocador espacial e uma cápsula de carga, de massa total  $M$ , viajando ao longo de um eixo  $x$  no espaço

sideral com uma velocidade inicial  $\vec{v}_i$  de módulo 2100 km/h em relação ao Sol. Com uma pequena explosão, o rebocador ejetou a cápsula de carga, de massa  $0,20M$  (Fig. 9-12b). Depois disso, o rebocador passa a viajar 500 km/h mais depressa que a cápsula ao longo do eixo  $x$ , ou seja, a velocidade relativa  $v_{rel}$  entre o cargueiro e a cápsula é 500 km/h. Qual é a nova velocidade  $\vec{v}_{RS}$  do rebocador em relação ao Sol?

### IDEIA-CHAVE

Como o sistema rebocador-cápsula é fechado e isolado, o momento linear total do sistema é conservado, ou seja,

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f, \quad (9-44)$$

em que os índices  $i$  e  $f$  indicam os valores antes e depois da ejeção, respectivamente. (*Atenção:* Embora o momento do sistema permaneça o mesmo, não se pode dizer o mesmo dos momentos do rebocador e da cápsula, que são diferentes antes e depois da ejeção.)

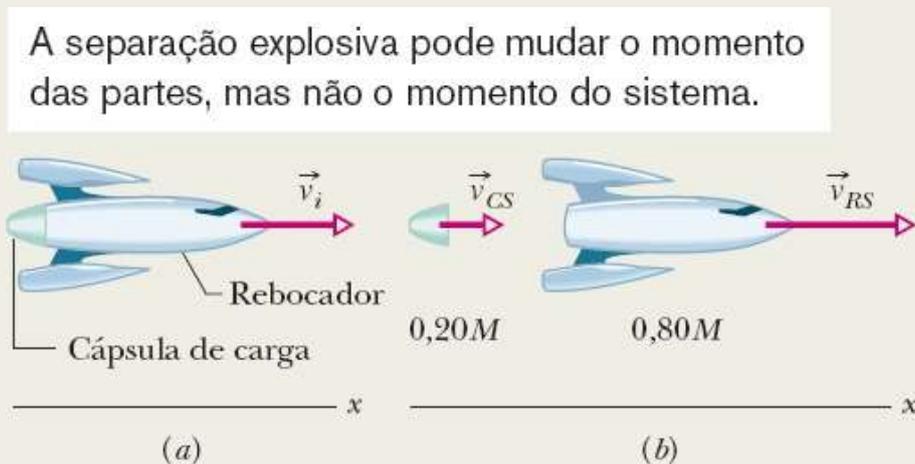
**Cálculos:** Como o movimento é ao longo de um único eixo, podemos escrever os momentos e as velocidades em termos das componentes  $x$ . Antes da ejeção, temos:

$$P_i = Mv_i. \quad (9-45)$$

Seja  $v_{CS}$  a velocidade da cápsula ejetada em relação ao Sol. O movimento linear total do sistema após a ejeção é dado por

$$P_f = (0,20M)v_{CS} + (0,80M)v_{RS}, \quad (9-46)$$

em que o primeiro termo do lado direito é o momento linear da cápsula de carga e o segundo termo é o momento linear do rebocador.



**Figura 9-12** (a) Um rebocador espacial, com uma cápsula de carga, movendo-se com velocidade inicial  $\vec{v}_i$ . (b) O rebocador ejetou a cápsula de carga; agora as velocidades em relação ao Sol são  $\vec{v}_{CS}$  para a cápsula e  $\vec{v}_{RS}$  para o rebocador.

Não conhecemos a velocidade  $v_{CS}$  da cápsula em relação ao Sol, mas podemos relacioná-la às velocidades conhecidas por meio da equação

$$\left( \begin{array}{c} \text{velocidade do} \\ \text{rebocador em} \\ \text{relação ao Sol} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{velocidade do} \\ \text{rebocador em} \\ \text{relação à cápsula} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{velocidade da} \\ \text{cápsula em} \\ \text{relação ao Sol} \end{array} \right).$$

Em símbolos, isso nos dá

$$v_{RS} = v_{rel} + v_{CS} \quad (9-47)$$

ou

$$v_{MS} = v_{RS} - v_{rel}.$$

Substituindo esta expressão para  $v_{CS}$  na Eq. 9-46 e substituindo as Eqs. 9-45 e 9-46 na Eq. 9-44, obtemos

$$Mv_i = 0,20M(v_{RS} - v_{rel}) + 0,80Mv_{RS}$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} \text{ou} \quad v_{RS} &= v_i + 0,20v_{rel} \\ v_{RS} &= 2100 \text{ km/h} + (0,20)(500 \text{ km/h}) \\ &= 2200 \text{ km/h.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

### Exemplo 9.06 Explosão bidimensional e momento de um coco

Ao explodir, uma bomba artesanal do tipo cabeça de negro colocada no interior de um coco vazio de massa  $M$ , inicialmente em repouso em uma superfície sem atrito, quebra o coco em três pedaços, que deslizam em uma superfície horizontal. Uma vista superior é apresentada na Fig. 9-13a. O pedaço  $C$ , de massa  $0,30M$ , tem velocidade escalar final  $v_{fc} = 5,0 \text{ m/s}$ .

(a) Qual é a velocidade do pedaço  $B$ , de massa  $0,20M$ ?

#### IDEIA-CHAVE

Em primeiro lugar, precisamos saber se o momento linear é conservado. Observamos que (1) o coco e seus pedaços formam um sistema fechado, (2) as forças da explosão são internas ao sistema, e (3) nenhuma força externa age sobre o sistema. Isso significa que o momento linear do sistema é conservado. (*Atenção:* Embora o momento do sistema permaneça o mesmo, não se pode dizer o mesmo dos momentos dos pedaços do coco, que são diferentes antes e depois da ejeção.)

**Cálculos:** Para começar, introduzimos um sistema de coordenadas  $xy$  no sistema, como mostra a Fig. 9-13b, com o sentido negativo do eixo  $x$  coincidindo com o sentido de  $\vec{v}_{fa}$ . O eixo  $x$  faz  $80^\circ$  com a direção de  $\vec{v}_{fc}$  e  $50^\circ$  com a direção de  $\vec{v}_{fb}$ .

O momento linear é conservado separadamente para cada eixo. Vamos usar o eixo  $y$  e escrever

$$P_{iy} = P_{fy} \quad (9-48)$$

em que o índice  $i$  indica o valor inicial (antes da explosão), o índice  $f$  indica o valor final e o índice  $y$  indica a componente  $y$  de  $\vec{P}_i$  ou  $\vec{P}_f$ .

A componente  $P_{iy}$  do momento linear inicial é zero, pois o coco está inicialmente em repouso. Para calcular  $P_{fy}$ , determinamos a componente  $y$  do momento linear final de cada pedaço utilizando a versão para a componente  $y$  da Eq. 9-22 ( $p_y = mv_y$ ):

$$p_{fA,y} = 0,$$

$$p_{fB,y} = -0,20Mv_{fB,y} = -0,20Mv_B \text{ sen } 50^\circ,$$

$$p_{fC,y} = 0,30Mv_{fC,y} = 0,30Mv_C \text{ sen } 80^\circ.$$

(Note que  $p_{fA,y} = 0$  por causa de nossa escolha de eixos.) A Eq. 9-48 pode ser escrita na forma

$$P_{iy} = P_{fy} = p_{fA,y} + p_{fB,y} + p_{fC,y}$$

Nesse caso, com  $v_C = 5,0 \text{ m/s}$ , temos:

$$0 = 0 - 0,20Mv_B \text{ sen } 50^\circ + (0,30M)(5,0 \text{ m/s}) \text{ sen } 80^\circ$$

e, portanto,

$$v_{fB} = 9,64 \text{ m/s} \approx 9,6 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta})$$

(b) Qual é a velocidade escalar do pedaço  $A$ ?

**Cálculos:** Como o momento linear também é conservado ao longo do eixo  $x$ , temos:

$$P_{ix} = P_{fx} \quad (9-49)$$

em que  $P_{ix} = 0$ , pois o coco está inicialmente em repouso. Para calcular  $P_{fx}$ , determinamos as componentes  $x$  do momento linear final de cada pedaço usando o fato de que o pedaço  $A$  tem massa de  $0,50M (= M - 0,20M - 0,30M)$ :

$$p_{fA,x} = -0,50Mv_{fA,x}$$

$$p_{fB,x} = -0,20Mv_{fB,x} = -0,20Mv_B \text{ cos } 50^\circ,$$

$$p_{fC,x} = 0,30Mv_{fC,x} = 0,30Mv_C \text{ cos } 80^\circ.$$

A Eq. 9-49 pode ser escrita na forma

$$P_{ix} = P_{fx} = p_{fA,x} + p_{fB,x} + p_{fC,x}$$

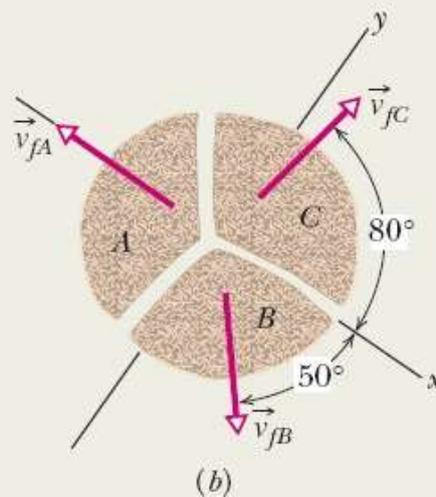
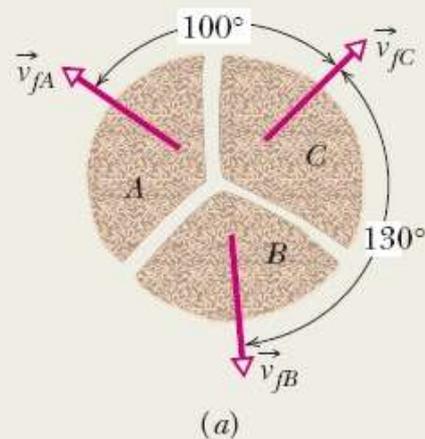
Nesse caso, com  $v_{fC} = 5,0 \text{ m/s}$  e  $v_{fB} = 9,64 \text{ m/s}$ , temos:

$$0 = -0,50Mv_{fA} + 0,20M(9,64 \text{ m/s}) \cos 50^\circ + (0,30M)(5,0 \text{ m/s}) \cos 80^\circ$$

e, portanto,

$$v_{fA} = 3,0 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta})$$

A separação explosiva pode mudar o momento de partes do sistema, mas o momento total do sistema permanece o mesmo.



**Figura 9-13** Três pedaços de um coco que explodiu se afastam em três direções em um piso sem atrito. (a) Vista superior do evento. (b) A mesma vista com um sistema de eixos bidimensional desenhado.

## 9-6 MOMENTO E ENERGIA CINÉTICA EM COLISÕES

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

- 9.28 Saber a diferença entre colisões elásticas, colisões inelásticas e colisões totalmente inelásticas.
- 9.29 Saber que, em uma colisão unidimensional, os objetos se movem na mesma linha reta antes e depois da colisão.
- 9.30 Aplicar a lei de conservação do momento linear a uma colisão unidimensional em um sistema isolado para relacionar os momentos iniciais dos objetos antes da colisão aos momentos dos objetos após a colisão.
- 9.31 Saber que, em um sistema isolado, o momento e a velocidade do centro de massa não são afetados por uma colisão entre objetos do sistema.

### Ideias-Chave

- Em uma colisão inelástica de dois corpos, a energia cinética do sistema de dois corpos não é conservada. Se o sistema é fechado e isolado, o momento linear do sistema é conservado, ou seja,

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f},$$

em que os índices  $i$  e  $f$  indicam valores, respectivamente, antes e depois da colisão.

- Se os corpos se movem ao longo da mesma linha reta, a colisão é unidimensional e podemos escrevê-la em termos das componentes em relação a essa linha reta:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

- Se os corpos permanecem unidos após a colisão, a colisão é chamada de perfeitamente inelástica e os corpos, naturalmente, têm a mesma velocidade final  $V$ .
- O centro de massa de um sistema fechado e isolado, composto por dois corpos, não é afetado por uma colisão. Em particular, a velocidade  $\vec{v}_{CM}$  é a mesma antes e depois da colisão.

### Momento e Energia Cinética em Colisões

No Módulo 9-4, consideramos a colisão de dois corpos que se comportavam como partículas, mas nos concentramos em apenas um dos corpos. Nos próximos módulos, estudaremos o sistema de dois corpos como um todo, supondo que se trata de um sistema fechado e isolado. No Módulo 9-5, discutimos uma regra para sistemas desse tipo: o momento linear total  $\vec{P}$  do sistema não pode variar, já que não há uma força externa para causar essa variação. Trata-se de uma regra muito importante, pois permite determinar o resultado de uma colisão *sem conhecer* detalhes da colisão, como a extensão dos danos.

Também estaremos interessados na energia cinética total de um sistema de dois corpos que colidem. Se a energia cinética total não é alterada pela colisão, a energia cinética do sistema é *conservada* (é a mesma antes e depois da colisão). Esse tipo de colisão é chamado de **colisão elástica**. Nas colisões entre corpos comuns, que acontecem no dia a dia, como a colisão de dois carros ou de uma bola com um taco, parte da energia é transferida de energia cinética para outras formas de energia, como energia térmica e energia sonora. Isso significa que a energia cinética *não é* conservada. Este tipo de colisão é chamado de

## colisão inelástica.

Em algumas situações, podemos considerar uma colisão de corpos comuns como *aproximadamente* elástica. Suponha que você deixa cair uma Superbola em um piso duro. Se a colisão entre a bola e o piso (ou a Terra) fosse elástica, a bola não perderia energia cinética na colisão e voltaria à altura inicial. Na prática, a altura atingida pela bola após a colisão é ligeiramente menor, o que mostra que parte da energia cinética é perdida na colisão e, portanto, a colisão é inelástica. Entretanto, dependendo do tipo de cálculo que estamos executando, pode ser válido desprezar a pequena quantidade de energia cinética perdida e considerar a colisão como se fosse elástica.

A colisão inelástica de dois corpos sempre envolve uma perda de energia cinética por parte do sistema. A maior perda ocorre quando os dois corpos permanecem juntos, caso em que a colisão é chamada de **colisão perfeitamente inelástica**. A colisão de uma bola de beisebol com um taco é inelástica, enquanto a colisão de uma bola de massa de modelar com um taco é perfeitamente inelástica, pois, nesse caso, a bola adere ao bastão.

## Colisões Inelásticas em Uma Dimensão

### Colisão Inelástica Unidimensional

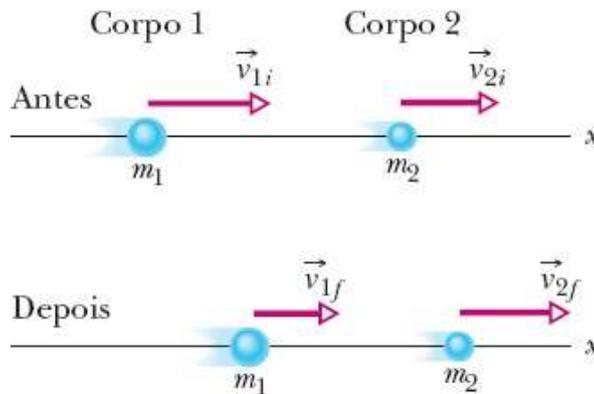
A Fig. 9-14 mostra dois corpos pouco antes e pouco depois de sofrerem uma colisão unidimensional. As velocidades antes da colisão (índice  $i$ ) e depois da colisão (índice  $f$ ) estão indicadas. Os dois corpos constituem um sistema fechado e isolado. Podemos escrever a lei de conservação do momento linear para esse sistema de dois corpos da seguinte forma:

$$\left( \begin{array}{l} \text{momento total } \vec{P}_i \\ \text{antes da colisão} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{momento total } \vec{P}_f \\ \text{depois da colisão} \end{array} \right),$$

ou, em símbolos,

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \quad (\text{conservação do momento linear}). \quad (9-50)$$

### Representação esquemática de uma colisão inelástica.



**Figura 9-14** Os corpos 1 e 2 se movem ao longo de um eixo  $x$ , antes e depois de sofrerem uma colisão inelástica.

Como o movimento é unidimensional, podemos substituir os vetores por componentes em relação a um único eixo. Assim, a partir da equação  $p = mv$ , podemos escrever a Eq. 9-50 na forma

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}. \quad (9-51)$$

Se conhecemos os valores, digamos, das massas, das velocidades iniciais e de uma das velocidades finais, podemos calcular a outra velocidade final usando a Eq. 9-51.

### Colisões Perfeitamente Inelásticas Unidimensionais

A Fig. 9-15 mostra dois corpos antes e depois de sofrerem uma colisão perfeitamente inelástica (ou seja, os corpos permanecem unidos após a colisão). O corpo de massa  $m_2$  está inicialmente em repouso ( $v_{2i} = 0$ ). Podemos nos referir a esse corpo como *alvo* e ao corpo incidente como *projétil*. Após a colisão, os dois corpos se movem juntos com velocidade  $V$ . Nessa situação, podemos escrever a Eq. 9-51 como

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) V \quad (9-52)$$

ou

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}. \quad (9-53)$$

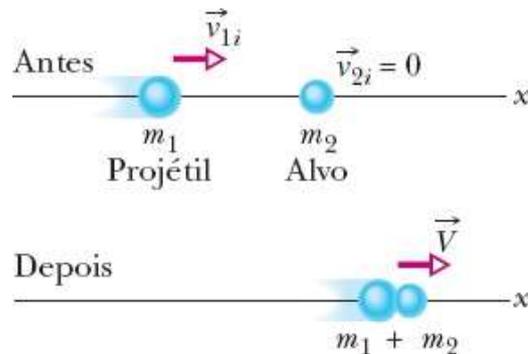
Se conhecemos os valores, digamos, das massas e da velocidade inicial  $v_{1i}$  do projétil, podemos calcular a velocidade final  $V$  usando a Eq. 9-53. Note que  $V$  é sempre menor que  $v_{1i}$ , já que a razão  $m_1/(m_1 + m_2)$  é sempre menor que 1.

### Velocidade do Centro de Massa

Em um sistema fechado e isolado, a velocidade  $\vec{v}_{\text{CM}}$  do centro de massa do sistema não pode variar em uma colisão porque não existem forças externas para causar essa variação. Para obter o valor de  $\vec{v}_{\text{CM}}$ , vamos voltar ao sistema de dois corpos e à colisão unidimensional da Fig. 9-14. De acordo com a Eq. 9-25 ( $\vec{P} = M\vec{v}_{\text{CM}}$ ), podemos relacionar  $\vec{v}_{\text{CM}}$  ao momento linear total  $\vec{P}$  do sistema de dois corpos

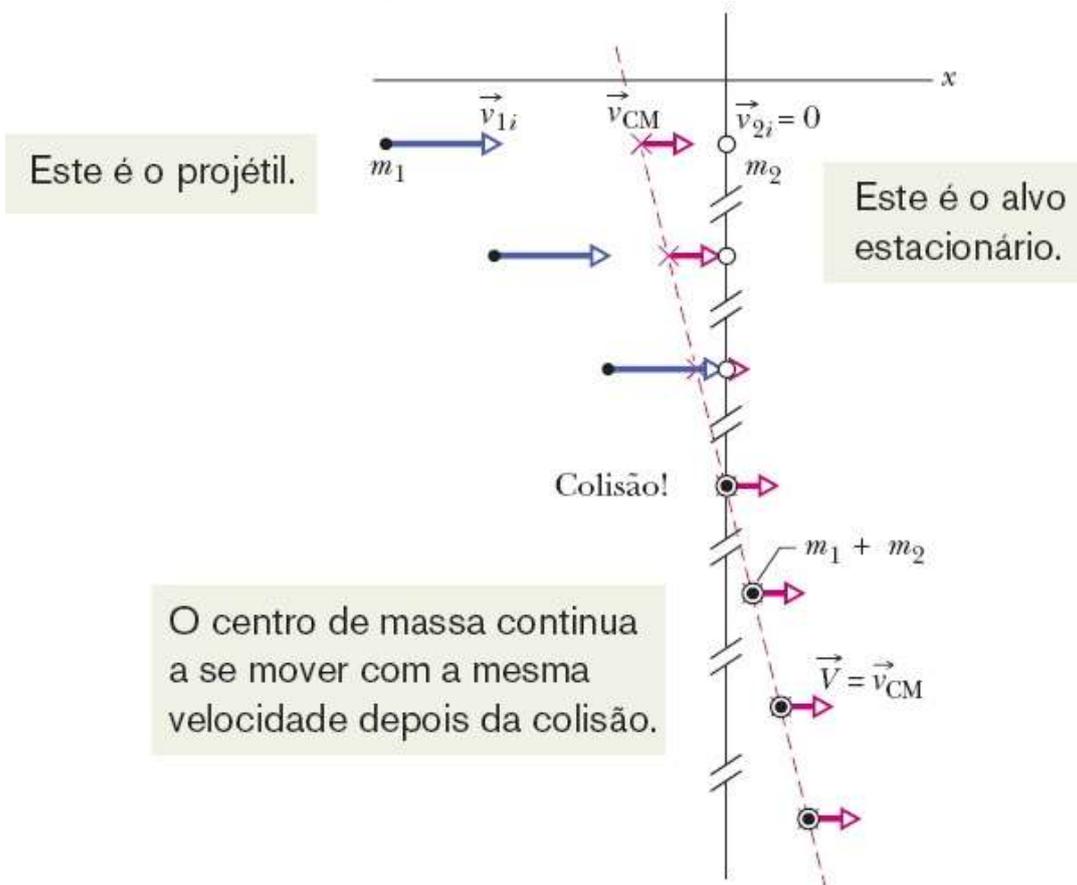
escrevendo

Em uma colisão perfeitamente inelástica, os corpos permanecem unidos após a colisão.



**Figura 9-15** Uma colisão perfeitamente inelástica entre dois corpos. Antes da colisão, o corpo de massa  $m_2$  está em repouso e o corpo de massa  $m_1$  está se movendo. Após a colisão, os corpos unidos se movem com a mesma velocidade  $\vec{V}$ .

O centro de massa dos dois corpos está entre eles e se move com velocidade constante.



**Figura 9-16** (a) Alguns instantâneos do sistema de dois corpos da Fig. 9-15, no qual ocorre uma colisão perfeitamente inelástica. O centro de massa do sistema é mostrado em cada instantâneo. A velocidade  $\vec{v}_{\text{CM}}$  do centro de massa não é afetada pela colisão. Como os corpos permanecem juntos após a colisão, a velocidade comum  $\vec{V}$  é igual a  $\vec{v}_{\text{CM}}$ .

$$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{CM}} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{\text{CM}} \quad (9-54)$$

Como o momento linear total  $\vec{P}$  é conservado na colisão, ele é dado pelos dois lados da Eq. 9-50. Vamos usar o lado esquerdo e escrever

$$\vec{P} = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}. \quad (9-55)$$

Substituindo essa expressão de  $\vec{P}$  na Eq. 9-54 e explicitando  $\vec{v}_{\text{CM}}$ , obtemos

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{\vec{P}}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}}{m_1 + m_2}. \quad (9-56)$$

O lado direito da Eq. 9-56 é uma constante, e  $\vec{v}_{\text{CM}}$  tem esse valor constante antes e depois da colisão.

Assim, por exemplo, a Fig. 9-16 mostra, em uma série de instantâneos, o movimento do centro de massa para a colisão perfeitamente inelástica da Fig. 9-15. O corpo 2 é o alvo, e o momento linear inicial do corpo 2 na Eq. 9-56 é  $\vec{p}_{2i} = m_2\vec{v}_{2i} = 0$ . O corpo 1 é o projétil, e o momento linear inicial do corpo 1 na Eq. 9-56 é  $\vec{p}_{1i} = m_1\vec{v}_{1i}$ . Note que, antes e depois da colisão, o centro de massa se move com velocidade constante para a direita. Depois da colisão, a velocidade final  $V$  comum aos corpos é igual a  $\vec{v}_{\text{CM}}$ , uma vez que, a partir desse momento, o centro de massa coincide com o conjunto formado pelos dois corpos.

### ✓ Teste 7

O corpo 1 e o corpo 2 sofrem uma colisão perfeitamente inelástica. Qual é o momento linear final dos corpos se os momentos iniciais são, respectivamente, (a)  $10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  e  $0$ ; (b)  $10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  e  $4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ; (c)  $10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  e  $-4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ?

### Exemplo 9.07 Conservação do momento de um pêndulo balístico

Este exemplo utiliza uma técnica muito comum na física. Estamos diante de um problema que não pode ser resolvido diretamente (não conhecemos nenhuma equação que possa ser aplicada ao problema). Por isso, dividimos o problema em partes que podem ser resolvidas separadamente (dispomos de equações para isso).

O *pêndulo balístico* era usado para medir a velocidade dos projéteis quando não havia sensores eletrônicos. A versão mostrada na Fig. 9-17 é composta por um grande bloco de madeira de massa  $M = 5,4 \text{ kg}$  pendurado em duas cordas compridas. Uma bala de massa  $m = 9,5 \text{ g}$  é disparada contra o bloco e fica incrustada na madeira. Com o impulso, o pêndulo descreve um arco de circunferência, fazendo com que o centro de massa do sistema *bloco-bala* atinja uma altura máxima  $h = 6,3 \text{ cm}$ . Qual era a

velocidade da bala antes da colisão?

## IDEIAS-CHAVE

É fácil perceber que a altura  $h$  atingida pelo centro de massa depende da velocidade  $v$  da bala. Entretanto, não podemos usar a conservação da energia mecânica para relacionar as duas grandezas porque, certamente, parte da energia é transferida de energia mecânica para outras formas (como energia térmica e a energia necessária para perfurar a madeira) quando a bala penetra no bloco. Entretanto, podemos dividir esse movimento complicado em duas etapas, que podem ser analisadas separadamente: (1) a colisão entre a bala e o bloco e (2) a subida do sistema bala-bloco, na qual a energia mecânica é conservada.

**Primeiro raciocínio:** Como a colisão dura muito pouco tempo, podemos fazer duas importantes suposições: (1) Durante a colisão, a força gravitacional e as forças das cordas sobre o bloco estão em equilíbrio. Isso significa que, durante a colisão, o impulso externo total sobre o sistema bala-bloco é zero e, portanto, o sistema está isolado e o momento linear total é conservado:

$$\left( \begin{array}{c} \text{momento total} \\ \text{antes da colisão} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{momento total} \\ \text{depois da colisão} \end{array} \right). \quad (9-57)$$

(2) A colisão é unidimensional, no sentido de que a direção do movimento da bala e do bloco *imediatamente após a colisão* é a mesma da bala antes da colisão.

Como a colisão é unidimensional, o bloco está inicialmente em repouso e a bala fica presa no bloco, usamos a Eq. 9-53 para expressar a conservação do momento linear. Trocando os símbolos da Eq. 9-53 para os símbolos correspondentes do problema que estamos analisando, temos:

$$V = \frac{m}{m + M} v. \quad (9-58)$$

**Segundo raciocínio:** Como a bala e o bloco agora oscilam juntos, a energia mecânica do sistema bala-bloco-Terra é conservada:

$$\left( \begin{array}{c} \text{energia mecânica} \\ \text{embaixo} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{energia mecânica} \\ \text{no alto} \end{array} \right). \quad (9-59)$$

(Essa energia mecânica não é afetada pela força das cordas sobre o bloco porque a força é perpendicular à trajetória do bloco.) Vamos tomar a altura inicial do bloco como nível de referência de energia potencial gravitacional zero. Nesse caso, de acordo com o princípio de conservação da energia mecânica, a energia cinética do sistema no início da oscilação deve ser igual à energia potencial gravitacional no ponto mais alto da oscilação. Como a velocidade da bala e do bloco no início da oscilação é a velocidade  $V$  imediatamente após a colisão, podemos escrever essa igualdade como

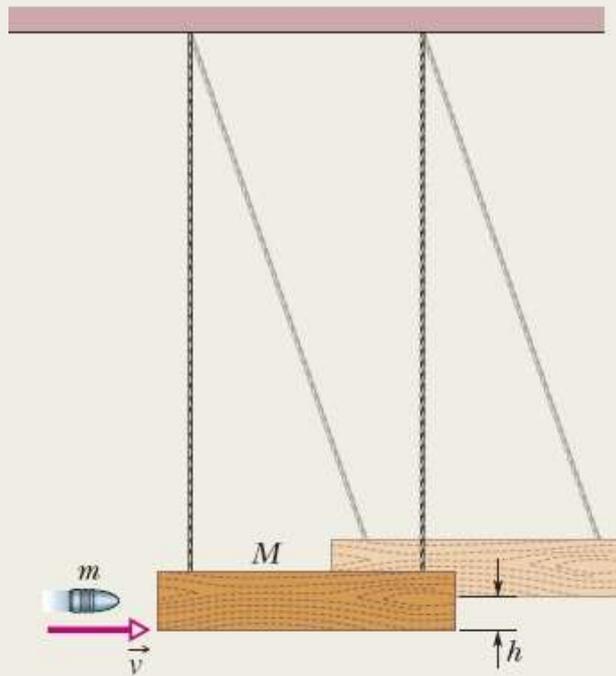
$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh. \quad (9-60)$$

**Combinação dos resultados:** Substituindo  $V$  na Eq. 9-60 pelo seu valor, dado pela Eq. 9-58, obtemos:

$$\begin{aligned}v &= \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh} && (9-61) \\&= \left( \frac{0,0095 \text{ kg} + 5,4 \text{ kg}}{0,0095 \text{ kg}} \right) \sqrt{(2)(9,8 \text{ m/s}^2)(0,063 \text{ m})} \\&= 630 \text{ m/s.} && (\text{Resposta})\end{aligned}$$

O pêndulo balístico é uma espécie de “transformador”, que troca a alta velocidade de um objeto leve (a bala) pela velocidade baixa (e, portanto, fácil de medir) de um objeto pesado (o bloco).

Dois eventos acontecem em sucessão: a bala colide com o bloco, e o sistema bala-bloco sobe uma distância  $h$ .



**Figura 9-17** Um pêndulo balístico, usado para medir a velocidade de projéteis.

## 9-7 COLISÕES ELÁSTICAS EM UMA DIMENSÃO

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

**9.32** No caso de colisões elásticas de dois corpos em uma dimensão, aplicar as leis de conservação da energia e do momento para relacionar os valores iniciais e os valores finais da velocidade dos corpos.

**9.33** No caso de um projétil que colide com um alvo estacionário, analisar o movimento resultante para três casos possíveis: massas iguais, massa do alvo muito maior que a massa do projétil, e massa do projétil muito maior que a massa do alvo.

## Ideia-Chave

• Uma colisão elástica é um tipo especial de colisão em que a energia cinética dos corpos que colidem é conservada. Se o sistema é fechado e isolado, o momento linear também é conservado. No caso de uma colisão unidimensional na qual o corpo 1 é o projétil e o corpo 2 é o alvo, a conservação da energia cinética e do momento linear fornecem as seguintes expressões para a velocidade dos dois corpos imediatamente após a colisão:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

e

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

## Colisões Elásticas em Uma Dimensão

Como comentamos no Módulo 9-6, as colisões que acontecem no dia a dia são inelásticas, mas podemos supor que algumas são aproximadamente elásticas, ou seja, que a energia cinética total dos corpos envolvidos na colisão não é convertida em outras formas de energia e, portanto, é conservada:

$$\left( \begin{array}{c} \text{energia cinética total} \\ \text{antes da colisão} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{energia cinética total} \\ \text{depois da colisão} \end{array} \right). \quad (9-62)$$

Isso não significa que a energia dos corpos envolvidos na colisão não varia:



Nas colisões elásticas, a energia cinética dos corpos envolvidos na colisão pode variar, mas a energia cinética total do sistema permanece a mesma.

Assim, por exemplo, a colisão da bola branca com uma bola colorida no jogo de sinuca pode ser considerada aproximadamente elástica. Se a colisão é frontal (ou seja, se a bola branca incide em cheio na outra bola), a energia cinética da bola branca pode ser transferida quase inteiramente para a outra bola. (Entretanto, o fato de que a colisão produz ruído significa que pelo menos uma pequena parte da energia cinética é transferida para a energia sonora.)

## Alvo Estacionário

A Fig. 9-18 mostra dois corpos antes e depois de uma colisão unidimensional, como uma colisão frontal de bolas de sinuca. Um projétil, de massa  $m_1$  e velocidade inicial  $v_{1i}$ , se move em direção a um alvo de

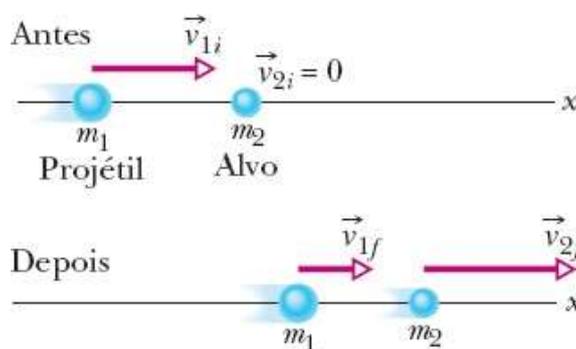
massa  $m_2$  que está inicialmente em repouso ( $v_{2i} = 0$ ). Vamos supor que esse sistema de dois corpos é fechado e isolado. Isso significa que o momento linear total do sistema é conservado e, de acordo com a Eq. 9-51, temos:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (\text{momento linear}). \quad (9-63)$$

Se a colisão é elástica, a energia cinética total também é conservada e podemos expressar esse fato por meio da equação

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (\text{energia cinética}). \quad (9-64)$$

Representação esquemática de uma colisão elástica com um alvo estacionário.



**Figura 9-18** O corpo 1 se move ao longo de um eixo  $x$  antes de sofrer uma colisão elástica com o corpo 2, que está inicialmente em repouso. Os dois corpos se movem ao longo do eixo  $x$  após a colisão.

Nas duas equações, o índice  $i$  indica a velocidade inicial, e o subscrito  $f$  indica a velocidade final dos corpos. Se conhecemos as massas dos corpos e também conhecemos  $v_{1i}$ , a velocidade inicial do corpo 1, as únicas grandezas desconhecidas são  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$ , as velocidades finais dos dois corpos. Com duas equações à disposição, podemos calcular o valor das incógnitas.

Para isso, escrevemos a Eq. 9-63 na forma

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2 v_{2f} \quad (9-65)$$

e a Eq. 9-64 na forma\*

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 v_{2f}^2. \quad (9-66)$$

Dividindo a Eq. 9-66 pela Eq. 9-65 e reagrupando os termos, obtemos

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (9-67)$$

e

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}. \quad (9-68)$$

De acordo com a Eq. 9-68,  $v_{2f}$  é sempre positiva (o alvo, inicialmente parado, de massa  $m_2$ , sempre se move para a frente). De acordo com a Eq. 9-67,  $v_{1f}$  pode ser positiva ou negativa (o projétil se move para a frente, se  $m_1 > m_2$ , e ricocheteia, se  $m_1 < m_2$ ).

Vamos examinar algumas situações especiais.

1. **Massas iguais** Se  $m_1 = m_2$ , as Eqs. 9-67 e 9-68 se reduzem a

$$v_{1f} = 0 \quad \text{e} \quad v_{2f} = v_{1i},$$

que poderíamos chamar de resultado da sinuca. Depois de uma colisão elástica frontal de corpos de massas iguais, o corpo 1 (inicialmente em movimento) para totalmente, e o corpo 2 (inicialmente em repouso) entra em movimento com a velocidade inicial do corpo 1. Em colisões elásticas frontais, corpos de massas iguais simplesmente trocam de velocidade. Isso acontece, mesmo que o corpo 2 não esteja inicialmente em repouso.

2. **Alvo pesado** Na Fig. 9-18, um alvo pesado significa que  $m_2 \gg m_1$ . Esse seria o caso, por exemplo, de uma bola de tênis lançada contra uma bola de boliche em repouso. Nessa situação, as Eqs. 9-67 e 9-68 se reduzem a

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \approx \left( \frac{2m_1}{m_2} \right) v_{1i}. \quad (9-69)$$

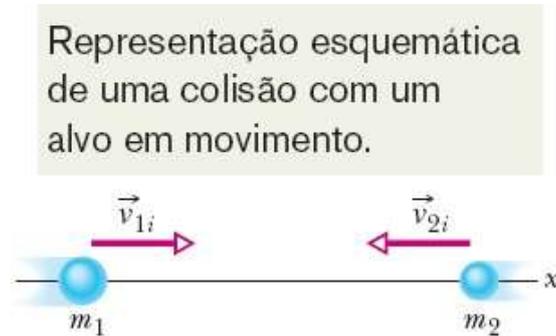
A conclusão é que o corpo 1 (a bola de tênis) ricocheteia e refaz a trajetória no sentido inverso, com a velocidade escalar praticamente inalterada. O corpo 2 (a bola de boliche), inicialmente em repouso, move-se para a frente em baixa velocidade, pois o fator entre parênteses na Eq. 9-69 é muito menor do que 1. Tudo isso está dentro do esperado.

3. **Projétil pesado** Esse é o caso oposto, no qual  $m_1 \gg m_2$ . Dessa vez, uma bola de boliche é lançada contra uma bola de tênis em repouso. As Eqs. 9-67 e 9-68 se reduzem a

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i}. \quad (9-70)$$

De acordo com a Eq. 9-70, o corpo 1 (a bola de boliche) simplesmente mantém a trajetória, praticamente sem ser freado pela colisão. O corpo 2 (a bola de tênis) é arremessado para a frente com o dobro da velocidade da bola de boliche. O leitor deve estar se perguntando: Por que o dobro da velocidade? Para compreender a razão, lembre-se da colisão descrita pela Eq. 9-69, na qual a velocidade do corpo leve incidente (a bola de tênis) mudou de  $+v$  para  $-v$ , ou seja, a velocidade

sofreu uma *variação* de  $2v$ . A mesma variação de velocidade (agora de 0 para  $2v$ ) acontece neste exemplo.



**Figura 9-19** Dois corpos prestes a sofrer uma colisão elástica unidimensional.

### Alvo em Movimento

Agora que examinamos a colisão elástica de um projétil com um alvo em repouso, vamos analisar a situação na qual os dois corpos estão em movimento antes de sofrerem uma colisão elástica.

Para a situação da Fig. 9-19, a conservação do momento linear pode ser escrita na forma

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}, \quad (9-71)$$

e a conservação da energia cinética na forma

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2. \quad (9-72)$$

Para resolver este sistema de equações e obter os valores de  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$ , primeiro escrevemos a Eq. 9-71 na forma

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f}), \quad (9-73)$$

e a Eq. 9-72 na forma

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f})(v_{2i} + v_{2f}). \quad (9-74)$$

Dividindo a Eq. 9-74 pela Eq. 9-73 e reagrupando os termos, obtemos

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad (9-75)$$

e

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}. \quad (9-76)$$

Note que a correspondência entre os índices 1 e 2 e os dois corpos é arbitrária. Se trocarmos os índices na Fig. 9-19 e nas Eqs. 9-75 e 9-76, acabaremos com o mesmo sistema de equações. Note também que, se fizermos  $v_{2i} = 0$ , o corpo 2 se tornará um alvo estacionário, como na Fig. 9-18, e as Eqs. 9-75 e 9-76 se

reduzirão às Eqs. 9-67 e 9-68, respectivamente.

## ☑ Teste 8

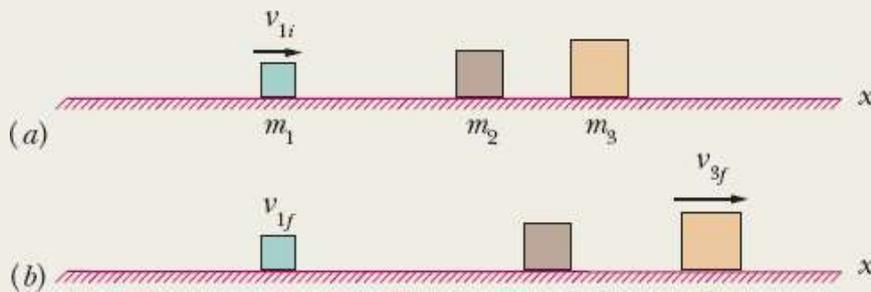
Qual é o momento linear final do alvo da Fig. 9-18 se o momento linear inicial do projétil é  $6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  e o momento linear final do projétil é (a)  $2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  e (b)  $-2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ? (c) Qual é a energia cinética final do alvo se as energias cinéticas inicial e final do projétil são, respectivamente,  $5 \text{ J}$  e  $2 \text{ J}$ ?

## 📍 Exemplo 9.08 Duas colisões elásticas sucessivas

Na Fig. 9-20a, o bloco 1 se aproxima de dois blocos estacionários a uma velocidade  $v_{1i} = 10 \text{ m/s}$ . Ele colide com o bloco 2, que, por sua vez, colide com o bloco 3, cuja massa é  $m_3 = 6,0 \text{ kg}$ . Depois da segunda colisão, o bloco 2 fica novamente estacionário e o bloco 3 adquire uma velocidade  $v_{3f} = 5,0 \text{ m/s}$  (Fig. 9-20b). Suponha que as colisões são elásticas. Qual é a massa dos blocos 1 e 2? Qual é a velocidade final  $v_{1f}$  do bloco 1?

### IDEIAS-CHAVE

Como estamos supondo que as colisões são elásticas, a energia mecânica é conservada (ou seja, as perdas de energia para o som, calor e oscilações dos blocos são desprezíveis). Como não existem forças horizontais externas agindo sobre os blocos, o momento linear ao longo do eixo  $x$  é conservado. Por essas duas razões, podemos aplicar as Eqs. 9-67 e 9-68 às duas colisões.



**Figura 9-20** O bloco 1 colide com o bloco estacionário 2, que, por sua vez, colide com o bloco estacionário 3.

**Cálculos:** Se começarmos pela primeira colisão, teremos um número excessivo de incógnitas, já que não conhecemos nem a massa nem a velocidade final dos blocos envolvidos. Por esse motivo, vamos começar pela segunda colisão, na qual o bloco 2 permanece em repouso depois de colidir com o bloco 3. Aplicando a Eq. 9-67 a essa colisão, com mudanças de notação, obtemos

$$v_{2f} = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} v_{2i}$$

em que  $v_{2i}$  é a velocidade do bloco 2 imediatamente antes da colisão, e  $v_{2f}$  é a velocidade do bloco 2 imediatamente após a colisão. Fazendo  $v_{2f} = 0$  (o bloco 2 permanece em repouso após a colisão) e  $m_3 = 6,0 \text{ kg}$ , obtemos

$$m_2 = m_3 = 6,00 \text{ kg.} \quad (\text{Resposta})$$

Com mudanças adequadas de notação, a Eq. 9-68 para a segunda colisão se torna

$$v_{3f} = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} v_{2i},$$

em que  $v_{3f}$  é a velocidade final do bloco 3. Fazendo  $m_2 = m_3 = 6 \text{ kg}$  e  $v_{3f} = 5,0 \text{ m/s}$ , obtemos

$$v_{2i} = v_{3f} = 5,0 \text{ m/s}$$

Vamos agora analisar a primeira colisão, mas temos de tomar cuidado com a notação do bloco 2: a velocidade  $v_{2f}$  imediatamente após a primeira colisão é igual à velocidade  $v_{2i}$  ( $= 5,0 \text{ m/s}$ ) imediatamente antes da segunda colisão. Aplicando a Eq. 9-68 à primeira colisão e fazendo  $v_{1i} = 10 \text{ m/s}$ , obtemos

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i},$$
$$5,0 \text{ m/s} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (10 \text{ m/s}),$$

o que nos dá

$$m_1 = \frac{1}{3}m_2 = \frac{1}{3}(6,0 \text{ kg}) = 2,0 \text{ kg.} \quad (\text{Resposta})$$

Finalmente, aplicando a Eq. 9-67 à primeira colisão e substituindo  $m_1$ ,  $m_2$  e  $v_{1i}$  por seus valores, obtemos

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i},$$
$$= \frac{\frac{1}{3}m_2 - m_2}{\frac{1}{3}m_2 + m_2} (10 \text{ m/s}) = -5,0 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta})$$

## 9-8 COLISÕES EM DUAS DIMENSÕES

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

- 9.34** No caso de um sistema isolado no qual ocorre uma colisão bidimensional, aplicar a lei de conservação do momento a dois eixos de um sistema de coordenadas para relacionar as componentes do momento antes da colisão às componentes do momento depois da colisão.
- 9.35** No caso de um sistema isolado no qual ocorre uma colisão *elástica* bidimensional, (a) aplicar a lei de conservação do momento a dois eixos de um sistema de coordenadas para relacionar as componentes do momento antes da colisão às componentes do momento depois da colisão e (b) aplicar o princípio de conservação da energia cinética para relacionar as

energias cinéticas antes e depois da colisão.

## Ideia-Chave

• Se dois corpos colidem e não estão se movendo ao longo da mesma reta (ou seja, a colisão não é frontal), dizemos que a colisão é bidimensional. Se o sistema de dois corpos é fechado e isolado, a lei de conservação do momento pode ser aplicada à colisão, e podemos escrever a seguinte equação:

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}.$$

Na forma de componentes, a lei fornece duas equações que descrevem a colisão (uma equação para cada dimensão). Se a colisão é elástica (um caso especial), a conservação da energia cinética durante a colisão nos dá uma terceira equação:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}.$$

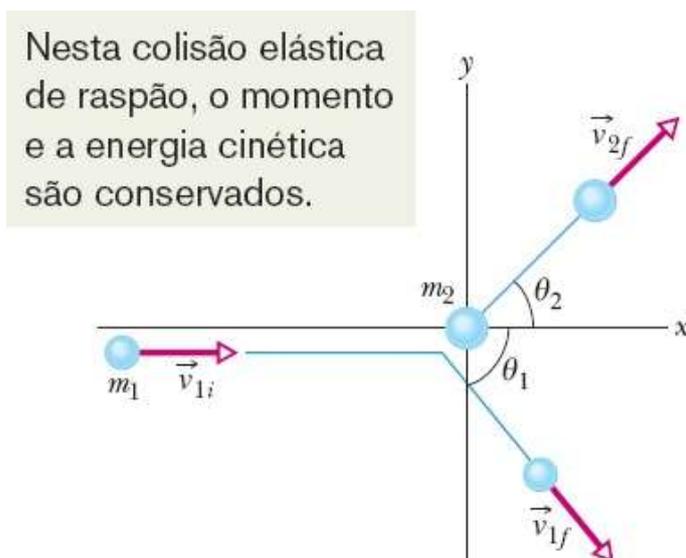
## Colisões em Duas Dimensões

Quando uma colisão não é frontal, a direção do movimento dos corpos é diferente antes e depois da colisão; entretanto, se o sistema é fechado e isolado, o momento linear total continua a ser conservado nessas colisões bidimensionais:

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}. \quad (9-77)$$

Se a colisão também é elástica (um caso especial), a energia cinética total também é conservada:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}. \quad (9-78)$$



**Figura 9-21** Uma colisão elástica de raspão entre dois corpos. O corpo de massa  $m_2$  (o alvo) está inicialmente em repouso.

Na maioria dos casos, o uso da Eq. 9-77 para analisar uma colisão bidimensional é facilitado quando escrevemos a equação em termos das componentes em relação a um sistema de coordenadas  $xy$ . A Fig. 9-

21 mostra uma *colisão de raspão* (não frontal) entre um projétil e um alvo inicialmente em repouso. As trajetórias dos corpos após a colisão fazem ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  com o eixo  $x$ , que coincide com a direção de movimento do projétil antes da colisão. Nessa situação, a componente da Eq. 9-77 em relação ao eixo  $x$  é

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2, \quad (9-79)$$

e a componente ao longo do eixo  $y$  é

$$0 = -m_1 v_{1f} \sin \theta_1 + m_2 v_{2f} \sin \theta_2. \quad (9-80)$$

Podemos também escrever a Eq. 9-78 (para o caso especial de uma colisão elástica) em termos de velocidades:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (\text{energia cinética}). \quad (9-81)$$

As Eqs. 9-79 a 9-81 contêm sete variáveis: duas massas,  $m_1$  e  $m_2$ ; três velocidades,  $v_{1i}$ ,  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$ ; dois ângulos,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Se conhecemos quatro dessas variáveis, podemos resolver as três equações para obter as três variáveis restantes.

### ✓ Teste 9

Suponha que, na situação da Fig. 9-21, o projétil tem um momento inicial de  $6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ , uma componente  $x$  do momento final de  $4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  e uma componente  $y$  do momento final de  $-3 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ . Determine (a) a componente  $x$  do momento final do alvo e (b) a componente  $y$  do momento final do alvo.

## 9-9 SISTEMAS DE MASSA VARIÁVEL: UM FOGUETE

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

- 9.36** Usar a primeira equação do foguete para relacionar a taxa de perda de massa de um foguete, a velocidade dos produtos da combustão em relação ao foguete, a massa do foguete e a aceleração do foguete.
- 9.37** Usar a segunda equação do foguete para relacionar a variação da velocidade do foguete à velocidade relativa dos produtos da combustão e a massa final do foguete.
- 9.38** No caso de um sistema em movimento que sofre uma variação de massa a uma taxa constante, relacionar essa taxa à variação do momento.

### Ideias-Chave

- Na ausência de forças externas, a aceleração instantânea de um foguete é dada por

$$Rv_{rel} = Ma \quad (\text{primeira equação do foguete}),$$

em que  $M$  é a massa instantânea do foguete (incluindo o combustível que ainda não foi usado),  $R$  é a taxa de consumo do combustível, e  $v_{\text{rel}}$  é a velocidade dos produtos da combustão em relação ao foguete. O produto  $Rv_{\text{rel}}$  é chamado de empuxo do motor do foguete.

- No caso de um foguete com  $R$  e  $v_{\text{rel}}$  constantes, se a velocidade do foguete varia de  $v_i$  para  $v_f$  quando a massa varia de  $M_i$  para  $M_f$ ,

$$v_f - v_i = v_{\text{rel}} \ln \frac{M_i}{M_f} \quad (\text{segunda equação do foguete}).$$

## Sistemas de Massa Variável: Um Foguete

Em todos os sistemas que examinamos até agora, a massa total permanecia constante. Em certos casos, como o de um foguete, isso não é verdade. A maior parte da massa de um foguete, antes do lançamento, é constituída de combustível, que é posteriormente queimado e ejetado pelo sistema de propulsão. Levamos em consideração a variação da massa do foguete aplicando a segunda lei de Newton, não ao foguete, mas ao conjunto formado pelo foguete e pelos produtos ejetados. A massa *desse* sistema *não varia* com o tempo.

### Cálculo da Aceleração

Suponha que estamos em repouso em relação a um referencial inercial, observando um foguete acelerar no espaço sideral sem que nenhuma força gravitacional ou de arrasto atue sobre ele. Seja  $M$  a massa do foguete e seja  $v$  a velocidade em um instante arbitrário  $t$  (veja a Fig. 9-22a).

A Fig. 9-22b mostra a situação após um intervalo de tempo  $dt$ . O foguete agora está a uma velocidade  $v + dv$  e possui uma massa  $M + dM$ , em que a variação de massa  $dM$  tem um *valor negativo*. Os produtos de combustão liberados pelo foguete durante o intervalo  $dt$  têm massa  $-dM$  e velocidade  $U$  em relação ao nosso referencial inercial.

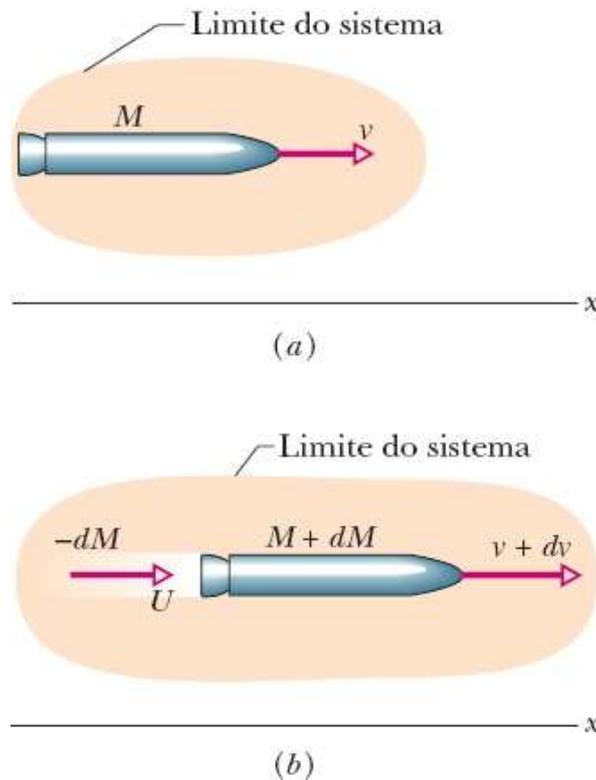
**Conservação do Momento.** Nosso sistema é formado pelo foguete e os produtos de exaustão ejetados no intervalo  $dt$ . Como o sistema é fechado e isolado, o momento linear total é conservado no intervalo  $dt$ , ou seja,

$$P_i = P_f, \quad (9-82)$$

em que os índices  $i$  e  $f$  indicam os valores no início e no fim do intervalo de tempo  $dt$ . Podemos escrever a Eq. 9-82 na forma

$$Mv = -dM U + (M + dM)(v + dv), \quad (9-83)$$

A ejeção de massa produz um aumento da velocidade do foguete.



**Figura 9-22** (a) Um foguete, de massa  $M$ , acelerando no instante  $t$ , do ponto de vista de um referencial inercial. (b) O mesmo foguete no instante  $t + dt$ . Os produtos de combustão ejetados durante o intervalo  $dt$  são mostrados na figura.

em que o primeiro termo do lado direito é o momento linear dos produtos da combustão ejetados durante o intervalo  $dt$ , e o segundo termo é o momento linear do foguete no fim do intervalo  $dt$ .

**Uso da Velocidade Relativa.** Podemos simplificar a Eq. 9-83 usando a velocidade relativa  $v_{\text{rel}}$  entre o foguete e os produtos da combustão, que está relacionada às velocidades em relação ao referencial inercial por meio da equação

$$\left( \begin{array}{c} \text{velocidade do foguete} \\ \text{em relação ao referencial} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{velocidade do foguete} \\ \text{em relação aos produtos} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{velocidade dos produtos} \\ \text{em relação ao referencial} \end{array} \right).$$

Em símbolos, isso significa que

$$(v + dv) = v_{\text{rel}} + U,$$

ou

$$U = v + dv - v_{\text{rel}}. \quad (9-84)$$

Substituindo esse valor de  $U$  na Eq. 9-83 e reagrupando os termos, obtemos

$$-dM v_{\text{rel}} = M dv. \quad (9-85)$$

Dividindo ambos os membros por  $dt$ , obtemos

$$-\frac{dM}{dt} v_{\text{rel}} = M \frac{dv}{dt}. \quad (9-86)$$

Podemos substituir  $dM/dt$  (a taxa com a qual o foguete perde massa) por  $-R$ , em que  $R$  é a taxa (positiva) de consumo de combustível, e reconhecemos que  $dv/dt$  é a aceleração do foguete. Com essas mudanças, a Eq. 9-86 se torna

$$Rv_{\text{rel}} = Ma \quad (\text{primeira equação do foguete}). \quad (9-87)$$

A Eq. 9-87 vale para qualquer instante.

Note que o lado esquerdo da Eq. 9-87 tem dimensões de força ( $\text{kg/s} \cdot \text{m/s} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$ ) e depende apenas de características do motor do foguete, ou seja, da taxa  $R$  de consumo de combustível e da velocidade  $v_{\text{rel}}$  com a qual os produtos da combustão são expelidos. O produto  $Rv_{\text{rel}}$  é chamado de **empuxo** do motor do foguete e representado pela letra  $T$ . A segunda lei de Newton se torna mais explícita quando escrevemos a Eq. 9-87 na forma  $T = Ma$ , em que  $a$  é a aceleração do foguete no instante em que a massa é  $M$ .

## Cálculo da Velocidade

Como varia a velocidade do foguete enquanto o combustível é consumido? De acordo com a Eq. 9-85, temos:

$$dv = -v_{\text{rel}} \frac{dM}{M}.$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_{\text{rel}} \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M},$$

em que  $M_i$  é a massa inicial do foguete e  $M_f$  é a massa final. Calculando as integrais, obtemos

$$v_f - v_i = v_{\text{rel}} \ln \frac{M_i}{M_f} \quad (\text{segunda equação do foguete}) \quad (9-88)$$

para o aumento da velocidade do foguete quando a massa muda de  $M_i$  para  $M_f$ . (O símbolo “ln” na Eq. 9-88 significa *logaritmo natural*.) A Eq. 9-88 ilustra muito bem a vantagem dos foguetes de vários estágios, nos quais  $M_f$  é reduzida descartando cada estágio quando o combustível do estágio se esgota. Um foguete ideal chegaria ao destino apenas com a carga útil.

### Exemplo 9.09 Empuxo e aceleração de um foguete

Em todos os exemplos anteriores deste capítulo, a massa do sistema investigado era constante. Agora vamos analisar um sistema (um foguete) cuja massa diminui com o tempo. Um foguete cuja massa inicial  $M_i$  é 850 kg consome combustível a uma taxa  $R = 2,3$  kg/s. A velocidade  $v_{\text{rel}}$  dos gases expelidos em relação ao motor do foguete é 2800 m/s.

(a) Qual é o empuxo do motor?

#### IDEIA-CHAVE

---

De acordo com a Eq. 9-87, o empuxo  $T$  é igual ao produto da taxa de consumo de combustível  $R$  pela velocidade relativa  $v_{\text{rel}}$  dos gases expelidos.

**Cálculo:** Temos

$$\begin{aligned} T &= Rv_{\text{rel}} = (2,3 \text{ kg/s})(2800 \text{ m/s}) \\ &= 6440 \text{ N} \approx 6400 \text{ N}. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a aceleração inicial do foguete?

#### IDEIA-CHAVE

---

Podemos relacionar o empuxo  $T$  de um foguete ao módulo  $a$  da aceleração resultante por meio da equação  $T = Ma$ , em que  $M$  é a massa do foguete. À medida que o combustível é consumido,  $M$  diminui e  $a$  aumenta. Como estamos interessados no valor inicial de  $a$ , usamos o valor inicial da massa,  $M_i$ .

**Cálculos:** Temos

$$a = \frac{T}{M_i} = \frac{6440 \text{ N}}{850 \text{ kg}} = 7,6 \text{ m/s}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

Para ser lançado da superfície da Terra, um foguete deve ter uma aceleração inicial maior que  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Isso equivale a dizer que o empuxo  $T$  do motor do foguete deve ser maior que a força gravitacional a que o foguete está submetido no instante do lançamento, que neste caso é igual a  $M_i g = (850 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) = 8330 \text{ N}$ . Como o empuxo do nosso foguete (6400 N) não é suficiente, ele não poderia ser lançado da superfície da Terra.

## Revisão e Resumo

**Centro de Massa** O centro de massa de um sistema de  $n$  partículas é definido como o ponto cujas coordenadas são dadas por

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad z_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i, \quad (9-5)$$

$$\text{ou} \quad \vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (9-8)$$

em que  $M$  é a massa total do sistema.

**Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas** O movimento do centro de massa de qualquer sistema de partículas é governado pela **segunda lei de Newton para um sistema de partículas**, expressa pela equação

$$\vec{F}_{\text{res}} = M \vec{a}_{\text{CM}}. \quad (9.14)$$

Aqui,  $\vec{F}_{\text{res}}$  é a resultante de todas as forças *externas* que agem sobre o sistema,  $M$  é a massa total do sistema, e  $\vec{a}_{\text{CM}}$  é a aceleração do centro de massa do sistema.

**Momento Linear e a Segunda Lei de Newton** No caso de uma partícula isolada, definimos  $\vec{p}$ , o **momento linear**, por meio da equação

$$\vec{p} = m \vec{v}, \quad (9-22)$$

em função do qual podemos escrever a segunda lei de Newton na forma

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (9-23)$$

Para um sistema de partículas, essas relações se tornam

$$\vec{P} = M \vec{v}_{\text{CM}} \quad \text{e} \quad \vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \quad (9-25, 9-27)$$

**Colisão e Impulso** A aplicação da segunda lei de Newton a um corpo que se comporta como uma partícula e envolvido em uma colisão leva ao **teorema do impulso e momento linear**:

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta \vec{p} = \vec{J}, \quad (9-31, 9-32)$$

em que  $\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta \vec{p}$  é a variação do momento linear do corpo e  $\vec{J}$  é o **impulso** produzido pela força  $\vec{F}(t)$  exercida sobre o corpo pelo outro corpo envolvido na colisão:

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt. \quad (9-30)$$

Se  $F_{\text{méd}}$  é o módulo médio de  $\vec{F}(t)$  durante a colisão e  $\Delta t$  é a duração da colisão, para um movimento unidimensional, temos:

$$J = F_{\text{méd}} \Delta t. \quad (9-35)$$

Quando uma série de projéteis de massa  $m$  e velocidade  $v$  colide com um corpo fixo, a força média que age sobre o corpo fixo é dada por

$$F_{\text{méd}} = -\frac{n}{\Delta t} \Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m \Delta v, \quad (9-37)$$

em que  $n/\Delta t$  é a taxa com a qual os corpos colidem com o corpo fixo, e  $\Delta v$  é a variação da velocidade de cada corpo que colide. A força média também pode ser escrita na forma

$$F_{\text{méd}} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} \Delta v, \quad (9-40)$$

em que  $\Delta m/\Delta t$  é a taxa com a qual a massa colide com o corpo fixo. Nas Eqs. 9-37 e 9-40,  $\Delta v = -v$  se os corpos param no momento do impacto e  $\Delta v = -2v$  se ricocheteiam sem mudança da velocidade escalar.

**Conservação do Momento Linear** Se um sistema está isolado de tal forma que nenhuma força resultante externa atua sobre o sistema, o momento linear  $\vec{P}$  do sistema permanece constante:

$$\vec{P} = \text{constante} \quad (\text{sistema fechado e isolado}). \quad (9-42)$$

A Eq. 9-42 também pode ser escrita na forma

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad (\text{sistema fechado e isolado}), \quad (9-43)$$

em que os índices se referem aos valores de  $\vec{P}$  em um instante inicial e em um instante posterior. As Eqs. 9-42 e 9-43 são expressões equivalentes da **lei de conservação do momento linear**.

**Colisões Inelásticas em Uma Dimensão** Em uma *colisão inelástica* de dois corpos, a energia cinética do sistema de dois corpos não é conservada. Se o sistema é fechado e isolado, o momento linear total do sistema é conservado, o que podemos expressar em forma vetorial como

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}, \quad (9-50)$$

em que os índices  $i$  e  $f$  se referem a valores imediatamente antes e imediatamente depois da colisão, respectivamente.

Se o movimento dos corpos ocorre ao longo de um único eixo, a colisão é unidimensional e podemos escrever a Eq. 9-50 em termos das componentes das velocidades em relação a esse eixo:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}. \quad (9-51)$$

Se os dois corpos se movem juntos após a colisão, a colisão é *perfeitamente inelástica* e os corpos têm a mesma velocidade final  $V$  (já que se movem juntos).

**Movimento do Centro de Massa** O centro de massa de um sistema fechado e isolado de dois corpos que colidem não é afetado pela colisão. Em particular, a velocidade  $\vec{v}_{\text{CM}}$  do centro de massa é a mesma antes e depois da colisão.

**Colisões Elásticas em Uma Dimensão** Uma *colisão elástica* é um tipo especial de colisão em que a energia cinética de um sistema de corpos que colidem é conservada. Se o sistema é fechado e isolado, o momento linear também é conservado. Para uma colisão unidimensional na qual o corpo 2 é um alvo e o corpo 1 é um projétil, a conservação da energia cinética e a conservação do momento linear levam às seguintes expressões para as velocidades imediatamente após a colisão:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (9-67)$$

e

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (9-68)$$

**Colisões em Duas Dimensões** Se dois corpos colidem e não estão se movendo ao longo de um único eixo (a colisão não é frontal), a colisão é bidimensional. Se o sistema de dois corpos é fechado e isolado, a lei de conservação do momento se aplica à colisão e pode ser escrita como

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \quad (9-77)$$

Na forma de componentes, a lei fornece duas equações que descrevem a colisão (uma equação para cada uma das duas dimensões). Se a colisão é elástica (um caso especial), a conservação da energia cinética na colisão fornece uma terceira equação:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \quad (9-78)$$

**Sistemas de Massa Variável** Na ausência de forças externas, a aceleração instantânea de foguete obedece à equação

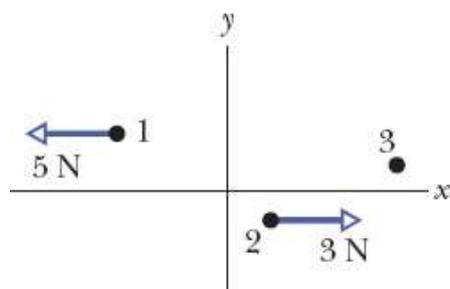
$$Rv_{\text{rel}} = Ma \quad (\text{primeira equação do foguete}), \quad (9-87)$$

em que  $M$  é a massa instantânea do foguete (que inclui o combustível ainda não consumido),  $R$  é a taxa de consumo de combustível e  $v_{\text{rel}}$  é a velocidade dos produtos de exaustão em relação ao foguete. O termo  $Rv_{\text{rel}}$  é o **empuxo** do motor do foguete. Para um foguete com  $R$  e  $v_{\text{rel}}$  constantes, cuja velocidade varia de  $v_i$  para  $v_f$  quando a massa varia de  $M_i$  para  $M_f$ ,

$$v_f - v_i = v_{\text{rel}} \ln \frac{M_i}{M_f} \quad (\text{segunda equação do foguete}). \quad (9-88)$$

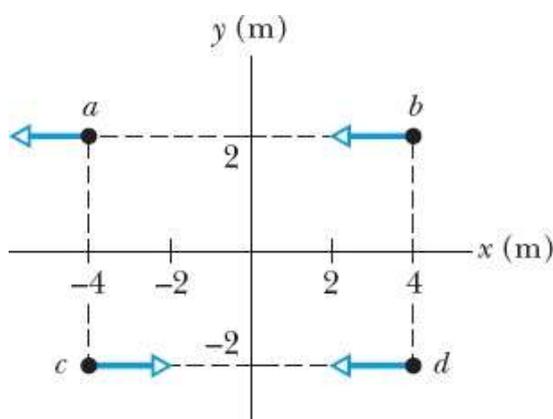
## Perguntas

**1** A Fig. 9-23 mostra uma vista superior de três partículas sobre as quais atuam forças externas. O módulo e a orientação das forças que agem sobre duas das partículas estão indicados. Quais são o módulo e a orientação da força que age sobre a terceira partícula se o centro de massa do sistema de três partículas está (a) em repouso, (b) se movendo com velocidade constante para a direita e (c) acelerando para a direita?



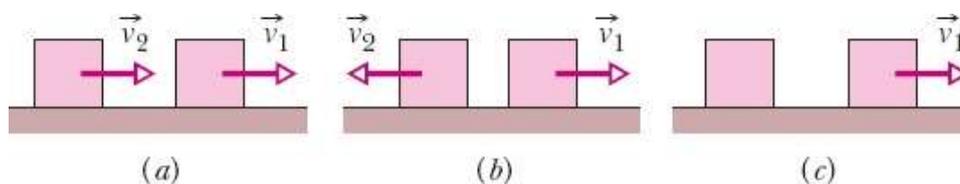
**Figura 9-23** Pergunta 1.

2 A Fig. 9-24 mostra uma vista superior de quatro partículas de massas iguais que deslizam em uma superfície sem atrito com velocidade constante. As orientações das velocidades estão indicadas; os módulos são iguais. Considere pares dessas partículas. Que pares formam um sistema cujo centro de massa (a) está em repouso, (b) está em repouso na origem e (c) passa pela origem?



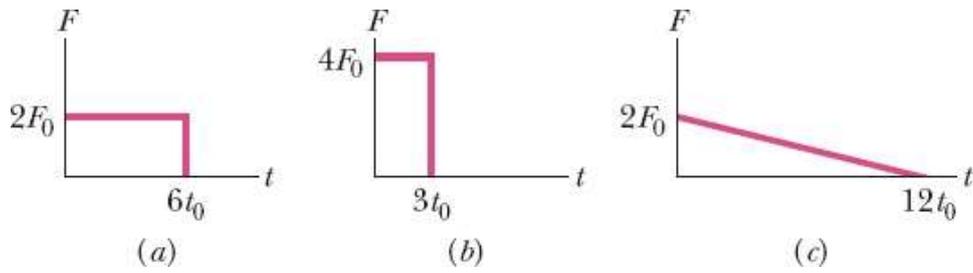
**Figura 9-24** Pergunta 2.

3 Considere uma caixa que explode em dois pedaços enquanto se move com velocidade constante positiva ao longo de um eixo  $x$ . Se um dos pedaços, de massa  $m_1$ , possui uma velocidade positiva  $\vec{v}_1$ , o outro pedaço, de massa  $m_2$ , pode ter (a) uma velocidade positiva  $\vec{v}_2$  (Fig. 9-25a), (b) uma velocidade negativa  $\vec{v}_2$  (Fig. 9-25b) ou (c) velocidade zero (Fig. 9-25c). Ordene os três resultados possíveis para o segundo pedaço de acordo com o módulo de  $\vec{v}_1$  correspondente, começando pelo maior.



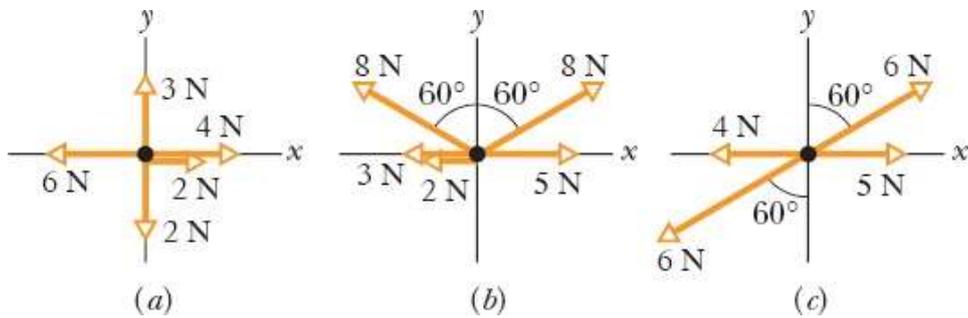
**Figura 9-25** Pergunta 3.

4 A Fig. 9-26 mostra gráficos do módulo da força que age sobre um corpo envolvido em uma colisão em função do tempo. Ordene os gráficos de acordo com o módulo do impulso exercido sobre o corpo, começando pelo maior.



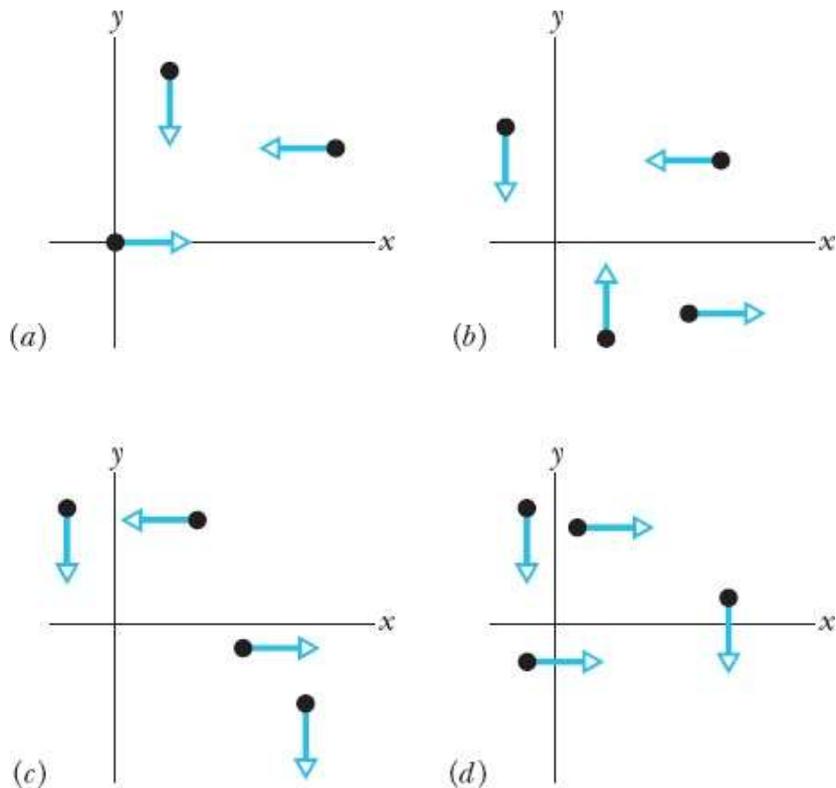
**Figura 9-26** Pergunta 4.

5 Os diagramas de corpo livre na Fig. 9-27 são vistas superiores de forças horizontais agindo sobre três caixas de chocolate que se movem em um balcão sem atrito. Para cada caixa, determine se as componentes  $x$  e  $y$  do momento linear são conservadas.



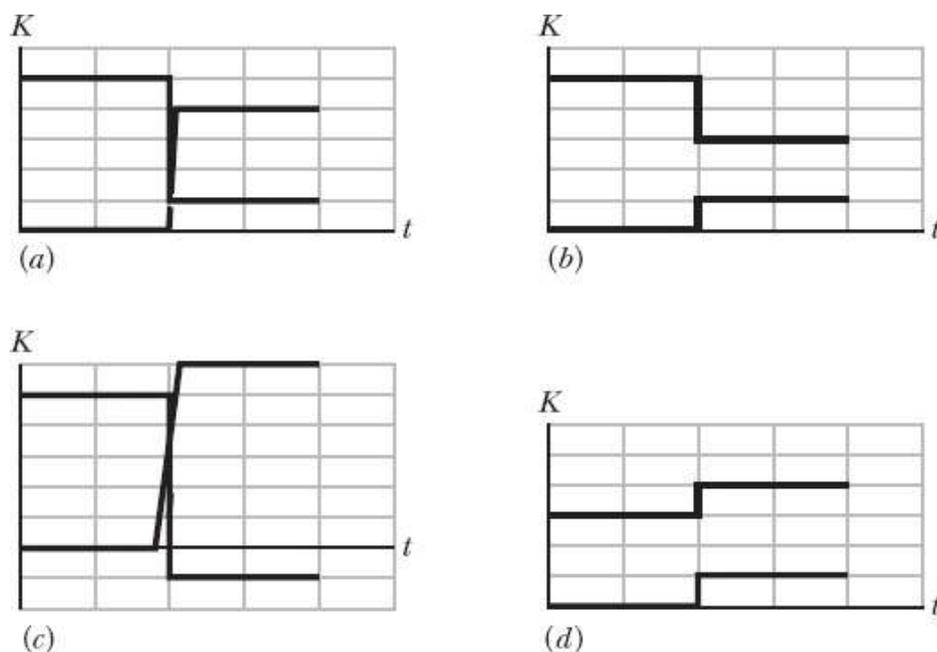
**Figura 9-27** Pergunta 5.

6 A Fig. 9-28 mostra quatro grupos de três ou quatro partículas iguais que se movem paralelamente ao eixo  $x$  ou ao eixo  $y$ , com a mesma velocidade escalar. Ordene os grupos de acordo com a velocidade escalar do centro de massa, começando pela maior.



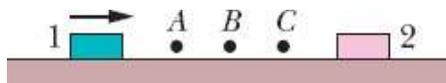
**Figura 9-28** Pergunta 6.

7 Um bloco desliza em um piso sem atrito na direção de um segundo bloco que está inicialmente em repouso e tem a mesma massa. A Fig. 9-29 mostra quatro possibilidades para um gráfico da energia cinética  $K$  dos blocos antes e depois da colisão. (a) Indique quais são as possibilidades que representam situações fisicamente impossíveis. Das outras possibilidades, qual é a que representa (b) uma colisão elástica e (c) uma colisão inelástica?



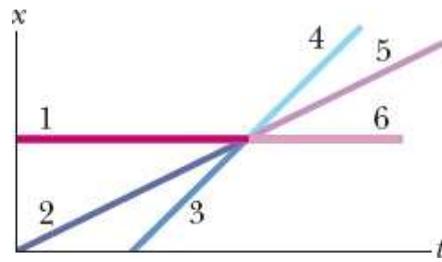
**Figura 9-29** Pergunta 7.

8 A Fig. 9-30 mostra um instantâneo do bloco 1 enquanto desliza ao longo de um eixo  $x$  em um piso sem atrito, antes de sofrer uma colisão elástica com um bloco 2 inicialmente em repouso. A figura também mostra três posições possíveis para o centro de massa do sistema dos dois blocos no mesmo instante. (O ponto  $B$  está equidistante dos centros dos dois blocos.) Após a colisão, o bloco 1 permanece em repouso, continua a se mover no mesmo sentido, ou passa a se mover no sentido oposto se o centro de massa está (a) em  $A$ , (b) em  $B$  e (c) em  $C$ ?



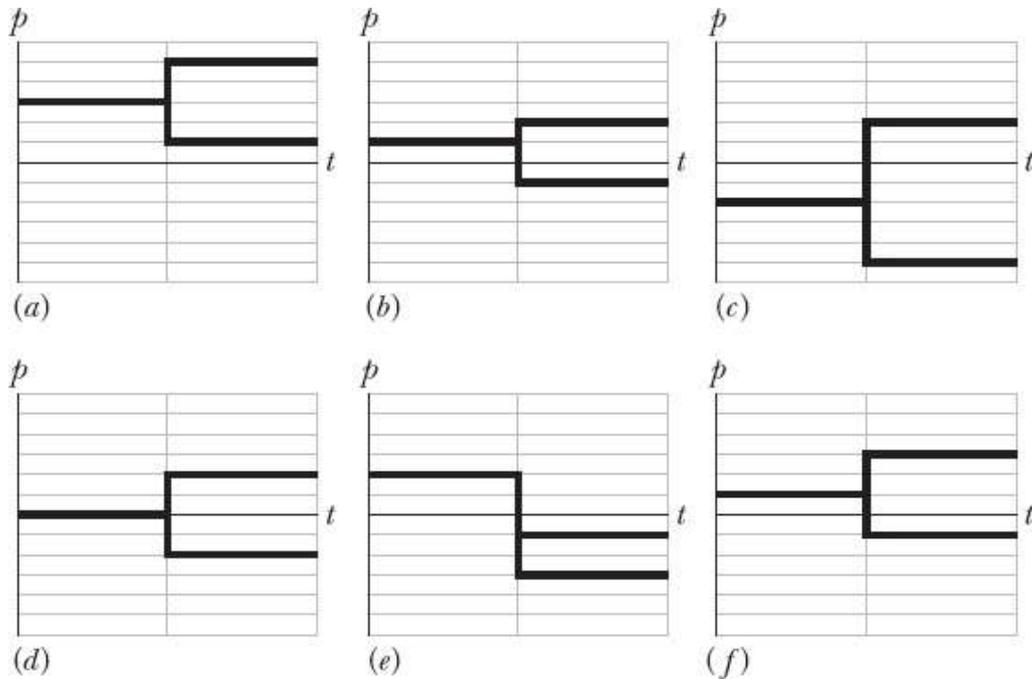
**Figura 9-30** Pergunta 8.

9 Dois corpos sofrem uma colisão elástica unidimensional ao longo de um eixo  $x$ . A Fig. 9-31 mostra a posição dos corpos e do centro de massa em função do tempo. (a) Os dois corpos estavam se movendo antes da colisão, ou um deles estava em repouso? Que reta corresponde ao movimento do centro de massa (b) antes da colisão e (c) depois da colisão? (d) A massa do corpo que estava se movendo mais depressa antes da colisão é maior, menor ou igual à do outro corpo?



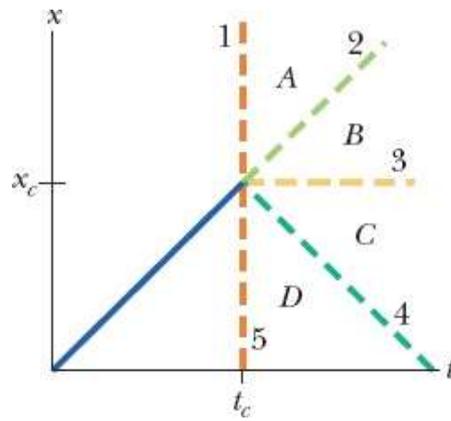
**Figura 9-31** Pergunta 9.

**10** Um bloco em um piso horizontal está inicialmente em repouso, em movimento no sentido positivo de um eixo  $x$  ou em movimento no sentido negativo do mesmo eixo. O bloco explode em dois pedaços que continuam a se mover ao longo do eixo  $x$ . Suponha que o bloco e os dois pedaços formem um sistema fechado e isolado. A Fig. 9-32 mostra seis possibilidades para o gráfico do momento do bloco e dos pedaços em função do tempo  $t$ . Indique as possibilidades que representam situações fisicamente impossíveis e justifique sua resposta.



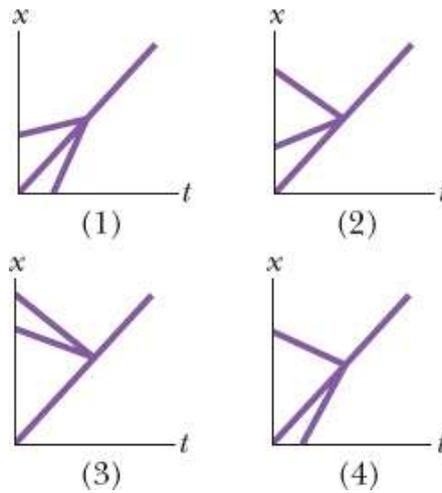
**Figura 9-32** Pergunta 10.

**11** O bloco 1, de massa  $m_1$ , desliza ao longo de um eixo  $x$  em um piso sem atrito e sofre uma colisão elástica com um bloco 2 de massa  $m_2$  inicialmente em repouso. A Fig. 9-33 mostra um gráfico da posição  $x$  do bloco 1 em função do tempo  $t$  até a colisão ocorrer na posição  $x_c$  e no instante  $t_c$ . Em qual das regiões identificadas com letras continua o gráfico (após a colisão) se (a)  $m_1 < m_2$ , (b)  $m_1 > m_2$ ? (c) Ao longo de qual das retas identificadas com números continua o gráfico se  $m_1 = m_2$ ?



**Figura 9-33** Pergunta 11.

**12** A Fig. 9-34 mostra quatro gráficos da posição em função do tempo para dois corpos e seu centro de massa. Os dois corpos formam um sistema fechado e isolado e sofrem uma colisão unidimensional perfeitamente inelástica, ao longo de um eixo  $x$ . No gráfico 1, (a) os dois corpos estão se movendo no sentido positivo ou no sentido negativo do eixo  $x$ ? (b) E o centro de massa? (c) Quais são os gráficos que correspondem a situações fisicamente impossíveis? Justifique sua resposta.



**Figura 9-34** Pergunta 12.

## Problemas

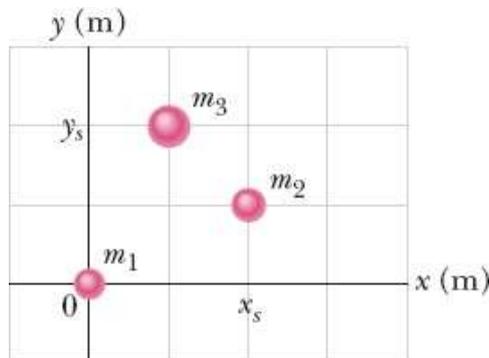
. - ... O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema.

 Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

### Módulo 9-1 Centro de Massa

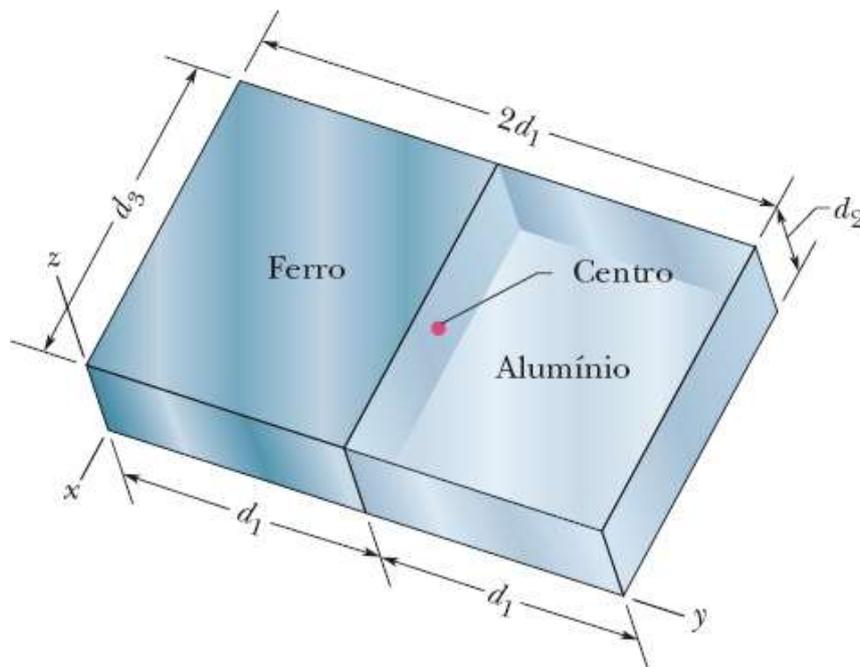
**•1** Uma partícula de 2,00 kg tem coordenadas  $xy$   $(-1,20 \text{ m}, 0,500 \text{ m})$ , e uma partícula de 4,00 kg tem coordenadas  $xy$   $(0,600 \text{ m}, -0,750 \text{ m})$ . Ambas estão em um plano horizontal. Em que coordenada (a)  $x$  e (b)  $y$  deve ser posicionada uma terceira partícula de 3,00 kg para que o centro de massa do sistema de três partículas tenha coordenadas  $(-0,500 \text{ m}, -0,700 \text{ m})$ ?

•2 A Fig. 9-35 mostra um sistema de três partículas de massas  $m_1 = 3,0$  kg,  $m_2 = 4,0$  kg e  $m_3 = 8,0$  kg. As escalas do gráfico são definidas por  $x_s = 2,0$  m e  $y_s = 2,0$  m. Qual é (a) a coordenada  $x$  e (b) qual é a coordenada  $y$  do centro de massa do sistema? (c) Se  $m_3$  aumenta gradualmente, o centro de massa do sistema se aproxima de  $m_3$ , se afasta de  $m_3$ , ou permanece onde está?



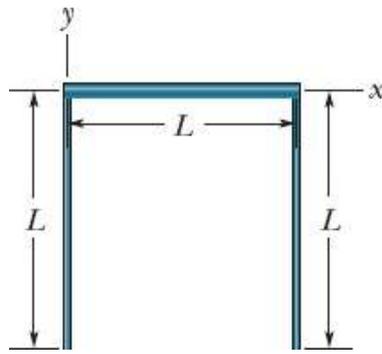
**Figura 9-35** Problema 2.

••3 A Fig. 9-36 mostra uma placa de dimensões  $d_1 = 11,0$  cm,  $d_2 = 2,80$  cm e  $d_3 = 13,0$  cm. Metade da placa é feita de alumínio (massa específica =  $2,70$  g/cm<sup>3</sup>) e a outra metade é feita de ferro (massa específica =  $7,85$  g/cm<sup>3</sup>). Determine (a) a coordenada  $x$ , (b) a coordenada  $y$  e (c) a coordenada  $z$  do centro de massa da placa.



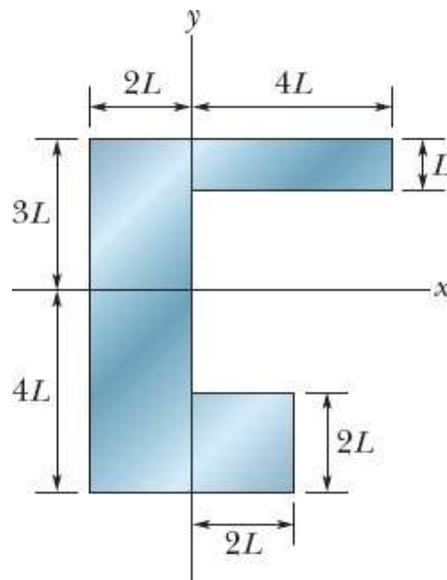
**Figura 9-36** Problema 3.

••4 Na Fig. 9-37, três barras finas e uniformes, de comprimento  $L = 22$  cm, formam um U invertido. Cada barra vertical tem massa de 14 g; a barra horizontal tem massa de 42 g. Qual é (a) a coordenada  $x$  e (b) qual é a coordenada  $y$  do centro de massa do sistema?



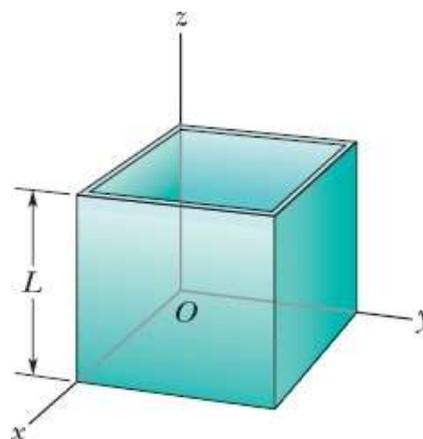
**Figura 9-37** Problema 4.

••5 Quais são (a) a coordenada  $x$  e (b) a coordenada  $y$  do centro de massa da placa homogênea da Fig. 9-38, se  $L = 5,0$  cm?



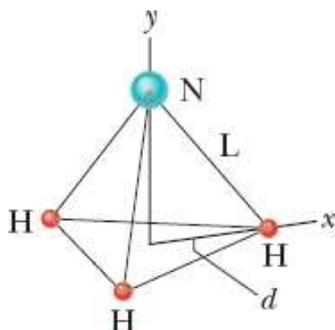
**Figura 9-38** Problema 5.

••6 A Fig. 9-39 mostra uma caixa cúbica que foi construída com placas metálicas homogêneas, de espessura desprezível. A caixa não tem tampa e tem uma aresta  $L = 40$  cm. Determine (a) a coordenada  $x$ , (b) a coordenada  $y$  e (c) a coordenada  $z$  do centro de massa da caixa.



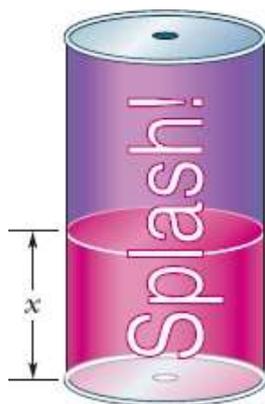
**Figura 9-39** Problema 6.

...7 Na molécula de amônia ( $\text{NH}_3$ ) da Fig. 9-40, três átomos de hidrogênio (H) formam um triângulo equilátero, com o centro do triângulo a uma distância  $d = 9,40 \times 10^{-11}$  m de cada átomo de hidrogênio. O átomo de nitrogênio (N) está no vértice superior de uma pirâmide, com os três átomos de hidrogênio formando a base. A razão entre as massas do nitrogênio e do hidrogênio é 13,9, e a distância nitrogênio-hidrogênio é  $L = 10,14 \times 10^{-11}$  m. (a) Qual é a coordenada (a)  $x$  e (b) qual é a coordenada  $y$  do centro de massa da molécula?



**Figura 9-40** Problema 7.

...8 Uma lata homogênea tem massa de 0,140 kg, altura de 12,0 cm e contém 0,354 kg de refrigerante (Fig. 9-41). Pequenos furos são feitos na base e na tampa (com perda de massa desprezível) para drenar o líquido. Qual é a altura  $h$  do centro de massa da lata (incluindo o conteúdo) (a) inicialmente e (b) após a lata ficar vazia? (c) O que acontece com  $h$  enquanto o refrigerante está sendo drenado? (d) Se  $x$  é a altura do refrigerante que ainda resta na lata em um dado instante, determine o valor de  $x$  no instante em que o centro de massa atinge o ponto mais baixo.

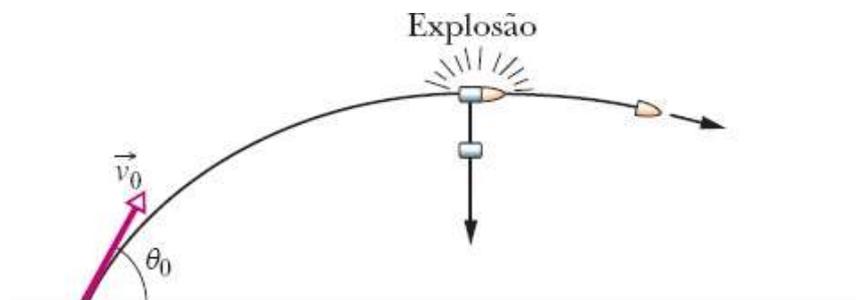


**Figura 9-41** Problema 8.

**Módulo 9-2 A Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas**

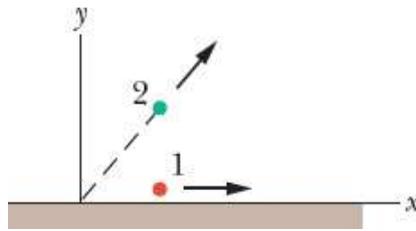
•9 Uma pedra é deixada cair em  $t = 0$ . Uma segunda pedra, com massa duas vezes maior, é deixada cair do mesmo ponto em  $t = 100$  ms. (a) A que distância do ponto inicial da queda está o centro de massa das duas pedras em  $t = 300$  ms? (Suponha que as pedras ainda não chegaram ao solo.) (b) Qual é a velocidade do centro de massa das duas pedras nesse instante?

- 10 Um automóvel de 1000 kg está parado em um sinal de trânsito. No instante em que o sinal abre, o automóvel começa a se mover com uma aceleração constante de  $4,0 \text{ m/s}^2$ . No mesmo instante, um caminhão de 2000 kg, movendo-se no mesmo sentido com velocidade constante de  $8,0 \text{ m/s}$ , ultrapassa o automóvel. (a) Qual é a distância entre o CM do sistema carro-caminhão e o sinal de trânsito em  $t = 3,0 \text{ s}$ ? (b) Qual é a velocidade do CM nesse instante?
- 11 Uma grande azeitona ( $m = 0,50 \text{ kg}$ ) está na origem de um sistema de coordenadas  $xy$ , e uma grande castanha-do-pará ( $M = 1,5 \text{ kg}$ ) está no ponto  $(1,0; 2,0) \text{ m}$ . Em  $t = 0$ , uma força  $\vec{F}_o = (2,0\hat{i} + 3,0\hat{j}) \text{ N}$  começa a agir sobre a azeitona, e uma força  $\vec{F}_n = (-3,0\hat{i} - 2,0\hat{j}) \text{ N}$  começa a agir sobre a castanha. Na notação dos vetores unitários, qual é o deslocamento do centro de massa do sistema azeitona-castanha em  $t = 4,0 \text{ s}$  em relação à posição em  $t = 0$ ?
- 12 Dois patinadores, um de 65 kg e outro de 40 kg, estão em uma pista de gelo e seguram as extremidades de uma vara de 10 m de comprimento e massa desprezível. Os patinadores se puxam ao longo da vara até se encontrarem. Qual é a distância percorrida pelo patinador de 40 kg?
- 13 Um canhão dispara um projétil com uma velocidade inicial  $\vec{v}_0 = 20 \text{ m/s}$  e um ângulo  $\theta_0 = 60^\circ$  com a horizontal. No ponto mais alto da trajetória, o projétil explode em dois fragmentos de massas iguais (Fig. 9-42). Um fragmento, cuja velocidade imediatamente após a colisão é zero, cai verticalmente. A que distância do canhão cai o outro fragmento, supondo que o terreno é plano e que a resistência do ar pode ser desprezada?



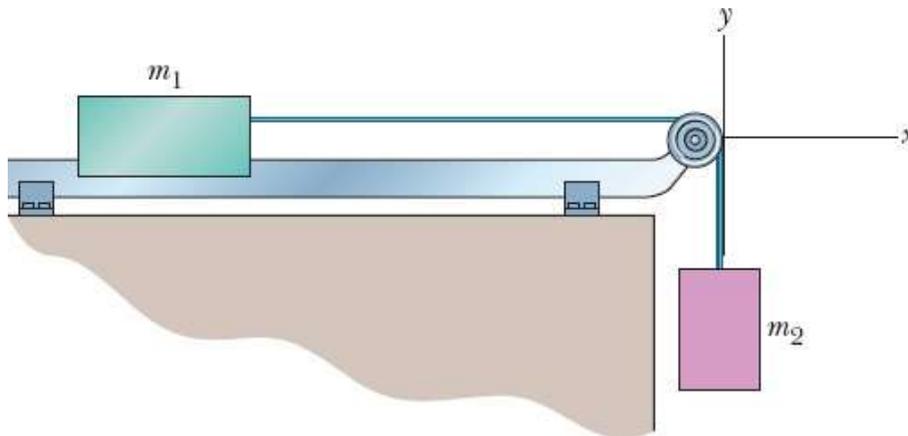
**Figura 9-42** Problema 13.

- 14 Na Fig. 9-43, duas partículas são lançadas da origem do sistema de coordenadas no instante  $t = 0$ . A partícula 1, de massa  $m_1 = 5,00 \text{ g}$ , é lançada horizontalmente para a direita, em um piso sem atrito, com uma velocidade escalar de  $10,0 \text{ m/s}$ . A partícula 2, de massa  $m_2 = 3,00 \text{ g}$ , é lançada com uma velocidade escalar de  $20,0 \text{ m/s}$  e um ângulo tal que se mantém verticalmente acima da partícula 1. (a) Qual é a altura máxima  $H_{\text{máx}}$  alcançada pelo CM do sistema de duas partículas? Na notação dos vetores unitários, (b) qual é a velocidade e (c) qual é a aceleração do CM ao atingir  $H_{\text{máx}}$ ?



**Figura 9-43** Problema 14.

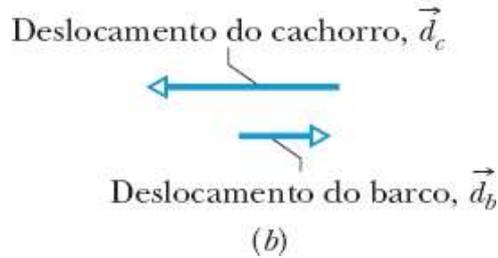
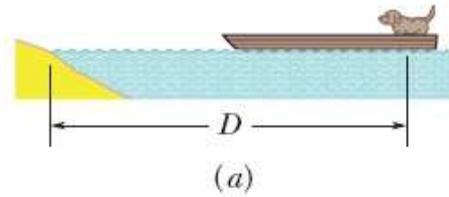
••15 A Fig. 9-44 mostra um arranjo com um trilho de ar no qual um carrinho está preso por uma corda a um bloco pendurado. O carrinho tem massa  $m_1 = 0,600$  kg e o centro do carrinho está inicialmente nas coordenadas  $xy$   $(-0,500$  m,  $0$  m); o bloco tem massa  $m_2 = 0,400$  kg e o centro do bloco está inicialmente nas coordenadas  $xy$   $(0, -0,100$  m). As massas da corda e da polia são desprezíveis. O carrinho é liberado a partir do repouso, e o carrinho e o bloco se movem até que o carrinho atinja a polia. O atrito entre o carrinho e o trilho de ar e o atrito da polia são desprezíveis. (a) Qual é a aceleração do centro de massa do sistema carrinho-bloco na notação dos vetores unitários? (b) Qual é o vetor velocidade do CM em função do tempo  $t$ ? (c) Plote a trajetória do CM. (d) Se a trajetória for curva, verifique se ela apresenta um desvio para cima e para a direita, ou para baixo e para a esquerda em relação a uma linha reta; se for retilínea, calcule o ângulo da trajetória com o eixo  $x$ .



**Figura 9-44** Problema 15.

••16 Ricardo, com 80 kg de massa, e Carmelita, que é mais leve, estão apreciando o pôr do sol no Lago Mercedes em uma canoa de 30 kg. Com a canoa imóvel nas águas calmas do lago, o casal troca de lugar. Seus assentos estão separados por uma distância de 3,0 m e simetricamente dispostos em relação ao centro da embarcação. Se, com a troca, a canoa se desloca 40 cm em relação ao atracadouro, qual é a massa de Carmelita?

••17 Na Fig. 9-45a, um cachorro de 4,5 kg está em um barco de 18 kg a uma distância  $D = 6,1$  m da margem. O animal caminha 2,4 m ao longo do barco, na direção da margem, e para. Supondo que não há atrito entre o barco e a água, determine a nova distância entre o cão e a margem. (Sugestão: Veja a Fig. 9-45b.)



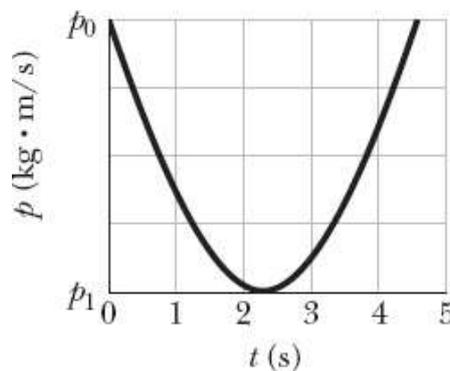
**Figura 9-45** Problema 17.

**Módulo 9-3 Momento Linear**

•18 Uma bola de 0,70 kg está se movendo horizontalmente com uma velocidade de 5,0 m/s quando se choca com uma parede vertical e ricocheteia com uma velocidade de 2,0 m/s. Qual é o módulo da variação do momento linear da bola?

•19 Um caminhão de 2100 kg viajando para o norte a 41 km/h vira para leste e acelera até 51 km/h. (a) Qual é a variação da energia cinética do caminhão? Qual é (b) o módulo e (c) qual é o sentido da variação do momento?

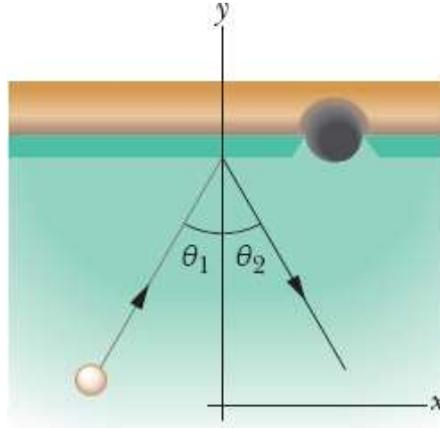
••20 No instante  $t = 0$ , uma bola é lançada para cima a partir do nível do solo, em terreno plano. A Fig. 9-46 mostra o módulo  $p$  do momento linear da bola em função do tempo  $t$  após o lançamento ( $p_0 = 6,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  e  $p_1 = 4,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ). Determine o ângulo de lançamento. (Sugestão: Procure uma solução que não envolva a leitura no gráfico do instante em que passa pelo valor mínimo.)



**Figura 9-46** Problema 20.

••21 Uma bola de softball de 0,30 kg tem uma velocidade de 15 m/s que faz um ângulo de  $35^\circ$  abaixo da horizontal imediatamente antes de ser golpeada por um taco. Qual é o módulo da variação do momento linear da bola na colisão com o taco se a bola adquire uma velocidade escalar (a) de 20 m/s, verticalmente para baixo; (b) de 20 m/s, horizontalmente na direção do lançador?

••22 A Fig. 9-47 mostra uma vista superior da trajetória de uma bola de sinuca de 0,165 kg que se choca com uma das tabelas. A velocidade escalar da bola antes do choque é 2,00 m/s e o ângulo  $\theta_1$  é  $30,0^\circ$ . O choque inverte a componente  $y$  da velocidade da bola, mas não altera a componente  $x$ . Determine (a) o ângulo  $\theta_2$  e (b) a variação do momento linear da bola em termos dos vetores unitários. (O fato de que a bola está rolando é irrelevante para a solução do problema.)



**Figura 9-47** Problema 22.

#### Módulo 9-4 Colisão e Impulso

•23  Com mais de 70 anos de idade, Henri LaMothe (Fig. 9-48) assombrava os espectadores mergulhando, de barriga, de uma altura de 12 m em um tanque de água com 30 cm de profundidade. Supondo que o corpo do mergulhador parava de descer quando estava prestes a chegar ao fundo do tanque e estimando a massa do mergulhador, calcule o módulo do impulso que a água exercia sobre Henri.



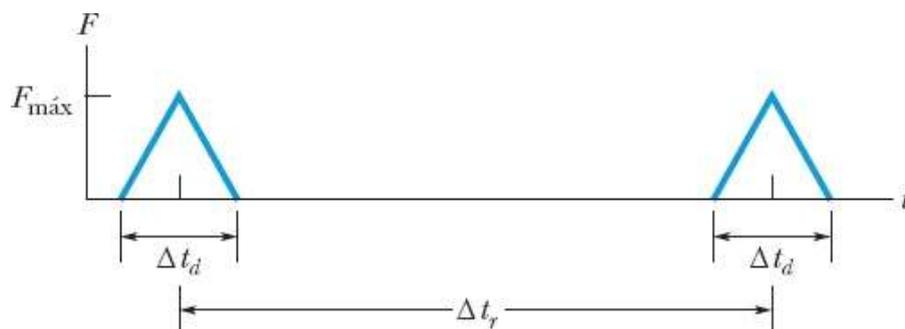
George Long/Getty Images, Inc.

**Figura 9-48** Problema 23. Mergulho de barriga em um tanque com 30 cm de água.

•24  Em fevereiro de 1955, um paraquedista saltou de um avião, caiu 370 m sem conseguir abrir o paraquedas e aterrissou em um campo de neve, sofrendo pequenas escoriações. Suponha que a velocidade do paraquedista imediatamente antes do impacto fosse de 56 m/s (velocidade terminal), sua massa (incluindo os equipamentos) fosse de 85 kg e a força da neve sobre o seu corpo tenha atingido o valor (relativamente seguro) de  $1,2 \times 10^5$  N. Determine (a) a profundidade da neve mínima para que o paraquedista não sofresse ferimentos graves e (b) o módulo do impulso da neve sobre o paraquedista.

•25 Uma bola de 1,2 kg cai verticalmente em um piso com uma velocidade de 25 m/s e ricocheteia com uma velocidade inicial de 10 m/s. (a) Qual é o impulso recebido pela bola durante o contato com o piso? (b) Se a bola fica em contato com o piso por 0,020 s, qual é a força média exercida pela bola sobre o piso?

- 26 Em uma brincadeira comum, mas muito perigosa, alguém puxa uma cadeira quando uma pessoa está prestes a se sentar, fazendo com que a vítima se estatelasse no chão. Suponha que a vítima tem 70 kg, cai de uma altura de 0,50 m e a colisão com o piso dura 0,082 s. Qual é o módulo (a) do impulso e (b) da força média aplicada pelo piso sobre a pessoa durante a colisão?
- 27 Uma força no sentido negativo de um eixo  $x$  é aplicada por 27 ms a uma bola de 0,40 kg que estava se movendo a 14 m/s no sentido positivo do eixo. O módulo da força é variável, e o impulso tem um módulo de 32,4 N · s. (a) Qual é o módulo e (b) qual é o sentido da velocidade da bola imediatamente após a aplicação da força? (c) Qual é a intensidade média da força e (d) qual é a orientação do impulso aplicado à bola?
- 28  No tae-kwon-do, a mão de um atleta atinge o alvo com uma velocidade de 13 m/s e para, após 5,0 ms. Suponha que, durante o choque, a mão é independente do braço e tem massa de 0,70 kg. Determine o módulo (a) do impulso e (b) da força média que a mão exerce sobre o alvo.
- 29 Um bandido aponta uma metralhadora para o peito do Super-Homem e dispara 100 balas/min. Suponha que a massa de cada bala é 3 g, a velocidade das balas é 500 m/s e as balas ricocheteiam no peito do super-herói sem perder velocidade. Qual é o módulo da força média que as balas exercem sobre o peito do Super-Homem?
- 30 *Dois choques médios.* Uma série de bolas de neve de 0,250 kg é disparada perpendicularmente contra uma parede com uma velocidade de 4,00 m/s. As bolas ficam grudadas na parede. A Fig. 9-49 mostra o módulo  $F$  da força sobre a parede em função do tempo  $t$  para dois choques consecutivos. Os choques ocorrem a intervalos  $\Delta t_r = 50,0$  ms, duram um intervalo de tempo  $\Delta t_d = 10$  ms e produzem no gráfico triângulos isósceles, com cada choque resultando em uma força máxima  $F_{\text{máx}} = 200$  N. Para cada choque, qual é o módulo (a) do impulso e (b) da força média aplicada à parede? (c) Em um intervalo de tempo correspondente a muitos choques, qual é o módulo da força média exercida sobre a parede?

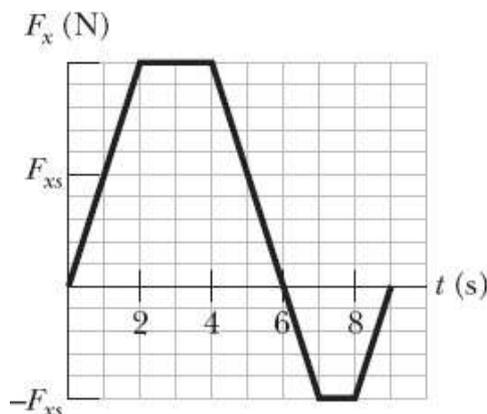


**Figura 9-49** Problema 30.

- 31  *Pulando antes do choque.* Quando o cabo de sustentação arrebenta e o sistema de segurança falha, um elevador cai, em queda livre, de uma altura de 36 m. Durante a colisão no fundo do poço do elevador, a velocidade de um passageiro de 90 kg se anula em 5,0 ms. (Suponha que não há ricochete nem do passageiro nem do elevador.) Qual é o módulo (a) do impulso e (b) da força média experimentada pelo passageiro durante a colisão? Se o passageiro pula verticalmente para cima com uma

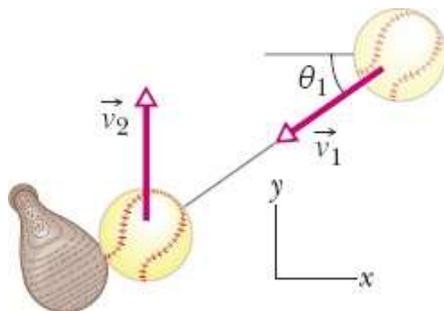
velocidade de 7,0 m/s em relação ao piso do elevador quando este está prestes a se chocar com o fundo do poço, qual é o módulo (c) do impulso e (d) da força média (supondo que o tempo que o passageiro leva para parar permanece o mesmo)?

••32 Um carro de brinquedo de 5,0 kg pode se mover ao longo de um eixo  $x$ ; a Fig. 9-50 mostra a componente  $F_x$  da força que age sobre o carro, que parte do repouso no instante  $t = 0$ . A escala do eixo  $x$  é definida por  $F_{xs} = 5,0$  N. Na notação dos vetores unitários, determine (a)  $\vec{P}$  em  $t = 4,0$  s; (b)  $\vec{P}$  em  $t = 7,0$  s; (c)  $\vec{v}$  em  $t = 9,0$  s.



**Figura 9-50** Problema 32.

••33 A Fig. 9-51 mostra uma bola de beisebol de 0,300 kg imediatamente antes e imediatamente depois de colidir com um taco. Imediatamente antes, a bola tem uma velocidade  $\vec{v}_1$  de módulo 12,0 m/s e ângulo  $\theta_1 = 35^\circ$ . Imediatamente depois, a bola se move para cima na vertical com uma velocidade  $\vec{v}_2$  de módulo 10,0 m/s. A duração da colisão é de 2,00 ms. (a) Qual é o módulo e (b) qual é a orientação (em relação ao semieixo  $x$  positivo) do impulso do taco sobre a bola? (c) Qual é o módulo e (d) qual é o sentido da força média que o taco exerce sobre a bola?



**Figura 9-51** Problema 33.

••34  O lagarto basilisco é capaz de correr na superfície da água (Fig. 9-52). A cada passo, o lagarto bate na água com a pata e a mergulha tão depressa que uma cavidade de ar se forma acima da pata. Para não ter que puxá-la de volta sob a ação da força de arrasto da água, o lagarto levanta a pata, antes que a água penetre na cavidade de ar. Para que o lagarto não afunde, o impulso médio para cima exercido durante a manobra de bater na água com a pata, afundá-la e recolhê-la deve ser igual ao impulso

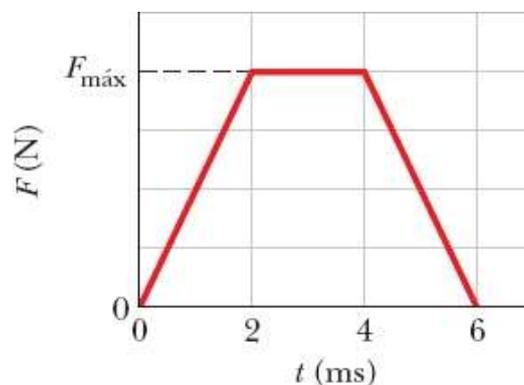
para baixo exercido pela força gravitacional. Suponha que a massa de um lagarto basilisco é 90,0 g, a massa de cada pata é 3,00 g, a velocidade de uma pata ao bater na água é 1,50 m/s e a duração de um passo é 0,600 s. (a) Qual é o módulo do impulso que a água exerce sobre o lagarto quando o animal bate com a pata na água? (Suponha que o impulso está orientado verticalmente para cima.) (b) Durante o intervalo de 0,600 s que o lagarto leva para dar um passo, qual é o impulso para baixo sobre o lagarto devido à força gravitacional? (c) O principal movimento responsável pela sustentação do lagarto é o de bater a pata na água, o de afundar a pata na água, ou ambos contribuem igualmente?



Stephen Dalton/Photo Researchers, Inc.

**Figura 9-52** Problema 34. Um lagarto correndo na água.

••35 A Fig. 9-53 mostra um gráfico aproximado do módulo da força  $F$  em função do tempo  $t$  para a colisão de uma Superbola de 58 g com uma parede. A velocidade inicial da bola é 34 m/s, perpendicular à parede; a bola ricocheteia praticamente com a mesma velocidade escalar, também perpendicular à parede. Quanto vale  $F_{\text{máx}}$ , o módulo máximo da força exercida pela parede sobre a bola durante a colisão?



**Figura 9-53** Problema 35.

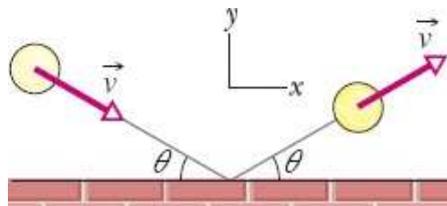
••36 Um disco de metal de 0,25 kg está inicialmente em repouso em uma superfície de gelo, de atrito desprezível. No instante  $t = 0$ , uma força horizontal começa a agir sobre o disco. A força é dada por  $\vec{F} = (12,0 - 3,00t^2)\hat{i}$  com  $\vec{F}$  em newtons e  $t$  em segundos, e age até que o módulo se anule. (a) Qual é o módulo do impulso da força sobre o disco entre  $t = 0,500$  s e  $t = 1,25$  s? (b) Qual é a variação do momento do disco entre  $t = 0$  e o instante em que  $F = 0$ ?

••37 Um jogador de futebol chuta uma bola, de massa 0,45 kg, que está inicialmente em repouso. O pé do jogador fica em contato com a bola por  $3,0 \times 10^{-3}$  s e a força do chute é dada por

$$F(t) = [(6,0 \times 10^6)t - (2,0 \times 10^9)t^2] \text{N}$$

para  $0 \leq t \leq 3,0 \times 10^{-3}$  s, em que  $t$  está em segundos. Determine o módulo (a) do impulso sobre a bola devido ao chute, (b) da força média exercida pelo pé do jogador sobre a bola durante o contato, (c) da força máxima exercida pelo pé do jogador sobre a bola durante o contato e (d) da velocidade da bola imediatamente após perder o contato com o pé do jogador.

••38 Na vista superior da Fig. 9-54, uma bola de 300 g com uma velocidade escalar  $v$  de 6,0 m/s se choca com uma parede com um ângulo  $\theta$  de  $30^\circ$  e ricocheteia com a mesma velocidade escalar e o mesmo ângulo. A bola permanece em contato com a parede por 10 ms. Na notação dos vetores unitários, qual é (a) o impulso da parede sobre a bola e (b) qual é a força média da bola sobre a parede?



**Figura 9-54** Problema 38.

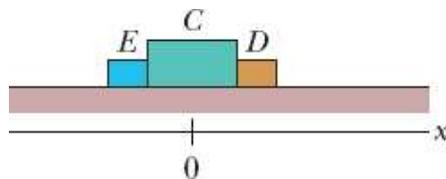
### Módulo 9-5 Conservação do Momento Linear

•39 Um homem de 91 kg em repouso em uma superfície horizontal, de atrito desprezível, arremessa uma pedra de 68 g com uma velocidade horizontal de 4,0 m/s. Qual é a velocidade do homem após o arremesso?

•40 Uma nave espacial está se movendo a 4300 km/h em relação à Terra quando, após ter queimado todo o combustível, o motor do foguete (de massa  $4m$ ) é desacoplado e ejetado para trás com uma velocidade de 82 km/h em relação ao módulo de comando (de massa  $m$ ). Qual é a velocidade do módulo de comando em relação à Terra imediatamente após a separação?

••41 A Fig. 9-55 mostra um “foguete” de duas pontas que está inicialmente em repouso em uma superfície sem atrito, com o centro na origem de um eixo  $x$ . O foguete é formado por um bloco central  $C$  (de massa  $M = 6,00$  kg) e dois blocos  $E$  e  $D$  (de massa  $m = 2,00$  kg cada um) dos lados esquerdo e direito. Pequenas explosões podem arremessar esses blocos para longe do bloco  $C$ , ao longo do eixo  $x$ . Considere a seguinte sequência: (1) No instante  $t = 0$ , o bloco  $E$  é arremessado para a esquerda com uma

velocidade de 3,00 m/s em relação à velocidade que a explosão imprime ao resto do foguete. (2) No instante  $t = 0,80$  s, o bloco  $D$  é arremessado para a direita com uma velocidade de 3,00 m/s em relação à velocidade do bloco  $C$  nesse momento. (a) Qual é, no instante  $t = 2,80$  s, a velocidade do bloco  $C$  e (b) qual é a posição do centro do bloco  $C$ ?



**Figura 9-55** Problema 41.

••42 Um objeto, de massa  $m$  e velocidade  $v$  em relação a um observador, explode em dois pedaços, um com massa três vezes maior que o outro; a explosão ocorre no espaço sideral. O pedaço de menor massa fica em repouso em relação ao observador. Qual é o aumento da energia cinética do sistema causado pela explosão, no referencial do observador?

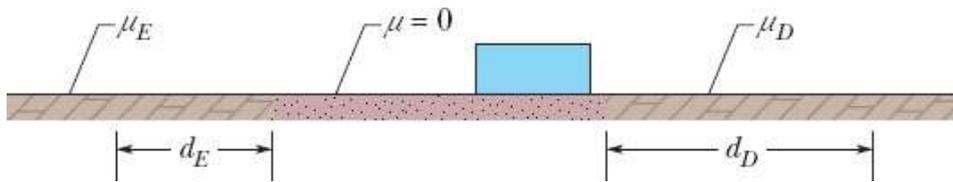
••43  Na Olimpíada de 708 a.C., alguns atletas disputaram a prova de salto em distância segurando pesos chamados *halteres* para melhorar o desempenho (Fig. 9-56). Os pesos eram colocados à frente do corpo antes de iniciar o salto e arremessados para trás durante o salto. Suponha que um atleta moderno, de 78 kg, use dois halteres de 5,50 kg, arremessando-os horizontalmente para trás ao atingir a altura máxima, de tal forma que a velocidade horizontal dos pesos em relação ao chão seja zero. Suponha que a velocidade inicial do atleta seja  $\vec{v} = (9,5\hat{i} + 4,0\hat{j})$  m/s com ou sem os halteres e que o terreno seja plano. Qual é a diferença entre as distâncias que o atleta consegue saltar com e sem os halteres?



Réunion des Musées Nationaux/Art Resource

**Figura 9-56** Problema 43.

••44 Na Fig. 9-57, um bloco inicialmente em repouso explode em dois pedaços,  $E$  e  $D$ , que deslizam em um piso em um trecho sem atrito e depois entram em regiões com atrito, onde acabam parando. O pedaço  $E$ , com massa de 2,0 kg, encontra um coeficiente de atrito cinético  $\mu_E = 0,40$  e chega ao repouso depois de percorrer uma distância  $d_E = 0,15$  m. O pedaço  $D$  encontra um coeficiente de atrito cinético  $\mu_D = 0,50$  e chega ao repouso depois de percorrer uma distância  $d_D = 0,25$  m. Qual era a massa do bloco?



**Figura 9-57** Problema 44.

••45 Um corpo de 20,0 kg está se movendo no sentido positivo de um eixo  $x$  a uma velocidade de 200 m/s quando, devido a uma explosão interna, se quebra em três pedaços. Um dos pedaços, com massa de 10,0 kg, se afasta do ponto da explosão a uma velocidade de 100 m/s no sentido positivo do eixo  $y$ . Um segundo pedaço, com massa de 4,00 kg, se move no sentido negativo do eixo  $x$  a uma velocidade de 500 m/s. (a) Na notação dos vetores unitários, qual é a velocidade da terceira parte? (b) Qual é a energia liberada na explosão? Ignore os efeitos da força gravitacional.

••46 Uma marmitta de 4 kg que está deslizando em uma superfície sem atrito explode em dois fragmentos de 2,0 kg, um que se move para o norte a 3,0 m/s e outro que se move em uma direção  $30^\circ$  ao norte do leste a 5,0 m/s. Qual era a velocidade escalar da marmitta antes da explosão?

••47 Uma taça em repouso na origem de um sistema de coordenadas  $xy$  explode em três pedaços. Logo depois da explosão, um dos pedaços, de massa  $m$ , está se movendo com velocidade  $(-30 \text{ m/s})\hat{i}$  e um segundo pedaço, também de massa  $m$ , está se movendo com velocidade  $(-30 \text{ m/s})\hat{j}$ . O terceiro pedaço tem massa  $3m$ . Determine (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade do terceiro pedaço logo após a explosão.

•••48 Uma partícula  $A$  e uma partícula  $B$  são empurradas uma contra a outra, comprimindo uma mola colocada entre as duas. Quando as partículas são liberadas, a mola as arremessa em sentidos opostos. A massa de  $A$  é 2,00 vezes a massa de  $B$  e a energia armazenada na mola era 60 J. Suponha que a mola tem massa desprezível e que toda a energia armazenada é transferida para as partículas. Depois de terminada a transferência, qual é a energia cinética (a) da partícula  $A$  e (b) da partícula  $B$ ?

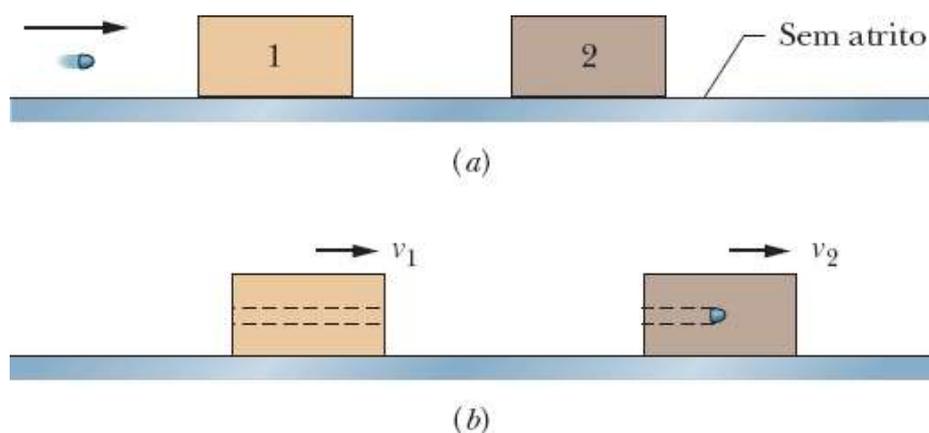
#### Módulo 9-6 Momento e Energia Cinética em Colisões

•49 Uma bala com 10 g de massa se choca com um pêndulo balístico com 2,00 kg de massa. O centro de massa do pêndulo sobe uma distância vertical de 12 cm. Supondo que a bala fica alojada no pêndulo, calcule a velocidade inicial da bala.

•50 Uma bala de 5,20 g que se move a 672 m/s atinge um bloco de madeira de 700 g inicialmente em repouso em uma superfície sem atrito. A bala atravessa o bloco e sai do outro lado com a velocidade reduzida para 428 m/s. (a) Qual é a velocidade final do bloco? (b) Qual é a velocidade do centro de massa do sistema bala-bloco?

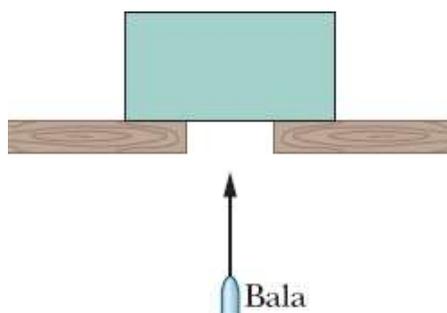
••51 Na Fig. 9-58a, uma bala de 3,50 g é disparada horizontalmente contra dois blocos inicialmente em repouso em uma mesa sem atrito. A bala atravessa o bloco 1 (com 1,20 kg de massa) e fica alojada no bloco 2 (com 1,80 kg de massa). A velocidade final do bloco 1 é  $v_1 = 0,630 \text{ m/s}$ , e a do bloco 2 é  $v_2 = 1,40 \text{ m/s}$  (Fig. 9-58b). Desprezando o material removido do bloco 1 pela bala, calcule a velocidade da

bala (a) ao sair do bloco 1 e (b) ao entrar no bloco 1.



**Figura 9-58** Problema 51.

••52 Na Fig. 9-59, uma bala de 10 g que se move verticalmente para cima a 1000 m/s se choca com um bloco de 5,0 kg inicialmente em repouso, passa pelo centro de massa do bloco e sai do outro lado com uma velocidade de 400 m/s. Qual é a altura máxima atingida pelo bloco em relação à posição inicial?



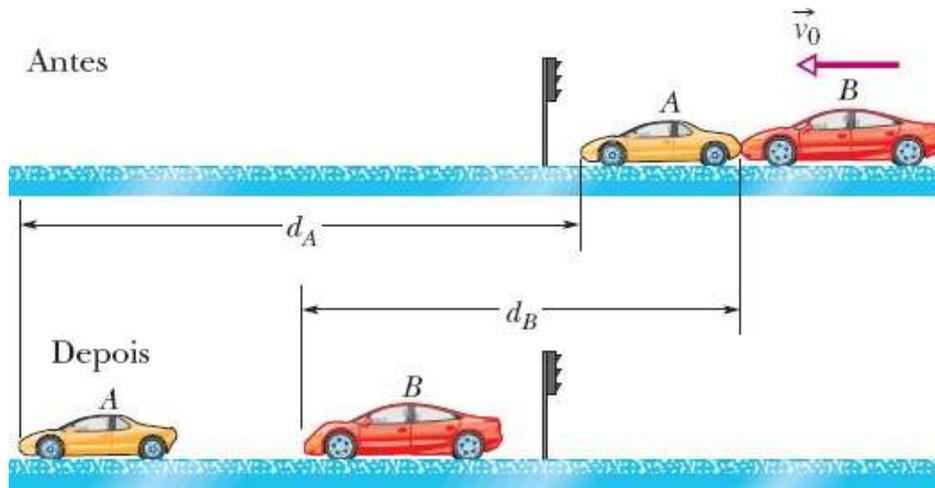
**Figura 9-59** Problema 52.

••53 Em Anchorage, as colisões de um veículo com um alce são tão comuns que receberam o apelido de CVA. Suponha que um carro de 1000 kg derrapa até atropelar um alce estacionário de 500 kg em uma estrada muito escorregadia, com o animal atravessando o para-brisa (o que acontece muitas vezes nesse tipo de atropelamento). (a) Que porcentagem da energia cinética do carro é transformada, pela colisão, em outras formas de energia? Acidentes semelhantes acontecem na Arábia Saudita, nas chamadas CVC (colisões entre um veículo e um camelo). (b) Que porcentagem da energia cinética do carro é perdida se a massa do camelo é 300 kg? (c) No caso geral, a perda percentual aumenta ou diminui quando a massa do animal diminui?

••54 Uma colisão frontal perfeitamente inelástica ocorre entre duas bolas de massa de modelar que se movem ao longo de um eixo vertical. Imediatamente antes da colisão, uma das bolas, de massa 3,0 kg, está se movendo para cima a 20 m/s e a outra bola, de massa 2,0 kg, está se movendo para baixo a 12 m/s. Qual é a altura máxima atingida pelas duas bolas unidas acima do ponto de colisão? (Despreze a resistência do ar.)

••55 Um bloco de 5,0 kg com uma velocidade escalar de 3,0 m/s colide com um bloco de 10 kg com uma velocidade escalar de 2,00 m/s que se move na mesma direção e sentido. Após a colisão, o bloco de 10 kg passa a se mover no mesmo sentido com uma velocidade de 2,5 m/s. (a) Qual é a velocidade do bloco de 5,0 kg imediatamente após a colisão? (b) De quanto varia a energia cinética total do sistema dos dois blocos por causa da colisão? (c) Suponha que a velocidade do bloco de 10 kg após o choque é 4,0 m/s. Qual é, nesse caso, a variação da energia cinética total? (d) Explique o resultado do item (c).

••56 Na situação “antes” da Fig. 9-60, o carro A (com massa de 1100 kg) está parado em um sinal de trânsito quando é atingido na traseira pelo carro B (com massa de 1400 kg). Os dois carros derrapam com as rodas bloqueadas até que a força de atrito com o asfalto molhado (com um coeficiente de atrito  $\mu_k$  de 0,13) os leva ao repouso depois de percorrerem distâncias  $d_A = 8,2$  m e  $d_B = 6,1$  m. Qual é a velocidade escalar (a) do carro A e (b) do carro B no início da derrapagem, logo após a colisão? (c) Supondo que o momento linear é conservado na colisão, determine a velocidade escalar do carro B pouco antes da colisão. (d) Explique por que essa suposição pode não ser realista.



**Figura 9-60** Problema 56.

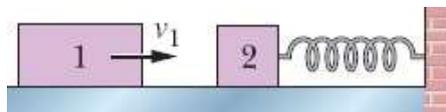
••57 Na Fig. 9-61, uma bola de massa  $m = 60$  g é disparada com velocidade  $v_i = 22$  m/s para dentro do cano de um canhão de mola de massa  $M = 240$  g inicialmente em repouso em uma superfície sem atrito. A bola fica presa no cano do canhão no ponto de máxima compressão da mola. Suponha que o aumento da energia térmica devido ao atrito da bola com o cano seja desprezível. (a) Qual é a velocidade escalar do canhão depois que a bola para dentro do cano? (b) Que fração da energia cinética inicial da bola fica armazenada na mola?



**Figura 9-61** Problema 57.

•••58 Na Fig. 9-62, o bloco 2 (com massa de 1,0 kg) está em repouso em uma superfície sem atrito e em

contato com uma das extremidades de uma mola relaxada de constante elástica 200 N/m. A outra extremidade da mola está presa em uma parede. O bloco 1 (com massa de 2,0 kg), que se move a uma velocidade  $v_1 = 4,0$  m/s, colide com o bloco 2, e os dois blocos permanecem juntos. Qual é a compressão da mola no instante em que os blocos param momentaneamente?



**Figura 9-62** Problema 58.

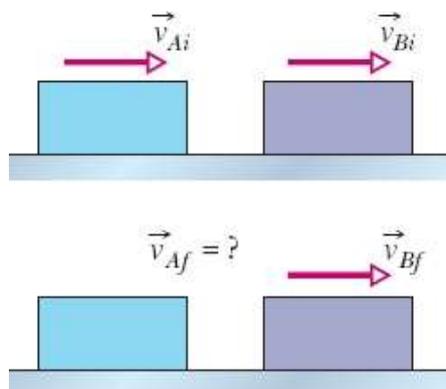
•••59 Na Fig. 9-63, o bloco 1 (com massa de 2,0 kg) está se movendo para a direita com uma velocidade escalar de 10 m/s e o bloco 2 (com massa de 5,0 kg) está se movendo para a direita com uma velocidade escalar de 3,0 m/s. A superfície não tem atrito, e uma mola com uma constante elástica de 1120 N/m está presa no bloco 2. Quando os blocos colidem, a compressão da mola é máxima no instante em que os blocos têm a mesma velocidade. Determine a máxima compressão da mola.



**Figura 9-63** Problema 59.

### Módulo 9-7 Colisões Elásticas em Uma Dimensão

•60 Na Fig. 9-64, o bloco A (com massa de 1,6 kg) desliza em direção ao bloco B (com massa de 2,4 kg) ao longo de uma superfície sem atrito. Os sentidos de três velocidades antes (*i*) e depois (*f*) da colisão estão indicados; as velocidades escalares correspondentes são  $v_{Ai} = 5,5$  m/s,  $v_{Bi} = 2,5$  m/s e  $v_{Bf} = 4,9$  m/s. Determine (a) o módulo e (b) o sentido (para a esquerda ou para a direita) da velocidade  $\vec{v}_{Af}$ . (c) A colisão é elástica?



**Figura 9-64** Problema 60.

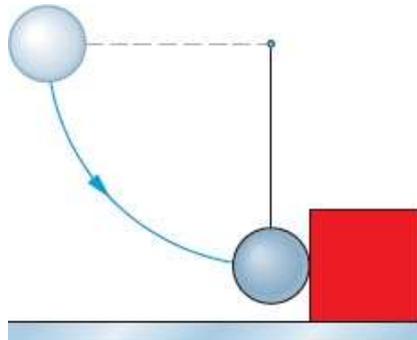
•61 Um carrinho de massa com 340 g de massa, que se move em uma pista de ar sem atrito com uma velocidade inicial de 1,2 m/s, sofre uma colisão elástica com um carrinho inicialmente em repouso, de massa desconhecida. Após a colisão, o primeiro carrinho continua a se mover na mesma direção e

sentido com uma velocidade escalar de 0,66 m/s. (a) Qual é a massa do segundo carrinho? (b) Qual é a velocidade do segundo carrinho após a colisão? (c) Qual é a velocidade do centro de massa do sistema dos dois carrinhos?

•62 Duas esferas de titânio se aproximam com a mesma velocidade escalar e sofrem uma colisão elástica frontal. Após a colisão, uma das esferas, cuja massa é 300 g, permanece em repouso. (a) Qual é a massa da outra esfera? (b) Qual é a velocidade do centro de massa das duas esferas se a velocidade escalar inicial de cada esfera é de 2,00 m/s?

•63 O bloco 1, de massa  $m_1$ , desliza em um piso sem atrito e sofre uma colisão elástica unidimensional com o bloco 2, de massa  $m_2 = 3m_1$ . Antes da colisão, o centro de massa do sistema de dois blocos tinha uma velocidade de 3,00 m/s. Depois da colisão, qual é a velocidade (a) do centro de massa e (b) do bloco 2?

•64 Uma bola de aço, de massa 0,500 kg, está presa em uma extremidade de uma corda de 70,0 cm de comprimento. A outra extremidade está fixa. A bola é liberada quando a corda está na horizontal (Fig. 9-65). Na parte mais baixa da trajetória, a bola se choca com um bloco de metal de 2,50 kg inicialmente em repouso em uma superfície sem atrito. A colisão é elástica. Determine (a) a velocidade escalar da bola e (b) a velocidade escalar do bloco, ambas imediatamente após a colisão.



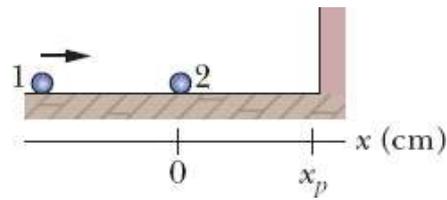
**Figura 9-65** Problema 64.

•65 Um corpo com 2,0 kg de massa sofre uma colisão elástica com um corpo em repouso e continua a se mover na mesma direção e sentido, com um quarto da velocidade inicial. (a) Qual é a massa do outro corpo? (b) Qual é a velocidade do centro de massa dos dois corpos, se a velocidade inicial do corpo de 2,0 kg era de 4,0 m/s?

•66 O bloco 1, de massa  $m_1$  e velocidade 4,0 m/s, que desliza ao longo de um eixo  $x$  em um piso sem atrito, sofre uma colisão elástica com o bloco 2, de massa  $m_2 = 0,40m_1$ , inicialmente em repouso. Os dois blocos deslizam para uma região onde o coeficiente de atrito cinético é 0,50 e acabam parando. Que distância dentro dessa região é percorrida (a) pelo bloco 1 e (b) pelo bloco 2?

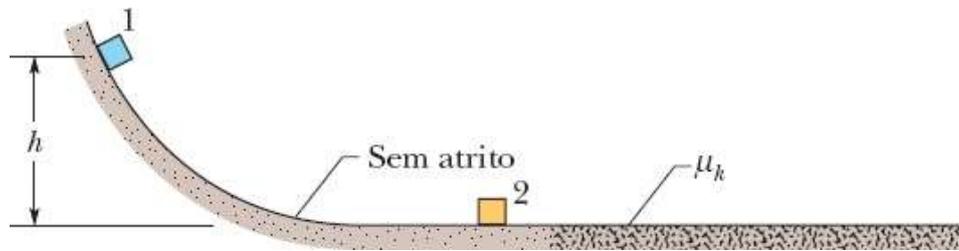
•67 Na Fig. 9-66, a partícula 1, de massa  $m_1 = 0,30$  kg, desliza para a direita ao longo de um eixo  $x$  em um piso sem atrito com uma velocidade escalar de 2,0 m/s. Quando chega ao ponto  $x = 0$ , sofre uma colisão elástica unidimensional com a partícula 2 de massa  $m_2 = 0,40$  kg, inicialmente em repouso.

Quando a partícula 2 se choca com uma parede no ponto  $x_p = 70$  cm, ricocheteia sem perder velocidade escalar. Em que ponto do eixo  $x$  a partícula 2 volta a colidir com a partícula 1?



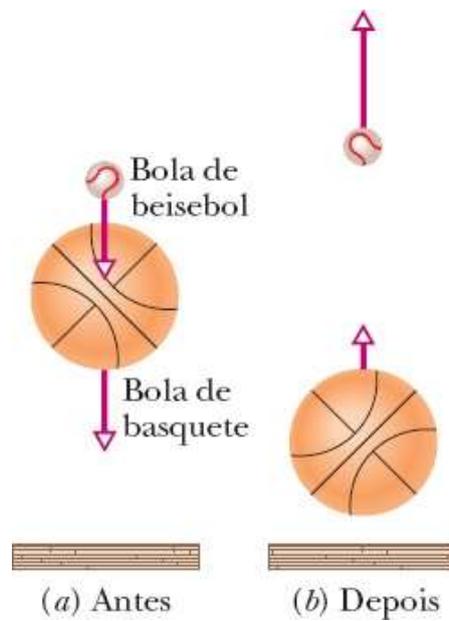
**Figura 9-66** Problema 65.

••68 Na Fig. 9-67, o bloco 1, de massa  $m_1$ , desliza a partir do repouso em uma rampa sem atrito a partir de uma altura  $h = 2,50$  m e colide com o bloco 2, de massa  $m_2 = 2,00m_1$ , inicialmente em repouso. Após a colisão, o bloco 2 desliza em uma região onde o coeficiente de atrito cinético  $\mu_k$  é 0,500 e para, depois de percorrer uma distância  $d$  nessa região. Qual é o valor da distância  $d$  se a colisão for (a) elástica e (b) perfeitamente inelástica?



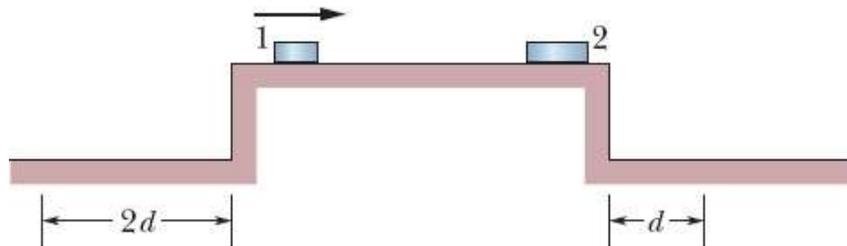
**Figura 9-67** Problema 68.

•••69  Uma pequena esfera de massa  $m$  está verticalmente acima de uma bola maior, de massa  $M = 0,63$  kg (com uma pequena separação, como no caso das bolas de beisebol e basquete da Fig. 9-68a), e as duas bolas são deixadas cair simultaneamente de uma altura  $h = 1,8$  m. (Suponha que os raios das bolas são desprezíveis em comparação com  $h$ .) (a) Se a bola maior ricocheteia elasticamente no chão e depois a bola menor ricocheteia elasticamente na maior, que valor de  $m$  faz com que a bola maior pare momentaneamente no instante em que colide com a menor? (b) Nesse caso, que altura atinge a bola menor (Fig. 9-68b)?



**Figura 9-68** Problema 69.

••70 Na Fig. 9-69, o disco 1, de massa  $m_1 = 0,20 \text{ kg}$ , desliza sem atrito em uma bancada de laboratório até sofrer uma colisão elástica unidimensional com o disco 2, inicialmente em repouso. O disco 2 é arremessado para fora da bancada e vai cair a uma distância  $d$  da base da bancada. A colisão faz o disco 1 inverter o movimento e ser arremessado para fora da outra extremidade da bancada, indo cair a uma distância  $2d$  da base oposta. Qual é a massa do disco 2? (*Sugestão*: Tome cuidado com os sinais.)



**Figura 9-69** Problema 70.

### Módulo 9-8 Colisões em Duas Dimensões

••71 Na Fig. 9-21, a partícula 1 é uma partícula alfa e a partícula 2 é um núcleo de oxigênio. A partícula alfa é espalhada de um ângulo  $\theta_1 = 64,0^\circ$  e o núcleo de oxigênio recua com uma velocidade escalar de  $1,20 \times 10^5 \text{ m/s}$  e um ângulo  $\theta_2 = 51,0^\circ$ . Em unidades de massa atômica, a massa da partícula alfa é  $4,00 \text{ u}$  e a massa do núcleo de hidrogênio é  $16,0 \text{ u}$ . (a) Qual é a velocidade final e (b) inicial da partícula alfa?

••72 A bola B, que se move no sentido positivo de um eixo  $x$  com velocidade  $v$ , colide com a bola A inicialmente em repouso na origem. A e B têm massas diferentes. Após a colisão, B se move no sentido negativo do eixo  $y$  com velocidade escalar  $v/2$ . (a) Qual é a orientação de A após a colisão? (b) Mostre que a velocidade de A não pode ser determinada a partir das informações dadas.

••73 Após uma colisão perfeitamente inelástica, dois objetos de mesma massa e mesma velocidade escalar inicial deslocam-se juntos com metade da velocidade inicial. Determine o ângulo entre as

velocidades iniciais dos objetos.

••74 Dois corpos de 2,0 kg,  $A$  e  $B$ , sofrem uma colisão. As velocidades antes da colisão são  $\vec{v}_A = (15\hat{i} + 30\hat{j})$  m/s e  $\vec{v}_B = (-10\hat{i} + 5,0\hat{j})$  m/s. Após a colisão,  $\vec{v}_A' = (-5,0\hat{i} + 20\hat{j})$  m/s. Determine (a) a velocidade final de  $B$  e (b) a variação da energia cinética total (incluindo o sinal).

••75 O próton 1, com uma velocidade de 500 m/s, colide elasticamente com o próton 2, inicialmente em repouso. Depois do choque, os dois prótons se movem em trajetórias perpendiculares, com a trajetória do próton 1 fazendo  $60^\circ$  com a direção inicial. Após a colisão, qual é a velocidade escalar (a) do próton 1 e (b) do próton 2?

#### Módulo 9-9 Sistemas de Massa Variável: Um Foguete

•76 Uma sonda espacial de 6090 kg, movendo-se com o nariz à frente em direção a Júpiter a uma velocidade de 105 m/s em relação ao Sol, aciona o motor, ejetando 80,0 kg de produtos de combustão a uma velocidade de 253 m/s em relação à nave. Qual é a velocidade final da nave?

•77 Na Fig. 9-70, duas longas barcaças estão se movendo na mesma direção em águas tranquilas, uma com velocidade escalar de 10 km/h e a outra com velocidade escalar de 20 km/h. Quando estão passando uma pela outra, operários jogam carvão da barcaça mais lenta para a mais rápida a uma taxa de 1000 kg/min. Que força adicional deve ser fornecida pelos motores (a) da barcaça mais rápida e (b) da barcaça mais lenta para que as velocidades não mudem? Suponha que a transferência de carvão é perpendicular à direção do movimento das barcaças e que a força de atrito entre as barcaças e a água não depende da massa das barcaças.

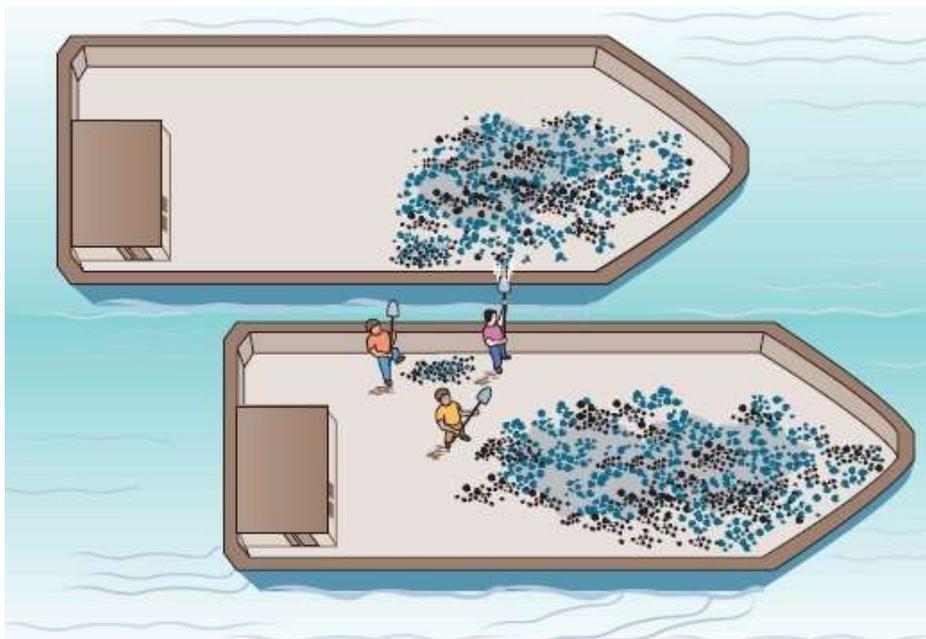


Figura 9-70 Problema 77.

•78 Considere um foguete que está no espaço sideral, em repouso em relação a um referencial inercial. O motor do foguete deve ser acionado por um certo intervalo de tempo. Determine a *razão de massa* do

foguete (razão entre as massas inicial e final) nesse intervalo para que a velocidade original do foguete em relação ao referencial inercial seja igual (a) à velocidade de exaustão (velocidade dos produtos de exaustão em relação ao foguete) e (b) a duas vezes a velocidade de exaustão.

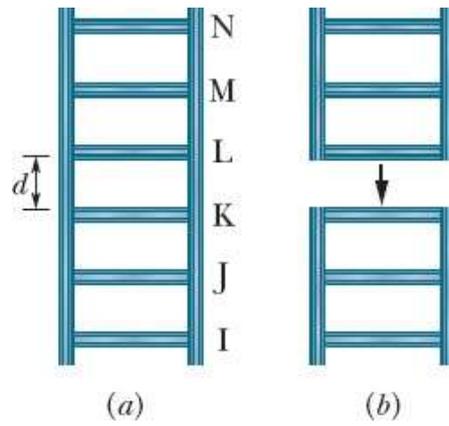
•79 Um foguete que está no espaço sideral, em repouso em relação a um referencial inercial, tem massa de  $2,55 \times 10^5$  kg, da qual  $1,81 \times 10^5$  kg são de combustível. O motor do foguete é acionado por 250 s, durante os quais o combustível é consumido à taxa de 480 kg/s. A velocidade dos produtos de exaustão em relação ao foguete é 3,27 km/s. (a) Qual é o empuxo do foguete? Após os 250 s de funcionamento do motor, qual é (b) a massa e (c) qual é a velocidade do foguete?

#### Problemas Adicionais

80 Um objeto é rastreado por uma estação de radar e se verifica que seu vetor posição é dado por  $\vec{r} = (3500 - 160t)\hat{i} + 2700\hat{j} + 300t\hat{k}$  com  $\vec{r}$  em metros e  $t$  em segundos. O eixo  $x$  da estação de radar aponta para leste, o eixo  $y$  para o norte e o eixo  $z$  verticalmente para cima. Se o objeto é um foguete meteorológico de 250 kg, determine (a) o momento linear do foguete, (b) a direção do movimento do foguete e (c) a força que age sobre o foguete.

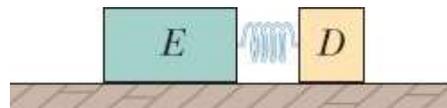
81 O último estágio de um foguete, que está viajando a uma velocidade de 7600 m/s, é composto de duas partes presas por uma trava: um invólucro, com massa de 290,0 kg, e uma cápsula de carga, com massa de 150,0 kg. Quando a trava é aberta, uma mola inicialmente comprimida faz as duas partes se separarem com uma velocidade relativa de 910,0 m/s. Qual é a velocidade (a) do invólucro e (b) da cápsula de carga depois de separados? Suponha que todas as velocidades são ao longo da mesma linha reta. Determine a energia cinética total das duas partes (c) antes e (d) depois de separadas. (e) Explique a diferença.

82  *Desabamento de um edifício.* Na seção reta de um edifício que aparece na Fig. 9-71a, a infraestrutura de um andar qualquer,  $K$ , deve ser capaz de sustentar o peso  $P$  de todos os andares que estão acima. Normalmente, a infraestrutura é projetada com um fator de segurança  $s$  e pode sustentar uma força para baixo  $sP > P$ . Se, porém, as colunas de sustentação entre  $K$  e  $L$  cederem bruscamente e permitirem que os andares mais altos caiam em queda livre sobre o andar  $K$  (Fig. 9-71b), a força da colisão pode exceder  $sP$  e fazer com que, logo depois, o andar  $K$  caia sobre o andar  $J$ , que cai sobre o andar  $I$ , e assim por diante, até o andar térreo. Suponha que a distância entre os andares é  $d = 4,0$  m e que todos têm a mesma massa. Suponha também que, quando os andares que estão acima do andar  $K$  caem sobre o andar  $K$  em queda livre, a colisão leva 1,5 ms. Nessas condições simplificadas, que valor deve ter o coeficiente de segurança  $s$  para que o edifício não desabe?



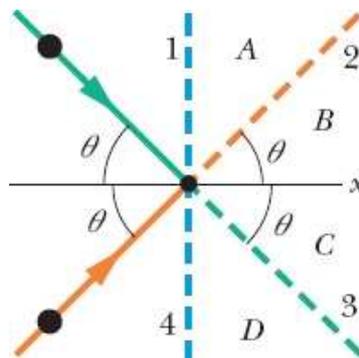
**Figura 9-71** Problema 82.

**83** “Relativamente” é uma palavra importante. Na Fig. 9-72, o bloco  $E$ , de massa  $m_E = 1,00$  kg, e o bloco  $D$ , de massa  $m_D = 0,500$  kg, são mantidos no lugar com uma mola comprimida entre os dois blocos. Quando os blocos são liberados, a mola os impulsiona e os blocos passam a deslizar em um piso sem atrito. (A mola tem massa desprezível e cai no piso depois de impulsionar os blocos.) (a) Se a mola imprime ao bloco  $E$  uma velocidade de  $1,20$  m/s *relativamente* ao piso, que distância o bloco  $D$  percorre em  $0,800$ s? (b) Se, em vez disso, a mola imprime ao bloco  $E$  uma velocidade de  $1,20$  m/s *relativamente* ao bloco  $D$ , que distância o bloco  $D$  percorre em  $0,800$  s?



**Figura 9-72** Problema 83.

**84** A Fig. 9-73 mostra uma vista superior de duas partículas que deslizam com velocidade constante em uma superfície sem atrito. As partículas têm a mesma massa e a mesma velocidade inicial  $v = 4,00$  m/s e colidem no ponto em que as trajetórias se interceptam. O eixo  $x$  coincide com a bissetriz do ângulo entre as trajetórias incidentes e  $\theta = 40,0^\circ$ . A região à direita da colisão está dividida em quatro setores ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ) pelo eixo  $x$  e por quatro retas tracejadas (1, 2, 3 e 4). Em que setor ou ao longo de que reta as partículas viajam se a colisão for (a) perfeitamente inelástica, (b) elástica e (c) inelástica? Quais são as velocidades finais das partículas se a colisão for (d) perfeitamente inelástica e (e) elástica?



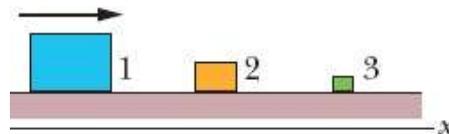
**Figura 9-73** Problema 84.

**85**  } *Redutor de velocidade.* Na Fig. 9-74, o bloco 1, de massa  $m_1$ , desliza ao longo de um eixo  $x$  em um piso sem atrito, com uma velocidade de 4,00 m/s, até sofrer uma colisão elástica unidimensional com o bloco 2, de massa  $m_2 = 2,00m_1$ , inicialmente em repouso. Em seguida, o bloco 2 sofre uma colisão elástica unidimensional com o bloco 3, de massa  $m_3 = 2,00m_2$ , inicialmente em repouso. (a) Qual é a velocidade final do bloco 3? (b) A velocidade, (c) a energia cinética e (d) o momento do bloco 3 são maiores, menores ou iguais aos valores iniciais do bloco 1?



**Figura 9-74** Problema 85.

**86**  } *Amplificador de velocidade.* Na Fig. 9-75, o bloco 1, de massa  $m_1$ , desliza ao longo de um eixo  $x$  em um piso sem atrito, com uma velocidade  $v_{1i} = 4,00$  m/s, até sofrer uma colisão elástica unidimensional com o bloco 2, de massa  $m_2 = 0,500m_1$ , inicialmente em repouso. Em seguida, o bloco 2 sofre uma colisão elástica unidimensional com o bloco 3, de massa  $m_3 = 0,500m_2$ , inicialmente em repouso. (a) Qual é a velocidade do bloco 3 após a colisão? (b) A velocidade, (c) a energia cinética e (d) o momento do bloco 3 são maiores, menores ou iguais aos valores iniciais do bloco 1?



**Figura 9-75** Problema 86.

**87** Uma bola com uma massa de 150 g se choca com uma parede a uma velocidade de 5,2 m/s e ricocheteia com apenas 50% da energia cinética inicial. (a) Qual é a velocidade escalar da bola imediatamente após o choque? (b) Qual é o módulo do impulso da bola sobre a parede? (c) Se a bola permanece em contato com a parede por 7,6 ms, qual é o módulo da força média que a parede exerce sobre a bola durante esse intervalo de tempo?

**88** Uma espaçonave é separada em duas partes pela detonação dos rebites explosivos que as mantêm unidas. As massas das partes são 1200 kg e 1800 kg; o módulo do impulso que a explosão dos rebites exerce sobre cada parte é 300 N·s. Com que velocidade relativa as duas partes se separam?

**89** Um carro de 1400 kg está se movendo inicialmente para o norte a 5,3 m/s, no sentido positivo de um eixo  $y$ . Depois de fazer uma curva de  $90^\circ$  para a direita em 4,6 s, o motorista, desatento, bate em uma árvore, que para o carro em 350 ms. Na notação dos vetores unitários, qual é o impulso sobre o carro (a) devido à curva e (b) devido à colisão? Qual é o módulo da força média que age sobre o carro (c) durante a curva e (d) durante a colisão? (e) Qual é a direção da força média que age sobre o carro durante a curva?

**90** Um certo núcleo radioativo (pai) se transforma em um núcleo diferente (filho) emitindo um elétron e

um neutrino. O núcleo pai estava em repouso na origem de um sistema de coordenadas  $xy$ . O elétron se afasta da origem com um momento linear  $(-1,2 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s})\hat{i}$ ; o neutrino se afasta da origem com um momento linear  $(-6,4 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s})\hat{j}$ . (a) Qual é o módulo e (b) qual a orientação do momento linear do núcleo filho? (c) Se o núcleo filho tem uma massa de  $5,8 \times 10^{-26} \text{ kg}$ , qual é sua energia cinética?

**91** Um homem de 75 kg, que estava em um carrinho de golfe de 39 kg que se movia a uma velocidade de 2,3 m/s, pulou do carrinho com velocidade horizontal nula em relação ao chão. Qual foi a variação da velocidade do carrinho, incluindo o sinal?

**92** Dois blocos de massas 1,0 kg e 3,0 kg estão ligados por uma mola e repousam em uma superfície sem atrito. Os blocos começam a se mover um em direção ao outro de modo que o bloco de 1,0 kg viaja inicialmente a 1,7 m/s em direção ao centro de massa, que permanece em repouso. Qual é a velocidade inicial do outro bloco?

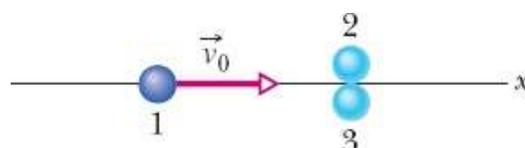
**93** Uma locomotiva com a massa de  $3,18 \times 10^4 \text{ kg}$  colide com um vagão inicialmente em repouso. A locomotiva e o vagão permanecem juntos após a colisão, e 27% da energia cinética inicial é transferida para energia térmica, sons, vibrações etc. Determine a massa do vagão.

**94** Um velho Chrysler com 2400 kg de massa, que viaja em uma estrada retilínea a 80 km/h, é seguido por um Ford com 1600 kg de massa a 60 km/h. Qual é a velocidade do centro de massa dos dois carros?

**95** No arranjo da Fig. 9-21, a bola de sinuca 1, que se move a 2,2 m/s, sofre uma colisão oblíqua com a bola de sinuca 2, que está inicialmente em repouso. Após a colisão, a bola 2 se move com uma velocidade escalar de 1,1 m/s e com um ângulo  $\theta_2 = 60^\circ$ . (a) Qual é o módulo e (b) qual a orientação da velocidade da bola 1 após a colisão? (c) Os dados fornecidos mostram que a colisão é elástica ou inelástica?

**96** Um foguete está se afastando do sistema solar a uma velocidade de  $6,0 \times 10^3 \text{ m/s}$ . O motor do foguete é acionado e ejeta produtos de combustão a uma velocidade de  $3,0 \times 10^3 \text{ m/s}$  em relação ao foguete. A massa do foguete nesse momento é  $4,0 \times 10^4 \text{ kg}$  e a aceleração é  $2,0 \text{ m/s}^2$ . (a) Qual é o empuxo do motor do foguete? (b) A que taxa, em quilogramas por segundo, os produtos de combustão estão sendo ejetados?

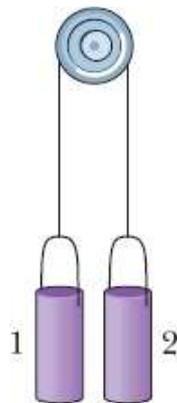
**97** As três bolas vistas de cima na Fig. 9-76 são iguais. As bolas 2 e 3 estão se tocando e estão alinhadas perpendicularmente à trajetória da bola 1. A velocidade da bola 1 tem módulo  $v_0 = 10 \text{ m/s}$  e está dirigida para o ponto de contato das bolas 2 e 3. Após a colisão, quais são (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade da bola 2, (c) o módulo e (d) a orientação da velocidade da bola 3 e (e) o módulo e (f) a orientação da velocidade da bola 1? (*Sugestão:* Na ausência de atrito, cada impulso está dirigido ao longo da reta que liga os centros das bolas envolvidas na colisão e é perpendicular às superfícies que se tocam.)



**Figura 9-76** Problema 97.

**98** Uma bola de 0,15 kg se choca com uma parede a uma velocidade de  $(5,00 \text{ m/s})\hat{i} + (6,50 \text{ m/s})\hat{j} + (4,00 \text{ m/s})\hat{k}$  ricocheteia na parede e passa a ter uma velocidade de  $(2,00 \text{ m/s})\hat{i} + (3,50 \text{ m/s})\hat{j} + (-3,20 \text{ m/s})\hat{k}$ . Determine (a) a variação do momento da bola, (b) o impulso exercido pela parede sobre a bola e (c) o impulso exercido pela bola sobre a parede.

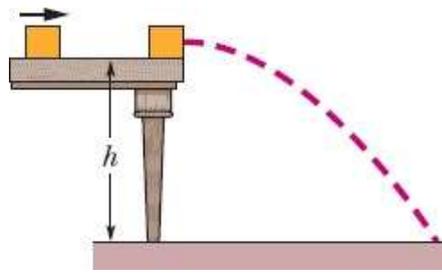
**99** Na Fig. 9-77, dois recipientes iguais com determinada quantidade de açúcar estão ligados por uma corda que passa por uma polia sem atrito. A corda e a polia têm massa desprezível, a massa de cada recipiente é de 500 g (incluindo o açúcar), os centros dos recipientes estão separados por uma distância de 50 mm e os recipientes são mantidos à mesma altura. Qual é a distância horizontal entre o centro de massa do recipiente 1 e o centro de massa do sistema de dois recipientes (a) inicialmente e (b) após 20 g de açúcar serem transferidos do recipiente 1 para o recipiente 2? Após a transferência e após os recipientes serem liberados a partir do repouso, (c) em que sentido e (d) com que aceleração o centro de massa se move?



**Figura 9-77** Problema 99.

**100** Em um jogo de sinuca, a bola branca se choca com outra bola inicialmente em repouso. Após o choque, a bola branca se move com uma velocidade escalar de 3,50 m/s ao longo de uma reta que faz um ângulo de  $22,0^\circ$  com a direção do movimento da bola branca antes do choque, e a segunda bola tem uma velocidade escalar de 2,00 m/s. Determine (a) o ângulo entre a direção do movimento da segunda bola e a direção do movimento da bola branca antes do choque e (b) a velocidade escalar da bola branca antes do choque. (c) A energia cinética (dos centros de massa, não considere as rotações) é conservada?

**101** Na Fig. 9-78, uma caixa de sapatos de corrida de 3,2 kg desliza em uma mesa horizontal sem atrito e colide com uma caixa de sapatilhas de balé de 2,0 kg inicialmente em repouso na extremidade da mesa, a uma altura  $h = 0,40 \text{ m}$  do chão. A velocidade da caixa de 3,2 kg é 3,0 m/s imediatamente antes da colisão. Se as caixas grudam uma na outra por estarem fechadas com fita adesiva, qual é a energia cinética do conjunto imediatamente antes de atingir o chão?



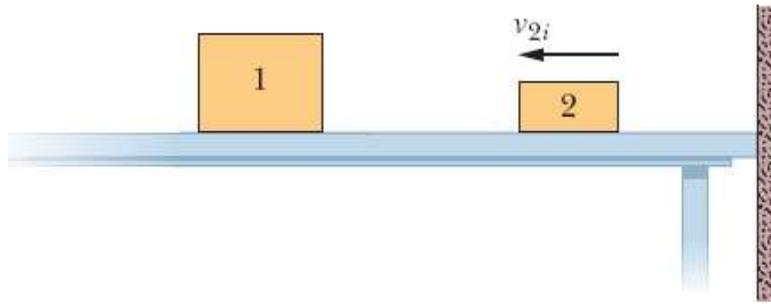
**Figura 9-78** Problema 101.

**102** Na Fig. 9-79, um homem de 80 kg está em uma escada pendurada em um balão que possui uma massa total de 320 kg (incluindo o passageiro na cesta). O balão está inicialmente em repouso em relação ao solo. Se o homem na escada começa a subir a uma velocidade de 2,5 m/s em relação à escada, (a) em que sentido e (b) com que velocidade o balão se move? (c) Qual é a velocidade do balão quando o homem completa a subida e entra na cesta?



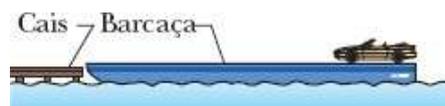
**Figura 9-79** Problema 102.

**103** Na Fig. 9-80, o bloco 1, de massa  $m_1 = 6,6$  kg, está em repouso em uma mesa sem atrito que está encostada em uma parede. O bloco 2, de massa  $m_2$ , está posicionado entre o bloco 1 e a parede e desliza para a esquerda em direção ao bloco 1 com velocidade constante  $v_{2i}$ . Determine o valor de  $m_2$  para o qual os dois blocos se movem com a mesma velocidade após o bloco 2 colidir uma vez com o bloco 1 e uma vez com a parede. Suponha que as colisões são elásticas (a colisão com a parede não muda a velocidade escalar do bloco 2).



**Figura 9-80** Problema 103.

**104** O roteiro de um filme de ação requer que um pequeno carro de corrida (com uma massa de 1500 kg e um comprimento de 3,0 m) acelere ao longo de uma barcaça (com uma massa de 4000 kg e um comprimento de 14 m), de uma extremidade a outra da embarcação, e salte para um cais um pouco mais abaixo. Você é o consultor técnico do filme. No momento em que o carro entra em movimento, o barco está encostado no cais, como na Fig. 9-81; o barco pode deslizar na água sem resistência significativa; a distribuição de massa do carro e da barcaça pode ser considerada homogênea. Calcule qual será a distância entre o barco e o cais no instante do salto.



**Figura 9-81** Problema 104.

**105** Um objeto de 3,0 kg, que se move com uma velocidade escalar de 8,0 m/s no sentido positivo de um eixo  $x$ , sofre uma colisão elástica unidimensional com um objeto de massa  $M$  inicialmente em repouso. Após a colisão, o objeto de massa  $M$  tem uma velocidade escalar de 6,0 m/s no sentido positivo do eixo  $x$ . Qual é o valor da massa  $M$ ?

**106** Um vagão aberto de 2140 kg, que pode se mover com atrito desprezível, está parado ao lado de uma plataforma. Um lutador de sumô de 242 kg corre a 5,3 m/s pela plataforma (paralelamente aos trilhos) e pula no vagão. Qual é a velocidade do vagão se o lutador (a) para imediatamente, (b) continua a correr a 5,3 m/s em relação ao vagão, no mesmo sentido, e (c) faz meia-volta e passa a correr a 5,3 m/s em relação ao vagão no sentido oposto?

**107** Um foguete de 6100 kg está preparado para ser lançado verticalmente a partir do solo. Se a velocidade de exaustão é 1200 m/s, qual é a massa de gás que deve ser ejetada por segundo para que o empuxo (a) seja igual ao módulo da força gravitacional que age sobre o foguete e (b) proporcione ao foguete uma aceleração inicial, para cima, de 21 m/s<sup>2</sup>?

**108** Um módulo de 500,0 kg está acoplado a uma nave de transporte de 400,0 kg que se move a 1000 m/s em relação a uma nave-mãe em repouso. Uma pequena explosão faz o módulo se mover para trás com uma velocidade de 100,0 m/s em relação à nova velocidade da nave de transporte. Qual é o aumento relativo da energia cinética do módulo e da nave de transporte em consequência da explosão, do ponto de

vista dos tripulantes da nave-mãe?

**109** (a) A que distância do centro da Terra se encontra o centro de massa do sistema Terra-Lua? (O Apêndice C fornece as massas da Terra e da Lua e a distância entre os dois astros.) (b) A que porcentagem do raio da Terra corresponde essa distância?

**110** Uma bola de 140 g se choca perpendicularmente com uma parede a 7,8 m/s e ricocheteia no sentido oposto com a mesma velocidade. O choque dura 3,80 ms. (a) Qual é o impulso e (b) qual a força média que a bola exerce sobre a parede?

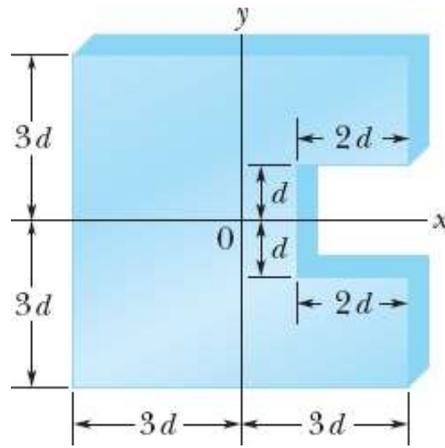
**111** Um trenó foguete com massa de 2900 kg se move a 250 m/s sobre dois trilhos. Em um dado instante, um tubo a bordo do trenó é mergulhado em um canal situado entre os trilhos e passa a transferir água para o tanque do trenó, inicialmente vazio. Aplicando a lei de conservação do momento linear, determine a velocidade do trenó depois que 920 kg de água são transferidos do canal para o trenó. Ignore o atrito do tubo com a água do canal.

**112** Uma metralhadora de chumbinho dispara dez balas de 2,0 g por segundo com uma velocidade escalar de 500 m/s. As balas são paradas por uma parede rígida. Determine (a) o módulo do momento de cada bala, (b) a energia cinética de cada bala e (c) o módulo da força média exercida pelas balas sobre a parede. (d) Se cada bala permanece em contato com a parede por 0,60 ms, qual é o módulo da força média exercida por uma bala sobre a parede? (e) Por que a força média é tão diferente da força média calculada em (c)?

**113** Um vagão de estrada de ferro se move sob uma esteira transportadora de grãos com uma velocidade escalar de 3,20 m/s. Os grãos caem no vagão a uma taxa de 540 kg/min. Qual é o módulo da força necessária para manter o vagão em movimento com velocidade constante se o atrito é desprezível?

**114** A Fig. 9-82 mostra uma placa quadrada homogênea de lado  $6d = 6,0$  m da qual um pedaço quadrado de lado  $2d$  foi retirado. (a) Qual é a coordenada  $x$  e (b) qual a coordenada  $y$  do centro de massa da parte restante?

**115** No instante  $t = 0$ , uma força  $\vec{F}_1 = (-4,00\hat{i} + 5,00\hat{j})$  N age sobre uma partícula de massa  $2,00 \times 10^{-3}$  kg, inicialmente em repouso, e uma força  $\vec{F}_2 = (2,00\hat{i} - 4,00\hat{j})$  N age sobre uma partícula de massa  $4,00 \times 10^{-3}$  kg, também inicialmente em repouso. Do instante  $t = 0$  ao instante  $t = 2,00$  ms, qual é (a) o módulo e (b) qual é o ângulo (em relação ao semieixo  $x$  positivo) do deslocamento do centro de massa do sistema das duas partículas? (c) Qual é a energia cinética do centro de massa em  $t = 2,00$  ms?



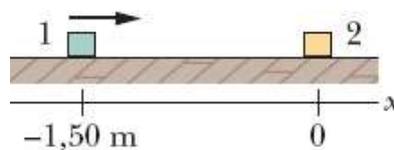
**Figura 9-82** Problema 114.

**116** Duas partículas,  $P$  e  $Q$ , são liberadas a partir do repouso a  $1,0$  m de distância uma da outra. A partícula  $P$  tem massa de  $0,10$  kg e a partícula  $Q$  tem massa de  $0,30$  kg.  $P$  e  $Q$  se atraem com uma força constante de  $1,0 \times 10^{-2}$  N. Nenhuma força externa age sobre o sistema. (a) Qual é a velocidade do centro de massa de  $P$  e  $Q$  quando a distância entre as partículas é  $0,50$  m? (b) A que distância da posição inicial de  $P$  as partículas colidem?

**117** Uma colisão ocorre entre um corpo de  $2,00$  kg que se move com uma velocidade  $\vec{v}_1 = (-4,00 \text{ m/s})\hat{i} + (-5,00 \text{ m/s})\hat{j}$  e um corpo de  $4,00$  kg que se move com uma velocidade  $\vec{v}_2 = (6,00 \text{ m/s})\hat{i} + (-2,00 \text{ m/s})\hat{j}$ . Os dois corpos permanecem unidos após a colisão. Determine a velocidade comum dos dois corpos após a colisão (a) na notação dos vetores unitários e como (b) um módulo e (c) um ângulo.

**118** No arranjo das duas esferas da Fig. 9-20, suponha que a esfera 1 tem massa de  $50$  g e uma altura inicial  $h_1 = 9,0$  cm e que a esfera 2 tem massa de  $85$  g. Depois que a esfera 1 é liberada e colide elasticamente com a esfera 2, que altura é alcançada (a) pela esfera 1 e (b) pela esfera 2? Após a colisão (elástica) seguinte, que altura é alcançada (c) pela esfera 1 e (d) pela esfera 2? (*Sugestão:* Não use valores arredondados.)

**119** Na Fig. 9-83, o bloco 1 desliza ao longo de um eixo  $x$  em um piso sem atrito com uma velocidade de  $0,75$  m/s até sofrer uma colisão elástica com o bloco 2, inicialmente em repouso. A tabela a seguir mostra a massa e o comprimento dos blocos (homogêneos) e a posição do centro dos blocos no instante  $t = 0$ . Determine a posição do centro de massa do sistema de dois blocos (a) em  $t = 0$ , (b) no instante do choque e (c) em  $t = 4,0$  s.



**Figura 9-83** Problema 119.

Bloco	Massa (kg)	Comprimento (cm)	Centro em $t = 0$
-------	------------	------------------	-------------------

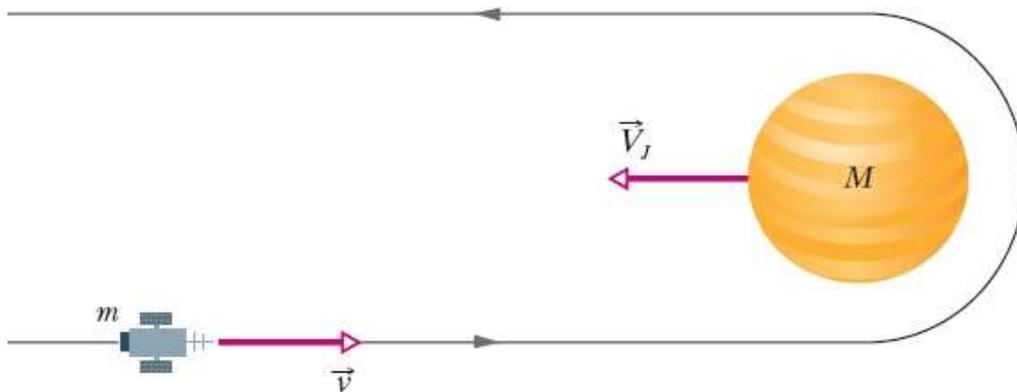
1	0,25	5,0	$x = -1,50 \text{ m}$
2	0,50	6,0	$x = 0$

**120** Um corpo está se movendo com uma velocidade escalar de  $2,0 \text{ m/s}$  no sentido positivo de um eixo  $x$ ; nenhuma força age sobre o corpo. Uma explosão interna separa o corpo em duas partes, ambas de  $4,0 \text{ kg}$ , e aumenta a energia cinética total em  $16 \text{ J}$ . A parte da frente continua a se mover na mesma direção e sentido que o corpo original. Qual é a velocidade escalar (a) da parte de trás e (b) da parte da frente do corpo?

**121** Um elétron sofre uma colisão elástica unidimensional com um átomo de hidrogênio inicialmente em repouso. Que porcentagem da energia cinética inicial do elétron é transferida para a energia cinética do átomo de hidrogênio? (A massa do átomo de hidrogênio é  $1840$  vezes maior que a massa do elétron.)

**122** Um homem (com  $915 \text{ N}$  de peso) está em pé em um vagão de trem (com  $2415 \text{ N}$  de peso) enquanto este se move a  $18,2 \text{ m/s}$  no sentido positivo de um eixo  $x$ , com atrito desprezível. O homem começa a correr no sentido negativo do eixo  $x$  com uma velocidade escalar de  $4,00 \text{ m/s}$  em relação ao vagão. Qual é o aumento da velocidade do vagão?

**123** Uma sonda espacial não tripulada (de massa  $m$  e velocidade  $v$  em relação ao Sol) se aproxima do planeta Júpiter (de massa  $M$  e velocidade  $V_J$  em relação ao Sol), como mostra a Fig. 9-84. A sonda contorna o planeta e passa a se mover no sentido oposto. Qual é a velocidade da sonda, em relação ao Sol, depois do encontro com Júpiter, que pode ser analisado como se fosse uma colisão? Suponha que  $v = 10,5 \text{ km/s}$  e  $V_J = 13,0 \text{ km/s}$  (a velocidade orbital de Júpiter). Leve em conta o fato de que a massa de Júpiter é muito maior que a massa da sonda ( $M \gg m$ ).



**Figura 9-84** Problema 123.

**124** Uma bola com uma massa de  $0,550 \text{ kg}$  cai verticalmente em um piso de concreto, chocando-se com o piso a uma velocidade de  $12,0 \text{ m/s}$  e ricocheteando verticalmente com uma velocidade de  $3,00 \text{ m/s}$ . Use um eixo  $y$  vertical, com o sentido positivo para cima. Na notação dos vetores unitários, determine (a) a variação do momento da bola, (b) o impulso sobre a bola e (c) o impulso sobre o piso.

**125** Um núcleo atômico em repouso na origem de um sistema de coordenadas  $xy$  se desintegra em três

partículas. A partícula 1, com massa de  $16,7 \times 10^{-27}$  kg, se afasta da origem com uma velocidade  $(6,00 \times 10^6 \text{ m/s})\hat{i}$ ; a partícula 2, com uma massa de  $8,35 \times 10^{-27}$  kg, se afasta da origem com uma velocidade  $(-8,00 \times 10^6 \text{ m/s})\hat{j}$ . (a) Na notação dos vetores unitários, qual é o momento linear da terceira partícula, cuja massa é  $11,7 \times 10^{-27}$  kg? (b) Qual é a energia cinética produzida pela desintegração?

**126** A partícula 1, com massa de 200 g, que se move a uma velocidade de 3,00 m/s, sofre uma colisão unidimensional com a partícula 2, com massa de 400 g, que estava inicialmente em repouso. Qual é o módulo do impulso sobre a partícula 1 se a colisão for (a) elástica e (b) perfeitamente inelástica?

**127** Durante uma missão lunar, é necessário aumentar de 2,2 m/s a velocidade de uma espaçonave quando ela está a uma velocidade de 400 m/s em relação à Lua. A velocidade dos gases ejetados pelo motor do foguete é 1000 m/s em relação à espaçonave. Que fração na massa inicial da espaçonave deve ser queimada e ejetada para produzir essa variação de velocidade?

**128** Um taco atinge uma bola de sinuca, inicialmente em repouso, com uma força média de 32 N durante um intervalo de 14 ms. Se a massa da bola é 0,20 kg, qual é a velocidade da bola imediatamente após o choque?

---

\* Nesta passagem, usamos a identidade  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ , o que facilita a solução do sistema de equações constituído pelas Eqs. 9-65 e 9-66.

## CAPÍTULO 10

# Rotação

## 10-1 AS VARIÁVEIS DA ROTAÇÃO

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

- 10.01** Saber que, se todas as partículas de um corpo giram da mesma forma em torno de um eixo, o corpo é um corpo rígido. (Este capítulo trata do movimento de corpos rígidos.)
- 10.02** Saber que a posição angular de um corpo rígido em rotação é o ângulo que uma reta interna de referência faz com uma reta externa fixa.
- 10.03** Conhecer a relação entre o deslocamento angular e as posições angulares inicial e final.
- 10.04** Conhecer a relação entre a velocidade angular média, o deslocamento angular e o intervalo de tempo durante o qual ocorreu o deslocamento.
- 10.05** Conhecer a relação entre a aceleração angular média, a variação de velocidade e o intervalo de tempo durante o qual ocorreu a variação de velocidade.
- 10.06** Saber que o movimento anti-horário é considerado positivo e o movimento horário é considerado negativo.
- 10.07** Dada a posição angular em função do tempo, calcular a velocidade angular instantânea em um dado instante e a velocidade angular média em um dado intervalo.
- 10.08** Dada uma curva da posição angular em função do tempo, determinar a velocidade angular instantânea em um dado instante e a velocidade angular média em um dado intervalo.
- 10.09** Saber que a velocidade angular escalar é o módulo da velocidade escalar instantânea.
- 10.10** Dada a velocidade em função do tempo, determinar a aceleração angular instantânea em um dado instante e a aceleração angular média em um dado intervalo.
- 10.11** Dada uma curva da velocidade angular em função do tempo, determinar a aceleração angular instantânea em um dado instante e a aceleração angular média em um dado intervalo.
- 10.12** Calcular a variação de velocidade angular de um corpo integrando a função aceleração angular em relação ao tempo.
- 10.13** Calcular a variação de posição angular de um corpo integrando a função velocidade angular em relação ao tempo.

### Ideias-Chave

• Para descrever a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo, conhecido como eixo de rotação, imaginamos uma reta de referência, fixa em relação ao corpo e perpendicular ao eixo de rotação. Medimos a posição angular  $\theta$  dessa reta em relação a uma direção fixa no espaço, também perpendicular ao eixo de rotação. Se o ângulo for medido em radianos,

$$\theta = \frac{s}{r} \text{ (ângulo em radianos),}$$

em que  $s$  é o comprimento de um arco de raio  $r$  e ângulo  $\theta$ .

- A relação entre o número de revoluções, o ângulo em graus e o ângulo em radianos é a seguinte:

$$1 \text{ rev} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad.}$$

- Se a posição angular de um corpo que gira em torno de um eixo de rotação muda de  $\theta_1$  para  $\theta_2$ , o deslocamento angular do corpo é dado por

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1,$$

em que  $\Delta\theta$  é positivo para rotações no sentido anti-horário e negativo para rotações no sentido horário.

- Se um corpo sofre um deslocamento angular  $\Delta\theta$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a velocidade angular média  $\omega_{\text{méd}}$  do corpo é dada por

$$\omega_{\text{méd}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

A velocidade angular (instantânea)  $\omega$  do corpo é dada por

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

Tanto  $\omega_{\text{méd}}$  como  $\omega$  são vetores, cuja orientação é dada pela regra da mão direita. Esses vetores apontam no sentido positivo de um eixo de referência, se a rotação for no sentido anti-horário, e no sentido negativo, se a rotação for no sentido horário. O módulo da velocidade angular de um corpo é a velocidade angular escalar.

- Se a velocidade angular de um corpo varia de  $\omega_1$  para  $\omega_2$  em um intervalo de tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ , a aceleração angular média  $\alpha_{\text{méd}}$  do corpo é dada por

$$\alpha_{\text{méd}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

A aceleração angular (instantânea)  $\alpha$  do corpo é dada por

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}.$$

Tanto  $\alpha_{\text{méd}}$  como  $\alpha$  são vetores.

---

## O que É Física?

Como vimos em capítulos anteriores, um dos objetivos principais da física é estudar movimentos. Até agora, examinamos apenas os movimentos de **translação**, nos quais objetos se movem ao longo de linhas retas ou curvas, como na Fig. 10-1a. Vamos agora considerar os movimentos de **rotação**, nos quais os objetos giram em torno de um eixo, como na Fig. 10-1b.

Observamos rotações em quase todas as máquinas; produzimos rotações toda vez que abrimos uma tampa de rosca; pagamos para experimentar rotações quando vamos a um parque de diversões. A rotação é o segredo de jogadas de sucesso em muitos esportes, como dar uma longa tacada no golfe (a bola precisa estar girando para se manter no ar durante mais tempo) ou chutar com efeito no futebol (a bola

precisa girar para que o ar a empurre para a esquerda ou para a direita). A rotação também é importante em questões mais sérias, como a fadiga das peças metálicas dos aviões.

Começamos nossa discussão da rotação definindo as variáveis do movimento, como fizemos para a translação no Capítulo 2. Como vamos ver, as variáveis da rotação são análogas às do movimento unidimensional e, como no Capítulo 2, uma situação especial importante é aquela na qual a aceleração (neste caso, a aceleração angular) é constante. Vamos ver também que é possível escrever uma equação equivalente à segunda lei de Newton para o movimento de rotação, usando uma grandeza chamada *torque* no lugar da força. O teorema do trabalho e energia cinética também pode ser aplicado ao movimento de rotação, com a massa substituída por uma grandeza chamada *momento de inércia*. Na verdade, grande parte do que discutimos até agora pode ser aplicado ao movimento de rotação com, talvez, pequenas modificações.

**Atenção:** Apesar de as equações que descrevem o movimento de rotação serem muito parecidas com as que foram apresentadas em capítulos anteriores, muitos estudantes consideram este capítulo e o capítulo a seguir particularmente difíceis. Os professores encontraram várias razões para isso, mas as duas razões principais parecem ser as seguintes: (1) São apresentados muitos símbolos novos (letras gregas) cujo significado nem sempre é bem compreendido. (2) Embora os estudantes estejam muito familiarizados com movimentos lineares, como atravessar uma rua, eles não têm a mesma familiaridade com movimentos de rotação (talvez seja por isso que os parques de diversões são tão populares). Se você tiver a impressão de que um dever de casa envolvendo rotação está escrito em uma língua estrangeira, experimente traduzi-lo para a linguagem dos movimentos lineares unidimensionais do Capítulo 2. Por exemplo, se você precisa ou quer calcular uma distância *angular*, apague temporariamente a palavra *angular* e veja se consegue resolver o problema usando as equações e ideias do Capítulo 2.



(a)

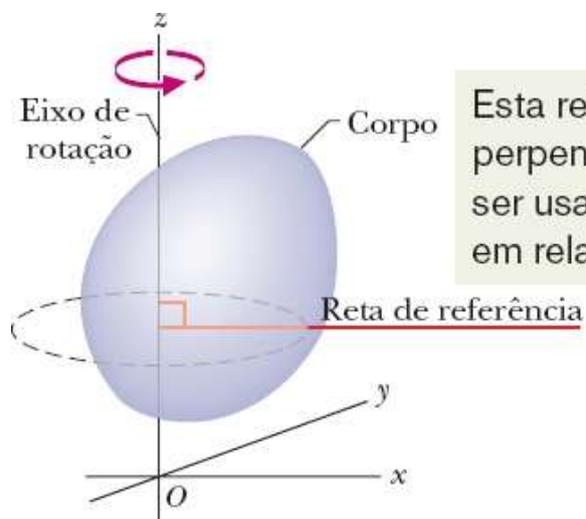


(b)

Mike Segar/Reuters/Landov LLC

Elsa/Getty Images, Inc.

**Figura 10-1** A patinadora Sasha Cohen em um movimento (a) de translação pura em uma direção fixa e (b) de rotação pura em torno de um eixo vertical.



Esta reta, que gira com o corpo e é perpendicular ao eixo de rotação, pode ser usada para medir a rotação do corpo em relação a uma direção fixa.

**Figura 10-2** Um corpo rígido de forma arbitrária em rotação pura em torno do eixo z de um sistema de coordenadas. A posição da *reta de referência* em relação ao corpo rígido é arbitrária, mas a reta é perpendicular ao eixo de rotação e mantém sempre a mesma posição em relação ao corpo, girando com ele.

## As Variáveis da Rotação

Neste capítulo, vamos estudar a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo. Um **corpo rígido** é um corpo que gira com todas as partes ligadas entre si e sem mudar de forma. Um **eixo fixo** é um eixo que não muda de posição. Isso significa que não examinaremos um objeto como o Sol, pois as partes do Sol (uma bola de gás) não estão ligadas entre si; também não examinaremos um objeto como uma bola de boliche rolando em uma pista, já que a bola gira em torno de um eixo que muda constantemente de posição (o movimento da bola é uma mistura de rotação e translação).

A Fig. 10-2 mostra um corpo rígido de forma arbitrária girando em torno de um eixo fixo, chamado **eixo de rotação**. Em uma rotação pura (*movimento angular*), todos os pontos do corpo se movem ao longo de circunferências cujo centro está no eixo de rotação, e todos os pontos descrevem o mesmo ângulo no mesmo intervalo de tempo. Na translação pura (*movimento linear*), todos os pontos se movem ao longo de linhas retas, e todos os pontos percorrem a mesma *distância* no mesmo intervalo de tempo.

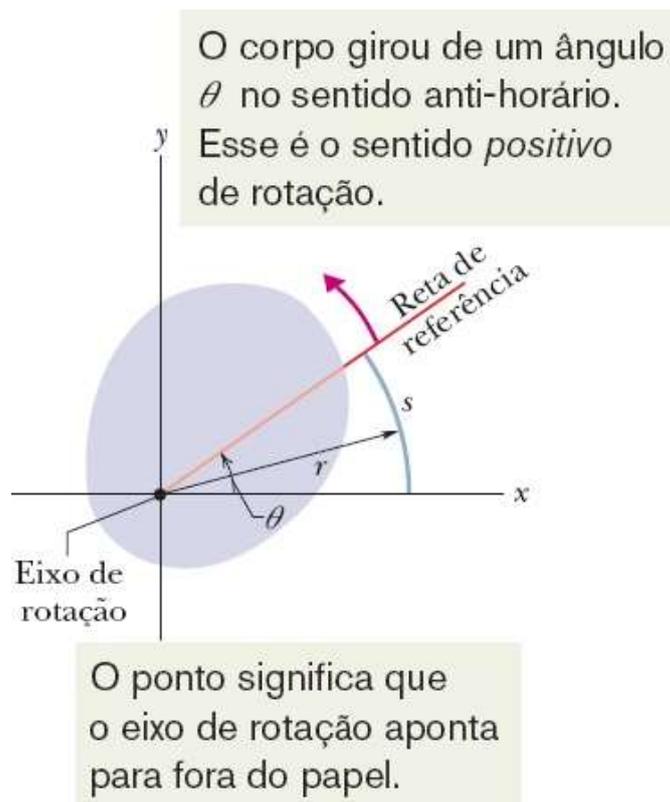
Vamos discutir agora (um de cada vez) os equivalentes angulares das grandezas lineares posição, deslocamento, velocidade e aceleração.

### Posição Angular

A Fig. 10-2 mostra uma *reta de referência*, fixa ao corpo, perpendicular ao eixo de rotação e girando com o corpo. A **posição angular** da reta é o ângulo que a reta faz com uma direção fixa, que tomamos como a **posição angular zero**. Na Fig. 10-3, a posição angular  $\theta$  é medida em relação ao semieixo  $x$  positivo. De acordo com a geometria,  $\theta$  é dado por

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\text{ângulo em radianos}). \quad (10-1)$$

Aqui,  $s$  é comprimento de um arco de circunferência que vai do eixo  $x$  (posição angular zero) até a reta de referência, e  $r$  é o raio da circunferência.



**Figura 10-3** Seção transversal do corpo rígido em rotação da Fig. 10-2, visto de cima. O plano da seção transversal é perpendicular ao eixo de rotação, que agora está perpendicular ao plano do papel, saindo do papel. Nessa posição do corpo, a reta de referência faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$ .

Um ângulo definido dessa forma é medido em **radianos** (rad) e não em revoluções (rev) ou em graus. Como é a razão entre dois comprimentos, o radiano é um número puro, ou seja, não tem dimensão. Como o comprimento de uma circunferência de raio  $r$  é  $2\pi r$ , uma circunferência completa equivale a  $2\pi$  radianos:

$$1 \text{ rev} = 360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}, \quad (10-2)$$

é, portanto,  $1 \text{ rad} = 57,3^\circ = 0,159 \text{ rev}.$  (10-3)

Não reajustamos  $\theta$  para zero a cada volta completa da reta de referência. Se a reta de referência completa duas revoluções a partir da posição angular zero, a posição angular da reta é  $\theta = 4\pi$  rad.

No caso da translação pura de uma partícula ao longo de um eixo  $x$ , o movimento da partícula é totalmente descrito por uma função  $x(t)$ , a posição da partícula em função do tempo. Analogamente, no caso da rotação pura de um corpo rígido, o movimento da partícula é totalmente descrito por uma função  $\theta(t)$ , a posição angular da reta de referência do corpo em função do tempo.

### Deslocamento Angular

Se o corpo da Fig. 10-3 gira em torno do eixo de rotação como na Fig. 10-4, com a posição angular da reta de referência variando de  $\theta_1$  para  $\theta_2$ , o corpo sofre um **deslocamento angular**  $\Delta\theta$  dado por

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \quad (10-4)$$

Essa definição de deslocamento angular é válida, não só para o corpo rígido como um todo, mas também para *todas as partículas do corpo*.

**Os Relógios São Negativos.** Se um corpo está em movimento de translação ao longo de um eixo  $x$ , o deslocamento  $\Delta x$  pode ser positivo ou negativo, dependendo de se o movimento ocorre no sentido positivo ou negativo do eixo. Da mesma forma, o deslocamento angular  $\Delta\theta$  de um corpo em rotação pode ser positivo ou negativo, de acordo com a seguinte regra:



Um deslocamento angular no sentido anti-horário é positivo, e um deslocamento angular no sentido horário é negativo.

A frase “os relógios são negativos” pode ajudá-lo a memorizar essa regra (os relógios certamente são negativos quando tocam de manhã cedo).

### ✓ Teste 1

Um disco pode girar em torno de um eixo central como se fosse um carrossel. Quais dos seguintes pares de valores para as posições inicial e final, respectivamente, correspondem a um deslocamento angular negativo: (a)  $-3$  rad,  $+5$  rad, (b)  $-3$  rad,  $-7$  rad, (c)  $7$  rad,  $-3$  rad?

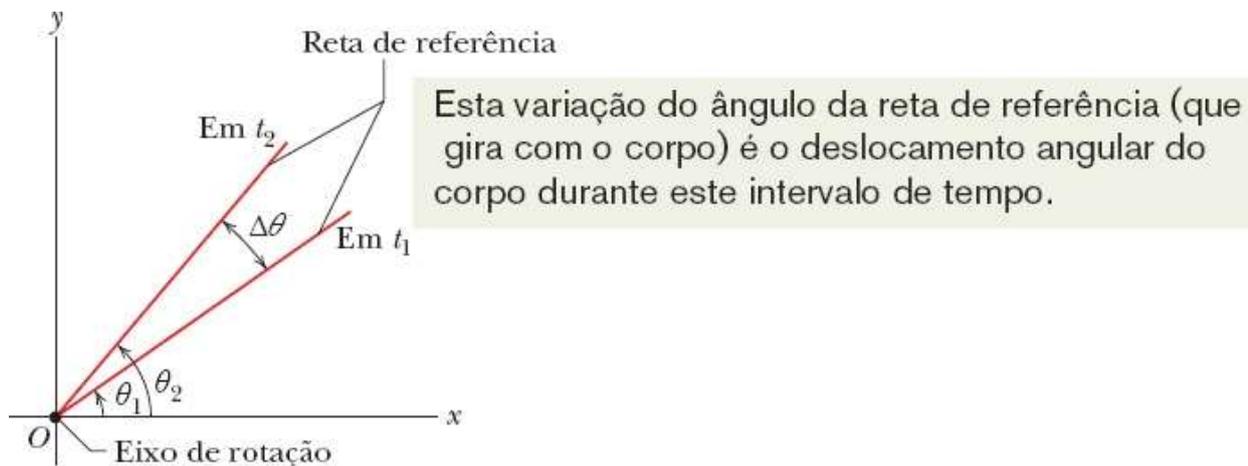
## Velocidade Angular

Suponha que um corpo em rotação está na posição angular  $\theta_1$  no instante  $t_1$  e na posição angular  $\theta_2$  no instante  $t_2$ , como na Fig. 10-4. Definimos a **velocidade angular média** do corpo no intervalo de tempo  $\Delta t$  de  $t_1$  a  $t_2$  como

$$\omega_{\text{méd}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad (10-5)$$

em que  $\Delta\theta$  é o deslocamento angular que acontece durante o intervalo de tempo  $\Delta t$  ( $\omega$  é a letra grega ômega minúscula).

A **velocidade angular (instantânea)**  $\omega$ , na qual estaremos mais interessados, é o limite da razão da Eq. 10-5 quando  $\Delta t$  tende a zero:



**Figura 10-4** A reta de referência do corpo rígido das Figs. 10-2 e 10-3 está na posição angular  $\theta_1$  no instante  $t_1$  e na posição angular  $\theta_2$  no instante  $t_2$ . A grandeza  $\Delta\theta (= \theta_2 - \theta_1)$  é o deslocamento angular que acontece no intervalo  $\Delta t (= t_2 - t_1)$ . O corpo propriamente dito não é mostrado na figura.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \quad (10-6)$$

Como o próprio nome indica, a velocidade angular instantânea é a velocidade angular do corpo em um dado instante  $t$ . Se conhecemos  $\theta(t)$ , podemos calcular a velocidade angular  $\omega$  por derivação.

As Eqs. 10-5 e 10-6 valem não só para o corpo rígido como um todo, mas também para *todas as partículas do corpo*, uma vez que as distâncias relativas são mantidas fixas. As unidades de velocidade angular mais usadas são o radiano por segundo (rad/s) e a revolução por segundo (rev/s). Outra medida de velocidade angular foi usada durante muitos anos pela indústria fonográfica: a música era reproduzida em discos de vinil que giravam a “33 1/3 rpm” ou “45 rpm”, o que significava 33 1/3 rev/min ou 45 rev/min.

Se uma partícula se move em translação ao longo de um eixo  $x$ , a velocidade linear  $v$  da partícula pode ser positiva ou negativa, dependendo de se a partícula está se deslocando no sentido positivo ou negativo do eixo. Analogamente, a velocidade angular  $\omega$  de um corpo rígido em rotação pode ser positiva ou negativa, dependendo de se o corpo está girando no sentido anti-horário (positivo) ou horário (negativo). (“Os relógios são negativos” também funciona neste caso.) O módulo da velocidade angular é chamado de **velocidade angular escalar** e também é representado por  $\omega$ .

### Aceleração Angular

Se a velocidade angular de um corpo em rotação não é constante, o corpo possui uma aceleração angular. Sejam  $\omega_2$  e  $\omega_1$  as velocidades angulares nos instantes  $t_2$  e  $t_1$ , respectivamente. A **aceleração angular média** do corpo em rotação no intervalo de  $t_1$  a  $t_2$  é definida por meio da equação

$$\alpha_{\text{méd}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \quad (10-7)$$

em que  $\Delta\omega$  é a variação da velocidade angular no intervalo  $\Delta t$ .

A **aceleração angular (instantânea)**  $\alpha$ , na qual estaremos mais interessados, é o limite dessa grandeza quando  $\Delta t$  tende a zero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (10-8)$$

Como o próprio nome indica, a aceleração angular instantânea é a aceleração angular do corpo em um dado instante  $t$ . Se conhecemos  $\omega(t)$ , podemos calcular a aceleração angular  $\alpha$  por derivação. As Eqs. 10-7 e 10-8 também são válidas para *todas as partículas do corpo*. As unidades de aceleração angular mais usadas são o radiano por segundo ao quadrado ( $\text{rad/s}^2$ ) e a revolução por segundo ao quadrado ( $\text{rev/s}^2$ ).



### Exemplo 10.01 Cálculo da velocidade angular a partir da posição angular

O disco da Fig. 10-5a está girando em torno do eixo central como um carrossel. A posição angular  $\theta(t)$  de uma reta de referência do disco é dada por

$$\theta = -1,00 - 0,600t + 0,250t^2, \quad (10-9)$$

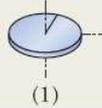
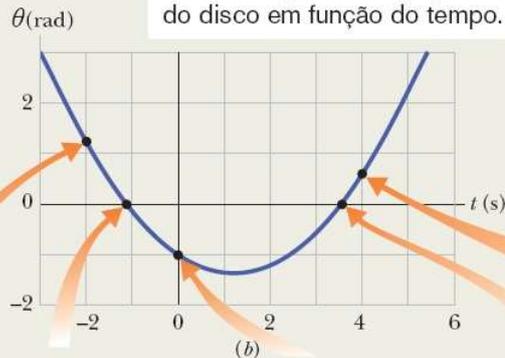
com  $t$  em segundos,  $\theta$  em radianos e a posição angular zero indicada na figura. (Caso você queira, pode traduzir tudo isso na notação do Capítulo 2, apagando momentaneamente a palavra “angular” da expressão “posição angular” e substituindo o símbolo  $\theta$  pelo símbolo  $x$ . O resultado é uma equação que descreve a posição em função do tempo, para os movimentos unidimensionais do Capítulo 2.)



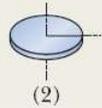
(a)

A posição angular do disco é o ângulo entre as duas retas.

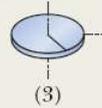
Este é um gráfico do ângulo do disco em função do tempo.



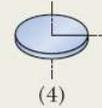
(1)



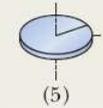
(2)



(3)



(4)



(5)

Em  $t = -2$  s, o ângulo do disco é positivo (no sentido anti-horário); portanto, é marcado no gráfico um valor positivo de  $\theta$ .

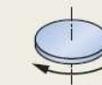
Neste instante, o ângulo do disco é zero.

Neste instante, o ângulo do disco é negativo (no sentido horário); portanto, é marcado no gráfico um valor negativo de  $\theta$ .

A rotação mudou de sentido e o disco passa novamente pelo ponto  $\theta = 0$ .

Neste instante, o ângulo é novamente positivo.

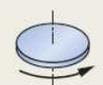
Este é um gráfico da velocidade angular do disco em função do tempo.



$\omega$  negativa



$\omega$  nula



$\omega$  positiva

(c)

A velocidade é inicialmente negativa, diminui em módulo até se anular momentaneamente, e depois passa a aumentar indefinidamente.

**Figura 10-5** (a) Um disco em rotação. (b) Gráfico da posição angular do disco em função do tempo,  $\theta(t)$ . Cinco desenhos indicam a posição angular da reta de referência do disco para cinco pontos da curva. (c) Gráfico da velocidade angular em função do tempo,  $\omega(t)$ . Valores positivos de  $\omega$  correspondem a rotações no sentido anti-horário; valores negativos, a rotações no sentido horário.

(a) Plote a posição angular do disco em função do tempo, de  $t = -3,0$  s a  $t = 5,4$  s. Desenhe o disco e a reta de referência em  $t = -2,0$  s,  $0$  s,  $4,0$  s e nos instantes em que o gráfico cruza o eixo  $t$ .

## IDEIA-CHAVE

A posição angular do disco é a posição angular  $\theta(t)$  da reta de referência, dada pela Eq. 10-9 como uma função do tempo  $t$ . Assim, devemos plotar a Eq. 10-9; o resultado aparece na Fig. 10-5b.

**Cálculos:** Para desenhar o disco e a reta de referência em um certo instante, precisamos determinar o valor de  $\theta$  nesse instante. Para isso, substituímos  $t$  por seu valor na Eq. 10-9. Para  $t = -2,0$  s, obtemos

$$\begin{aligned}\theta &= -1,00 - (0,600)(-2,0) + (0,250)(-2,0)^2 \\ &= 1,2 \text{ rad} = 1,2 \text{ rad} \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 69^\circ.\end{aligned}$$

Isso significa que em  $t = -2,0$  s a reta de referência está deslocada de  $1,2 \text{ rad} = 69^\circ$  no sentido anti-horário (porque  $\theta$  é positivo) em relação à posição zero. O desenho 1 da Fig. 10-5b mostra essa posição da reta de referência.

Da mesma forma, para  $t = 0$ , obtemos  $\theta = -1,00 \text{ rad} = -57^\circ$ , o que significa que a reta de referência está deslocada de  $1,0 \text{ rad} = 57^\circ$  no sentido horário em relação à posição angular zero, como mostra o desenho 3. Para  $t = 4,0$  s, obtemos  $\theta = 0,60 \text{ rad} = 34^\circ$  (desenho 5). Fazer desenhos para os instantes em que a curva cruza o eixo  $t$  é fácil, pois nesse caso  $\theta = 0$  e a reta de referência está momentaneamente alinhada com a posição angular zero (desenhos 2 e 4).

(b) Em que instante  $t_{\min}$  o ângulo  $\theta(t)$  passa pelo valor mínimo mostrado na Fig. 10-5b? Qual é o valor mínimo?

## IDEIA-CHAVE

Para determinar o valor extremo (o mínimo, no caso) de uma função, calculamos a derivada primeira da função e igualamos o resultado a zero.

**Cálculos:** A derivada primeira de  $\theta(t)$  é

$$\frac{d\theta}{dt} = -0,600 + 0,500t. \quad (10-10)$$

Igualando esse resultado a zero e explicitando  $t$ , determinamos o instante em que  $\theta(t)$  é mínimo:

$$t_{\min} = 1,20 \text{ s.} \quad (\text{Resposta})$$

Para obter o valor mínimo de  $\theta$ , substituímos  $t_{\min}$  na Eq. 10-9, o que nos dá

$$\theta = -1,36 \text{ rad} \approx -77,9^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

Esse *mínimo* de  $\theta(t)$  (o ponto mais baixo da curva da Fig. 10-5b) corresponde à *máxima rotação no sentido horário* do disco a partir da posição angular zero, uma rotação um pouco maior que a representada no desenho 3.

(c) Plote a velocidade angular  $\omega$  do disco em função do tempo de  $t = -3,0$  s a  $t = 6,0$  s. Desenhe o disco e indique o sentido de

rotação e o sinal de  $\omega$  em  $t = -2,0$  s,  $4,0$  s e  $t_{\min}$ .

## IDEIAS-CHAVE

De acordo com a Eq. 10-6, a velocidade angular  $\omega$  é igual a  $d\theta/dt$ , fornecida pela Eq. 10-10. Temos, portanto,

$$\omega = -0,600 + 0,500t. \quad (10-11)$$

O gráfico da função  $\omega(t)$  aparece na Fig. 10-5c. Como a função é linear, o gráfico é uma linha reta. A inclinação é  $0,500 \text{ rad/s}^2$  e o ponto de interseção com o eixo  $y$  (que não é mostrado na figura) é  $-0,600 \text{ rad/s}$ .

**Cálculos:** Para desenhar o disco em  $t = -2,0$  s, substituímos esse valor de  $t$  na Eq. 10-11, o que nos dá

$$\omega = -1,6 \text{ rad/s.} \quad (\text{Resposta})$$

O sinal negativo mostra que em  $t = -2,0$  s o disco está girando no sentido horário (desenho da esquerda da Fig. 10-5c).

Fazendo  $t = 4,0$  s na Eq. 10-11, obtemos

$$\omega = 1,4 \text{ rad/s.} \quad (\text{Resposta})$$

O sinal positivo implícito mostra que em  $t = 4,0$  s o disco está girando no sentido anti-horário (desenho da direita da Fig. 10-5c).

Já sabemos que  $d\theta/dt = 0$  para  $t = t_{\min}$ . Isso significa que, nesse ponto,  $\omega = 0$ , ou seja, o disco para momentaneamente quando a reta de referência atinge o valor mínimo de  $\theta$  na Fig. 10-5b, como sugere o desenho central na Fig. 10-5c. No gráfico, essa parada momentânea corresponde ao ponto onde a reta intercepta o eixo  $t$  e a velocidade angular muda de sinal.

(d) Use os resultados anteriores para descrever o movimento do disco de  $t = -3,0$  s a  $t = 6,0$  s.

**Descrição:** Quando observamos o disco pela primeira vez, em  $t = -3,0$  s, o disco tem uma posição angular positiva e está girando no sentido horário, com velocidade cada vez menor. Depois de parar momentaneamente na posição angular  $\theta = -1,36 \text{ rad}$ , o disco começa a girar no sentido anti-horário e o valor de  $\omega$  aumenta até se tornar novamente positivo.

## Exemplo 10.02 Cálculo da velocidade angular a partir da aceleração angular

Um pião gira com aceleração angular

$$a = 5t^2 - 4t$$

em que  $t$  está em segundos e  $a$  está em radianos por segundo ao quadrado. No instante  $t = 0$ , a velocidade angular do pião é  $5 \text{ rad/s}$  e uma reta de referência traçada no pião está na posição angular  $\theta = 2 \text{ rad}$ .

(a) Obtenha uma expressão para a velocidade angular do pião,  $\omega(t)$ , ou seja, escreva uma expressão que descreva explicitamente a

variação da velocidade angular com o tempo. (Sabemos que a velocidade angular *varia* com o tempo, já que existe uma aceleração angular.)

### IDEIA-CHAVE

---

Por definição,  $a(t)$  é a derivada de  $\omega(t)$  em relação ao tempo. Assim, podemos obter  $\omega(t)$  integrando  $a(t)$  em relação ao tempo.

**Cálculos:** De acordo com a Eq. 10-8,

$$d\omega = \alpha dt,$$

e, portanto, 
$$\int d\omega = \int \alpha dt.$$

o que nos dá

$$\omega = \int (5t^3 - 4t) dt = \frac{5}{4}t^4 - \frac{4}{2}t^2 + C.$$

Para calcular o valor da constante de integração  $C$ , observamos que  $\omega = 5$  rad/s no instante  $t = 0$ . Substituindo esses valores na expressão de  $\omega$ , obtemos:

$$5 \text{ rad/s} = 0 - 0 + C,$$

e, portanto,  $C = 5$  rad/s. Nesse caso,

$$\omega = \frac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5. \quad (\text{Resposta})$$

(b) Obtenha uma expressão para a posição angular do pião,  $\theta(t)$ .

### IDEIA-CHAVE

---

Por definição,  $\omega(t)$  é a derivada de  $\theta(t)$  em relação ao tempo. Assim, podemos obter  $\theta(t)$  integrando  $\omega(t)$  em relação ao tempo.

**Cálculos:** Como, de acordo com a Eq. 10-6,

$$d\theta = \omega dt,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \theta &= \int \omega dt = \int \left( \frac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5 \right) dt \\ &= \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + C' \\ &= \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + 2, \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

em que  $C'$  foi calculado para que  $\theta = 2$  rad em  $t = 0$ .

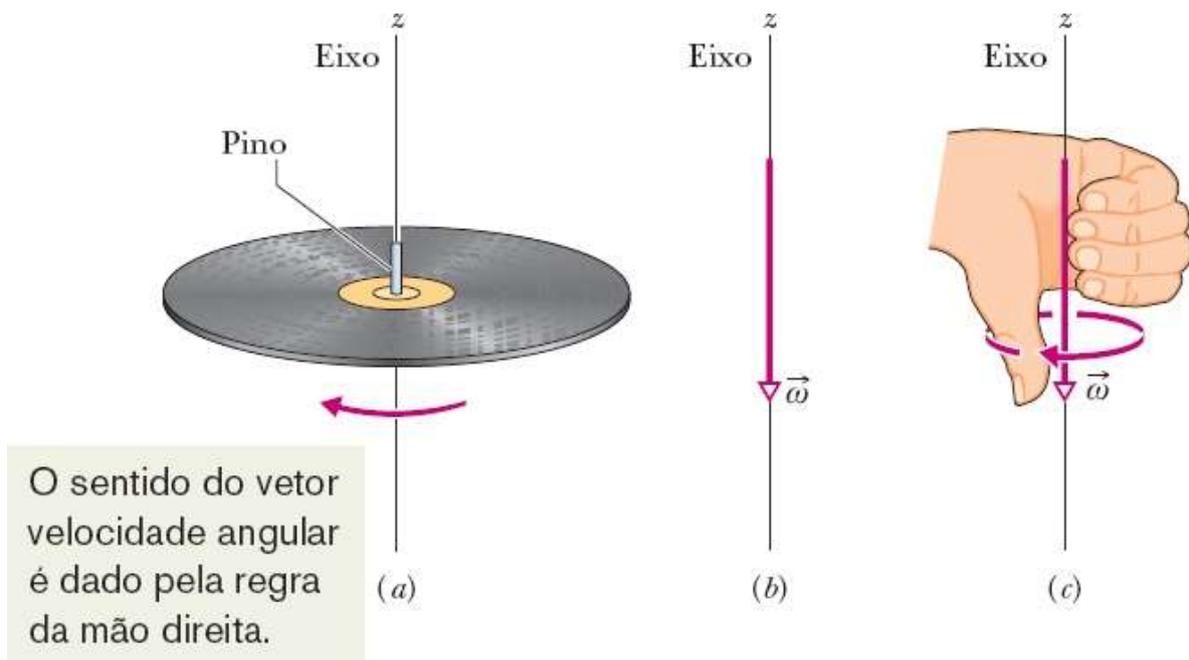
## As Grandezas Angulares São Vetores?

A posição, a velocidade e a aceleração de uma partícula são normalmente expressas por meio de vetores. Quando uma partícula se move em linha reta, porém, não é necessário usar a notação vetorial. Nessas condições, a partícula pode se mover apenas em dois sentidos, que podemos indicar usando os sinais positivo e negativo.

Da mesma forma, um corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo só pode girar nos sentidos horário e anti-horário e podemos indicar esses sentidos usando os sinais positivo e negativo. A questão que se levanta é a seguinte: “No caso mais geral, podemos expressar o deslocamento, a velocidade e a aceleração angular de um corpo rígido em rotação por meio de vetores?” A resposta é um “sim” parcial (veja a ressalva a seguir, em relação aos deslocamentos angulares).

**Velocidades Angulares.** Considere a velocidade angular. A Fig. 10-6a mostra um disco de vinil girando em um toca-discos. O disco tem uma velocidade angular escalar constante  $\omega$  ( $= 33 \frac{1}{3}$  rev/min) no sentido horário. Podemos representar a velocidade angular do disco como um vetor  $\vec{\omega}$  apontando ao longo do eixo de rotação, como na Fig. 10-6b. A regra é a seguinte: Escolhemos o comprimento do vetor de acordo com uma escala conveniente, como, por exemplo, 1 cm para cada 10 rev/min. Em seguida, determinamos o sentido do vetor  $\vec{\omega}$  usando a **regra da mão direita**, como mostra a Fig. 10-6c. Envolve o disco com a mão direita, com os dedos apontando *no sentido de rotação*; o polegar estendido mostra o sentido do vetor velocidade angular. Se o disco estivesse girando no sentido oposto, a regra da mão direita indicaria o sentido oposto para o vetor velocidade angular.

A representação de grandezas angulares por meio de vetores não é tão fácil de compreender como a representação de grandezas lineares. Instintivamente, esperamos que algo se mova *na direção do vetor*. Não é o que acontece. Em vez disso, temos algo (o corpo rígido) que gira *em torno da direção do vetor*. No mundo das rotações puras, um vetor define um eixo de rotação, não uma direção de movimento. Mesmo assim, o vetor define corretamente o movimento. Além disso, obedece a todas as regras de manipulação de vetores que foram discutidas no Capítulo 3. A aceleração angular  $\vec{\alpha}$  é outro vetor que obedece às mesmas regras.

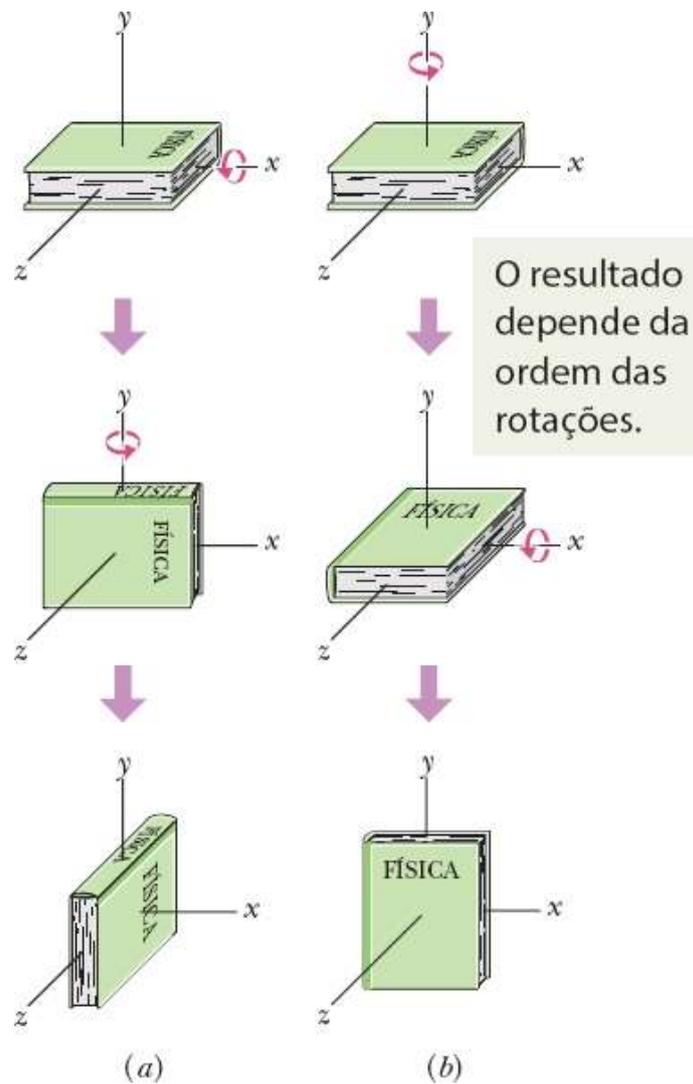


**Figura 10-6** (a) Um disco girando em torno de um eixo vertical que passa pelo centro do disco. (b) A velocidade angular do disco pode ser representada por um vetor  $\vec{\omega}$  que coincide com o eixo de rotação e aponta para baixo, como mostra a figura. (c) Estabelecemos o sentido do vetor velocidade angular para baixo pela regra da mão direita. Quando os dedos da mão direita envolvem o disco e apontam no sentido do movimento, o polegar estendido mostra o sentido de  $\vec{\omega}$ .

Neste capítulo, consideramos apenas rotações em torno de um eixo fixo. Nesse caso, não precisamos trabalhar com vetores; podemos representar a velocidade angular por meio de um escalar  $\omega$ , a aceleração angular por meio de um escalar  $\alpha$  e usar o sinal positivo para indicar o sentido anti-horário e o sinal negativo para indicar o sentido horário.

**Deslocamentos Angulares.** Vamos agora à ressalva: Os *deslocamentos* angulares (a menos que sejam muito pequenos) *não podem* ser tratados como vetores. Por que não? Podemos certamente atribuir aos deslocamentos angulares um módulo e uma orientação, como fizemos para a velocidade angular na Fig. 10-6. Entretanto, para ser representada como um vetor, uma grandeza *também precisa* obedecer às regras da soma vetorial, uma das quais diz que, quando somamos dois vetores, a ordem na qual os vetores são somados é irrelevante. O deslocamento angular não passa nesse teste.

A Fig. 10-7 mostra um exemplo. Um livro, inicialmente na horizontal, sofre duas rotações de  $90^\circ$ , primeiramente na ordem da Fig. 10-7a e depois na ordem da Fig. 10-7b. Embora os dois deslocamentos angulares sejam iguais nos dois casos, a ordem é diferente e o livro termina com orientações diferentes. Eis outro exemplo: Deixe o braço direito pender ao longo do corpo, com a palma da mão voltada para dentro. Sem girar o pulso, (1) levante o braço para a frente até que fique na horizontal; (2) mova o braço horizontalmente até que aponte para a direita; e (3) deixe-o pender ao longo do corpo. A palma da mão ficará voltada para a frente. Se você repetir a manobra, mas inverter a ordem dos movimentos, qual será a orientação final da palma da mão? Esses exemplos mostram que a soma de dois deslocamentos angulares depende da ordem desses deslocamentos e, portanto, os deslocamentos angulares não podem ser vetores. ~~✈~~



**Figura 10-7** (a) A partir da posição inicial, no alto, o livro sofre duas rotações sucessivas de  $90^\circ$ , primeiro em torno do eixo  $x$  (horizontal) e depois em torno do eixo  $y$  (vertical). (b) O livro sofre as mesmas rotações, na ordem inversa.

## 10-2 ROTAÇÃO COM ACELERAÇÃO ANGULAR CONSTANTE

### Objetivo do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

**10.14** No caso de uma aceleração angular constante, usar as relações entre posição angular, deslocamento angular, velocidade angular, aceleração angular e tempo transcorrido (Tabela 10-1).

### Ideia-Chave

- A rotação com aceleração angular constante ( $\alpha = \text{constante}$ ) é um caso especial importante do movimento de rotação. As equações de movimento que se aplicam a esse caso são as seguintes:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \alpha t, \\ \theta - \theta_0 &= \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2, \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0), \\ \theta - \theta_0 &= \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t, \\ \theta - \theta_0 &= \omega t - \frac{1}{2} \alpha t^2.\end{aligned}$$

## Rotação com Aceleração Angular Constante

Nas translações puras, os movimentos com *aceleração linear constante* (como, por exemplo, o movimento de um corpo em queda livre) constituem um caso especial importante. Na Tabela 2-1, apresentamos uma série de equações que são válidas apenas para esse tipo de movimento.

Nas rotações puras, o caso da *aceleração angular constante* também é importante e pode ser descrito usando um conjunto análogo de equações. Não vamos demonstrá-las, mas nos limitaremos a escrevê-las a partir das equações lineares correspondentes, substituindo as grandezas lineares pelas grandezas angulares equivalentes. O resultado aparece na Tabela 10-1, que mostra os dois conjuntos de equações (Eqs. 2-11 e 2-15 a 2-18; 10-12 a 10-16).

Como vimos, as Eqs. 2-11 e 2-15 são as equações básicas para o caso da aceleração linear constante; as outras equações da lista “Translações” podem ser deduzidas a partir dessas equações. Da mesma forma, as Eqs. 10-12 e 10-13 são as equações básicas para o caso da aceleração angular constante, e as outras equações da lista “Rotações” podem ser deduzidas a partir dessas equações. Para resolver um problema simples envolvendo aceleração angular constante, quase sempre é possível usar uma das cinco equações da lista “Rotações”. Escolha uma equação para a qual a única incógnita seja a variável pedida no problema. Um plano melhor é memorizar apenas as Eqs. 10-12 e 10-13 e resolvê-las como um sistema de equações sempre que necessário.

### ✓ Teste 2

Em quatro situações, um corpo em rotação tem a posição angular  $\theta(t)$  dada por (a)  $\theta = 3t - 4$ , (b)  $\theta = -5t^3 + 4t^2 + 6$ , (c)  $\theta = 2/t^2 - 4/t$  e (d)  $\theta = 5t^2 - 3$ . A quais dessas situações as equações angulares da Tabela 10-1 se aplicam?

**Tabela 10-1** Equações de Movimento para Aceleração Linear Constante e Aceleração Angular Constante

Número da Equação	Equação Linear	Variável Ausente	Equação Angular	Número da Equação
(2-11)	$v = v_0 + at$	$x - x_0$	$\omega = \omega_0 + at$	(10-12)
(2-15)	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	$v$	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} at^2$	(10-13)

$$(2-16) \quad v_2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad t \quad t \quad \omega_2 = \omega_0^2 + 2a(\theta - \theta_0) \quad (10-14)$$

$$(2-17) \quad x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t \quad a \quad a \quad \theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t \quad (10-15)$$

$$(2-18) \quad x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2 \quad v_0 \quad \omega_0 \quad \theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}at^2 \quad (10-16)$$



### Exemplo 10.03 Pedra de amolar com aceleração angular constante

Uma pedra de amolar (Fig. 10-8) gira com uma aceleração angular constante  $a = 0,35 \text{ rad/s}^2$ . No instante  $t = 0$ , a pedra tem uma velocidade angular  $\omega_0 = -4,6 \text{ rad/s}$ , e uma reta de referência traçada na pedra está na horizontal, na posição angular  $\theta_0 = 0$ .

(a) Em que instante após  $t = 0$  a reta de referência está na posição angular  $\theta = 5,0 \text{ rev}$ ?

#### IDEIA-CHAVE

Como a aceleração angular é constante, podemos usar as equações para rotações da Tabela 10-1. Escolhemos a Eq. 10-13,

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$

porque a única variável desconhecida é o tempo  $t$ .

**Cálculos:** Substituindo valores conhecidos e fazendo  $\theta_0 = 0$  e  $\theta = 5,0 \text{ rev} = 10\pi \text{ rad}$ , obtemos

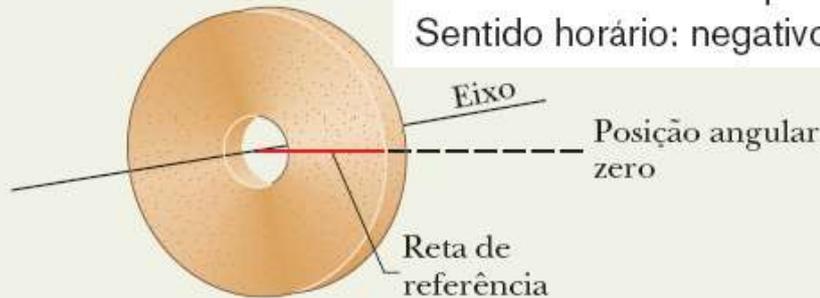
$$10\pi \text{ rad} = (-4,6 \text{ rad/s})t + \frac{1}{2}(0,35 \text{ rad/s}^2)t^2.$$

(Convertemos 5,0 rev para  $10\pi \text{ rad}$  para manter a coerência entre as unidades.) Resolvendo essa equação do segundo grau em  $t$ , obtemos

$$t = 32 \text{ s.} \quad (\text{Resposta})$$

A essa altura, notamos um fato aparentemente estranho. Inicialmente, a pedra estava girando no sentido negativo e partiu da orientação  $\theta = 0$ . Entretanto, acabamos de calcular que, 32 s depois, a orientação da pedra é positiva,  $\theta = 5,0 \text{ rev}$ . O que aconteceu nesse intervalo para que a pedra assumisse uma orientação positiva?

Medimos as rotações usando a reta de referência.  
Sentido anti-horário: positivo  
Sentido horário: negativo



**Figura 10-8** Uma pedra de amolar. No instante  $t = 0$ , a reta de referência (que imaginamos marcada na pedra) está na horizontal.

(b) Descreva a rotação da pedra de amolar entre  $t = 0$  e  $t = 32$  s.

**Descrição:** A pedra está inicialmente girando no sentido negativo (o sentido dos ponteiros do relógio) com velocidade angular  $\omega_0 = -4,6$  rad/s, mas a aceleração angular  $\alpha$  é positiva (o sentido contrário ao dos ponteiros do relógio). Essa oposição inicial entre os sinais da velocidade angular e da aceleração angular significa que a roda gira cada vez mais devagar no sentido negativo, para momentaneamente e, em seguida, passa a girar no sentido positivo. Depois que a reta de referência passa de volta pela posição inicial  $\theta = 0$ , a pedra de amolar dá mais 5 voltas completas até o instante  $t = 32$  s.

(c) Em que instante  $t$  a pedra de amolar para momentaneamente?

**Cálculo:** Vamos consultar de novo a tabela de equações para aceleração angular constante. Mais uma vez, precisamos de uma equação que contenha apenas a incógnita  $t$ . Agora, porém, a equação deve conter também a variável  $\omega$ , para que possamos igualá-la a 0 e calcular o valor correspondente de  $t$ . Assim, escolhemos a Eq. 10-12, que nos dá

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - (-4,6 \text{ rad/s})}{0,35 \text{ rad/s}^2} = 13 \text{ s.} \quad (\text{Resposta})$$

### Exemplo 10.04 Rotor com aceleração angular constante

Você está operando um Rotor (um brinquedo de parque de diversões com um cilindro giratório vertical), percebe que um ocupante está ficando aflito, e reduz a velocidade angular do cilindro de 3,40 rad/s para 2,00 rad/s em 20,0 rev, com uma aceleração angular constante. (O ocupante é obviamente mais um “homem de translação” do que um “homem de rotação”).



(a) Qual é a aceleração angular constante durante essa redução da velocidade angular?

### IDEIA-CHAVE

Como a aceleração angular do cilindro é constante, podemos relacioná-la à velocidade angular e ao deslocamento angular por

meio das equações básicas da aceleração angular constante (Eqs. 10-12 e 10-13).

**Cálculos:** Vamos fazer primeiro uma análise rápida para ver se podemos resolver as equações básicas. A velocidade angular inicial é  $\theta_0 = 3,40$  rad/s, o deslocamento angular é  $\theta - \theta_0 = 20,0$  rev, e a velocidade angular, no final do deslocamento, é  $\omega = 2,00$  rad/s. Além da aceleração angular  $\alpha$  que nos interessa, as duas equações básicas também envolvem o tempo  $t$ , no qual não estamos interessados no momento.

Para eliminar a variável  $t$ , usamos a Eq. 10-12 para escrever

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha},$$

que substituímos na Eq. 10-13 para obter

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 \left( \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \alpha \left( \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \right)^2.$$

Explicitando  $\alpha$ , substituindo os valores conhecidos e convertendo 20 rev para 125,7 rad, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2(\theta - \theta_0)} = \frac{(2,00 \text{ rad/s})^2 - (3,40 \text{ rad/s})^2}{2(125,7 \text{ rad})} \\ &= -0,0301 \text{ rad/s}^2. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Em quanto tempo ocorre a redução de velocidade?

**Cálculo:** Agora que conhecemos  $\alpha$ , podemos usar a Eq. 10-12 para obter  $t$ :

$$\begin{aligned} t &= \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{2,00 \text{ rad/s} - 3,40 \text{ rad/s}}{-0,0301 \text{ rad/s}^2} \\ &= 46,5 \text{ s}. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

## 10-3 RELAÇÕES ENTRE AS VARIÁVEIS LINEARES E ANGULARES

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

- 10.15** No caso de um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo, conhecer a relação entre as variáveis angulares do corpo (posição angular, velocidade angular e aceleração angular) e as variáveis lineares de uma partícula do corpo (posição, velocidade e aceleração) para qualquer raio dado.
- 10.16** Conhecer a diferença entre aceleração tangencial e aceleração radial, e traçar os vetores correspondentes às duas acelerações em um desenho de uma partícula de um corpo que esteja girando em torno de um eixo, tanto para o caso em que a velocidade angular está aumentando como para o caso em que a velocidade radial está diminuindo.

---

## Ideias-Chave

- Um ponto de um corpo rígido em rotação, a uma distância perpendicular  $r$  de um eixo de rotação, se desloca ao longo de uma circunferência de raio  $r$ . Se o corpo gira de um ângulo  $\theta$ , o ponto descreve um arco de comprimento  $s$  dado por

$$s = \theta r \quad (\text{ângulo em radianos}),$$

em que  $\theta$  está em radianos.

- A velocidade linear  $\vec{v}$  do ponto é tangente à circunferência; o módulo da velocidade linear é dado por

$$v = \omega r \quad (\text{ângulo em radianos}),$$

em que  $\omega$  é a velocidade angular do corpo (e do ponto) em radianos por segundo.

- A aceleração linear  $\vec{a}$  do ponto tem uma componente tangencial e uma componente radial. A componente tangencial é dada por

$$a_t = \alpha r \quad (\text{ângulo em radianos}),$$

em que  $\alpha$  é a aceleração angular do corpo (e do ponto) em radianos por segundo ao quadrado. A componente radial é dada por

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\text{ângulo em radianos}).$$

- Se o movimento circular é uniforme (ou seja, se a aceleração é zero), o período  $T$  do movimento do ponto (e do corpo) é dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{ângulo em radianos}).$$

---

## Relações entre as Variáveis Lineares e Angulares

No Módulo 4-5, discutimos o movimento circular uniforme, no qual uma partícula se move com velocidade linear escalar  $v$  constante ao longo de uma circunferência e em torno de um eixo de rotação. Quando um corpo rígido, como um carrossel, gira em torno de um eixo, cada partícula do corpo descreve uma circunferência em torno do eixo. Como o corpo é rígido, todas as partículas completam uma revolução no mesmo intervalo de tempo, ou seja, todas têm a mesma velocidade angular  $\omega$ .

Por outro lado, quanto mais afastada do eixo está a partícula, maior é a circunferência que a partícula percorre e, portanto, maior é a velocidade linear escalar  $v$ . Você pode perceber isso em um carrossel. Você gira com a mesma velocidade angular  $\omega$  independentemente da distância  $a$  que se encontra do centro, mas sua velocidade linear  $v$  aumenta perceptivelmente quando você se afasta do centro do carrossel.

Frequentemente, precisamos relacionar as variáveis lineares  $s$ ,  $v$  e  $a$  de um ponto particular de um corpo em rotação às variáveis angulares  $\theta$ ,  $\omega$  e  $\alpha$  do corpo. Os dois conjuntos de variáveis estão relacionados por meio de  $r$ , a *distância perpendicular* do ponto ao eixo de rotação. Essa distância

perpendicular é a distância entre o ponto e o eixo de rotação, medida em uma reta perpendicular ao eixo. É também o raio  $r$  da circunferência descrita pelo ponto em torno do eixo de rotação.

## A Posição

Se uma reta de referência de um corpo rígido gira de um ângulo  $\theta$ , um ponto do corpo a uma distância  $r$  do eixo de rotação descreve um arco de circunferência de comprimento  $s$ , em que  $s$  é dado pela Eq. 10-1:

$$s = \theta r \quad (\text{ângulo em radianos}). \quad (10-17)$$

Essa é a primeira de nossas relações entre grandezas lineares e angulares. *Atenção:* O ângulo  $\theta$  deve ser medido em radianos, já que a Eq. 10-17 é usada precisamente para definir o ângulo em radianos.

## A Velocidade

Derivando a Eq. 10-17 em relação ao tempo, com  $r$  constante, obtemos:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r.$$

Acontece que  $ds/dt$  é a velocidade linear escalar (o módulo da velocidade linear) do ponto considerado, e  $d\theta/dt$  é a velocidade angular  $\omega$  do corpo em rotação. Assim,

$$v = \omega r \quad (\text{ângulo em radianos}). \quad (10-18)$$

*Atenção:* A velocidade angular  $\omega$  deve ser expressa em radianos por unidade de tempo.

De acordo com a Eq. 10-18, como todos os pontos do corpo rígido têm a mesma velocidade angular  $\omega$ , os pontos com valores maiores de  $r$  (ou seja, mais distantes do eixo de rotação) têm uma velocidade linear escalar  $v$  maior. A Fig. 10-9a serve para nos lembrar que a velocidade linear é sempre tangente à trajetória circular do ponto considerado.

Se a velocidade angular  $\omega$  do corpo rígido é constante, a Eq. 10-18 nos diz que a velocidade linear  $v$  de qualquer ponto do corpo também é constante. Assim, todos os pontos do corpo estão em movimento circular uniforme. O período de revolução  $T$  do movimento de cada ponto e do corpo rígido como um todo é dado pela Eq. 4-35:

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (10-19)$$

Essa equação nos diz que o tempo de uma revolução é igual à distância  $2\pi r$  percorrida em uma revolução dividida pela velocidade escalar com a qual a distância é percorrida. Usando a Eq. 10-18 para  $v$  e cancelando  $r$ , obtemos a relação

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{ângulo em radianos}). \quad (10-20)$$

Essa equação equivalente nos diz que o tempo de uma revolução é igual ao ângulo  $2\pi$  rad percorrido em uma revolução dividido pela velocidade angular escalar com a qual o ângulo é percorrido.

## A Aceleração

Derivando a Eq. 10-18 em relação ao tempo, novamente com  $r$  constante, obtemos:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r. \quad (10-21)$$

Neste ponto, esbarramos em uma complicação. Na Eq. 10-21,  $dv/dt$  representa apenas a parte da aceleração linear responsável por variações do *módulo*  $v$  da velocidade linear  $\vec{v}$ . Assim como  $\vec{v}$ , essa parte da aceleração linear é tangente à trajetória do ponto considerado. Ela é chamada de *componente tangencial*  $a_t$  da aceleração linear do ponto e é dada por

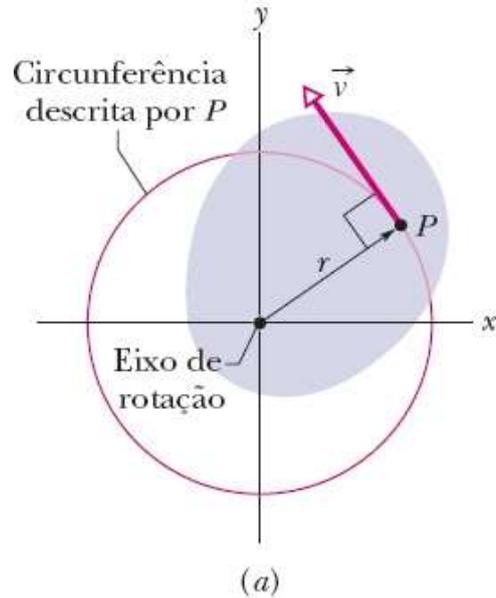
$$a_t = \alpha r \quad (\text{ângulo em radianos}), \quad (10-22)$$

em que  $\alpha = d\omega/dt$ . *Atenção:* A aceleração angular  $\alpha$  da Eq. 10-22 deve ser expressa em radianos por unidade de tempo ao quadrado.

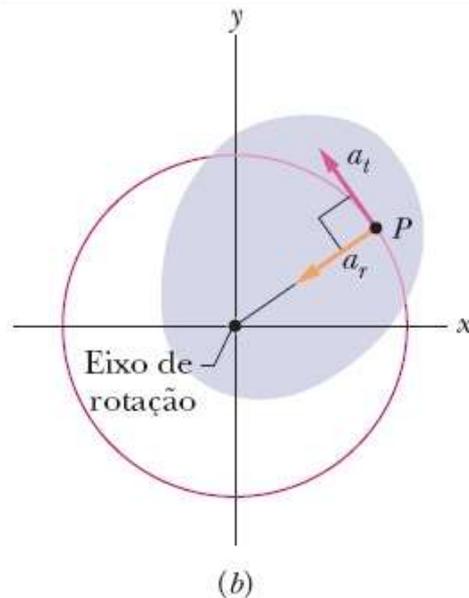
Além disso, de acordo com a Eq. 4-34, uma partícula (ou ponto) que se move em uma trajetória circular tem uma *componente radial* da aceleração linear,  $a_r = v^2/r$  (dirigida radialmente para dentro), que é responsável por variações da *direção* da velocidade linear  $\vec{v}$ . Substituindo o valor de  $v$  dado pela Eq. 10-18, podemos escrever essa componente como

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\text{ângulo em radianos}). \quad (10-23)$$

O vetor velocidade é sempre tangente a esta circunferência, cujo centro é o eixo de rotação.



A aceleração sempre possui uma componente radial (centrípeta) e pode possuir uma componente tangencial.



**Figura 10-9** Seção transversal do corpo rígido em rotação da Fig. 10-2, visto de cima. Cada ponto do corpo (como  $P$ ) descreve uma circunferência em torno do eixo de rotação. (a) A velocidade linear  $\vec{v}$  de cada ponto é tangente à circunferência na qual o ponto se move. (b) A aceleração linear  $\vec{a}$  do ponto possui (em geral) duas componentes: a aceleração tangencial  $a_t$  e a aceleração radial  $a_r$ .

Assim, como mostra a Fig. 10-9b, a aceleração linear de um ponto que pertence a um corpo rígido em

rotação possui, em geral, duas componentes. A componente radial  $a_r$  (dada pela Eq. 10-23) está presente sempre que a velocidade angular do corpo é diferente de zero (mesmo que não haja aceleração angular) e aponta para o eixo de rotação. A componente tangencial  $a_t$  (dada pela Eq. 10-22) está presente apenas se a aceleração angular é diferente de zero e aponta na direção da tangente à trajetória do ponto.

### ✓ Teste 3

Uma barata está na borda de um carrossel em movimento. Se a velocidade angular do sistema (*carrossel + barata*) é constante, a barata possui (a) uma aceleração radial e (b) uma aceleração tangencial? Se  $\omega$  está diminuindo, a barata possui (c) uma aceleração radial e (d) uma aceleração tangencial?

### Exemplo 10.05 Projeto do Anel Gigante, um rotor de grandes proporções

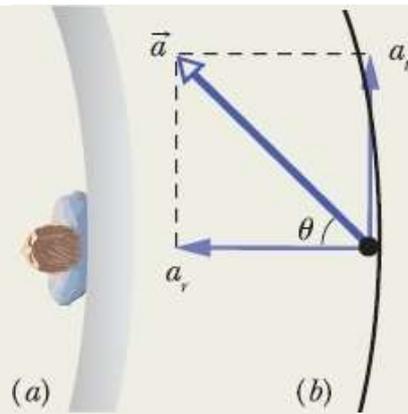
Recebemos a missão de projetar um grande anel giratório horizontal de raio  $r = 33,1$  m (igual ao da Grande Roda de Pequim, a maior roda-gigante do mundo). Os passageiros entrarão por uma porta situada na parede externa do anel e ficarão encostados na parede interna (Fig. 10-10a). Decidimos que, no intervalo de  $t = 0$  a  $t = 2,30$  s, a posição angular  $\theta(t)$  de uma reta de referência do anel será dada por

$$\theta = ct^3, \quad (10-24)$$

com  $c = 6,39 \times 10^{-2} \text{ rad/s}^3$ . Após o instante  $t = 2,30$  s, a velocidade angular será mantida enquanto durar o passeio. Depois que o anel atingir a velocidade angular máxima, o piso do anel será baixado, mas os passageiros permanecerão no mesmo lugar, como se estivessem colados na parede interna do anel. Determine, para o instante  $t = 2,30$  s, a velocidade angular  $\omega$ , a velocidade linear  $v$ , a aceleração angular  $a$ , a aceleração tangencial  $a_t$ , a aceleração radial  $a_r$  e a aceleração  $\vec{a}$  dos passageiros.

#### IDEIAS-CHAVE

(1) A velocidade angular  $\omega$  é dada pela Eq. 10-6 ( $\omega = d\theta/dt$ ). (2) A velocidade linear  $v$  (ao longo da circunferência) está relacionada à velocidade angular (em torno do eixo de rotação) por meio da Eq. 10-18 ( $v = \omega r$ ). (3) A aceleração angular  $a$  é dada pela Eq. 10-8 ( $a = d\omega/dt$ ). (4) A aceleração tangencial  $a_t$  (ao longo da circunferência) está relacionada à aceleração angular  $a$  (em torno do eixo de rotação) por meio da Eq. 10-22 ( $a_t = ar$ ). (5) A aceleração radial  $a_r$  (em direção ao centro de rotação) é dada pela Eq. 10-23 ( $a_r = \omega^2 r$ ). (6) A aceleração tangencial e a aceleração radial são as componentes (mutuamente perpendiculares) do vetor aceleração  $\vec{a}$ .



**Figura 10-10** (a) Vista superior de um passageiro pronto para um passeio no Rotor. (b) As componentes radial e tangencial do vetor aceleração.

**Cálculos:** O primeiro passo é obter a velocidade angular, calculando a derivada em relação ao tempo da função posição angular e fazendo  $t = 2,20$  s:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(ct^3) = 3ct^2 && (10-25) \\ &= 3(6,39 \times 10^{-2} \text{ rad/s}^3)(2,20 \text{ s})^2 \\ &= 0,928 \text{ rad/s.} && \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

De acordo com a Eq. 10-18, a velocidade linear é

$$\begin{aligned}v &= \omega r = 3ct^2 r && (10-26) \\ &= 3(6,39 \times 10^{-2} \text{ rad/s}^3)(2,20 \text{ s})^2(33,1 \text{ m}) \\ &= 30,7 \text{ m/s.} && \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

Embora seja elevada (mais de 100 km/h), essa velocidade é comum nos brinquedos dos parques de diversões e não causa desconforto porque, como já foi mencionado no Capítulo 2, o corpo humano é sensível à aceleração, mas não é sensível à velocidade (ou seja, comporta-se como um acelerômetro, não como um velocímetro). De acordo com a Eq. 10-26, a velocidade linear aumenta com o quadrado do tempo (mas esse aumento deixa de existir em  $t = 2,30$  s).

Vamos agora obter a aceleração angular calculando a derivada da Eq. 10-25:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(3ct^2) = 6ct \\ &= 6(6,39 \times 10^{-2} \text{ rad/s}^3)(2,20 \text{ s}) = 0,843 \text{ rad/s}^2. \text{ (Resposta)}\end{aligned}$$

De acordo com a Eq. 10-22, a aceleração tangencial é

$$\begin{aligned}a_t &= \alpha r = 6ctr && (10-27) \\ &= 6(6,39 \times 10^{-2} \text{ rad/s}^3)(2,20 \text{ s})(33,1 \text{ m}) \\ &= 27,91 \text{ m/s}^2 \approx 27,9 \text{ m/s}^2, && \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

ou  $2,8g$  (o que não é doloroso, mas chega a incomodar). De acordo com a Eq. 10-27, a aceleração nesse instante ainda está aumentando (mas vai deixar de aumentar a partir do instante  $t = 2,30$  s). A aceleração radial é dada pela Eq. 10-23,

$$a_r = \omega^2 r.$$

Substituindo  $\omega$  pelo seu valor, dado pela Eq. 10-25, obtemos:

$$\begin{aligned} a_r &= (3ct^2)^2 r = 9c^2 t^4 r && (10-28) \\ &= 9(6,39 \times 10^{-2} \text{ rad/s}^3)^2 (2,20 \text{ s})^4 (33,1 \text{ m}) \\ &= 28,49 \text{ m/s}^2 \approx 28,5 \text{ m/s}^2, && (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

ou  $2,9g$  (ligeiramente maior que a aceleração tangencial).

As acelerações radial e tangencial são mutuamente perpendiculares e constituem as componentes do vetor velocidade  $\vec{a}$  dos passageiros (Fig. 10-10b). O módulo de  $\vec{a}$  é dado por

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_r^2 + a_t^2} && (10-29) \\ &= \sqrt{(28,49 \text{ m/s}^2)^2 + (27,91 \text{ m/s}^2)^2} \\ &\approx 39,9 \text{ m/s}^2, && (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

ou  $4,1g$  (o que chega a assustar!). Todos esses valores são seguros.

Para determinar a orientação de  $\vec{a}$ , basta calcular o ângulo  $\theta$  mostrado na Fig. 10-10b:

$$\tan \theta = \frac{a_t}{a_r}.$$

Em vez de substituir  $a_t$  e  $a_r$  por valores numéricos, vamos usar as expressões das Eqs. 10-27 e 10-28, o que nos dá

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{6ctr}{9c^2 t^4 r} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{2}{3ct^3} \right). \quad (10-30)$$

A vantagem de obtermos uma expressão geral para o ângulo é que isso nos permite constatar que o ângulo (1) não depende do raio do anel e (2) diminui enquanto  $t$  aumenta de 0 a 2,20 s. Em outras palavras, o vetor  $\vec{a}$  gira na direção do centro de rotação porque a aceleração radial (que é proporcional a  $t^4$ ) aumenta muito mais depressa que a aceleração tangencial (que é proporcional a  $t$ ). Para  $t = 2,20$  s, temos:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2}{3(6,39 \times 10^{-2} \text{ rad/s}^3)(2,20 \text{ s})^3} = 44,4^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

## 10-4 ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

**10.17** Calcular o momento de inércia de uma partícula em relação a um ponto.

**10.18** Calcular o momento de inércia total de várias partículas que giram em torno do mesmo eixo fixo.

**10.19** Calcular a energia cinética de rotação de um corpo a partir do momento de inércia e da velocidade angular.

### Ideia-Chave

• A energia cinética  $K$  de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo é dada por

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (\text{ângulo em radianos}),$$

em que  $I$  é o momento de inércia do corpo, definido por meio da equação

$$I = \sum m_i r_i^2$$

para um sistema de partículas.

### Energia Cinética de Rotação

Quando está girando, o disco de uma serra elétrica certamente possui uma energia cinética associada à rotação. Como expressar essa energia? Não podemos aplicar a fórmula convencional  $K = \frac{1}{2}mv^2$  ao disco como um todo, pois isso nos daria apenas a energia cinética do centro de massa do disco, que é zero.

Em vez disso, vamos tratar o disco (e qualquer outro corpo rígido em rotação) como um conjunto de partículas com diferentes velocidades e somar a energia cinética dessas partículas para obter a energia cinética do corpo como um todo. Segundo esse raciocínio, a energia cinética de um corpo em rotação é dada por

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \cdots \\ &= \sum \frac{1}{2}m_iv_i^2, \end{aligned} \quad (10-31)$$

em que  $m_i$  é a massa da partícula de ordem  $i$  e  $v_i$  é a velocidade da partícula. A soma se estende a todas as partículas do corpo.

O problema da Eq. 10-31 é que  $v_i$  não é igual para todas as partículas. Resolvemos este problema substituindo  $v$  pelo seu valor, dado pela Eq. 10-8 ( $v = \omega r$ ), o que nos dá

$$K = \sum \frac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2, \quad (10-32)$$

em que  $\omega$  é igual para todas as partículas.

A grandeza entre parênteses no lado direito da Eq. 10-32 depende da forma como a massa do corpo

está distribuída em relação ao eixo de rotação. Chamamos essa grandeza de **momento de inércia** do corpo em relação ao eixo de rotação. O momento de inércia, representado pela letra  $I$ , depende do corpo e do eixo em torno do qual está sendo executada a rotação. (*Atenção:* O valor de  $I$  para um corpo só faz sentido quando é especificado o eixo de rotação em relação ao qual o momento de inércia foi calculado.)

Podemos agora escrever

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (\text{momento de inércia}) \quad (10-33)$$

e substituir na Eq. 10-32, obtendo

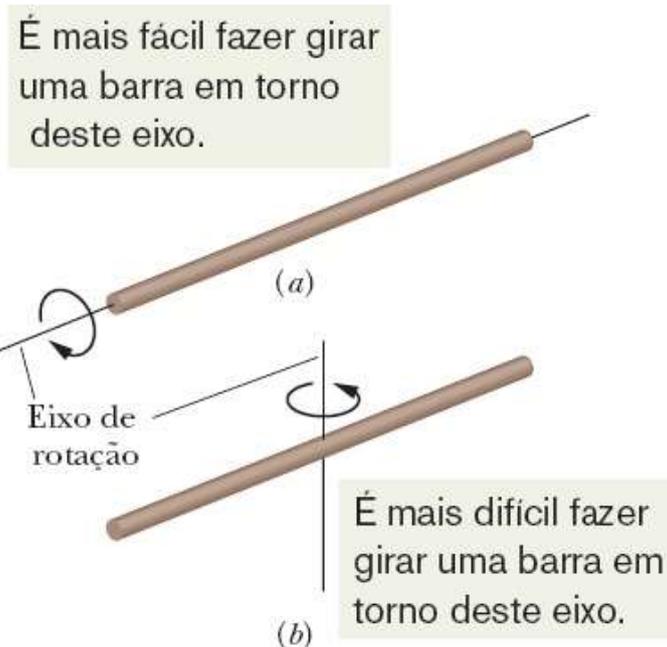
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (\text{ângulo em radianos}) \quad (10-34)$$

como a expressão que procuramos. Como usamos a relação  $v = \omega r$  na dedução da Eq. 10-34,  $\omega$  deve estar expressa em radianos por unidade de tempo. A unidade de  $I$  do SI é o quilograma-metro quadrado ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ).

**O Plano.** Se temos algumas partículas e um eixo de rotação conhecido, calculamos  $mr^2$  para cada partícula e somamos os resultados, como na Eq. 10-33, para obter o momento de inércia total  $I$ . Para calcular a energia cinética de rotação, substituímos esse valor de  $I$  na Eq. 10-34. Esse é o plano no caso de um número relativamente pequeno de partículas. Suponha, porém, que se trate de um corpo, como uma barra de ferro, com um número muito grande de partículas. No próximo módulo, vamos ver como é possível tratar o caso de *corpos sólidos* e executar o cálculo em poucos minutos.

A Eq. 10-34, que permite calcular a energia cinética de um corpo rígido em rotação pura, é a equivalente angular da expressão  $K = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2$ , usada para calcular a energia cinética de um corpo rígido em translação pura. As duas expressões envolvem um fator de  $\frac{1}{2}$ . Enquanto a massa  $M$  aparece em uma das equações,  $I$  (que envolve tanto a massa quanto a distribuição de massa) aparece na outra. Finalmente, cada equação contém como fator o quadrado de uma velocidade, de translação ou de rotação, dependendo do caso. As energias cinéticas de translação e de rotação não são tipos diferentes de energia: ambas são energias cinéticas, expressas na forma apropriada ao movimento em questão.

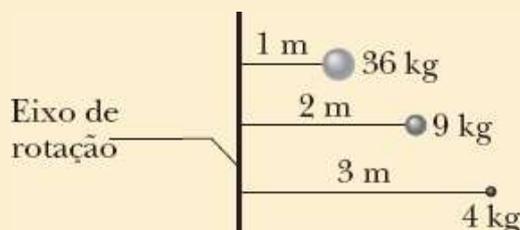
Observamos anteriormente que o momento de inércia de um corpo em rotação não envolve apenas a massa do corpo, mas também a forma como a massa está distribuída. Aqui está um exemplo que você pode literalmente sentir. Faça girar uma barra comprida e relativamente pesada (uma barra de ferro, por exemplo), primeiro em torno do eixo central (longitudinal) (Fig. 10-11a) e depois em torno de um eixo perpendicular à barra passando pelo centro (Fig. 10-11b). As duas rotações envolvem a mesma massa, mas é muito mais fácil executar a primeira rotação que a segunda. A razão é que os átomos da barra estão muito mais próximos do eixo na primeira rotação. Em consequência, o momento de inércia da barra é muito menor na situação da Fig. 10-11a que na da Fig. 10-11b. Quanto menor o momento de inércia, mais fácil é executar uma rotação.



**Figura 10-11** É muito mais fácil fazer girar uma barra comprida em torno (a) do eixo central (longitudinal) do que (b) de um eixo passando pelo centro e perpendicular à maior dimensão da barra. A razão para a diferença é que as massas dos átomos da barra estão mais próximas do eixo de rotação em (a) do que em (b).

#### ✓ Teste 4

A figura mostra três pequenas esferas que giram em torno de um eixo vertical. A distância perpendicular entre o eixo e o centro de cada esfera é dada. Ordene as três esferas de acordo com o momento de inércia em torno do eixo, começando pelo maior.



## 10-5 CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

**10.20** Calcular o momento de inércia de um dos corpos que aparecem na Tabela 10-2.

**10.21** Calcular o momento de inércia de um corpo por integração a partir dos elementos de massa do corpo.

**10.22** Aplicar o teorema dos eixos paralelos no caso de um eixo de rotação que não passa pelo centro de massa do corpo.

### Ideias-Chave

- $I$  é o momento de inércia de um corpo, definido como

$$I = \sum m_i r_i^2$$

para um conjunto de partículas isoladas e como

$$I = \int r^2 dm$$

para um corpo com uma distribuição contínua de massa. Os símbolos  $r_i$  e  $r$  nessas expressões representam a distância perpendicular entre o eixo de rotação e uma partícula ou um elemento de massa do corpo, e, no caso de  $r$ , a integração se estende a todos os elementos de massa do corpo.

• O teorema dos eixos paralelos relaciona o momento de inércia  $I$  de um corpo em relação a um eixo qualquer ao momento de inércia do mesmo corpo em relação a um eixo paralelo ao primeiro que passa pelo centro de massa:

$$I = I_{\text{CM}} + Mh^2.$$

Aqui,  $h$  é a distância perpendicular entre os dois eixos, e  $I_{\text{CM}}$  é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa pelo centro de massa. Podemos dizer que  $h$  é uma medida do deslocamento do eixo de rotação em relação ao eixo que passa pelo centro de massa.

---

## Cálculo do Momento de Inércia

Se um corpo rígido contém um número pequeno de partículas, podemos calcular o momento de inércia em torno de um eixo de rotação usando a Eq. 10-33 ( $I = \sum m_i r_i^2$ ), ou seja, podemos calcular o produto  $mr^2$  para cada partícula e somar os produtos. (Lembre-se de que  $r$  é a distância perpendicular de uma partícula ao eixo de rotação.)

Quando um corpo rígido contém um número muito grande de partículas muito próximas umas das outras (é *contínuo*, como um disco de plástico), usar a Eq. 10-33 torna-se impraticável. Em vez disso, substituímos o somatório da Eq. 10-33 por uma integral e definimos o momento de inércia do corpo como

$$I = \int r^2 dm \quad (\text{momento de inércia, corpo contínuo}). \quad (10-35)$$

A Tabela 10-2 mostra o resultado dessa integração para nove formas geométricas comuns e para os eixos de rotação indicados.

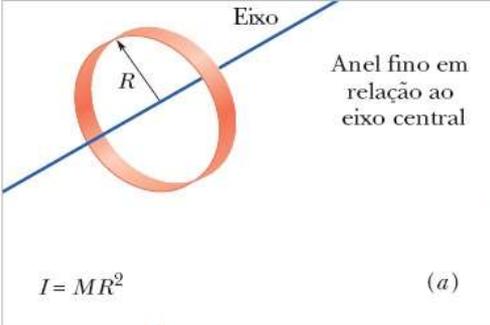
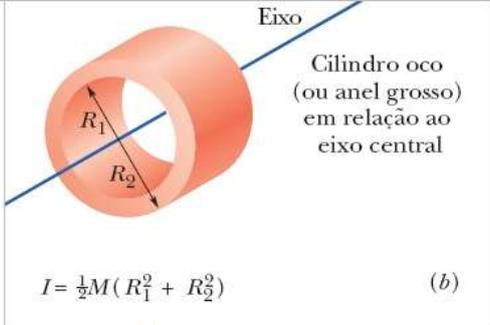
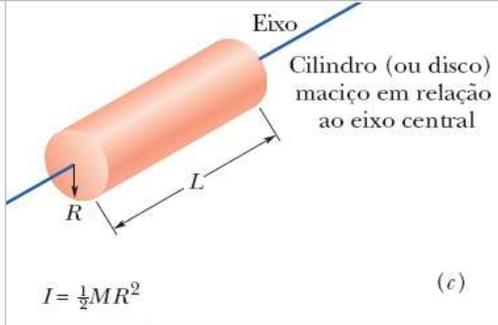
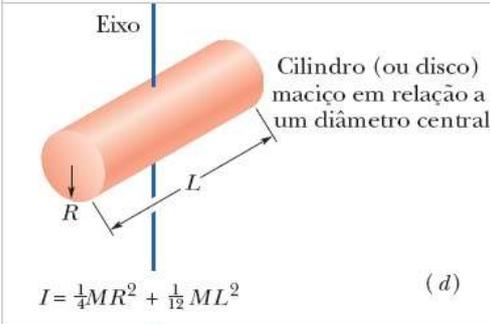
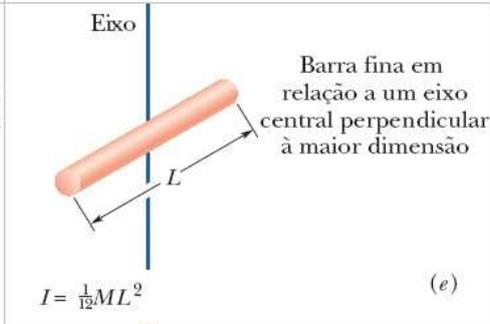
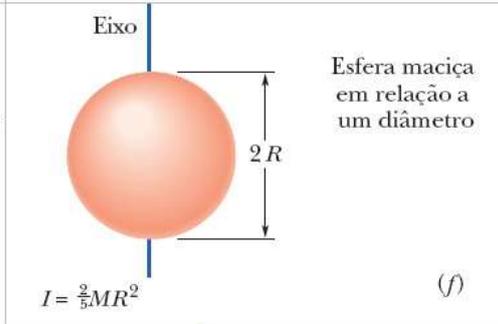
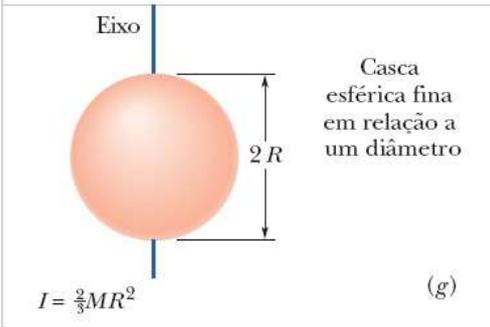
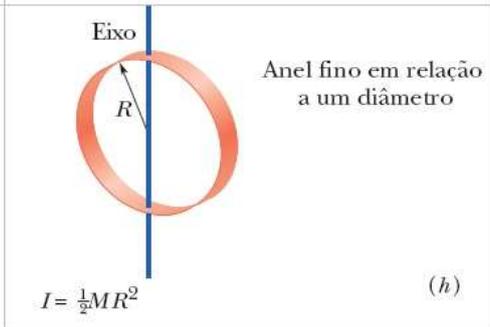
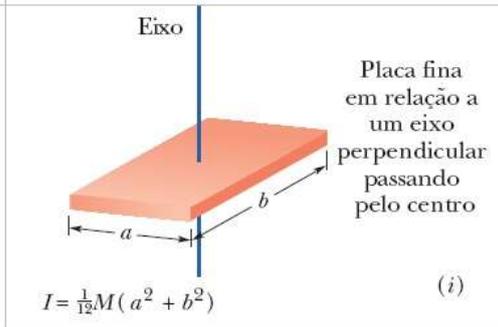
## Teorema dos Eixos Paralelos

Suponha que estamos interessados em determinar o momento de inércia  $I$  de um corpo de massa  $M$  em relação a um eixo dado. Em princípio, podemos calcular o valor de  $I$  usando a integral da Eq. 10-35. Contudo, o problema fica mais fácil se conhecemos o momento de inércia  $I_{\text{CM}}$  do corpo em relação a um eixo *paralelo* ao eixo desejado, passando pelo centro de massa. Seja  $h$  a distância perpendicular entre o eixo dado e o eixo que passa pelo centro de massa (lembre-se de que os dois eixos devem ser paralelos). Nesse caso, o momento de inércia  $I$  em relação ao eixo dado é

$$I = I_{\text{CM}} + Mh^2 \quad (\text{teorema dos eixos paralelos}). \quad (10-36)$$

Podemos dizer que  $h$  é uma medida do deslocamento do eixo de rotação em relação ao eixo que passa pelo centro de massa. A Eq. 10-36, conhecida como **teorema dos eixos paralelos**, será demonstrada a seguir.

**Tabela 10-2 Alguns Momentos de Inércia**

 <p>Anel fino em relação ao eixo central</p> <p><math>I = MR^2</math> (a)</p>	 <p>Cilindro oco (ou anel grosso) em relação ao eixo central</p> <p><math>I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)</math> (b)</p>	 <p>Cilindro (ou disco) maciço em relação ao eixo central</p> <p><math>I = \frac{1}{2}MR^2</math> (c)</p>
 <p>Cilindro (ou disco) maciço em relação a um diâmetro central</p> <p><math>I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2</math> (d)</p>	 <p>Barra fina em relação a um eixo central perpendicular à maior dimensão</p> <p><math>I = \frac{1}{12}ML^2</math> (e)</p>	 <p>Esfera maciça em relação a um diâmetro</p> <p><math>I = \frac{2}{5}MR^2</math> (f)</p>
 <p>Casca esférica fina em relação a um diâmetro</p> <p><math>I = \frac{2}{3}MR^2</math> (g)</p>	 <p>Anel fino em relação a um diâmetro</p> <p><math>I = \frac{1}{2}MR^2</math> (h)</p>	 <p>Placa fina em relação a um eixo perpendicular passando pelo centro</p> <p><math>I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)</math> (i)</p>

### Demonstração do Teorema dos Eixos Paralelos

Seja  $O$  o centro de massa de um corpo de forma arbitrária cuja seção reta aparece na Fig. 10-12. Escolha o ponto  $O$  para origem do sistema de coordenadas. Considere um eixo passando por  $O$  e perpendicular ao plano do papel e outro eixo passando pelo ponto  $P$  e paralelo ao primeiro eixo. Suponha que as coordenadas  $x$  e  $y$  do ponto  $P$  sejam  $a$  e  $b$ , respectivamente.

Seja  $dm$  um elemento de massa de coordenadas genéricas  $x$  e  $y$ . De acordo com a Eq. 10-35, o momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa por  $P$  é dado por

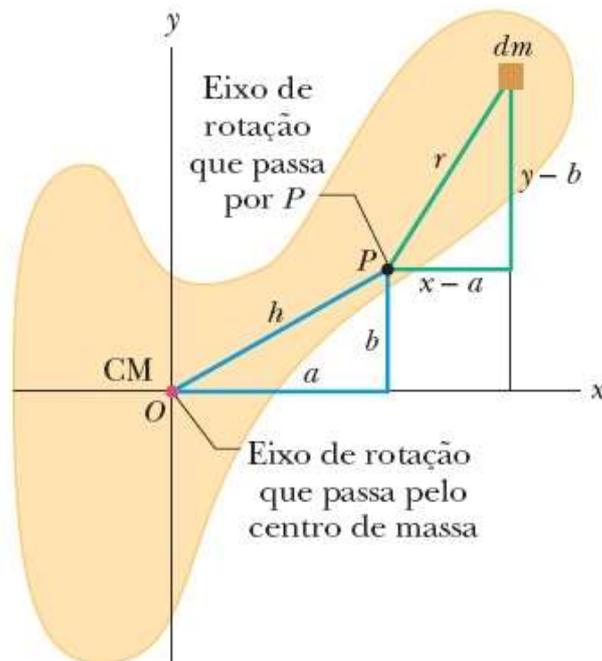
$$I = \int r^2 dm = \int [(x - a)^2 + (y - b)^2] dm,$$

que pode ser escrita na forma

$$I = \int (x^2 + y^2) dm - 2a \int x dm - 2b \int y dm + \int (a^2 + b^2) dm. \quad (10-37)$$

De acordo com a definição de centro de massa (Eq. 9-9), as duas integrais do meio da Eq. 10-37 são as coordenadas do centro de massa (multiplicadas por constantes) e, portanto, devem ser nulas. Como  $x^2 + y^2 = R^2$ , em que  $R$  é a distância de  $O$  a  $dm$ , a primeira integral é simplesmente  $I_{CM}$ , o momento de inércia do corpo em relação a um eixo passando pelo centro de massa. Observando a Fig. 10-12, vemos que o último termo da Eq. 10-37 é  $Mh^2$ , em que  $M$  é a massa total do corpo. Assim, a Eq. 10-37 se reduz à Eq. 10-36, que é a relação que queríamos demonstrar.

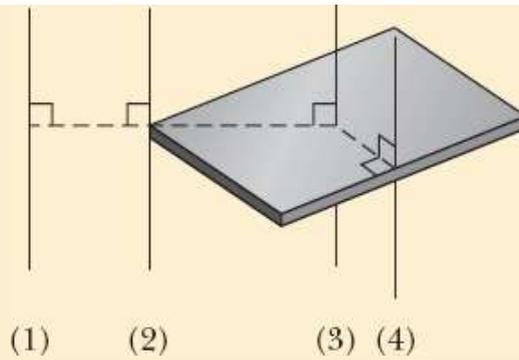
Estamos interessados em relacionar o momento de inércia em relação ao eixo que passa por  $P$  ao momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo CM.



**Figura 10-12** Seção transversal de um corpo rígido, com o centro de massa em  $O$ . O teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36) relaciona o momento de inércia do corpo em relação a um eixo passando por  $O$  ao momento de inércia em relação a um eixo paralelo ao primeiro passando por um ponto  $P$  situado a uma distância  $h$  do centro de massa. Os dois eixos são perpendiculares ao plano da figura.

### ☑ Teste 5

A figura mostra um livro e quatro eixos de rotação, todos perpendiculares à capa do livro. Ordene os eixos de acordo com o momento de inércia do objeto em relação ao eixo, começando pelo maior.



### Exemplo 10.06 Momento de inércia de um sistema de duas partículas

A Fig. 10-13a mostra um corpo rígido composto por duas partículas de massa  $m$  ligadas por uma barra de comprimento  $L$  e massa desprezível.

(a) Qual é o momento de inércia  $I_{\text{CM}}$  em relação a um eixo passando pelo centro de massa e perpendicular à barra, como mostra a figura?

#### IDEIA-CHAVE

Como temos apenas duas partículas com massa, podemos calcular o momento de inércia  $I_{\text{CM}}$  do corpo usando a Eq. 10-33.

**Cálculos:** Para as duas partículas, ambas a uma distância perpendicular  $L/2$  do eixo de rotação, temos:

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i r_i^2 = (m)\left(\frac{1}{2}L\right)^2 + (m)\left(\frac{1}{2}L\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}mL^2. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o momento de inércia  $I$  do corpo em relação a um eixo passando pela extremidade esquerda da barra e paralelo ao primeiro eixo (Fig. 10-13b)?

#### IDEIAS-CHAVE

Essa situação é tão simples que podemos determinar  $I$  usando duas técnicas. A primeira é semelhante à que foi usada no item (a). A outra, mais geral, envolve o uso do teorema dos eixos paralelos.

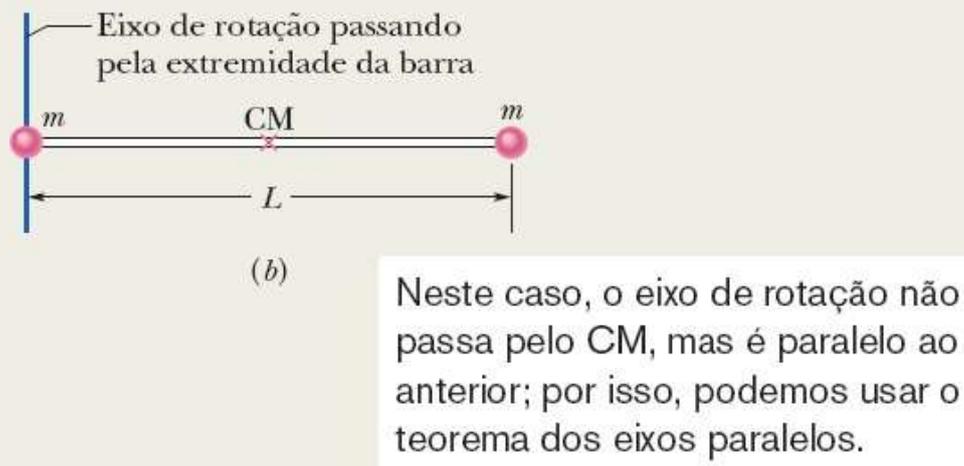
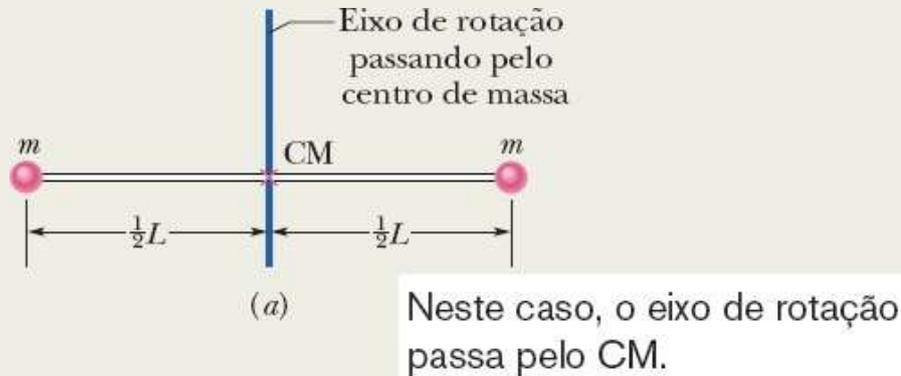
**Primeira técnica:** Calculamos  $I$  como no item (a), exceto pelo fato de que, agora, a distância perpendicular  $r_i$  é zero para a partícula da esquerda e  $L$  para a partícula da direita. De acordo com a Eq. 10-33,

$$I = m(0)^2 + mL^2 = mL^2. \quad \text{(Resposta)}$$

**Segunda técnica:** Como já conhecemos  $I_{\text{CM}}$ , o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa, e como

o eixo especificado é paralelo a esse “eixo do CM”, podemos usar o teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36). Temos

$$I = I_{CM} + Mh^2 = \frac{1}{2}mL^2 + (2m)\left(\frac{1}{2}L\right)^2 = mL^2. \quad (\text{Resposta})$$



**Figura 10-13** Um corpo rígido composto por duas partículas de massa  $m$  unidas por uma barra de massa desprezível.

### Exemplo 10.07 Momento de inércia de uma barra homogênea, calculado por integração

A Fig. 10-14 mostra uma barra fina, homogênea, de massa  $M$  e comprimento  $L$ , e um eixo  $x$  ao longo da barra cuja origem coincide com o centro da barra.

(a) Qual é o momento de inércia da barra em relação a um eixo perpendicular à barra passando pelo centro?

#### IDEIAS-CHAVE

(1) A barra é formada por um número muito grande de partículas, a um número muito grande de distâncias diferentes do eixo de rotação. Certamente não podemos calcular o momento de inércia de cada uma dessas partículas e somar os resultados. O que fazemos é escrever uma expressão geral para o momento de inércia de um elemento de massa  $dm$  situado a uma distância  $r$  do eixo de rotação:  $r^2 dm$ . (2) Em seguida, somamos os momentos de inércia de todos os elementos de massa da barra integrando a expressão (em vez de somar os elementos um a um). Para isso, usamos a Eq. 10-35:

$$I = \int r^2 dm. \quad (10-38)$$

(3) Como a barra é homogênea e o eixo de rotação está no centro, o centro de massa coincide com o centro geométrico. Assim, o momento de inércia pedido é  $I_{CM}$ .

**Cálculos:** Como queremos integrar em relação à coordenada  $x$  e não em relação à massa  $m$ , como na integral da Eq. 10-38, devemos relacionar a massa  $dm$  de um elemento da barra a um elemento de distância  $dx$  ao longo da barra. (Um desses elementos é mostrado na Fig. 10-14.) Como a barra é homogênea, a razão entre massa e comprimento é a mesma para todos os elementos e para a barra como um todo, de modo que podemos escrever

$$\frac{\text{elemento de massa } dm}{\text{elemento de comprimento } dx} = \frac{\text{massa da barra } M}{\text{comprimento da barra } L}$$

ou

$$dm = \frac{M}{L} dx.$$

Podemos agora substituir  $dm$  por esse valor e  $r$  por  $x$  na Eq. 10-38. Em seguida, integramos de uma extremidade a outra da barra (de  $x = -L/2$  a  $x = L/2$ ) para levar em conta todos os elementos. Temos:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=-L/2}^{x=+L/2} x^2 \left( \frac{M}{L} \right) dx \\ &= \frac{M}{3L} \left[ x^3 \right]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{M}{3L} \left[ \left( \frac{L}{2} \right)^3 - \left( -\frac{L}{2} \right)^3 \right] \\ &= \frac{1}{12} ML^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

(b) Qual é o momento de inércia  $I$  da barra em relação a um novo eixo perpendicular à barra passando pela extremidade esquerda?

### IDEIAS-CHAVE

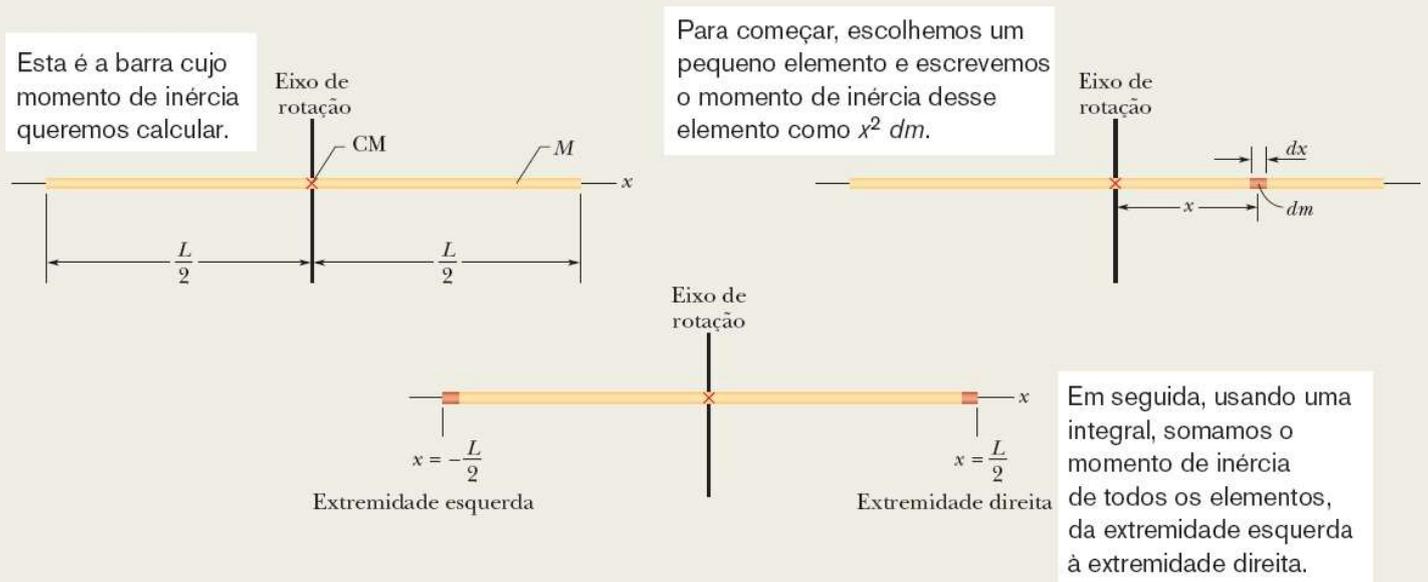
Poderíamos calcular  $I$  mudando a origem do eixo  $x$  para a extremidade esquerda da barra e integrando de  $x = 0$  a  $x = L$ . Entretanto, vamos usar uma técnica mais geral (e mais simples), que envolve o uso do teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36).

**Cálculos:** Colocando o eixo na extremidade esquerda da barra e mantendo-o paralelo ao eixo que passa pelo centro de massa, podemos usar o teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36). De acordo com o item (a),  $I_{CM} = ML^2/12$ . Como mostra a Fig. 10-14, a distância perpendicular  $h$  entre o novo eixo de rotação e o centro de massa é  $L/2$ . Substituindo esses valores na Eq. 10-36, temos:

$$\begin{aligned} I &= I_{CM} + Mh^2 = \frac{1}{12} ML^2 + (M)\left(\frac{1}{2}L\right)^2 \\ &= \frac{1}{3} ML^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Na verdade, o mesmo resultado é obtido para qualquer eixo perpendicular à barra passando pela extremidade esquerda ou direita,

seja ou não paralelo ao eixo da Fig. 10-14.



**Figura 10-14** Uma barra homogênea de comprimento  $L$  e massa  $M$ . Um elemento de massa  $dm$  e comprimento  $dx$  está representado na figura.

### Exemplo 10.08 Energia cinética de rotação em um teste explosivo

As peças de máquinas que serão submetidas constantemente a rotações em alta velocidade costumam ser testadas em um *sistema de ensaio de rotação*. Nesse tipo de sistema, a peça é posta para girar rapidamente no interior de uma montagem cilíndrica de tijolos de chumbo com um revestimento de contenção, tudo isso dentro de uma câmara de aço fechada por uma tampa lacrada. Se a rotação faz a peça se estilhaçar, os tijolos de chumbo, sendo macios, capturam os fragmentos para serem posteriormente analisados.

Em 1985, a empresa Test Devices, Inc. ([www.testdevices.com](http://www.testdevices.com)) estava testando um rotor de aço maciço, em forma de disco, com massa  $M = 272$  kg e raio  $R = 38,0$  cm. Quando a peça atingiu uma velocidade angular  $\omega$  de 14.000 rev/min, os engenheiros que realizavam o ensaio ouviram um ruído seco na câmara, que ficava um andar abaixo e a uma sala de distância. Na investigação, descobriram que tijolos de chumbo haviam sido lançados no corredor que levava à sala de testes, uma das portas da sala havia sido arremessada no estacionamento do lado de fora do prédio, um tijolo de chumbo havia atravessado a parede e invadido a cozinha de um vizinho, as vigas estruturais do edifício do teste tinham sido danificadas, o chão de concreto abaixo da câmara de ensaios havia afundado cerca de 0,5 cm e a tampa de 900 kg tinha sido lançada para cima, atravessara o teto e caíra de volta, destruindo o equipamento de ensaio (Fig. 10-15). Os fragmentos da explosão só não penetraram na sala dos engenheiros por pura sorte.

Qual foi a energia liberada pela explosão do rotor? 

### IDEIA-CHAVE

A energia liberada foi igual à energia cinética de rotação  $K$  do rotor no momento em que a velocidade angular era 14.000 rev/min.



Courtesy Test Devices, Inc.

**Figura 10-15** Parte da destruição causada pela explosão de um disco de aço em alta rotação.

**Cálculos:** Podemos calcular  $K$  usando a Eq. 10-34 ( $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ ), mas, para isso, precisamos conhecer o momento de inércia  $I$ . Como o rotor era um disco que girava como um carrossel,  $I$  é dado pela expressão apropriada da Tabela 10-2c ( $I = \frac{1}{2}MR^2$ ). Assim, temos:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}(272 \text{ kg})(0,38 \text{ m})^2 = 19,64 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

A velocidade angular do rotor era

$$\begin{aligned}\omega &= (14\,000 \text{ rev/min})(2\pi \text{ rad/rev})\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) \\ &= 1,466 \times 10^3 \text{ rad/s}.\end{aligned}$$

Podemos usar a Eq. 10-34 para escrever

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(19,64 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(1,466 \times 10^3 \text{ rad/s})^2 \\ &= 2,1 \times 10^7 \text{ J}.\end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

## 10-6 TORQUE

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

- 10.23** Saber que o torque aplicado a um corpo depende de uma força e de um vetor posição, que liga um eixo de rotação ao ponto onde a força é aplicada.
- 10.24** Calcular o torque usando (a) o ângulo entre o vetor posição e o vetor força, (b) a linha de ação e o braço de alavanca da força e (c) a componente da força perpendicular ao vetor posição.
- 10.25** Saber que, para calcular um torque, é preciso conhecer o eixo de rotação.

**10.26** Saber que um torque pode ser positivo ou negativo, dependendo do sentido da rotação que o corpo tende a sofrer sob a ação do torque: “os relógios são negativos”.

**10.27** Calcular o torque resultante quando um corpo está submetido a mais de um torque.

## Ideias-Chave

• O torque é uma tendência de rotação ou torção em torno de um eixo que um corpo sofre quando é submetido a uma força  $\vec{F}$ . Se a força  $\vec{F}$  é aplicada em um ponto dado por um vetor posição  $\vec{r}$  em relação ao eixo, o módulo do torque é

$$\tau = rF_t = r_{\perp}F = rF \sin \phi,$$

em que  $F_t$  é a componente de  $\vec{F}$  perpendicular a  $\vec{r}$  e  $\phi$  é o ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ . A grandeza  $r_{\perp}$  é a distância perpendicular entre o eixo de rotação e uma reta que passa pelo vetor  $\vec{F}$ . Essa reta é chamada de linha de ação de  $\vec{F}$ , e  $r_{\perp}$  é chamada de braço de alavanca de  $\vec{F}$ . Da mesma forma,  $r$  é o braço de alavanca de  $F_t$ .

• A unidade de torque do SI é o newton-metro (N · m). Um torque  $\tau$  é positivo, se tende a fazer um corpo em repouso girar no sentido anti-horário, e negativo se tende a fazer o corpo girar no sentido horário.

## Torque

A maçaneta de uma porta fica o mais longe possível das dobradiças por uma boa razão. É claro que, para abrir uma porta pesada, é preciso fazer uma certa força, mas isso não é tudo. O ponto de aplicação e a direção da força também são importantes. Se a força for aplicada mais perto das dobradiças que a maçaneta, ou com um ângulo diferente de  $90^\circ$  em relação ao plano da porta, será preciso usar uma força maior para abrir a porta do que se a força for aplicada à maçaneta, perpendicularmente ao plano da porta.

A Fig. 10-16a mostra a seção reta de um corpo que está livre para girar em torno de um eixo passando por  $O$  e perpendicular à seção reta. Uma força  $\vec{F}$  é aplicada no ponto  $P$ , cuja posição em relação a  $O$  é definida por um vetor posição  $\vec{r}$ . O ângulo entre os vetores  $\vec{F}$  e  $\vec{r}$  é  $\phi$ . (Para simplificar, consideramos apenas forças que não têm componentes paralelas ao eixo de rotação; isso significa que  $\vec{F}$  está no plano do papel.)

Para determinar o modo como  $\vec{F}$  provoca uma rotação do corpo em torno do eixo de rotação, podemos separar a força em duas componentes (Fig. 10-16b). Uma dessas componentes, a *componente radial*  $F_r$ , tem a direção de  $\vec{r}$ . Essa componente não provoca rotações, já que age ao longo de uma reta que passa por  $O$ . (Se você puxar ou empurrar uma porta paralelamente ao plano da porta, a porta não vai girar.) A outra componente de  $\vec{F}$ , a *componente tangencial*  $F_t$ , é perpendicular a  $\vec{r}$  e tem um módulo  $F_t = F \sin \phi$ . Essa componente *provoca* rotações. (Se você puxar ou empurrar uma porta perpendicularmente ao plano da porta, a porta vai girar.)

**Cálculo do Torque.** A capacidade de  $\vec{F}$  de fazer um corpo girar não depende apenas do módulo da componente tangencial  $F_t$ , mas também da distância entre o ponto de aplicação de  $\vec{F}$  e o ponto  $O$ . Para levar em conta os dois fatores, definimos uma grandeza chamada de **torque** ( $\tau$ ) como o produto de ambos:

$$\tau = (r)(F \sin \phi). \quad (10-39)$$

Duas formas equivalentes de calcular o torque são

$$\tau = (r)(F \text{ sen } \phi) = rF_t \quad (10-40)$$

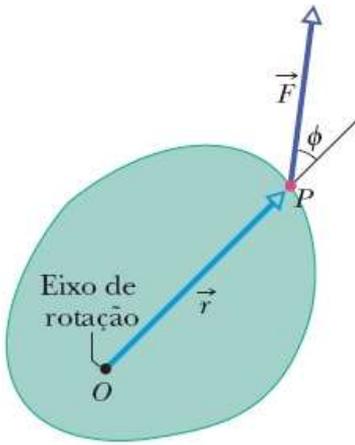
e

$$\tau = (r \text{ sen } \phi)(F) = r_{\perp}F, \quad (10-41)$$

em que  $r_{\perp}$  é a distância perpendicular entre o eixo de rotação que passa por  $O$  e uma reta que coincide com a direção do vetor  $\vec{F}$  (Fig. 10-16c). Essa reta é chamada de **linha de ação** de  $\vec{F}$ , e  $r_{\perp}$  é o **braço de alavanca** de  $\vec{F}$ . A Fig. 10-16b mostra que podemos descrever  $r$ , o módulo de  $\vec{r}$ , como o braço de alavanca de  $F_t$ , a componente tangencial de  $\vec{F}$ .

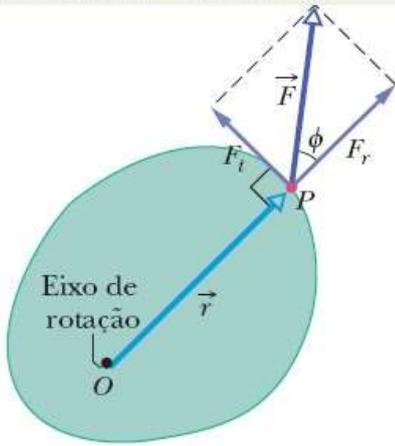
O torque, cujo nome vem de uma palavra em latim que significa “torcer”, pode ser descrito coloquialmente como a ação de girar ou torcer de uma força  $\vec{F}$ . Quando aplicamos uma força a um objeto com uma chave de fenda ou uma chave de grifa com o objetivo de fazer o objeto girar, estamos aplicando um torque. A unidade de torque do SI é o newton-metro ( $\text{N} \cdot \text{m}$ ). *Atenção:* No SI, o trabalho também tem dimensões de newton-metro. Torque e trabalho, contudo, são grandezas muito diferentes, que não devem ser confundidas. O trabalho é normalmente expresso em joules ( $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ ), mas isso nunca acontece com o torque.

**Os Relógios São Negativos.** No próximo capítulo discutiremos o torque como uma grandeza vetorial. No momento, porém, como vamos considerar rotações em torno de um único eixo, não precisamos usar a notação vetorial. Em vez disso, atribuímos ao torque um valor positivo ou negativo, dependendo do sentido da rotação que imprimiria a um corpo inicialmente em repouso. Se o torque faz o corpo girar no sentido anti-horário, o torque é positivo. Se o torque faz o corpo girar no sentido horário, o torque é negativo. (A frase “os relógios são negativos”, do Módulo 10-1, também se aplica neste caso.)



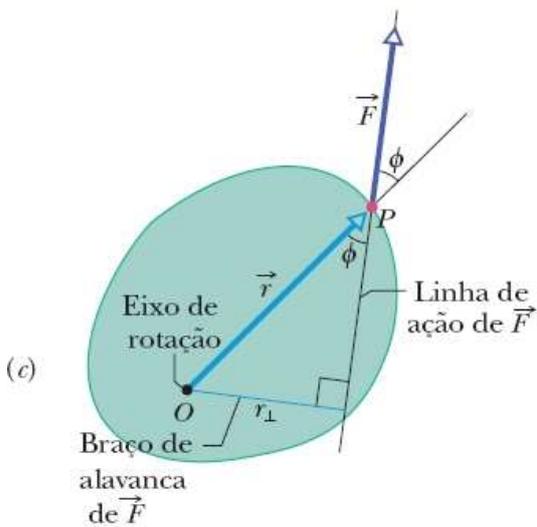
(a)

O torque produzido por essa força faz o corpo girar em torno deste eixo, que é perpendicular ao plano do papel e aponta para fora do papel.



(b)

Na verdade, apenas a componente tangencial da força produz a rotação.



(c)

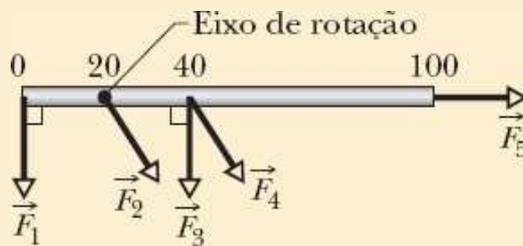
Também podemos calcular o torque usando o módulo da força total e o comprimento do braço de alavanca.

**Figura 10-16** Uma força  $\vec{F}$  age sobre um corpo rígido com um eixo de rotação perpendicular ao plano do papel. O torque pode ser calculado a partir (a) do ângulo  $\phi$ , (b) da componente tangencial da força,  $F_t$ , (c) do braço de alavanca,  $r_{\perp}$ .

O torque obedece ao princípio de superposição que discutimos no Capítulo 5 para o caso das forças: Quando vários torques atuam sobre um corpo, o **torque total** (ou **torque resultante**) é a soma dos torques. O símbolo de torque resultante é  $\tau_{\text{res}}$ .

### ☑ Teste 6

A figura mostra a vista superior de uma régua de um metro que pode girar em torno de um eixo situado na posição 20 (20 cm). As cinco forças aplicadas à régua são horizontais e têm o mesmo módulo. Ordene as forças de acordo com o módulo do torque que produzem, do maior para o menor.



## 10-7 A SEGUNDA LEI DE NEWTON PARA ROTAÇÕES

### Objetivo do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

**10.28** Saber que a segunda lei de Newton para rotações relaciona o torque resultante aplicado a um corpo ao momento de inércia e à aceleração angular do corpo; todas essas grandezas calculadas em relação a um dado eixo de rotação.

### Ideias-Chave

- A segunda lei de Newton para rotações é

$$\tau_{\text{res}} = I\alpha,$$

em que  $\tau_{\text{res}}$  é o torque resultante que age sobre uma partícula ou um corpo rígido,  $I$  é o momento de inércia da partícula ou do corpo e  $\alpha$  é a aceleração angular produzida pelo torque.

## A Segunda Lei de Newton para Rotações

Um torque pode fazer um corpo rígido girar, como acontece, por exemplo, quando abrimos ou fechamos uma porta. No momento, estamos interessados em relacionar o torque resultante  $\tau_{\text{res}}$  aplicado a um corpo rígido à aceleração angular  $\alpha$  produzida pelo torque. Fazemos isso por analogia com a segunda lei de

Newton ( $F_{\text{res}} = ma$ ) para a aceleração  $a$  de um corpo de massa  $m$  produzida por uma força resultante  $F_{\text{res}}$  em uma dada direção. Substituindo  $F_{\text{res}}$  por  $\tau_{\text{res}}$ ,  $m$  por  $I$  e  $a$  por  $\alpha$ , obtemos a seguinte equação:

$$\tau_{\text{res}} = I\alpha \quad (\text{segunda lei de Newton para rotações}). \quad (10-42)$$

### Demonstração da Equação 10-42

Vamos demonstrar a Eq. 10-42 considerando a situação simples que está mostrada na Fig. 10-17, em que o corpo rígido é constituído por uma partícula de massa  $m$  na extremidade de uma barra, de massa desprezível, de comprimento  $r$ . A barra pode se mover apenas girando em torno de um eixo, perpendicular ao plano do papel, que passa pela outra extremidade da barra. Isso significa que a partícula descreve uma trajetória circular com o centro no eixo de rotação.

Uma força  $\vec{F}$  age sobre a partícula. Como, porém, a partícula só pode se mover ao longo de uma trajetória circular, apenas a componente tangencial  $F_t$  da força (a componente que é tangente à trajetória circular) pode acelerar a partícula ao longo da trajetória. Podemos relacionar  $F_t$  à aceleração tangencial  $a_t$  da partícula ao longo da trajetória por meio da segunda lei de Newton, escrevendo

$$F_t = ma_t.$$

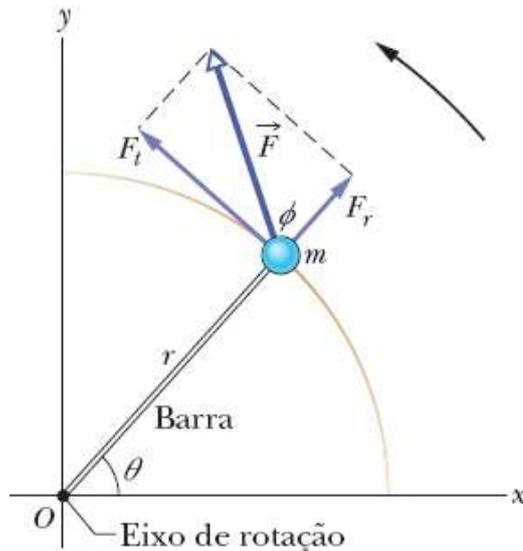
De acordo com a Eq. 10-40, o torque que age sobre a partícula é dado por

$$\tau = F_t r = ma_t r.$$

De acordo com a Eq. 10-22 ( $a_t = \alpha r$ ), temos:

$$\tau = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha. \quad (10-43)$$

O torque associado à componente tangencial da força produz uma aceleração angular em torno do eixo de rotação.



**Figura 10-17** Um corpo rígido simples, livre para girar em torno de um eixo que passa por  $O$ , é formado por uma partícula de massa  $m$  presa na extremidade de uma barra de comprimento  $r$  e massa desprezível. A aplicação de uma força  $\vec{F}$  faz o corpo girar.

A grandeza entre parênteses do lado direito é o momento de inércia da partícula em relação ao eixo de rotação (veja a Eq. 10-33, aplicada a uma única partícula). Assim, a Eq. 10-43 se reduz a

$$\tau = I\alpha \quad (\text{ângulo em radianos}). \quad (10-44)$$

em que  $I$  é o momento de inércia.

Se a partícula estiver submetida a várias forças, podemos generalizar a Eq. 10-44 escrevendo

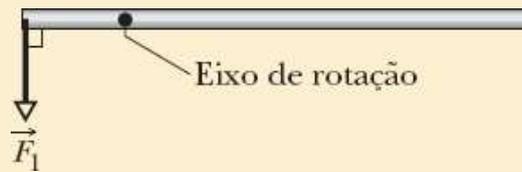
$$\tau_{\text{res}} = I\alpha \quad (\text{ângulo em radianos}), \quad (10-45)$$

que é a equação que queríamos demonstrar. Podemos aplicar essa equação a qualquer corpo rígido girando em torno de um eixo fixo, uma vez que qualquer corpo pode ser considerado um conjunto de partículas.

### ☑ Teste 7

A figura mostra a vista superior de uma régua de um metro que pode girar em torno do ponto indicado, que está à esquerda do ponto médio da régua. Duas forças horizontais,  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , são aplicadas à régua. Apenas  $\vec{F}_1$  é mostrada na figura. A força  $\vec{F}_2$  é perpendicular à régua e é aplicada à extremidade direita. Para que a régua não se mova, (a) qual deve ser o sentido de  $\vec{F}_2$ ? (b)  $F_2$

deve ser maior, menor ou igual a  $F_1$ ?



### Exemplo 10.09 Análise de um golpe de judô usando a segunda lei de Newton para rotações

Para derrubar um adversário de 80 kg com um ippon, você precisa puxar o quimono dele com uma força  $\vec{F}$  e um braço de alavanca  $d_1 = 0,30$  m em relação a um centro de rotação situado no seu quadril direito (Fig. 10-18). Você quer que o adversário gire em torno do centro de rotação com uma aceleração angular  $a = -6,0$  rad/s<sup>2</sup>, ou seja, uma aceleração angular que, na figura, é *no sentido dos ponteiros do relógio*. Suponha que o momento de inércia  $I$  em relação ao centro de rotação é 15 kg · m<sup>2</sup>.

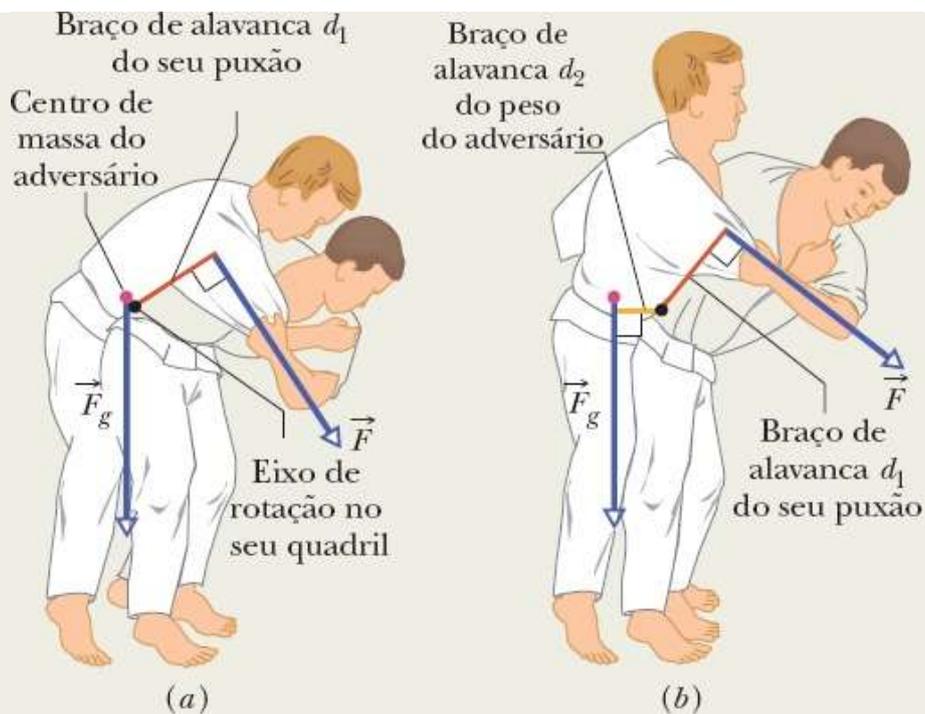
(a) Qual deve ser o módulo de  $\vec{F}$ , se, antes de aplicar o golpe, você inclina o corpo do adversário para a frente, fazendo com que o centro de massa do corpo dele se aproxime do seu quadril (Fig. 10-18a)?

#### IDEIA-CHAVE

Podemos usar a segunda lei de Newton para rotações ( $\tau_{\text{res}} = I\alpha$ ) para relacionar a força  $\vec{F}$  à aceleração angular  $a$ .

**Cálculos:** Quando os pés do seu adversário perdem contato com o tatame, podemos supor que ele está sujeito apenas a três forças: a força  $\vec{F}$  com a qual você está puxando o quimono dele, a força de reação  $\vec{N}$  do seu quadril (que não é mostrada na figura) e a força gravitacional  $\vec{F}_g$ . Para aplicar a equação  $\tau_{\text{res}} = I\alpha$ , precisamos calcular os três torques correspondentes, todos em relação ao centro de rotação.

De acordo com a Eq. 10-41 ( $\tau = r_{\perp}F$ ), o torque produzido pela força  $\vec{F}$  é igual a  $-d_1F$ , em que  $d_1$  é o braço de alavanca  $r_{\perp}$  e o sinal indica que o torque tende a produzir uma rotação no sentido horário. O torque produzido pela força  $\vec{N}$  é zero, já que a linha de ação de  $\vec{N}$  passa pelo centro de rotação e, portanto, nesse caso,  $\vec{F}_g = 0$ .



**Figura 10-18** Um golpe de judô (a) bem executado e (b) mal executado.

Para calcular o torque produzido pela força  $\vec{F}_g$ , podemos supor que  $\vec{F}_g$  está aplicada ao centro de massa do seu adversário. Com o centro de massa coincidindo com o centro de rotação, o braço de alavanca  $r_{\perp}$  de  $\vec{F}_g$  é zero e, portanto, o torque produzido por  $\vec{F}_g$  é zero. Assim, o único torque a que o seu adversário está sujeito é o produzido pela força  $\vec{F}$  do seu puxão, e a equação  $\tau_{\text{res}} = I\alpha$  se torna

$$-d_1 F = I\alpha.$$

Explicitando  $F$ , obtemos

$$F = \frac{-I\alpha}{d_1} = \frac{-(15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(-6,0 \text{ rad/s}^2)}{0,30 \text{ m}} = 300 \text{ N.} \quad (\text{Resposta})$$

(b) Qual deve ser o módulo de  $\vec{F}$ , se o seu adversário permanecer ereto e o braço de alavanca de  $\vec{F}_g$  for  $d_2 = 0,12 \text{ m}$  (Fig. 10-18b)?

### IDEIA-CHAVE

Como, nesse caso, o braço de alavanca de  $\vec{F}_g$  não é zero, a força  $\vec{F}_g$  produz um torque igual a  $d_2 mg$ , que é positivo, pois tende a produzir uma rotação no sentido anti-horário.

**Cálculos:** O torque resultante é

$$-d_1F + d_2mg = I\alpha,$$

que nos dá

$$F = -\frac{I\alpha}{d_1} + \frac{d_2mg}{d_1}.$$

De acordo com o resultado do item (a), o primeiro termo do lado direito é igual a 300 N. Substituindo os outros valores conhecidos, obtemos

$$\begin{aligned} F &= 300 \text{ N} + \frac{(0,12 \text{ m})(80 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)}{0,30 \text{ m}} \\ &= 613,6 \text{ N} \approx 610 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

O resultado mostra que agora você tem que fazer muito mais força do que se o centro de gravidade do adversário estivesse próximo do seu quadril. Os bons lutadores de judô sabem aplicar corretamente esse golpe. Na verdade, todos os golpes das artes marciais, que foram aperfeiçoados empiricamente ao longo de séculos, podem ser explicados à luz dos princípios da física.

### Exemplo 10.10 Segunda lei de Newton, rotação, torque, disco

A Fig. 10-19a mostra um disco homogêneo, de massa  $M = 2,5 \text{ kg}$  e raio  $R = 20 \text{ cm}$ , montado em um eixo horizontal fixo. Um bloco de massa  $m = 1,2 \text{ kg}$  está pendurado por uma corda, de massa desprezível, enrolada na borda do disco. Determine a aceleração do bloco em queda, a tração da corda e a aceleração angular do disco. A corda não escorrega e o atrito no eixo é desprezível.

#### IDEIAS-CHAVE

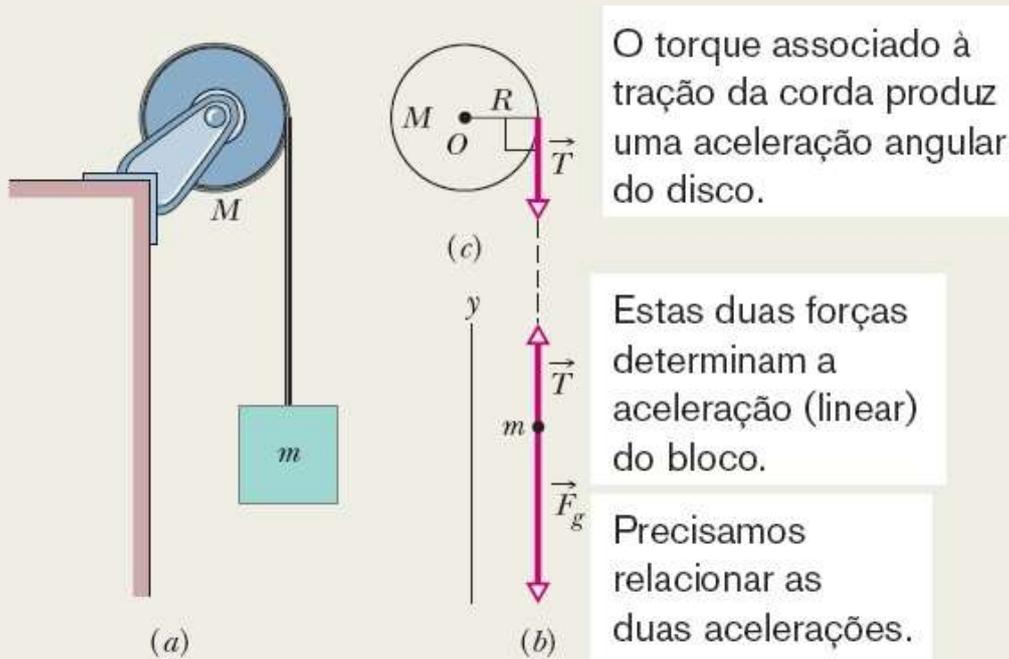
(1) Considerando o bloco como um sistema, podemos relacionar a aceleração  $a$  às forças que agem sobre o bloco por meio da segunda lei de Newton ( $\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}$ ). (2) Considerando o disco como um sistema, podemos relacionar a aceleração angular  $\alpha$  ao torque que age sobre o disco por meio da segunda lei de Newton para rotações ( $\tau_{\text{res}} = I\alpha$ ). (3) Para combinar os movimentos do bloco e do disco, usamos o fato de que a aceleração linear  $a$  do bloco e a aceleração linear (tangencial)  $a_t$  da borda do disco são iguais. (Para não fazer confusão com os sinais, vamos trabalhar com o módulo das acelerações e sinais algébricos explícitos.)

**Forças que agem sobre o bloco:** Essas forças estão representadas no diagrama de corpo livre do bloco (Fig. 10-19b): a força da corda é  $\vec{T}$  e a força gravitacional é  $\vec{F}_g$ , de módulo  $mg$ . Aplicando a segunda lei de Newton às componentes ao longo de um eixo vertical  $y$  ( $F_{\text{res},y} = ma_y$ ), obtemos a seguinte equação:

$$T - mg = m(-a), \quad (10-46)$$

em que  $a$  é o módulo da aceleração (que aponta no sentido negativo do eixo  $y$ ). Entretanto, não podemos obter o valor de  $a$  usando apenas essa equação porque ela também contém a incógnita  $T$ .

**Torque exercido sobre o disco:** Anteriormente, quando esgotávamos as possibilidades com o eixo  $y$ , passávamos para o eixo  $x$ . Aqui, passamos para a rotação do disco e usamos a segunda lei de Newton para rotações. Para calcular os torques e o momento de inércia  $I$ , usamos o fato de que o eixo de rotação é perpendicular ao disco e passa pelo centro do disco, que é o ponto  $O$  da Fig. 10-19c.



**Figura 10-19** (a) O bloco em queda faz o disco girar. (b) Diagrama de corpo livre do bloco. (c) Diagrama de corpo livre incompleto do disco.

Os torques são dados pela Eq. 10-40 ( $\tau = rF_t$ ). A força gravitacional e a força do eixo agem sobre o centro do disco e, portanto, a uma distância  $r = 0$ , de modo que o torque produzido por essas forças é nulo. A força  $\vec{T}$  exercida pela corda sobre o disco age a uma distância  $r = R$  do eixo e é tangente à borda do disco. Assim, a força produz um torque  $-RT$ , negativo porque o torque tende a fazer o disco girar no sentido horário. De acordo com a Tabela 10-2c, o momento de inércia  $I$  do disco é  $MR^2/2$ . Assim, a equação  $\tau_{\text{res}} = I\alpha$  se torna

$$-RT = \frac{1}{2}MR^2(-\alpha). \quad (10-47)$$

Essa equação pode parecer inútil porque tem duas incógnitas,  $a$  e  $T$ , nenhuma das quais é a incógnita  $a$  cujo valor queremos determinar. Entretanto, com a persistência que é a marca registrada dos físicos, conseguimos torná-la útil quando nos lembramos de um fato: Como a corda não escorrega, a aceleração linear  $a$  do bloco e a aceleração linear (tangencial)  $a_t$  de um ponto na borda do disco são iguais. Nesse caso, de acordo com a Eq. 10-22 ( $a_t = ar$ ), vemos que  $a = a/R$ . Substituindo esse valor na Eq. 10-47, obtemos:

$$T = \frac{1}{2}Ma. \quad (10-48)$$

**Combinação dos resultados:** Combinando as Eqs. 10-46 e 10-48, obtemos:

$$\begin{aligned} a &= g \frac{2m}{M + 2m} = (9,8 \text{ m/s}^2) \frac{(2)(1,2 \text{ kg})}{2,5 \text{ kg} + (2)(1,2 \text{ kg})} \\ &= 4,8 \text{ m/s}^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Podemos usar a Eq. 10-48 para calcular  $T$ :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}Ma = \frac{1}{2}(2,5 \text{ kg})(4,8 \text{ m/s}^2) \\ &= 6,0 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Como era de se esperar, a aceleração  $a$  do bloco que cai é menor que  $g$  e a tração  $T$  da corda ( $= 6,0 \text{ N}$ ) é menor que a força gravitacional que age sobre o bloco ( $= mg = 11,8 \text{ N}$ ). Vemos também que  $a$  e  $T$  dependem da massa do disco, mas não do raio.

A título de verificação, notamos que as expressões obtidas se reduzem  $a = g$  e  $T = 0$  no caso de um disco de massa desprezível ( $M = 0$ ). Isso é razoável, pois, nesse caso, o bloco simplesmente cai em queda livre. De acordo com a Eq. 10-22, a aceleração angular do disco é

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{4,8 \text{ m/s}^2}{0,20 \text{ m}} = 24 \text{ rad/s}^2. \quad (\text{Resposta})$$

## 10-8 TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

- 10.29** Calcular o trabalho realizado por um torque aplicado a um corpo integrando o torque em relação ao ângulo de rotação do corpo.
- 10.30** Usar o teorema do trabalho e energia cinética para relacionar o trabalho realizado por um torque à variação da energia cinética de rotação do corpo.
- 10.31** Calcular o trabalho realizado por um torque *constante* relacionando o trabalho ao ângulo de rotação do corpo.
- 10.32** Calcular a potência desenvolvida por um torque determinando a taxa de variação do trabalho realizado pelo torque.
- 10.33** Calcular a potência desenvolvida por um torque em um dado instante a partir do valor do torque e a velocidade angular nesse instante.

### Ideias-Chave

- As equações usadas para calcular o trabalho e a potência para movimentos de rotação são análogas às equações para movimentos de translação e são as seguintes:

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega.$$

e

- Para  $\tau$  constante, a integral se reduz a

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i).$$

- No caso de rotações, o teorema do trabalho e energia cinética assume a seguinte forma:

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = W.$$

## Trabalho e Energia Cinética de Rotação

Como foi visto no Capítulo 7, quando uma força  $F$  acelera um corpo rígido de massa  $m$ , a força realiza um trabalho  $W$  sobre o corpo. Isso significa que a energia cinética do corpo ( $K = \frac{1}{2}mv^2$ ) pode mudar. Suponha que essa seja a única energia do corpo que muda. Nesse caso, podemos relacionar a variação  $\Delta K$  da energia cinética ao trabalho  $W$  por meio do teorema do trabalho e energia cinética (Eq. 7-10), escrevendo

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = W \text{ (teorema do trabalho e energia cinética)}. \quad (10-49)$$

Para um movimento restrito a um eixo  $x$ , podemos calcular o trabalho utilizando a Eq. 7-32,

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F dx \quad (\text{trabalho, movimento unidimensional}). \quad (10-50)$$

A Eq. 10-50 se reduz a  $W = Fd$  quando  $F$  é constante e o deslocamento do corpo é  $d$ . A taxa com a qual o trabalho é realizado é a potência, que pode ser calculada usando as Eqs. 7-43 e 7-48,

$$P = \frac{dW}{dt} = Fv \quad (\text{potência, movimento unidimensional}). \quad (10-51)$$

Vamos considerar uma situação análoga para rotações. Quando um torque acelera um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo, o torque realiza um trabalho  $W$  sobre o corpo. Isso significa que a energia cinética rotacional do corpo ( $K = I\omega^2$ ) pode mudar. Suponha que essa seja a única energia do corpo que muda. Nesse caso, podemos relacionar a variação  $\Delta K$  da energia cinética ao trabalho  $W$  por meio do teorema do trabalho e energia cinética, com a diferença de que, agora, a energia cinética é uma energia cinética rotacional:

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = W \text{ (teorema do trabalho e energia cinética)}. \quad (10-52)$$

Aqui,  $I$  é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo fixo e  $\omega_i$  e  $\omega_f$  são as velocidades angulares do corpo antes e depois que o trabalho é realizado.

Podemos calcular o trabalho executado durante uma rotação usando uma equação análoga à Eq. 10-50,

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta \quad (\text{trabalho, rotação em torno de um eixo fixo}), \quad (10-53)$$

em que  $\tau$  é o torque responsável pelo trabalho  $W$ , e  $\theta_i$  e  $\theta_f$  são, respectivamente, a posição angular do corpo antes e depois da rotação. Quando  $\tau$  é constante, a Eq. 10-53 se reduz a

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) \quad (\text{trabalho, torque constante}). \quad (10-54)$$

A taxa com a qual o trabalho é realizado é a potência, que pode ser calculada usando uma equação equivalente à Eq. 10-51,

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega \quad (\text{potência, rotação em torno de um eixo fixo}). \quad (10-55)$$

A Tabela 10-3 mostra as equações que descrevem o movimento de translação de um corpo rígido e as equações correspondentes para o movimento de rotação.

### Demonstração das Eqs. 10-52 a 10-55

Vamos considerar novamente a situação da Fig. 10-17, na qual uma força  $\vec{F}$  faz girar um corpo rígido composto por uma partícula de massa  $m$  presa à extremidade de uma barra, de massa desprezível. Durante a rotação, a força  $\vec{F}$  realiza trabalho sobre o corpo. Vamos supor que a única energia do corpo que varia é a energia cinética. Nesse caso, podemos aplicar o teorema do trabalho e energia cinética da Eq. 10-49:

**Tabela 10-3** Algumas Correspondências entre os Movimentos de Translação e Rotação

Translação Pura (Direção Fixa)		Rotação Pura (Eixo Fixo)	
Posição	$x$	Posição angular	$\theta$
Velocidade	$v = dx/dt$	Velocidade angular	$\omega = d\theta/dt$
Aceleração	$a = dv/dt$	Aceleração angular	$\alpha = d\omega/dt$
Massa	$m$	Momento de inércia	$I$

Segunda lei de Newton	$F_{\text{res}} = ma$	Segunda lei de Newton	$\tau_{\text{res}} = Ia$
Trabalho	$W = \int F dx$	Trabalho	$W = \int \tau d\theta$
Energia cinética	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Energia cinética	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Potência (força constante)	$P = Fv$	Potência (torque constante)	$P = \tau\omega$
Teorema do trabalho e energia cinética	$W = \Delta K$	Teorema do trabalho e energia cinética	$W = \Delta K$

$$\Delta K = K_f - K_i = W. \quad (10-56)$$

Usando a relação  $K = mv^2$  e a Eq. 10-18 ( $v = \omega r$ ), podemos escrever a Eq. 10-56 na forma

$$\Delta K = \frac{1}{2}mr^2\omega_f^2 - \frac{1}{2}mr^2\omega_i^2 = W. \quad (10-57)$$

De acordo com a Eq. 10-33, o momento de inércia do corpo é  $I = mr^2$ . Substituindo esse valor na Eq. 10-57, obtemos

$$\Delta K = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = W,$$

que é a Eq. 10-52. Demonstramos essa equação para uma partícula, mas a mesma equação é válida para qualquer corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo.

Vamos agora relacionar o trabalho  $W$  realizado sobre o corpo da Fig. 10-17 ao torque  $\tau$  exercido sobre o corpo pela força  $\vec{F}$ . Quando a partícula se desloca de uma distância  $ds$  ao longo da trajetória circular, apenas a componente tangencial  $F_t$  da força acelera a partícula ao longo da trajetória. Assim, apenas  $F_t$  realiza trabalho sobre a partícula. Esse trabalho  $dW$  pode ser escrito como  $F_t ds$ . Entretanto, podemos substituir  $ds$  por  $r d\theta$ , em que  $d\theta$  é o ângulo descrito pela partícula. Temos, portanto,

$$dW = F_t r d\theta. \quad (10-58)$$

De acordo com a Eq. 10-40, o produto  $F_t r$  é igual ao torque  $\tau$ , de modo que podemos escrever a Eq. 10-58 na forma

$$dW = \tau d\theta. \quad (10-59)$$

O trabalho realizado em um deslocamento angular finito de  $\theta_i$  para  $\theta_f$  é, portanto,

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta,$$

que é a Eq. 10-53, válida para qualquer corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo. A Eq. 10-54 é

uma consequência direta da Eq. 10-53.

Podemos calcular a potência  $P$  desenvolvida por um corpo em um movimento de rotação a partir da Eq. 10-59:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega,$$

que é a Eq. 10-55.



### Exemplo 10.11 Trabalho, energia cinética de rotação, torque, disco

Suponha que o disco da Fig. 10-19 parte do repouso no instante  $t = 0$ , que a tração da corda, de massa desprezível, é 6,0 N, e que a aceleração angular do disco é  $-24 \text{ rad/s}^2$ . Qual é a energia cinética de rotação  $K$  no instante  $t = 2,5 \text{ s}$ ?

#### IDEIA-CHAVE

Podemos calcular  $K$  usando a Eq. 10-34 ( $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ ). Já sabemos que  $I = \frac{1}{2}MR^2$ , mas ainda não conhecemos o valor de  $\omega$  no instante  $t = 2,5 \text{ s}$ . Entretanto, como a aceleração angular  $\alpha$  tem o valor constante de  $-24 \text{ rad/s}^2$ , podemos aplicar as equações para aceleração angular constante na Tabela 10-1.

**Cálculos:** Como estamos interessados em determinar  $\omega$  e conhecemos  $\alpha$  e  $\omega_0 (= 0)$ , usamos a Eq. 10-12:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t = \alpha t.$$

Fazendo  $\omega = \alpha t$  e  $I = \frac{1}{2}MR^2$  na Eq. 10-34, obtemos

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)(\alpha t)^2 = \frac{1}{4}M(R\alpha t)^2 \\ &= \frac{1}{4}(2,5 \text{ kg})[(0,20 \text{ m})(-24 \text{ rad/s}^2)(2,5 \text{ s})]^2 \\ &= 90 \text{ J.} \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

#### IDEIA-CHAVE

Também podemos obter essa resposta calculando a energia cinética do disco a partir do trabalho realizado sobre o disco.

**Cálculos:** Primeiro, relacionamos a *variação* da energia cinética do disco ao trabalho total  $W$  realizado sobre o disco, utilizando o teorema do trabalho e energia cinética ( $K_f - K_i = W$ ). Substituindo  $K_f$  por  $K$  e  $K_i$  por 0, obtemos

$$K = K_i + W = 0 + W = W. \quad (10-60)$$

Em seguida, precisamos calcular o trabalho  $W$ . Podemos relacionar  $W$  aos torques que atuam sobre o disco usando a Eq. 10-53 ou a Eq. 10-54. O único torque que produz aceleração angular e realiza trabalho é o torque  $\vec{T}$  que a corda exerce sobre o disco,

que é igual a  $-TR$ . Como  $a$  é constante, o torque também é constante. Assim, podemos usar a Eq. 10-54 para escrever

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) = -TR(\theta_f - \theta_i). \quad (10-61)$$

Como  $a$  é constante, podemos usar a Eq. 10-13 para calcular  $\theta_f - \theta_i$ . Com  $\omega_i = 0$ , temos:

$$\theta_f - \theta_i = \omega_i t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2.$$

Podemos substituir esse valor na Eq. 10-61 e substituir o resultado na Eq. 10-60. Com  $T = 6,0 \text{ N}$  e  $a = -24 \text{ rad/s}^2$ , temos:

$$\begin{aligned} K = W &= -TR(\theta_f - \theta_i) = -TR\left(\frac{1}{2}at^2\right) = -\frac{1}{2}TRat^2 \\ &= -\frac{1}{2}(6,0 \text{ N})(0,20 \text{ m})(-24 \text{ rad/s}^2)(2,5 \text{ s})^2 \\ &= 90 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

## Revisão e Resumo

**Posição Angular** Para descrever a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo, chamado **eixo de rotação**, supomos que uma **reta de referência** está fixa no corpo, perpendicular ao eixo e girando com o corpo. Medimos a **posição angular**  $\theta$  da reta em relação a uma direção fixa. Se  $\theta$  for medido em **radianos**,

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\text{ângulo em radianos}), \quad (10-1)$$

em que  $s$  é o comprimento de um arco de circunferência de raio  $r$  e ângulo  $\theta$ . A relação entre um ângulo em revoluções, um ângulo em graus e um ângulo em radianos é a seguinte:

$$1 \text{ rev} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}. \quad (10-2)$$

**Deslocamento Angular** Um corpo que gira em torno de um eixo de rotação, mudando de posição angular de  $\theta_1$  para  $\theta_2$ , sofre um **deslocamento angular**

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1, \quad (10-4)$$

em que  $\Delta\theta$  é positivo para rotações no sentido anti-horário e negativo para rotações no sentido horário.

**Velocidade Angular** Se um corpo sofre um deslocamento angular  $\Delta\theta$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a **velocidade angular média** do corpo,  $\omega_{\text{méd}}$ , é

$$\omega_{\text{méd}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \quad (10-5)$$

A **velocidade angular (instantânea)**  $\omega$  do corpo é

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \quad (10-6)$$

Tanto  $\omega_{\text{méd}}$  como  $\omega$  são vetores, cuja orientação é dada pela **regra da mão direita** da Fig. 10-6. O módulo da velocidade angular do corpo é a **velocidade angular escalar**.

**Aceleração Angular** Se a velocidade angular de um corpo varia de  $\omega_1$  para  $\omega_2$  em um intervalo de tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ , a **aceleração angular média**  $\alpha_{\text{méd}}$  do corpo é

$$\alpha_{\text{méd}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (10-7)$$

A **aceleração angular (instantânea)**  $\alpha$  do corpo é

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \quad (10-8)$$

Tanto  $\alpha_{\text{méd}}$  como  $\alpha$  são vetores.

**Equações Cinemáticas para Aceleração Angular Constante** O movimento com *aceleração angular constante* ( $\alpha = \text{constante}$ ) é um caso especial importante de movimento de rotação. As equações cinemáticas apropriadas, que aparecem na Tabela 10-1, são

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \quad (10-12)$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2, \quad (10-13)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0), \quad (10-14)$$

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t, \quad (10-15)$$

$$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2} \alpha t^2. \quad (10-16)$$

**Relações entre as Variáveis Lineares e Angulares** Um ponto de um corpo rígido em rotação, a uma *distância perpendicular*  $r$  do eixo de rotação, descreve uma circunferência de raio  $r$ . Se o corpo gira de um ângulo  $\theta$ , o ponto descreve um arco de circunferência de comprimento  $s$  dado por

$$s = \theta r \quad (\text{ângulo em radianos}), \quad (10-17)$$

em que  $\theta$  está em radianos.

A velocidade linear  $\vec{v}$  do ponto é tangente à circunferência; a velocidade linear escalar  $v$  do ponto é dada por

$$v = \omega r \quad (\text{ângulo em radianos}), \quad (10-18)$$

em que  $\omega$  é a velocidade angular escalar do corpo em radianos por segundo.

A aceleração linear  $\vec{a}$  do ponto tem uma componente *tangencial* e uma componente *radial*. A componente tangencial é

$$a_t = \alpha r \quad (\text{ângulo em radianos}), \quad (10-22)$$

em que  $\alpha$  é o módulo da aceleração angular do corpo em radianos por segundo ao quadrado. A componente radial de  $\vec{a}$  é

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\text{ângulo em radianos}). \quad (10-23)$$

No caso do movimento circular uniforme, o período  $T$  do movimento do ponto e do corpo é

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{ângulo em radianos}). \quad (10-19, 10-20)$$

**Energia Cinética de Rotação e Momento de Inércia** A energia cinética  $K$  de um corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo é dada por

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (\text{ângulo em radianos}), \quad (10-34)$$

em que  $I$  é o **momento de inércia** do corpo, definido por

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (10-33)$$

para um sistema de partículas discretas e por

$$I = \int r^2 dm \quad (10-35)$$

para um corpo com uma distribuição contínua de massa. Nessas expressões,  $r_i$  e  $r$  representam a distância perpendicular do eixo de rotação a cada partícula e a cada elemento de massa, respectivamente, e o somatório e a integração se estendem a todo o corpo, de modo a incluir todas as partículas e todos os elementos de massa.

**Teorema dos Eixos Paralelos** O *teorema dos eixos paralelos* relaciona o momento de inércia  $I$  de um corpo em relação a qualquer eixo ao momento de inércia do mesmo corpo em relação a um eixo paralelo ao primeiro passando pelo centro de massa:

$$I = I_{\text{CM}} + Mh^2. \quad (10-36)$$

Aqui,  $h$  é a distância perpendicular entre os dois eixos, e  $I_{\text{CM}}$  é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa pelo centro de massa. Podemos definir  $h$  como o deslocamento do eixo de rotação em relação ao eixo de rotação que passa pelo centro de massa.

**Torque** *Torque* é uma ação de girar ou de torcer um corpo em torno de um eixo de rotação, produzida por uma força  $\vec{F}$ . Se  $\vec{F}$  é exercida em um ponto dado pelo vetor posição  $\vec{r}$  em relação ao eixo, o módulo do torque é

$$\tau = rF_t = r_{\perp}F = rF \text{sen } \phi, \quad (10-40, 10-41, 10-39)$$

em que  $F_t$  é a componente de  $\vec{F}$  perpendicular a  $\vec{r}$ , e  $\phi$  é o ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ . A grandeza  $r_{\perp}$  é a distância perpendicular entre o eixo de rotação e a reta que coincide com o vetor  $\vec{F}$ . Essa reta é chamada de **linha de ação** de  $\vec{F}$ , e  $r_{\perp}$  é chamada de **braço de alavanca** de  $\vec{F}$ . Da mesma forma,  $r$  é o braço de alavanca de  $F_t$ .

A unidade de torque do SI é o newton-metro (N·m). O torque  $\tau$  é positivo, se tende a fazer um corpo inicialmente em repouso girar no sentido anti-horário, e negativo, se tende a fazer o corpo girar no sentido horário.

**Segunda Lei de Newton para Rotações** A segunda lei de Newton para rotações é

$$\tau_{\text{res}} = I\alpha, \quad (10-45)$$

em que  $\tau_{\text{res}}$  é o torque resultante que age sobre a partícula ou corpo rígido,  $I$  é o momento de inércia da partícula ou do corpo em relação ao eixo de rotação, e  $\alpha$  é a aceleração angular do movimento de rotação em torno do eixo.

**Trabalho e Energia Cinética de Rotação** As equações usadas para calcular trabalho e potência para movimentos de rotação são análogas às usadas para movimentos de translação:

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta \quad (10-53)$$

e

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega. \quad (10-55)$$

Se  $\tau$  for constante, a Eq. 10-53 se reduz a

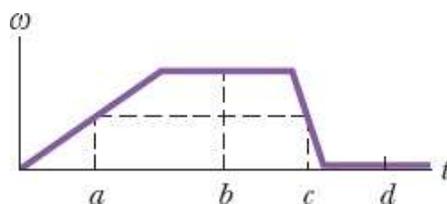
$$W = \tau(\theta_f - \theta_i). \quad (10-54)$$

A forma do teorema do trabalho e energia usada para corpos em rotação é a seguinte:

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = W. \quad (10-52)$$

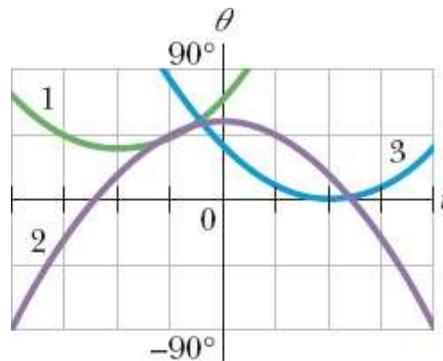
## Perguntas

**1** A Fig. 10-20 é um gráfico da velocidade angular em função do tempo para um disco que gira como um carrossel. Ordene os instantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  de acordo com o módulo (a) da aceleração tangencial e (b) da aceleração radial de um ponto na borda do disco, começando pelo maior.



**Figura 10-20** Pergunta 1.

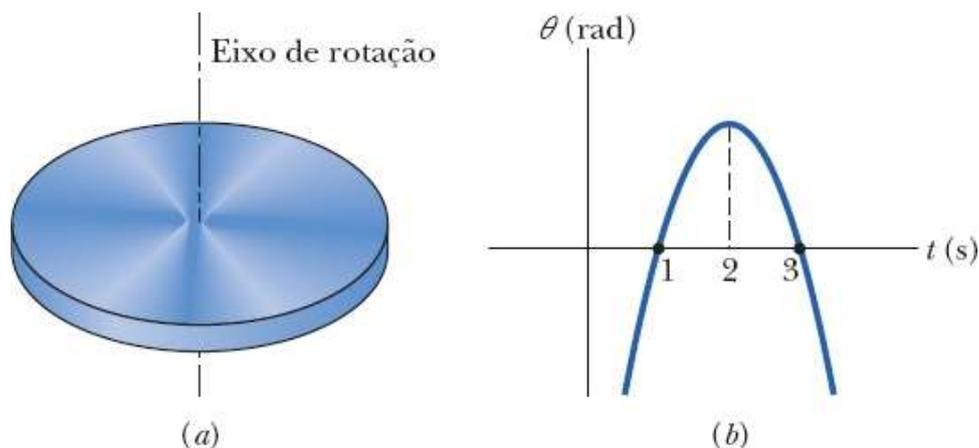
2 A Fig. 10-21 mostra gráficos da posição angular  $\theta$  em função do tempo  $t$  para três casos nos quais um disco gira como um carrossel. Em cada caso, o sentido de rotação muda em uma certa posição angular  $\theta_m$ . (a) Para cada caso, determine se  $\theta_m$  corresponde a uma rotação no sentido horário ou anti-horário em relação à posição  $\theta = 0$ , ou se  $\theta_m = 0$ . Para cada caso, determine (b) se  $\omega$  é zero antes, depois ou no instante  $t = 0$  e (c) se  $\alpha$  é positiva, negativa ou nula.



**Figura 10-21** Pergunta 2.

3 Uma força é aplicada à borda de um disco que pode girar como um carrossel, fazendo mudar a velocidade angular do disco. As velocidades angulares inicial e final, respectivamente, para quatro situações, são as seguintes: (a)  $-2 \text{ rad/s}$ ,  $5 \text{ rad/s}$ ; (b)  $2 \text{ rad/s}$ ,  $5 \text{ rad/s}$ ; (c)  $-2 \text{ rad/s}$ ,  $-5 \text{ rad/s}$ ; e (d)  $2 \text{ rad/s}$ ,  $-5 \text{ rad/s}$ . Ordene as situações de acordo com o trabalho realizado pelo torque aplicado pela força, começando pelo maior.

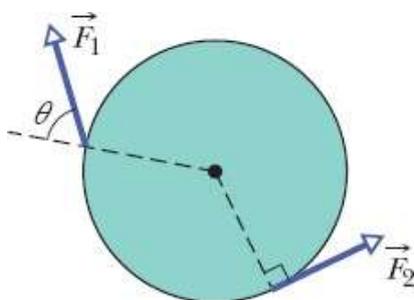
4 A Fig. 10-22b é um gráfico da posição angular do disco da Fig. 10-22a. A velocidade angular do disco é positiva, negativa ou nula em (a)  $t = 1 \text{ s}$ , (b)  $t = 2 \text{ s}$ , e (c)  $t = 3 \text{ s}$ ? (d) A aceleração angular é positiva ou negativa?



**Figura 10-22** Pergunta 4.

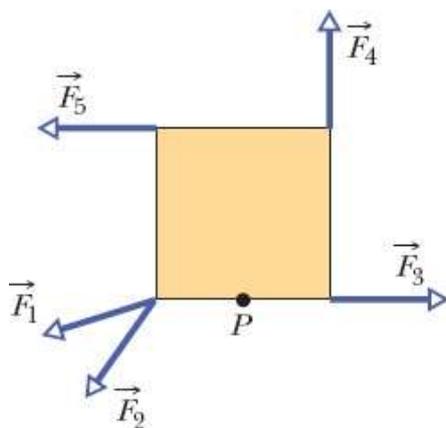
5 Na Fig. 10-23, duas forças,  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  agem sobre um disco que gira em torno do centro como um carrossel. As forças mantêm os ângulos indicados durante a rotação, que ocorre no sentido anti-horário e com velocidade angular constante. Precisamos diminuir o ângulo  $\theta$  de  $\vec{F}_1$  sem mudar o módulo de  $\vec{F}_1$ . (a)

Para manter a velocidade angular constante, devemos aumentar, diminuir ou manter constante o módulo de  $\vec{F}_2$ ? (b) A força  $\vec{F}_1$  tende a fazer o disco girar no sentido horário ou no sentido anti-horário? (c) E a força  $\vec{F}_2$ ?



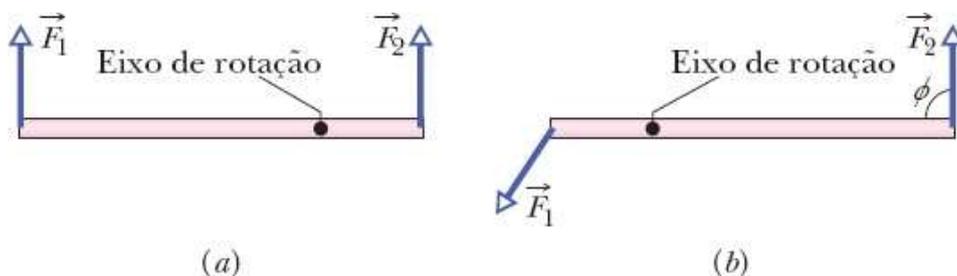
**Figura 10-23** Pergunta 5.

6 Na vista superior da Fig. 10-24, cinco forças de mesmo módulo agem sobre um estranho carrrossel: um quadrado que pode girar em torno do ponto  $P$ , o ponto médio de um dos lados. Ordene as forças de acordo com o torque que elas produzem em relação ao ponto  $P$ , começando pelo maior.



**Figura 10-24** Pergunta 6.

7 A Fig. 10-25a é vista superior de uma barra horizontal que pode girar em torno de um eixo; duas forças horizontais atuam sobre a barra, que está parada. Se o ângulo entre  $\vec{F}_2$  e a barra é reduzido a partir de  $90^\circ$ ,  $F_2$  deve aumentar, diminuir ou permanecer a mesma para que a barra continue parada?

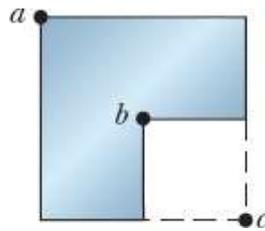


**Figura 10-25** Perguntas 7 e 8.

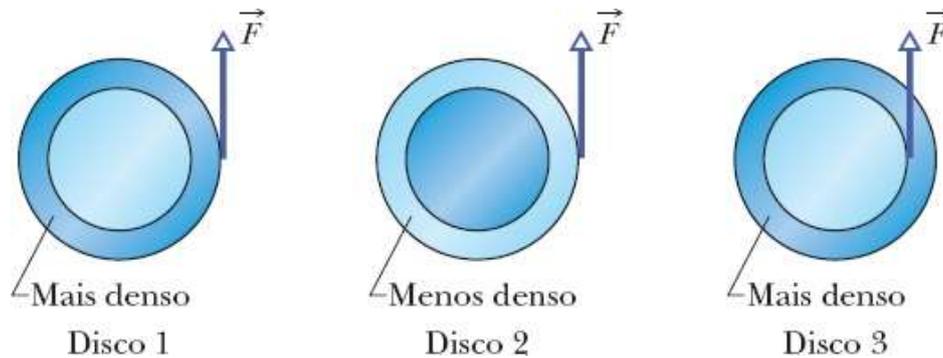
8 A Fig. 10-25b mostra a vista superior de uma barra horizontal que gira em torno de um eixo sob a ação

de duas forças horizontais,  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , com  $\vec{F}_2$  fazendo um ângulo  $\phi$  com a barra. Ordene os seguintes valores de  $\phi$  de acordo com o módulo da aceleração angular da barra, começando pelo maior:  $90^\circ$ ,  $70^\circ$  e  $110^\circ$ .

**9** A Fig. 10-26 mostra uma placa metálica homogênea que era quadrada antes que 25% da área fossem cortados. Três pontos estão indicados por letras. Ordene-os de acordo com o valor do momento de inércia da placa em relação a um eixo perpendicular à placa passando por esses pontos, começando pelo maior.



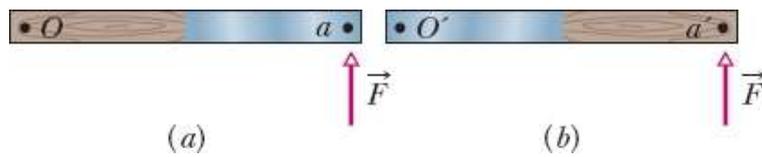
**Figura 10-26** Pergunta 9.



**Figura 10-27** Pergunta 10.

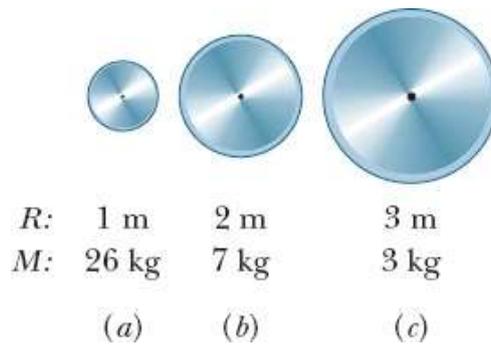
**10** A Fig. 10-27 mostra três discos planos (de raios iguais) que podem girar em torno do centro como carrosséis. Cada disco é composto dos mesmos dois materiais, um mais denso que o outro (ou seja, com massa maior por unidade de volume). Nos discos 1 e 3, o material mais denso forma a metade externa da área do disco. No disco 2, ele forma a metade interna da área do disco. Forças de mesmo módulo são aplicadas tangencialmente aos discos, na borda ou na interface dos dois materiais, como na figura. Ordene os discos de acordo (a) com o torque em relação ao centro do disco, (b) o momento de inércia em relação ao centro e (c) a aceleração angular do disco, em ordem decrescente.

**11** A Fig. 10-28a mostra uma régua de um metro, metade de madeira e metade de aço, que pode girar em torno de um eixo que passa pelo ponto  $O$ , situado na extremidade do lado que é feito de madeira. Uma força  $\vec{F}$  é aplicada ao lado que é feito de aço, no ponto  $a$ . Na Fig. 10-28b, a posição da régua é invertida e passa a girar em torno de um eixo que passa pelo ponto  $O'$ , situado na extremidade do lado que é feito de aço, enquanto a mesma força  $\vec{F}$  é aplicada ao lado que é feito de madeira, no ponto  $a'$ . A aceleração angular da régua da Fig. 10-28a é maior, menor ou igual à aceleração angular da régua da Fig. 10-28b?



**Figura 10-28** Pergunta 11.

**12** A Fig. 10-29 mostra três discos homogêneos. Os raios  $R$  e as massas  $M$  dos discos estão indicados na figura. Os discos podem girar em torno de um eixo central (perpendicular ao plano do disco e passando pelo centro). Ordene os discos de acordo com o momento de inércia em relação ao eixo central, começando pelo maior.



**Figura 10-29** Pergunta 12.

## Problemas

.- ... O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema.

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

### Módulo 10-1 As Variáveis da Rotação

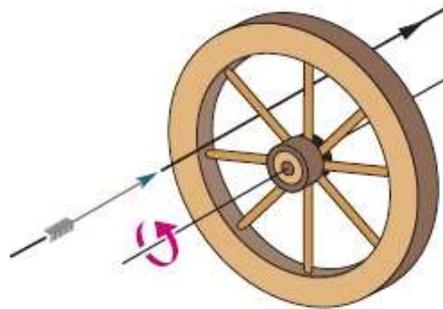
- 1 Um bom lançador de beisebol pode arremessar uma bola a 85 mi/h com uma rotação de 1800 rev/min. Quantas revoluções a bola realiza até chegar à quarta base? Para simplificar, suponha que a trajetória de 60 pés é percorrida em linha reta.
- 2 Qual é a velocidade angular (a) do ponteiro dos segundos, (b) do ponteiro dos minutos e (c) do ponteiro das horas de um relógio analógico? Dê as respostas em radianos por segundo.
- 3 Quando uma torrada com manteiga é deixada cair de uma mesa, ela adquire um movimento de rotação. Supondo que a distância da mesa ao chão é 76 cm e que a torrada não descreve uma revolução completa, determine (a) a menor e (b) a maior velocidade angular para a qual a torrada cai com a manteiga para baixo.
- 4 A posição angular de um ponto de uma roda é dada por  $\theta = 2,0 + 4,0t^2 + 2,0t^3$ , em que  $\theta$  está em radianos e  $t$  em segundos. Em  $t = 0$ , qual é (a) a posição e (b) qual a velocidade angular do ponto? (c) Qual é a velocidade angular em  $t = 4,0$  s? (d) Calcule a aceleração angular em

$t = 2,0$  s. (e) A aceleração angular da roda é constante?

••5 Um mergulhador realiza 2,5 giros ao saltar de uma plataforma de 10 metros. Supondo que a velocidade vertical inicial seja nula, determine a velocidade angular média do mergulhador.

••6 A posição angular de um ponto da borda de uma roda é dada por  $\theta = 4,0t - 3,0t^2 + t^3$ , em que  $\theta$  está em radianos e  $t$  em segundos. Qual é a velocidade angular em (a)  $t = 2,0$  s e (b)  $t = 4,0$  s? (c) Qual é a aceleração angular média no intervalo de tempo que começa em  $t = 2,0$  s e termina em  $t = 4,0$  s? Qual é a aceleração angular instantânea (d) no início e (e) no fim desse intervalo?

•••7 A roda da Fig. 10-30 tem oito raios de 30 cm igualmente espaçados, está montada em um eixo fixo e gira a 2,5 rev/s. Você deseja atirar uma flecha de 20 cm de comprimento paralelamente ao eixo da roda sem atingir um dos raios. Suponha que a flecha e os raios são muito finos. (a) Qual é a menor velocidade que a flecha deve ter? (b) O ponto entre o eixo e a borda da roda por onde a flecha passa faz alguma diferença? Caso a resposta seja afirmativa, para que ponto você deve mirar?



**Figura 10-30** Problema 7.

•••8 A aceleração angular de uma roda é  $\alpha = 6,0t^4 - 4,0t^2$ , com  $\alpha$  em radianos por segundo ao quadrado e  $t$  em segundos. No instante  $t = 0$ , a roda tem uma velocidade angular de  $+2,0$  rad/s e uma posição angular de  $+1,0$  rad. Escreva expressões (a) para a velocidade angular (em rad/s) e (b) para a posição angular (em rad) em função do tempo (em s).

#### **Módulo 10-2** Rotação com Aceleração Angular Constante

•9 Um tambor gira em torno do eixo central com uma velocidade angular de  $12,60$  rad/s. Se o tambor é freado a uma taxa constante de  $4,20$  rad/s<sup>2</sup>, (a) quanto tempo ele leva para parar? (b) Qual é o ângulo total descrito pelo tambor até parar?

•10 Partindo do repouso, um disco gira em torno do eixo central com uma aceleração angular constante. O disco gira  $25$  rad em  $5,0$  s. Durante esse tempo, qual é o módulo (a) da aceleração angular e (b) da velocidade angular média? (c) Qual é a velocidade angular instantânea do disco ao final dos  $5,0$  s? (d) Com a aceleração angular mantida, que ângulo adicional o disco irá descrever nos  $5,0$  s seguintes?

•11 Um disco, inicialmente girando a  $120$  rad/s, é freado com uma aceleração angular constante de módulo  $4,0$  rad/s<sup>2</sup>. (a) Quanto tempo o disco leva para parar? (b) Qual é o ângulo total descrito pelo disco durante esse tempo?

- 12 A velocidade angular do motor de um automóvel é aumentada a uma taxa constante de 1200 rev/min para 3000 rev/min em 12 s. (a) Qual é a aceleração angular em revoluções por minuto ao quadrado? (b) Quantas revoluções o motor executa nesse intervalo de 12 s?
- 13 Uma roda executa 40 revoluções quando desacelera até parar a partir de uma velocidade angular de 1,5 rad/s. (a) Supondo que a aceleração angular é constante, determine o tempo que a roda leva para parar. (b) Qual é a aceleração angular da roda? (c) Quanto tempo é necessário para que a roda complete as 20 primeiras revoluções?
- 14 Um disco gira em torno do eixo central partindo do repouso com aceleração angular constante. Em certo instante, está girando a 10 rev/s; após 60 revoluções, a velocidade angular é 15 rev/s. Calcule (a) a aceleração angular, (b) o tempo necessário para o disco completar 60 revoluções, (c) o tempo necessário para o disco atingir a velocidade angular de 10 rev/s e (d) o número de revoluções do disco desde o repouso até o instante em que atinge uma velocidade angular de 10 rev/s.
- 15 Uma roda tem uma aceleração angular constante de 3,0 rad/s<sup>2</sup>. Durante certo intervalo de 4,0 s, ela descreve um ângulo de 120 rad. Supondo que a roda partiu do repouso, por quanto tempo ela já estava em movimento no início desse intervalo de 4,0 s?
- 16 Um carrossel gira a partir do repouso com uma aceleração angular de 1,50 rad/s<sup>2</sup>. Quanto tempo leva para executar (a) as primeiras 2,00 revoluções e (b) as 2,00 revoluções seguintes?
- 17 Em  $t = 0$ , uma roda tem uma velocidade angular de 4,7 rad/s, uma aceleração angular constante de  $-0,25 \text{ rad/s}^2$ , e sua reta de referência está em  $\theta_0 = 0$ . (a) Qual é o ângulo máximo  $\theta_{\text{máx}}$  descrito pela reta de referência no sentido positivo? Qual é (b) o primeiro e (c) o segundo instante em que a reta de referência passa pelo ângulo  $\theta = \theta_{\text{máx}}/2$ ? Em que (d) instante negativo e (e) instante positivo a reta de referência passa pelo ângulo  $\theta = -10,5 \text{ rad}$ ? (f) Faça um gráfico de  $\theta$  em função de  $t$  e indique as respostas dos itens (a) a (e) no gráfico.
- 18 Um pulsar é uma estrela de nêutrons que gira rapidamente em torno de si mesma e emite um feixe de rádio, do mesmo modo como um farol emite um feixe luminoso. Recebemos na Terra um pulso de rádio para cada revolução da estrela. O período  $T$  de rotação de um pulsar é determinado medindo o intervalo de tempo entre os pulsos. O pulsar da nebulosa do Caranguejo tem um período de rotação  $T = 0,033 \text{ s}$  que está aumentando a uma taxa de  $1,26 \times 10^{-5} \text{ s/ano}$ . (a) Qual é a aceleração angular  $\alpha$  do pulsar? (b) Se  $\alpha$  se mantiver constante, daqui a quantos anos o pulsar vai parar de girar? (c) O pulsar foi criado pela explosão de uma supernova observada no ano de 1054. Supondo que a aceleração  $\alpha$  se manteve constante, determine o período  $T$  logo após a explosão.

### Módulo 10-3 Relações entre as Variáveis Lineares e Angulares

- 19 Qual é o módulo (a) da velocidade angular, (b) da aceleração radial e (c) da aceleração tangencial de uma nave espacial que faz uma curva circular com 3220 km de raio a uma velocidade de 29.000 km/h?
- 20 Um objeto gira em torno de um eixo fixo, e a posição angular de uma reta de referência do objeto é dada por  $\theta = 0,40e^{2t}$ , em que  $\theta$  está em radianos e  $t$  em segundos. Considere um ponto do objeto situado a

4,0 cm do eixo de rotação. Em  $t = 0$ , qual é o módulo (a) da componente tangencial e (b) da componente radial da aceleração do ponto?

•21  Entre 1911 e 1990, o alto da torre inclinada de Pisa, Itália, se deslocou para o sul a uma taxa média de 1,2 mm/ano. A torre tem 55 m de altura. Qual é a velocidade angular média do alto da torre em relação à base em radianos por segundo?

•22 Um astronauta está sendo testado em uma centrífuga com 10 m de raio que gira de acordo com a equação  $\theta = 0,30t^2$ , em que  $t$  está em segundos e  $\theta$  em radianos. No instante  $t = 5,0$  s, qual é o módulo (a) da velocidade angular, (b) da velocidade linear, (c) da aceleração tangencial e (d) da aceleração radial do astronauta?

•23 Uma roda com 1,20 m de diâmetro está girando com uma velocidade angular de 200 rev/min. (a) Qual é a velocidade angular da roda em rad/s? (b) Qual é a velocidade linear de um ponto na borda da roda? (c) Que aceleração angular constante (em revoluções por minuto ao quadrado) aumenta a velocidade angular da roda para 1000 rev/min em 60,0 s? (d) Quantas revoluções a roda executa nesse intervalo de 60,0 s?

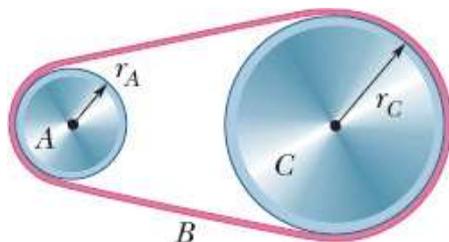
•24 Um disco de vinil funciona girando em torno de um eixo, de modo que um sulco, aproximadamente circular, desliza sob uma agulha que fica na extremidade de um braço mecânico. Saliências do sulco passam pela agulha e a fazem oscilar. O equipamento converte essas oscilações em sinais elétricos, que são amplificados e transformados em sons. Suponha que um disco de vinil gira a  $33 \frac{1}{3}$  rev/min, que o sulco que está sendo tocado está a uma distância de 10,0 cm do centro do disco e que a distância média entre as saliências do sulco é 1,75 mm. A que taxa (em toques por segundo) as saliências atingem a agulha?

•25 (a) Qual é a velocidade angular  $\omega$  em torno do eixo polar de um ponto da superfície da Terra na latitude  $40^\circ$  N? (A Terra gira em torno desse eixo.) (b) Qual é a velocidade linear  $v$  desse ponto? Qual é o valor (c) de  $\omega$  e (d) de  $v$  para um ponto do equador?

•26 O volante de uma máquina a vapor gira com uma velocidade angular constante de 150 rev/min. Quando a máquina é desligada, o atrito dos mancais e a resistência do ar param a roda em 2,2 h. (a) Qual é a aceleração angular constante da roda, em revoluções por minuto ao quadrado, durante a desaceleração? (b) Quantas revoluções a roda executa antes de parar? (c) No instante em que a roda está girando a 75 rev/min, qual é a componente tangencial da aceleração linear de uma partícula da roda que está a 50 cm do eixo de rotação? (d) Qual é o módulo da aceleração linear total da partícula do item (c)?

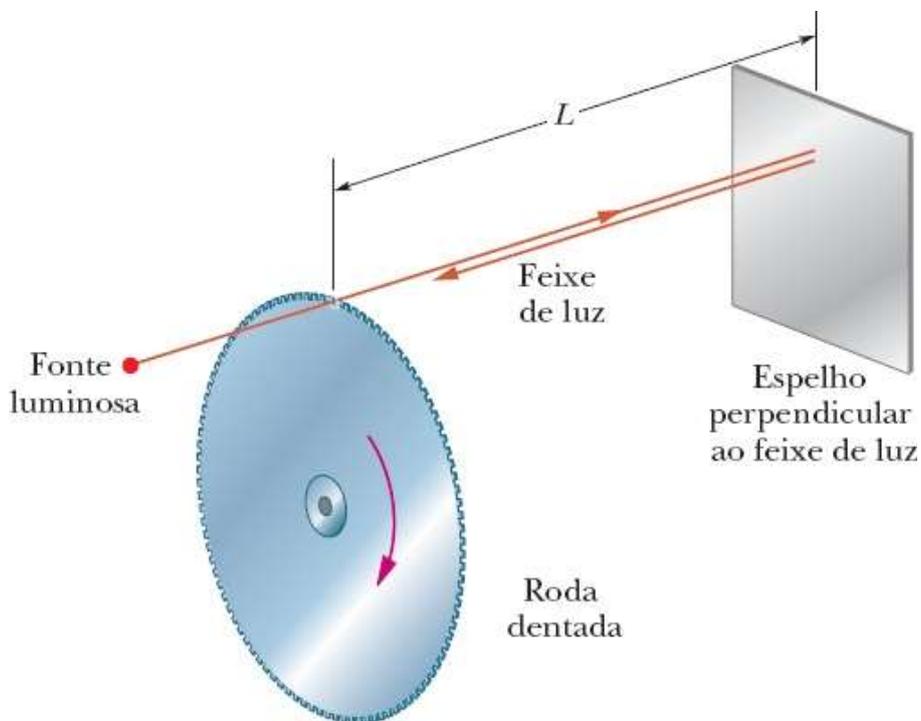
•27 O prato de um toca-discos está girando a  $33 \frac{1}{3}$  rev/min. Uma semente de melancia está sobre o prato a 6,0 cm de distância do eixo de rotação. (a) Calcule a aceleração da semente, supondo que ela não escorrega. (b) Qual é o valor mínimo do coeficiente de atrito estático entre a semente e o prato para que a semente não escorregue? (c) Suponha que o prato atinge a velocidade angular final em 0,25 s, partindo do repouso com aceleração constante. Calcule o menor coeficiente de atrito estático necessário para que a semente não escorregue durante o período de aceleração.

••28 Na Fig. 10-31, uma roda  $A$  de raio  $r_A = 10$  cm está acoplada por uma correia  $B$  a uma roda  $C$  de raio  $r_C = 25$  cm. A velocidade angular da roda  $A$  é aumentada a partir do repouso a uma taxa constante de  $1,6$   $\text{rad/s}^2$ . Determine o tempo necessário para que a roda  $C$  atinja uma velocidade angular de  $100$   $\text{rev/min}$ , supondo que a correia não desliza. (*Sugestão*: Se a correia não desliza, as bordas dos dois discos têm a mesma velocidade linear.)



**Figura 10-31** Problema 28.

••29 Um método tradicional para medir a velocidade da luz utiliza uma roda dentada giratória. Um feixe de luz passa pelo espaço entre dois dentes situados na borda da roda, como na Fig. 10-32, viaja até um espelho distante e chega de volta à roda exatamente a tempo de passar pelo espaço seguinte entre dois dentes. Uma dessas rodas tem  $5,0$  cm de raio e  $500$  espaços entre dentes. Medidas realizadas quando o espelho está a uma distância  $L = 500$  m da roda fornecem o valor de  $3,0 \times 10^5$   $\text{km/s}$  para a velocidade da luz. (a) Qual é a velocidade angular (constante) da roda? (b) Qual é a velocidade linear de um ponto da borda da roda?



**Figura 10-32** Problema 29.

••30 Uma roda de um giroscópio com  $2,83$  cm de raio é acelerada a partir do repouso a  $14,2$   $\text{rad/s}^2$  até

atingir uma velocidade angular de 2760 rev/min. (a) Qual é a aceleração tangencial de um ponto da borda da roda durante o processo de aceleração angular? (b) Qual é a aceleração radial do ponto quando a roda está girando à velocidade máxima? (c) Qual é a distância percorrida por um ponto da borda da roda durante o processo de aceleração angular?

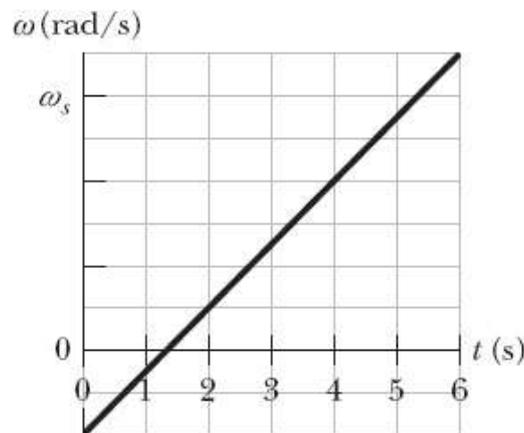
••31 Um disco com 0,25 m de raio deve girar de um ângulo de 800 rad, partindo do repouso, ganhando velocidade angular a uma taxa constante  $\alpha_1$  nos primeiros 400 rad e, em seguida, perdendo velocidade angular a uma taxa constante  $-\alpha_1$  até ficar novamente em repouso. O módulo da aceleração centrípeta de qualquer parte do disco não deve exceder  $400 \text{ m/s}^2$ . (a) Qual é o menor tempo necessário para o movimento? (b) Qual é o valor correspondente de  $\alpha_1$ ?

••32 Um carro parte do repouso e passa a se mover em uma pista circular com 30,0 m de raio. A velocidade do carro aumenta a uma taxa constante de  $0,500 \text{ m/s}^2$ . (a) Qual é o módulo da aceleração linear *média* do carro após 15,0 s? (b) Que ângulo o vetor aceleração média faz com o vetor velocidade nesse instante?

#### Módulo 10-4 Energia Cinética de Rotação

•33 Calcule o momento de inércia de uma roda que possui uma energia cinética de 24.400 J quando gira a 602 rev/min.

•34 A Fig. 10-33 mostra a velocidade angular em função do tempo para uma barra fina que gira em torno de uma das extremidades. A escala do eixo  $\omega$  é definida por  $\omega_s = 6,0 \text{ rad/s}$ . (a) Qual é o módulo da aceleração angular da barra? (b) Em  $t = 4,0 \text{ s}$ , a barra tem uma energia cinética de 1,60 J. Qual é a energia cinética da barra em  $t = 0$ ?



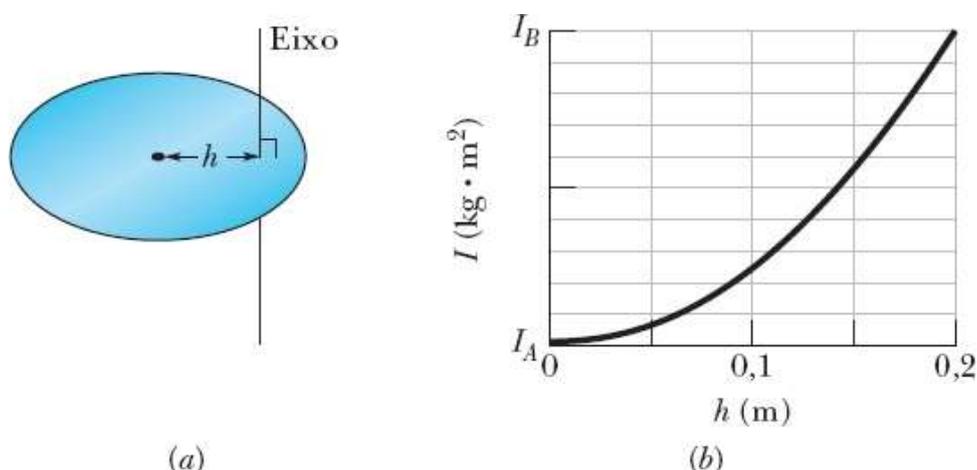
**Figura 10-33** Problema 34.

#### Módulo 10-5 Cálculo do Momento de Inércia

•35 Dois cilindros homogêneos, girando em torno dos respectivos eixos centrais (longitudinais) com uma velocidade angular de 235 rad/s, têm a mesma massa de 1,25 kg e raios diferentes. Qual é a energia cinética de rotação (a) do cilindro menor, de raio 0,25 m, e (b) do cilindro maior, de raio 0,75 m?

•36 A Fig. 10-34a mostra um disco que pode girar em torno de um eixo perpendicular à sua face a uma

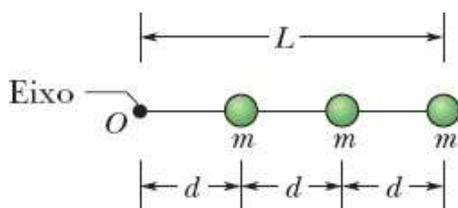
distância  $h$  do centro do disco. A Fig. 10-34b mostra o momento de inércia  $I$  do disco em relação ao eixo em função da distância  $h$ , do centro até a borda do disco. A escala do eixo  $I$  é definida por  $I_A = 0,050 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  e  $I_B = 0,150 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Qual é a massa do disco?



**Figura 10-34** Problema 36.

•37 Calcule o momento de inércia de uma régua de um metro, com massa de 0,56 kg, em relação a um eixo perpendicular à régua na marca de 20 cm. (Trate a régua como uma barra fina.)

•38 A Fig. 10-35 mostra três partículas de 0,0100 kg que foram coladas em uma barra de comprimento  $L = 6,00 \text{ cm}$  e massa desprezível. O conjunto pode girar em torno de um eixo perpendicular que passa pelo ponto  $O$ , situado na extremidade esquerda. Se removemos uma das partículas (ou seja, 33% da massa), de que porcentagem o momento de inércia do conjunto em relação ao eixo de rotação diminui se a partícula removida é (a) a mais próxima do ponto  $O$  e (b) a mais distante do ponto  $O$ ?

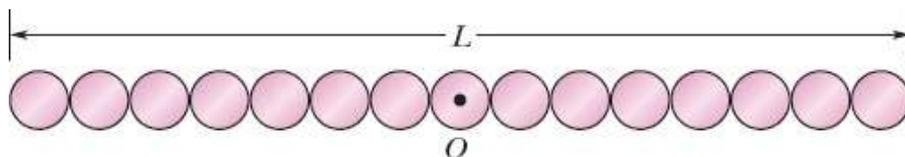


**Figura 10-35** Problemas 38 e 62.

•39 Alguns caminhões utilizam a energia armazenada em um volante que um motor elétrico acelera até uma velocidade de  $200\pi \text{ rad/s}$ . Suponha que um desses volantes é um cilindro homogêneo com massa de 500 kg e raio de 1,0 m. (a) Qual é a energia cinética do volante quando está girando à velocidade máxima? (b) Se o caminhão desenvolve uma potência média de 8,0 kW, por quantos minutos ele pode operar sem que o volante seja novamente acelerado?

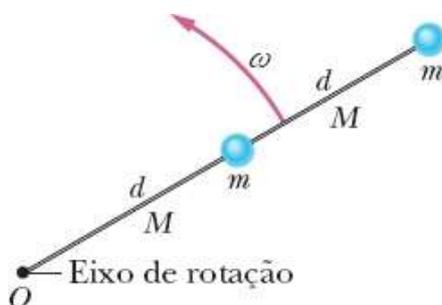
•40 A Fig. 10-36 mostra um arranjo de 15 discos iguais colados para formarem uma barra de comprimento  $L = 1,0000 \text{ m}$  e massa total  $M = 100,0 \text{ mg}$ . O arranjo pode girar em torno de um eixo perpendicular que passa pelo disco central no ponto  $O$ . (a) Qual é o momento de inércia do conjunto em relação a esse eixo? (b) Se considerarmos o arranjo como uma barra aproximadamente homogênea de

massa  $M$  e comprimento  $L$ , que erro percentual estaremos cometendo se usarmos a fórmula da Tabela 10-2e para calcular o momento de inércia?



**Figura 10-36** Problema 40.

••41 Na Fig. 10-37, duas partículas, ambas de massa  $m = 0,85$  kg, estão ligadas uma à outra, e a um eixo de rotação no ponto  $O$ , por duas barras finas, ambas de comprimento  $d = 5,6$  cm e massa  $M = 1,2$  kg. O conjunto gira em torno do eixo de rotação com velocidade angular  $\omega = 0,30$  rad/s. Determine (a) o momento de inércia do conjunto em relação ao ponto  $O$  e (b) a energia cinética do conjunto.

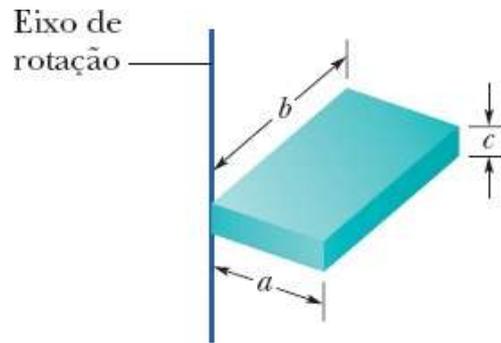


**Figura 10-37** Problema 41.

••42 As massas e coordenadas de quatro partículas são as seguintes: 50 g,  $x = 2,0$  cm,  $y = 2,0$  cm; 25 g,  $x = 0$ ,  $y = 4,0$  cm; 25 g,  $x = -3,0$  cm,  $y = -3,0$  cm; 30 g,  $x = -2,0$  cm,  $y = 4,0$  cm. Qual é o momento de inércia do conjunto em relação (a) ao eixo  $x$ , (b) ao eixo  $y$  e (c) ao eixo  $z$ ? (d) Suponha que as respostas de (a) e (b) sejam  $A$  e  $B$ , respectivamente. Nesse caso, qual é a resposta de (c) em termos de  $A$  e  $B$ ?

••43 O bloco homogêneo da Fig. 10-38 tem massa 0,172 kg e lados  $a = 3,5$  cm,  $b = 8,4$  cm e  $c = 1,4$  cm. Calcule o momento de inércia do bloco em relação a um eixo que passa por um canto e é perpendicular às faces maiores.

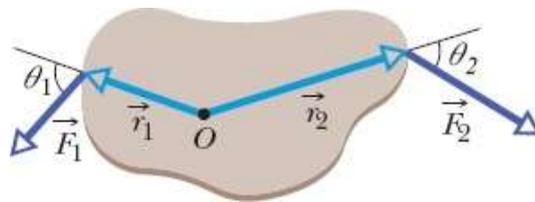
••44 Quatro partículas iguais, de massa 0,50 kg cada uma, são colocadas nos vértices de um quadrado de  $2,0$  m  $\times$   $2,0$  m e mantidas nessa posição por quatro barras, de massa desprezível, que formam os lados do quadrado. Determine o momento de inércia desse corpo rígido em relação a um eixo (a) que está no plano do quadrado e passa pelos pontos médios de dois lados opostos, (b) que passa pelo ponto médio de um dos lados e é perpendicular ao plano do quadrado e (c) que está no plano do quadrado e passa por duas partículas diagonalmente opostas.



**Figura 10-38** Problema 43.

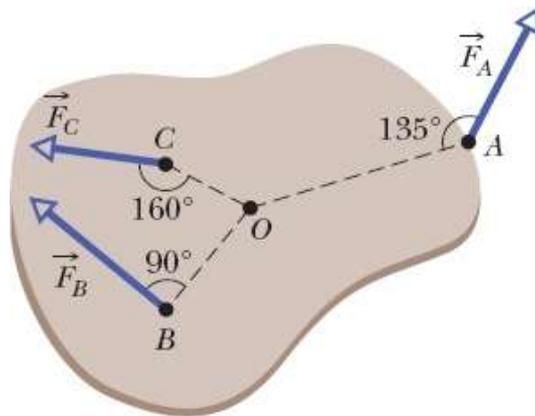
**Módulo 10-6 Torque**

•45 O corpo da Fig. 10-39 pode girar em torno de um eixo perpendicular ao papel passando por  $O$  e está submetido a duas forças, como mostra a figura. Se  $r_1 = 1,30$  m,  $r_2 = 2,15$  m,  $F_1 = 4,20$  N,  $F_2 = 4,90$  N,  $\theta_1 = 75,0^\circ$  e  $\theta_2 = 60,0^\circ$ , qual é o torque resultante em relação ao eixo?



**Figura 10-39** Problema 45.

•46 O corpo da Fig. 10-40 pode girar em torno de um eixo que passa por  $O$  e é perpendicular ao papel e está submetido a três forças:  $F_A = 10$  N no ponto  $A$ , a 8,0 m de  $O$ ;  $F_B = 16$  N em  $B$ , a 4,0 m de  $O$ ; e  $F_C = 19$  N em  $C$ , a 3,0 m de  $O$ . Qual é o torque resultante em relação a  $O$ ?



**Figura 10-40** Problema 46.

•47 Uma pequena bola, de massa 0,75 kg, está presa a uma das extremidades de uma barra, de 1,25 m de comprimento e massa desprezível. A outra extremidade da barra está pendurada em um eixo. Qual é o módulo do torque exercido pela força gravitacional em relação ao eixo quando o pêndulo assim formado faz um ângulo de  $30^\circ$  com a vertical?

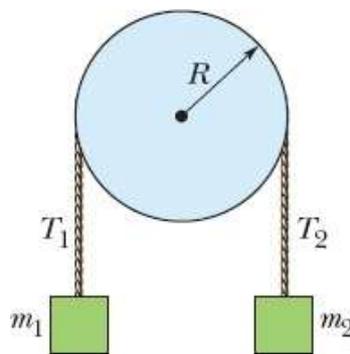
•48 O comprimento do braço do pedal de uma bicicleta é 0,152 m, e uma força de 111 N é aplicada ao pedal pelo ciclista. Qual é o módulo do torque em relação ao eixo do braço do pedal quando o braço faz um ângulo de (a)  $30^\circ$ , (b)  $90^\circ$  e (c)  $180^\circ$  com a vertical?

**Módulo 10-7 A Segunda Lei de Newton para Rotações**

•49 No início de um salto de trampolim, a velocidade angular de uma mergulhadora em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa varia de zero a  $6,20 \text{ rad/s}$  em 220 ms. O momento de inércia em relação ao mesmo eixo é  $12,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Qual é o módulo (a) da aceleração angular média da mergulhadora e (b) do torque externo médio exercido pelo trampolim sobre a mergulhadora no início do salto?

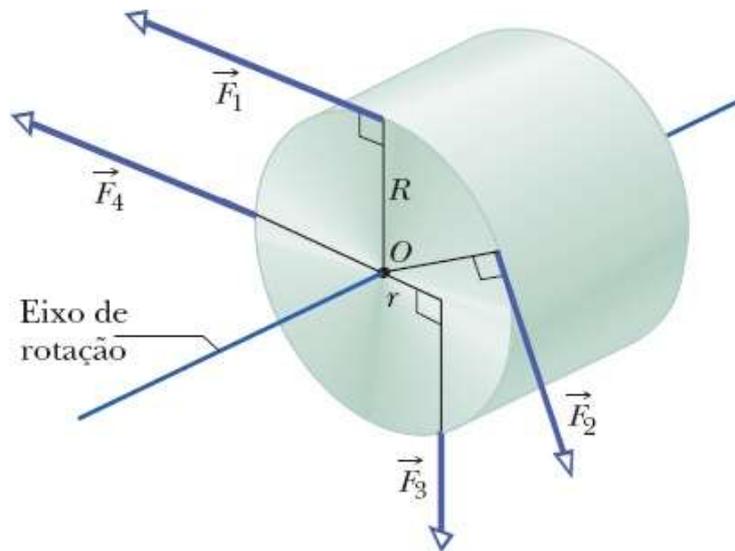
•50 Se um torque de  $32,0 \text{ N} \cdot \text{m}$  exercido sobre uma roda produz uma aceleração angular de  $25,0 \text{ rad/s}^2$ , qual é o momento de inércia da roda?

••51 Na Fig. 10-41, o bloco 1 tem massa  $m_1 = 460 \text{ g}$ , o bloco 2 tem massa  $m_2 = 500 \text{ g}$ , e a polia, que está montada em um eixo horizontal com atrito desprezível, tem raio  $R = 5,00 \text{ cm}$ . Quando o sistema é liberado a partir do repouso, o bloco 2 cai  $75,0 \text{ cm}$  em  $5,00 \text{ s}$  sem que a corda deslize na borda da polia. (a) Qual é o módulo da aceleração dos blocos? Qual é o valor (b) da tração  $T_2$  e (c) da tração  $T_1$ ? (d) Qual é o módulo da aceleração angular da polia? (e) Qual é o momento de inércia da polia?



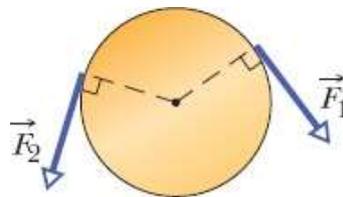
**Figura 10-41** Problemas 51 e 83.

••52 Na Fig. 10-42, um cilindro com massa de  $2,0 \text{ kg}$  pode girar em torno do eixo central, que passa pelo ponto  $O$ . As forças mostradas têm os seguintes módulos:  $F_1 = 6,0 \text{ N}$ ,  $F_2 = 4,0 \text{ N}$ ,  $F_3 = 2,0 \text{ N}$  e  $F_4 = 5,0 \text{ N}$ . As distâncias radiais são  $r = 5,0 \text{ cm}$  e  $R = 12 \text{ cm}$ . Determine (a) o módulo e (b) a orientação da aceleração angular do cilindro. (Durante a rotação, as forças mantêm os mesmos ângulos em relação ao cilindro.)



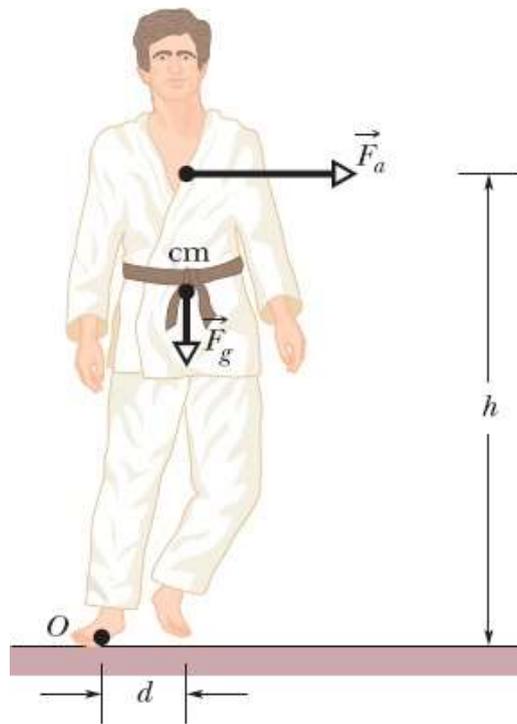
**Figura 10-42** Problema 52.

••53 A Fig. 10-43 mostra um disco homogêneo que pode girar em torno do centro como um carrossel. O disco tem um raio de 2,00 cm e uma massa de 20,0 gramas e está inicialmente em repouso. A partir do instante  $t = 0$ , duas forças devem ser aplicadas tangencialmente à borda do disco, como mostrado na figura, para que, no instante  $t = 1,25$  s, o disco tenha uma velocidade angular de 250 rad/s, no sentido anti-horário. A força  $\vec{F}_1$  tem um módulo de 0,100 N. Qual é o módulo de  $\vec{F}_2$ ?



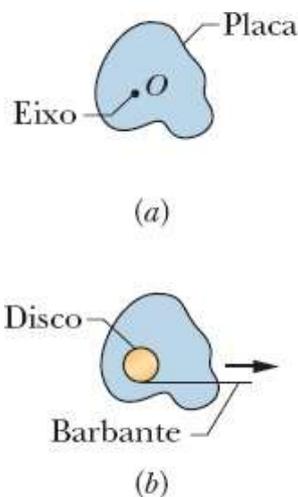
**Figura 10-43** Problema 53.

••54  Em uma rasteira do judô, você tira o apoio do pé esquerdo do adversário e, ao mesmo tempo, puxa o quimono dele para o mesmo lado. Em consequência, o lutador gira em torno do pé direito e cai no tatame. A Fig. 10-44 mostra um diagrama simplificado do lutador, já com o pé esquerdo fora do chão. O eixo de rotação passa pelo ponto  $O$ . A força gravitacional  $\vec{F}_g$  age sobre o centro de massa do lutador, que está a uma distância horizontal  $d = 28$  cm do ponto  $O$ . A massa do lutador é de 70 kg, e o momento de inércia em relação ao ponto  $O$  é  $65 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Qual é o módulo da aceleração angular inicial do lutador em relação ao ponto  $O$  se o puxão  $\vec{F}_a$  que você aplica ao quimono (a) é desprezível e (b) é horizontal, com um módulo de 300 N e aplicado a uma altura  $h = 1,4$  m?



**Figura 10-44** Problema 54.

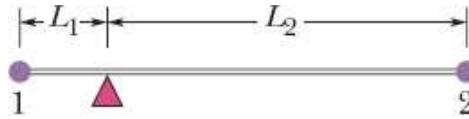
••55 Na Fig. 10-45a, uma placa de plástico de forma irregular, de espessura e massa específica (massa por unidade de volume) uniformes, gira em torno de um eixo perpendicular à face da placa passando pelo ponto  $O$ . O momento de inércia da placa em torno desse eixo é medido utilizando o seguinte método: Um disco circular, de massa  $0,500\text{ kg}$  e raio  $2,00\text{ cm}$ , é colado na placa, com o centro coincidindo com  $O$  (Fig. 10-45b). Um barbante é enrolado na borda do disco, como se o disco fosse um pião, e puxado durante  $5,00\text{ s}$ . Em consequência, o disco e a placa são submetidos a uma força constante de  $0,400\text{ N}$ , aplicada pelo barbante tangencialmente à borda do disco. A velocidade angular resultante é  $114\text{ rad/s}$ . Qual é o momento de inércia da placa em relação ao eixo?



**Figura 10-45** Problema 55.

••56 A Fig. 10-46 mostra as partículas 1 e 2, ambas de massa  $m$ , presas às extremidades de uma barra

rígida, de massa desprezível e comprimento  $L_1 + L_2$ , com  $L_1 = 20$  cm e  $L_2 = 80$  cm. A barra é mantida horizontalmente no fulcro até ser liberada. Qual é o módulo da aceleração inicial (a) da partícula 1 e (b) da partícula 2?



**Figura 10-46** Problema 56.

••57 Uma polia, com um momento de inércia de  $1,0 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  em relação ao eixo e um raio de 10 cm, é submetida a uma força aplicada tangencialmente à borda. O módulo da força varia no tempo de acordo com a equação  $F = 0,50t + 0,30t^2$ , com  $F$  em newtons e  $t$  em segundos. A polia está inicialmente em repouso. (a) Qual é a aceleração angular e (b) qual é a velocidade angular da polia no instante  $t = 3,0$  s?

#### Módulo 10-8 Trabalho e Energia Cinética de Rotação

•58 (a) Se  $R = 12$  cm,  $M = 400$  g e  $m = 50$  g na Fig. 10-19, determine a velocidade do bloco após ter descido 50 cm a partir do repouso. Resolva o problema usando a lei de conservação da energia. (b) Repita o item (a) para  $R = 5,0$  cm.

•59 O virabrequim de um automóvel transfere energia do motor para o eixo a uma taxa de 100 hp (= 74,6 kW) quando gira a 1800 rev/min. Qual é o torque (em newtons-metros) exercido pelo virabrequim?

•60 Uma barra fina, de 0,75 m de comprimento e 0,42 kg de massa, está suspensa por uma das extremidades. A barra é puxada para o lado e liberada para oscilar como um pêndulo, passando pela posição mais baixa com uma velocidade angular de 4,0 rad/s. Desprezando o atrito e a resistência do ar, determine (a) a energia cinética da barra na posição mais baixa e (b) a altura que o centro de massa atinge acima dessa posição.

•61 Uma roda de 32,0 kg, que pode ser considerada um aro fino com 1,20 m de raio, está girando a 280 rev/min. A roda precisa ser parada em 15,0 s. (a) Qual é o trabalho necessário para fazê-la parar? (b) Qual é a potência média necessária?

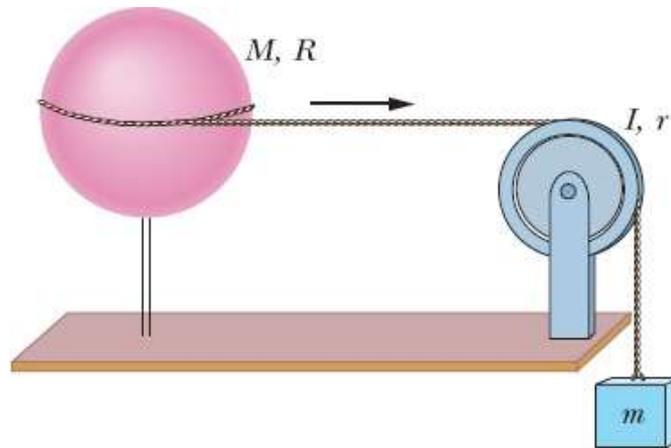
••62 Na Fig. 10-35, três partículas de 0,0100 kg foram coladas em uma barra, de comprimento  $L = 6,00$  cm e massa desprezível, que pode girar em torno de um eixo perpendicular que passa pelo ponto  $O$  em uma das extremidades. Determine o trabalho necessário para mudar a velocidade angular (a) de 0 para 20,0 rad/s, (b) de 20,0 rad/s para 40,0 rad/s e (c) de 40,0 rad/s para 60,0 rad/s. (d) Qual é a inclinação da curva da energia cinética do conjunto (em joules) em função do quadrado da velocidade angular (em radianos quadrados por segundo ao quadrado)?

••63 Uma régua de um metro é mantida verticalmente com uma das extremidades apoiada no solo e depois liberada. Determine a velocidade da outra extremidade pouco antes de tocar o solo, supondo que a extremidade de apoio não escorrega. (Sugestão: Considere a régua uma barra fina e use a lei de conservação da energia.)

••64 Um cilindro homogêneo com 10 cm de raio e 20 kg de massa está montado de modo a poder girar livremente em torno de um eixo horizontal paralelo ao eixo central longitudinal do cilindro e situado a 5,0 cm do eixo. (a) Qual é o momento de inércia do cilindro em relação ao eixo de rotação? (b) Se o cilindro é liberado a partir do repouso com o eixo central longitudinal na mesma altura que o eixo em torno do qual pode girar, qual é a velocidade angular do cilindro ao passar pelo ponto mais baixo da trajetória?

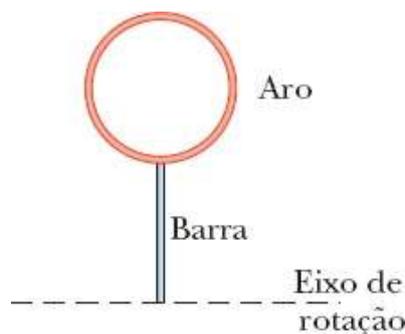
••65  Uma chaminé cilíndrica cai quando a base sofre um abalo. Trate a chaminé como uma barra fina, com 55,0 m de comprimento. No instante em que a chaminé faz um ângulo de  $35,0^\circ$  com a vertical durante a queda, (a) qual é a aceleração radial do topo e (b) qual é a aceleração tangencial do topo? (Sugestão: Use considerações de energia e não de torque.) (c) Para que ângulo  $\theta$  a aceleração tangencial é igual a  $g$ ?

••66 Uma casca esférica homogênea, de massa  $M = 4,5$  kg e raio  $R = 8,5$  cm, pode girar em torno de um eixo vertical sem atrito (Fig. 10-47). Uma corda, de massa desprezível, está enrolada no equador da casca, passa por uma polia de momento de inércia  $I = 3,0 \times 10^{-3}$  kg  $\cdot$  m<sup>2</sup> e raio  $r = 5,0$  cm e está presa a um pequeno objeto de massa  $m = 0,60$  kg. Não há atrito no eixo da polia, e a corda não escorrega na casca nem na polia. Qual é a velocidade do objeto depois de cair 82 cm após ter sido liberado a partir do repouso? Use considerações de energia.



**Figura 10-47** Problema 66.

••67 A Fig. 10-48 mostra um corpo rígido formado por um aro fino (de massa  $m$  e raio  $R = 0,150$  m) e uma barra fina radial (de massa  $m$  e comprimento  $L = 2,00R$ ). O conjunto está na vertical, mas, se recebe um pequeno empurrão, começa a girar em torno de um eixo horizontal no plano do aro e da barra, que passa pela extremidade inferior da barra. Desprezando a energia fornecida ao sistema pelo pequeno empurrão, qual é a velocidade angular do conjunto ao passar pela posição invertida (de cabeça para baixo)?

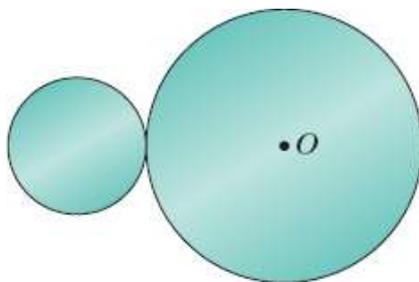


**Figura 10-48** Problema

**Problemas Adicionais**

**68** Duas esferas homogêneas, maciças, têm a mesma massa de 1,65 kg, mas o raio de uma é 0,226 m e o da outra é 0,854 m. Ambas podem girar em torno de um eixo que passa pelo centro. (a) Qual é o módulo  $\tau$  do torque necessário para levar a esfera menor do repouso a uma velocidade angular de 317 rad/s em 15,5 s? (b) Qual é o módulo  $F$  da força que deve ser aplicada tangencialmente ao equador da esfera para produzir esse torque? Qual é o valor correspondente de (c)  $\tau$  e (d)  $F$  para a esfera maior?

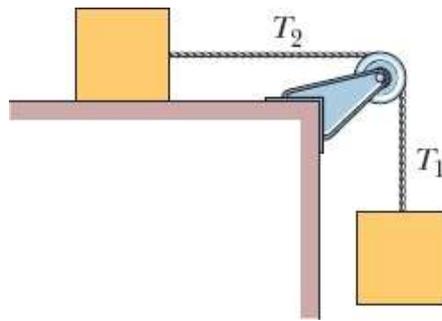
**69** Na Fig. 10-49, um pequeno disco, de raio  $r = 2,00$  cm, foi colado na borda de um disco maior, de raio  $R = 4,00$  cm, com os discos no mesmo plano. Os discos podem girar em torno de um eixo perpendicular que passa pelo ponto  $O$ , situado no centro do disco maior. Os discos têm uma massa específica (massa por unidade de volume) uniforme de  $1,40 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup> e uma espessura, também uniforme, de 5,00 mm. Qual é o momento de inércia do conjunto dos dois discos em relação ao eixo de rotação que passa por  $O$ ?



**Figura 10-49** Problema 69.

**70** Uma roda partiu do repouso com uma aceleração angular constante de 2,00 rad/s<sup>2</sup>. Durante certo intervalo de 3,00 s, a roda descreve um ângulo de 90,0 rad. (a) Qual era a velocidade angular da roda no início do intervalo de 3,00 s? (b) Por quanto tempo a roda girou antes do início do intervalo de 3,00 s?

**71** Na Fig. 10-50, dois blocos de 6,20 kg estão ligados por uma corda, de massa desprezível, que passa por uma polia de 2,40 cm de raio e momento de inércia  $7,40 \times 10^{-4}$  kg·m<sup>2</sup>. A corda não escorrega na polia; não se sabe se existe atrito entre a mesa e o bloco que escorrega; não há atrito no eixo da polia. Quando o sistema é liberado a partir do repouso, a polia gira de 0,130 rad em 91,0 ms e a aceleração dos blocos é constante. Determine (a) o módulo da aceleração angular da polia, (b) o módulo da aceleração de cada bloco, (c) a tração  $T_1$  da corda e (d) a tração  $T_2$  da corda.

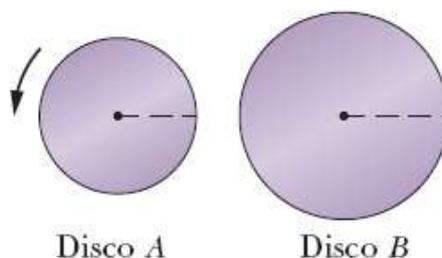


**Figura 10-50** Problema 71.

**72** Nas duas extremidades de uma fina barra de aço com 1,20 m de comprimento e 6,40 kg de massa existem pequenas bolas, de massa 1,06 kg. A barra pode girar em um plano horizontal em torno de um eixo vertical que passa pelo ponto médio da barra. Em certo instante, a barra está girando a 39,0 rev/s. Devido ao atrito, a barra desacelera até parar, 32,0 s depois. Supondo que o torque produzido pelo atrito é constante, calcule (a) a aceleração angular, (b) o torque produzido pelo atrito, (c) a energia transferida de energia mecânica para energia térmica pelo atrito e (d) o número de revoluções executadas pela barra nesses 32,0 s. (e) Suponha que o torque produzido pelo atrito não é constante. Se alguma das grandezas calculadas nos itens (a), (b), (c) e (d) ainda puder ser calculada sem nenhuma informação adicional, forneça o seu valor.

**73** Uma pá do rotor de um helicóptero é homogênea, tem 7,80 m de comprimento, uma massa de 110 kg e está presa ao eixo do rotor por um único parafuso. (a) Qual é o módulo da força exercida pelo eixo sobre o parafuso quando o rotor está girando a 320 rev/min? (*Sugestão:* Para este cálculo, a pá pode ser considerada uma massa pontual localizada no centro de massa. Por quê?) (b) Calcule o módulo do torque que deve ser aplicado ao rotor para que atinja a velocidade angular do item anterior, a partir do repouso, em 6,70 s. Ignore a resistência do ar. (A lâmina não pode ser considerada uma massa pontual para este cálculo. Por quê? Suponha que a distribuição de massa é a de uma barra fina homogênea.) (c) Qual é o trabalho realizado pelo torque sobre a pá para que esta atinja a velocidade angular de 320 rev/min?

**74** *Corrida de discos.* A Fig. 10-51 mostra dois discos que podem girar em torno do centro como um carrossel. No instante  $t = 0$ , as retas de referência dos dois discos têm a mesma orientação; o disco A já está girando com uma velocidade angular constante de 9,5 rad/s, e o disco B parte do repouso com uma aceleração angular constante de 2,2 rad/s<sup>2</sup>. (a) Em que instante  $t$  as duas retas de referência têm o mesmo deslocamento angular  $\theta$ ? (b) Esse é o primeiro instante  $t$ , desde  $t = 0$ , no qual as duas retas de referência estão alinhadas?



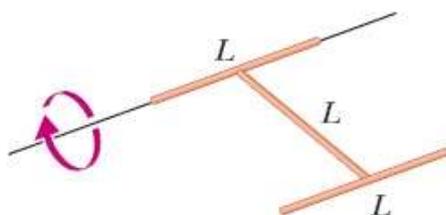
**Figura 10-51** Problema 74.

**75**  Um equilibrista sempre procura manter seu centro de massa verticalmente acima do arame (ou corda). Para isso, ele carrega muitas vezes uma vara comprida. Quando se inclina, digamos, para a direita (deslocando o centro de massa para a direita) e corre o risco de girar em torno do arame, ele movimenta a vara para a esquerda, o que desloca o centro de massa para a esquerda e diminui a velocidade de rotação, proporcionando-lhe mais tempo para recuperar o equilíbrio. Suponha que o equilibrista tem massa de 70,0 kg e momento de inércia de 15,0 kg·m<sup>2</sup> em relação ao arame. Qual é o módulo da aceleração angular em relação ao arame se o centro de massa do equilibrista está 5,0 cm à direita do arame, e (a) o equilibrista não carrega uma vara, e (b) a vara de 14,0 kg que ele carrega é movimentada de tal forma que o centro de massa do equilibrista fica 10 cm à esquerda do arame?

**76** Uma roda começa a girar a partir do repouso em  $t = 0$  com aceleração angular constante. No instante  $t = 2,0$  s, a velocidade angular da roda é 5,0 rad/s. A aceleração cessa abruptamente no instante  $t = 20$  s. De que ângulo gira a roda no intervalo de  $t = 0$  a  $t = 40$  s?

**77** Um prato de toca-discos, que está girando a 33 1/3 rev/min, diminui gradualmente de velocidade e para, 30 s depois que o motor é desligado. (a) Determine a aceleração angular do prato (suposta constante) em revoluções por minuto ao quadrado. (b) Quantas revoluções o prato executa até parar?

**78** Um corpo rígido é formado por três barras finas iguais, de comprimento  $L = 0,600$  m, unidas na forma da letra **H** (Fig. 10-52). O corpo pode girar livremente em torno de um eixo horizontal que coincide com uma das pernas do **H**. O corpo é liberado a partir do repouso em uma posição na qual o plano do **H** está na horizontal. Qual é a velocidade angular do corpo quando o plano do **H** está na vertical?



**Figura 10-52** Problema 78.

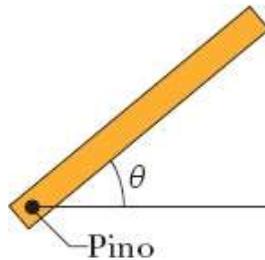
**79** (a) Mostre que o momento de inércia de um cilindro maciço de massa  $M$  e raio  $R$  em relação ao eixo central é igual ao momento de inércia de um aro fino de massa  $M$  e raio  $R/\sqrt{2}$  em relação ao eixo central. (b) Mostre que o momento de inércia  $I$  de um corpo qualquer de massa  $M$  em relação a qualquer eixo é igual ao momento de inércia de um aro equivalente em torno do mesmo eixo com a mesma massa  $M$  e um raio  $k$  dado por

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}}.$$

O raio  $k$  do aro equivalente é chamado de *raio de giração* do corpo.

**80** Um disco gira, com aceleração angular constante, da posição angular  $\theta_1 = 10,0$  rad até a posição angular  $\theta_2 = 70,0$  rad em 6,00 s. A velocidade angular em  $\theta_2$  é 15,0 rad/s. (a) Qual era a velocidade angular em  $\theta_1$ ? (b) Qual é a aceleração angular? (c) Em que posição angular o disco estava inicialmente em repouso? (d) Plote  $\theta$  em função de  $t$  e a velocidade angular  $\omega$  do disco em função de  $t$ , a partir do início do movimento ( $t = 0$ ).

**81** A barra fina e homogênea da Fig. 10-53 tem 2,0 m de comprimento e pode girar, sem atrito, em torno de um pino horizontal que passa por uma das extremidades. A barra é liberada a partir do repouso e de um ângulo  $\theta = 40^\circ$  acima da horizontal. Use a lei de conservação da energia para determinar a velocidade angular da barra ao passar pela posição horizontal.



**Figura 10-53** Problema 81.

**82**  George Washington Gale Ferris, Jr., um engenheiro civil formado pelo Instituto Politécnico Rensselaer, construiu a primeira roda-gigante para a Exposição Mundial Colombiana de 1893, em Chicago. A roda, uma impressionante obra da engenharia para a época, movimentava 36 cabinas de madeira, cada uma com capacidade para 60 passageiros, ao longo de uma circunferência com 76 m de diâmetro. As cabinas eram carregadas 6 de cada vez; quando as 36 cabinas estavam ocupadas, a roda executava uma revolução completa, com velocidade angular constante, em cerca de 2 min. Estime o trabalho que a máquina precisava realizar apenas para mover os passageiros.

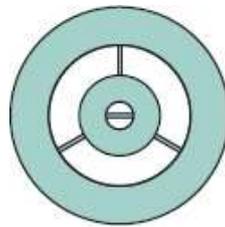
**83** Na Fig. 10-41, dois blocos, de massas  $m_1 = 400$  g e  $m_2 = 600$  g, estão ligados por uma corda, de massa desprezível, que está enrolada na borda de um disco homogêneo, de massa  $M = 500$  g e raio  $R = 12,0$  cm. O disco pode girar sem atrito em torno de um eixo horizontal que passa pelo centro; a corda não desliza na borda do disco. O sistema é liberado a partir do repouso. Determine (a) o módulo da aceleração dos blocos, (b) a tração  $T_1$  da corda da esquerda e (c) a tração  $T_2$  da corda da direita.

**84**  Às 7h14min de 30 de junho de 1908, uma enorme explosão aconteceu na atmosfera sobre a Sibéria Central, na latitude  $61^\circ$  N e longitude  $102^\circ$  E; a bola de fogo criada pela explosão foi o objeto mais brilhante visto na Terra antes das armas nucleares. O chamado *Evento de Tunguska*, que, de acordo com uma testemunha, “cobriu uma parte enorme do céu”, foi provavelmente a explosão de um *asteroide rochoso* de aproximadamente 140 m de diâmetro. (a) Considerando apenas a rotação da Terra, determine quanto tempo depois o asteroide teria que chegar à Terra para explodir acima de Helsinki, na longitude  $25^\circ$  E, o que destruiria totalmente a cidade. (b) Se o asteroide fosse um *asteroide metálico*, poderia ter chegado à superfície da Terra. Quanto tempo depois o asteroide teria que chegar à Terra para que o

choque ocorresse no Oceano Atlântico, na longitude  $20^\circ$  W? (O tsunami resultante destruiria cidades costeiras dos dois lados do Atlântico.)

**85** Uma bola de golfe é lançada com um ângulo de  $20^\circ$  em relação à horizontal, uma velocidade de  $60 \text{ m/s}$  e uma velocidade angular de  $90 \text{ rad/s}$ . Desprezando a resistência do ar, determine o número de revoluções que a bola executa até o instante em que atinge a altura máxima.

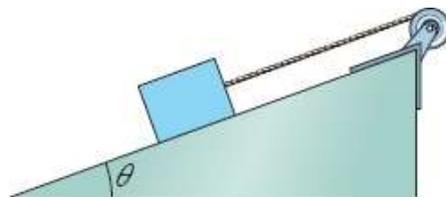
**86** A Fig. 10-54 mostra um objeto plano formado por dois anéis circulares que têm um centro comum e são mantidos fixos por três barras, de massa desprezível. O objeto, que está inicialmente em repouso, pode girar (como um carrossel) em torno do centro comum, onde se encontra outra barra, de massa desprezível. As massas, os raios internos e os raios externos dos anéis aparecem na tabela a seguir. Uma força tangencial de módulo  $12,0 \text{ N}$  é aplicada à borda externa do anel externo por  $0,300 \text{ s}$ . Qual é a variação na velocidade angular do objeto nesse intervalo de tempo?



**Figura 10-54** Problema 86.

Anel	Massa (kg)	Raio Interno (m)	Raio Externo (m)
1	0,120	0,0160	0,0450
2	0,240	0,0900	0,1400

**87** Na Fig. 10-55, uma roda com  $0,20 \text{ m}$  de raio é montada em um eixo horizontal sem atrito. Uma corda, de massa desprezível, é enrolada na roda e presa a uma caixa de  $2,0 \text{ kg}$  que escorrega em uma superfície sem atrito com uma inclinação  $\theta = 20^\circ$  em relação à horizontal. A caixa escorrega para baixo com uma aceleração de  $2,0 \text{ m/s}^2$ . Qual é o momento de inércia da roda em relação ao eixo?



**Figura 10-55** Problema 87.

**88** Uma casca esférica, fina, tem um raio de  $1,90 \text{ m}$ . Um torque aplicado de  $960 \text{ N} \cdot \text{m}$  produz uma aceleração angular de  $6,20 \text{ rad/s}^2$  em relação a um eixo que passa pelo centro da casca. (a) Qual é o momento de inércia da casca em relação a esse eixo e (b) qual é a massa da casca?

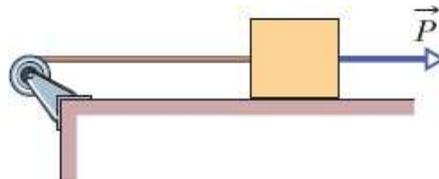
**89** Um ciclista de 70 kg apoia toda a sua massa em cada movimento para baixo do pedal enquanto pedala em uma estrada íngreme. Supondo que o diâmetro da circunferência descrita pelo pedal é 0,40 m, determine o módulo do torque máximo exercido pelo ciclista em relação ao eixo de rotação dos pedais.

**90** O volante de um motor está girando a 25,0 rad/s. Quando o motor é desligado, o volante desacelera a uma taxa constante e para, em 20,0 s. Calcule (a) a aceleração angular do volante, (b) o ângulo descrito pelo volante até parar e (c) o número de revoluções do volante até parar.

**91** Na Fig. 10-19a, uma roda com 0,20 m de raio está montada em um eixo horizontal sem atrito. O momento de inércia da roda em relação ao eixo é  $0,40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Uma corda, de massa desprezível, enrolada na borda da roda, está presa a uma caixa de 6,0 kg. O sistema é liberado a partir do repouso. Quando a caixa tem uma energia cinética de 6,0 J, qual é (a) a energia cinética de rotação da roda e (b) qual a distância percorrida pela caixa?

**92** O Sol está a  $2,3 \times 10^4$  anos-luz do centro da Via Láctea e descreve uma circunferência em torno do centro a uma velocidade de 250 km/s. (a) Quanto tempo leva o Sol para executar uma revolução em torno do centro da galáxia? (b) Quantas revoluções o Sol completou desde que se formou, há cerca de  $4,5 \times 10^9$  anos?

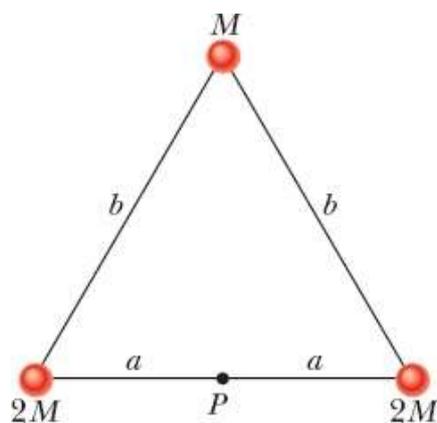
**93** Uma roda com 0,20 m de raio está montada em um eixo horizontal sem atrito. O momento de inércia da roda em relação ao eixo é  $0,050 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Uma corda, de massa desprezível, está enrolada na roda e presa a um bloco de 2,0 kg que escorrega em uma superfície horizontal sem atrito. Se uma força horizontal de módulo  $P = 3,0 \text{ N}$  é aplicada ao bloco, como na Fig. 10-56, qual é o módulo da aceleração angular da roda? Suponha que a corda não desliza em relação à roda.



**Figura 10-56** Problema 93.

**94** Se a hélice de um avião gira a 2000 rev/min quando o avião voa a uma velocidade de 480 km/h em relação ao solo, qual é a velocidade linear de um ponto na ponta da hélice, a 1,5 m de distância do eixo, em relação (a) ao piloto e (b) a um observador no solo? A velocidade do avião é paralela ao eixo de rotação da hélice.

**95** O corpo rígido mostrado na Fig. 10-57 é formado por três partículas ligadas por barras, de massa desprezível. O corpo gira em torno de um eixo perpendicular ao plano das três partículas que passa pelo ponto  $P$ . Se  $M = 0,40 \text{ kg}$ ,  $a = 30 \text{ cm}$  e  $b = 50 \text{ cm}$ , qual é o trabalho necessário para levar o corpo do repouso até a velocidade angular de 5,0 rad/s?



**Figura 10-57** Problema 95.

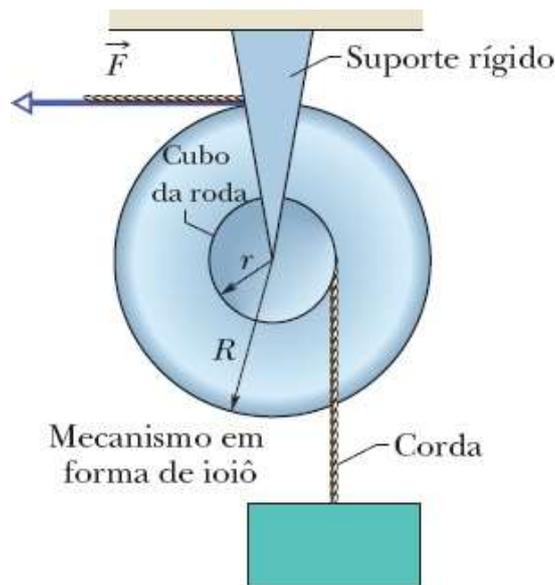
**96** *Engenharia de embalagens.* A tampa com um anel de puxar foi um grande avanço na engenharia das latas de bebida. O anel gira em torno de um pino situado no centro da tampa. Quando um dos lados do anel é puxado para cima, o outro lado empurra para baixo uma parte da tampa que foi riscada. Se você puxa o anel para cima com uma força de 10 N, qual é, aproximadamente, o módulo da força aplicada à parte riscada da tampa? (*Sugestão:* Examine uma lata de verdade.)

**97** A Fig. 10-58 mostra uma pá de hélice que gira a 2000 rev/min em torno de um eixo perpendicular que passa pelo ponto  $B$ . O ponto  $A$  está na outra extremidade da pá, a uma distância de 1,50 m. (a) Qual é a diferença entre o módulo da aceleração centrípeta  $\alpha$  do ponto  $A$  e o módulo da aceleração centrípeta de um ponto situado a 0,150 m de distância do eixo? (b) Determine a inclinação do gráfico de  $\alpha$  em função da distância ao longo da pá.



**Figura 10-58** Problema 97.

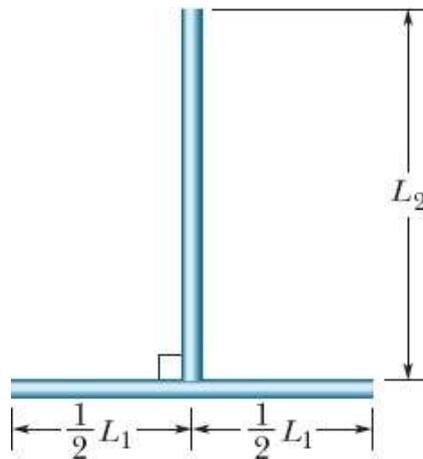
**98** Um mecanismo em forma de ioiô, montado em um eixo horizontal sem atrito, é usado para levantar uma caixa de 30 kg, como mostra a Fig. 10-59. O raio externo  $R$  da roda é 0,50 m e o raio  $r$  do cubo da roda é 0,20 m. Quando uma força horizontal  $\vec{F}$  constante de módulo 140 N é aplicada a uma corda enrolada na roda, a caixa, que está pendurada em uma corda enrolada no cubo, tem uma aceleração para cima de módulo  $0,80 \text{ m/s}^2$ . Qual é o momento de inércia do mecanismo em relação ao eixo de rotação?



**Figura 10-59** Problema 98.

**99** Uma pequena bola com massa de 1,30 kg está montada em uma das extremidades de uma barra de 0,780 m de comprimento e massa desprezível. O sistema gira em um círculo horizontal em torno da outra extremidade da barra a 5010 rev/min. (a) Calcule o momento de inércia do sistema em relação ao eixo de rotação. (b) Existe uma força de arrasto de  $2,30 \times 10^{-2}$  N agindo sobre a bola, no sentido oposto ao do movimento. Que torque deve ser aplicado ao sistema para mantê-lo em rotação com velocidade constante?

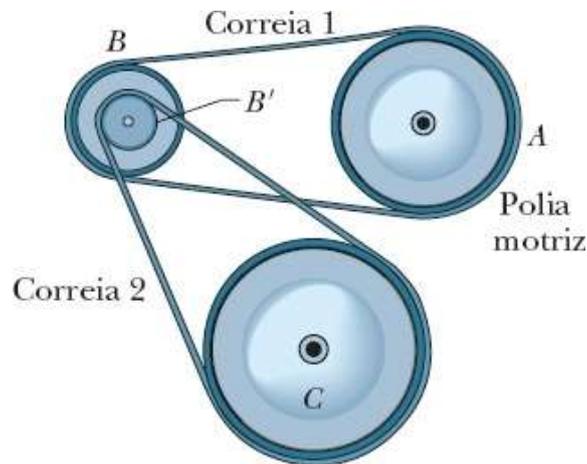
**100** Duas barras finas (com uma massa de 0,20 kg cada uma) estão unidas para formar um corpo rígido, como mostra a Fig. 10-60. Uma das barras tem comprimento  $L_1 = 0,40$  m e a outra tem comprimento  $L_2 = 0,50$  m. Qual é o momento de inércia desse corpo rígido em relação (a) a um eixo perpendicular ao plano do papel passando pelo centro da barra menor e (b) a um eixo perpendicular ao plano do papel passando pelo centro da barra maior?



**Figura 10-60** Problema 100.

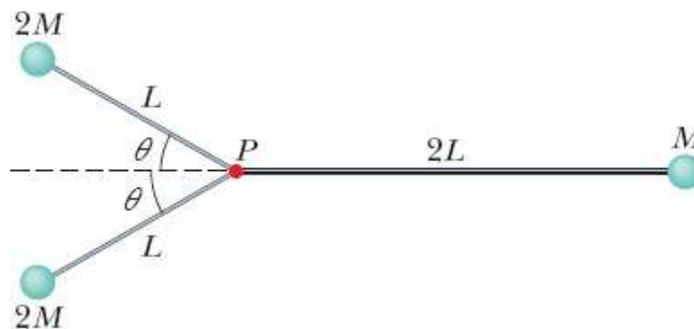
**101** Na Fig. 10-61, quatro polias estão ligadas por duas correias. A polia A (com 15 cm de raio) é a polia

motriz e gira a  $10 \text{ rad/s}$ . A polia  $B$  (com  $10 \text{ cm}$  de raio) está ligada à polia  $A$  pela correia 1. A polia  $B'$  (com  $5 \text{ cm}$  de raio) é concêntrica com a polia  $B$  e está rigidamente ligada a ela. A polia  $C$  (com  $25 \text{ cm}$  de raio) está ligada à polia  $B'$  pela correia 2. Calcule (a) a velocidade linear de um ponto da correia 1, (b) a velocidade angular da polia  $B$ , (c) a velocidade angular da polia  $B'$ , (d) a velocidade linear de um ponto da correia 2 e (e) a velocidade angular da polia  $C$ . (*Sugestão:* Se a correia entre duas polias não desliza, as velocidades lineares das bordas das duas polias são iguais.)



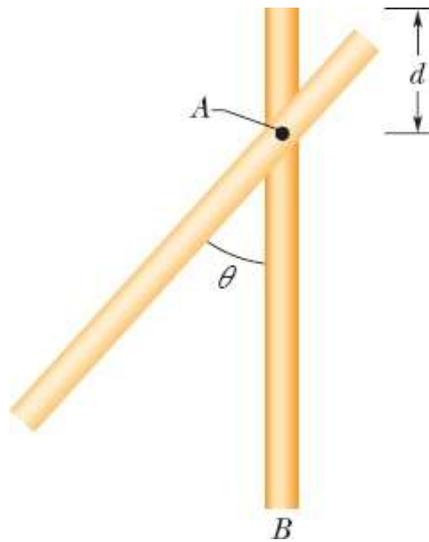
**Figura 10-61** Problema 101.

**102** O corpo rígido da Fig. 10-62 é formado por três bolas e três barras de ligação, com  $M = 1,6 \text{ kg}$ ,  $L = 0,60 \text{ m}$  e  $\theta = 30^\circ$ . As bolas podem ser tratadas como partículas, e as barras têm massa desprezível. Determine a energia cinética de rotação do corpo se a velocidade angular é  $1,2 \text{ rad/s}$  em relação (a) a um eixo que passa pelo ponto  $P$  e é perpendicular ao plano do papel e (b) a um eixo que passa pelo ponto  $P$ , é perpendicular à barra de comprimento  $2L$  e está no plano do papel.



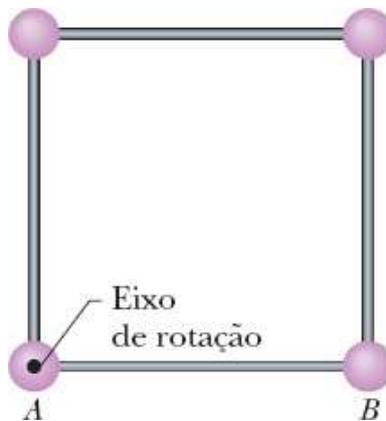
**Figura 10-62** Problema 102.

**103** Na Fig. 10-63, uma barra fina e homogênea (com  $4,0 \text{ m}$  de comprimento e  $3,0 \text{ kg}$  de massa) gira livremente em torno de um eixo horizontal  $A$  que é perpendicular à barra e passa por um ponto situado a uma distância  $d = 1,0 \text{ m}$  da extremidade da barra. A energia cinética da barra ao passar pela posição vertical é  $20 \text{ J}$ . (a) Qual é o momento de inércia da barra em relação ao eixo  $A$ ? (b) Qual é a velocidade (linear) da extremidade  $B$  da barra ao passar pela posição vertical? (c) Qual é o ângulo  $\theta$  no momento em que a barra para momentaneamente, depois de passar pela posição vertical?



**Figura 10-63** Problema 103.

**104** Quatro partículas, com 0,20 kg de massa, ocupam os vértices de um quadrado com 0,50 m de lado. As partículas estão ligadas por barras, de massa desprezível. Esse corpo rígido pode girar em um plano vertical em torno de um eixo horizontal  $A$  que passa por uma das partículas. O corpo é liberado a partir do repouso com a barra  $AB$  na horizontal, como mostra a Fig. 10-64. (a) Qual é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo  $A$ ? (b) Qual é a velocidade angular do corpo em relação ao eixo  $A$  no instante em que a barra  $AB$  passa pela posição vertical?



**Figura 10-64** Problema 104.

**105** Existem relatos de guepardos correndo à velocidade impressionante de 114 km/h, feitos por observadores que dirigiam ao lado desses animais. Imagine o que é tentar medir a velocidade de um guepardo mantendo um jipe emparelhado com o animal e ao mesmo tempo olhando de soslaio para um velocímetro que registra 114 km/h. Você conserva o veículo a uma distância constante de 8,0 m do guepardo, mas o barulho do motor faz com que o guepardo se afaste continuamente ao longo de uma trajetória circular com 92 m de raio. Assim, você é forçado a seguir uma trajetória circular com 100 m de raio. (a) Qual é a velocidade angular (sua e do guepardo) ao longo das trajetórias circulares? (b) Qual é a velocidade linear do guepardo? (Se você não levasse em consideração o movimento circular,

concluiria erroneamente que a velocidade do guepardo era 114 km/h. Aparentemente, esse tipo de erro foi cometido nos relatos publicados.)

**106** Um ponto da borda de um rebole com 0,75 m de diâmetro muda de velocidade, a uma taxa constante, de 12 m/s para 25 m/s em 6,2 s. Qual é a aceleração angular média do rebole?

**107** Uma polia com 8,0 cm de diâmetro tem uma corda de 5,6 m de comprimento enrolada na borda. Partindo do repouso, a roldana recebe uma aceleração angular constante de  $1,5 \text{ rad/s}^2$ . (a) Que ângulo a roldana deve descrever para que a corda desenrole totalmente? (b) Quanto tempo isso leva para acontecer?

**108** Um disco de vinil gira a  $33 \frac{1}{3} \text{ rev/min}$  no prato de um toca-discos. (a) Qual é a velocidade angular do disco em radianos por segundo? Qual é a velocidade linear em um ponto do disco (b) a 15 cm e (c) a 7,4 cm do centro do disco?

# Rolagem, Torque e Momento Angular

## 11-1 ROLAGEM COMO UMA COMBINAÇÃO DE TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

**11.01** Saber que uma rotação suave pode ser considerada uma combinação de translação pura e rotação pura.

**11.02** Conhecer a relação entre a velocidade do centro de massa e a velocidade angular de um objeto que está rolando suavemente.

### Ideias-Chave

- Se uma roda de raio  $R$  está rolando suavemente,

$$v_{CM} = \omega R$$

em que  $v_{CM}$  é a velocidade angular do centro de massa da roda e  $\omega$  é a velocidade angular da roda em relação ao centro.

- Também é possível imaginar que a roda gira, a cada instante, em torno do ponto  $P$  da “estrada” que está em contato com a roda. A velocidade angular da roda em relação a esse ponto é igual à velocidade da roda em relação ao centro.

### O que É Física?

Como vimos no Capítulo 10, um dos objetivos da física é o estudo das rotações. Entre as aplicações desse estudo, a mais importante é talvez a análise da rolagem de rodas e objetos que se comportam como rodas. Essa aplicação da física vem sendo usada há muito tempo. Assim, por exemplo, quando os habitantes pré-históricos da Ilha da Páscoa moveram gigantescas estátuas de pedra de uma pedreira para outros lugares da ilha, eles as arrastaram sobre toras, que funcionaram como roletes. Mais tarde, quando os americanos colonizaram o oeste no século XIX, transportaram seus pertences primeiro em carroças e depois em vagões de trem. Hoje em dia, gostemos ou não, o mundo está repleto de carros, caminhões, motocicletas, bicicletas e outros veículos sobre rodas.

A física e a engenharia do transporte sobre rodas são tão antigas que alguém poderia pensar que nada de novo resta para ser criado. Entretanto, as pranchas de skate e os patins in-line foram inventados e lançados recentemente no mercado e se tornaram um grande sucesso. Um tipo moderno de carrinho de rolimã, conhecido como *street luge*, entrou na moda nos Estados Unidos, e veículos individuais como o Segway (Fig. 11-1) podem mudar a forma como as pessoas se movimentam nas grandes cidades. As aplicações da física da rolagem ainda podem reservar muitas surpresas e recompensas. Nosso ponto de

partida para estudar essa parte da física será simplificar o movimento de rolagem.

## Rolagem como uma Combinação de Translação e Rotação

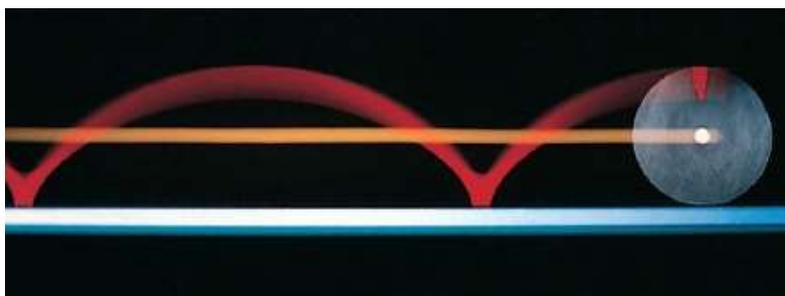
No momento, vamos considerar apenas objetos que *rolam suavemente* em uma superfície, ou seja, que rolam sem escorregar ou quicar na superfície. A Fig. 11-2 mostra como o movimento de rolagem suave pode ser complicado: Embora o centro do objeto se mova em uma linha reta paralela à superfície, um ponto da borda certamente não o faz. Entretanto, podemos estudar o movimento de rolagem suave tratando-o como uma combinação de translação do centro de massa e rotação do resto do objeto em torno do centro de massa.



Justin Sullivan/Getty Images, Inc.

**Figura 11-1** O Segway.

Para compreender como isso é possível, imagine que você está parado em uma calçada observando a roda de bicicleta da Fig. 11-3 passar na rua. Como mostra a figura, você vê o centro de massa  $O$  da roda se mover com velocidade constante  $v_{CM}$ . O ponto  $P$  em que a roda faz contato com o piso também se move para a frente com velocidade  $v_{CM}$ , de modo que  $P$  permanece sempre diretamente abaixo de  $O$ .

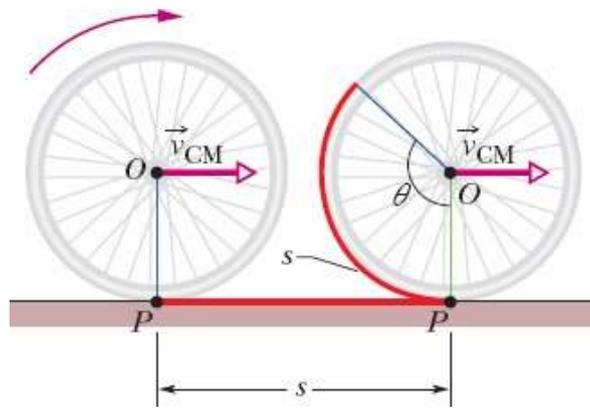


**Figura 11-2** Fotografia de longa exposição de um disco rolando. Pequenas lâmpadas foram presas ao disco, uma no centro e outra na borda. A segunda descreve uma curva chamada *cicloide*.

Durante um intervalo de tempo  $t$ , você observa os pontos  $O$  e  $P$  se deslocarem de uma distância  $s$ . O ciclista vê a roda girar de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo, com o ponto que estava tocando a rua no início do intervalo descrevendo um arco de comprimento  $s$ . A Eq. 10-17 relaciona o comprimento do arco,  $s$ , ao ângulo de rotação,  $\theta$ :

$$s = \theta R, \quad (11-1)$$

em que  $R$  é o raio da roda. A velocidade linear  $v_{\text{CM}}$  do centro da roda (o centro de massa dessa roda homogênea) é  $ds/dt$ . A velocidade angular  $\omega$  da roda é  $d\theta/dt$ . Derivando a Eq. 11-1 em relação ao tempo (com  $R$  constante), obtemos



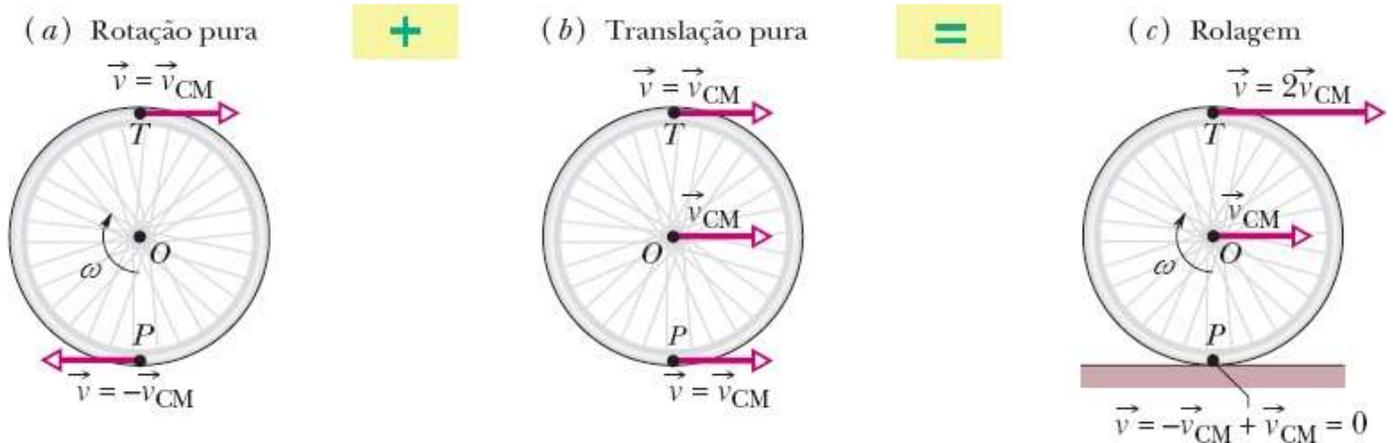
**Figura 11-3** O centro de massa  $O$  de uma roda percorre uma distância  $s$  com velocidade  $\vec{v}_{\text{CM}}$  enquanto a roda gira de um ângulo  $\theta$ . O ponto  $P$  de contato entre a roda e a superfície na qual está rolando também percorre uma distância  $s$ .

$$v_{\text{CM}} = \omega R \quad (\text{rolagem suave}). \quad (11-2)$$

**Uma Combinação de Movimentos.** A Fig. 11-4 mostra que o movimento de rolagem de uma roda é a combinação de um movimento puro de translação e um movimento puro de rotação. A Fig. 11-4a mostra o movimento puro de rotação (como se o eixo de rotação estivesse estacionário): Todos os pontos da roda giram em torno do centro com velocidade angular  $\omega$ . (Esse é o tipo de movimento que discutimos no Capítulo 10.) Todos os pontos da periferia da roda têm uma velocidade linear escalar  $v_{\text{CM}}$  dada pela Eq. 11-2. A Fig. 11-4b mostra o movimento puro de translação (como se a roda não estivesse rodando): Todos os pontos da roda se movem para a direita com velocidade escalar  $\vec{v}_{\text{CM}}$ .

A combinação dos movimentos representados nas Figs. 11-4a e 11-4b é a rolagem da roda, representada na Fig. 11-4c. Observe que, nessa combinação de movimentos, a velocidade escalar da extremidade inferior da roda (ponto  $P$ ) é zero e a velocidade escalar da extremidade superior (ponto  $T$ ) é  $2v_{\text{CM}}$ , maior que em qualquer outro ponto da roda. Esses resultados são confirmados na Fig. 11-5, que é uma fotografia de longa exposição de uma roda de bicicleta em movimento. O fato de que os raios da

roda estão mais nítidos na parte de baixo do que na parte de cima mostra que a roda está se movendo mais devagar na parte de baixo do que na parte de cima.



**Figura 11-4** Movimento de rolagem de uma roda como a combinação de um movimento de rotação pura e um movimento de translação pura. (a) Movimento de rotação pura: todos os pontos da roda se movem com a mesma velocidade angular  $\omega$ , e todos os pontos da borda se movem com a mesma velocidade linear escalar  $v = v_{CM}$ . São mostradas as velocidades lineares  $\vec{v}$  de dois desses pontos, na borda de cima (T) e na borda de baixo (P) da roda. (b) Movimento de translação pura: todos os pontos da roda se movem para a direita com a mesma velocidade linear  $\vec{v}_{CM}$ . (c) O movimento de rolagem da roda é uma combinação de (a) e (b).



**Figura 11-5** Fotografia de uma roda de bicicleta em movimento. Os raios de baixo estão mais nítidos que os raios de cima porque estão se movendo mais devagar, como mostra a Fig. 11-4c.

O movimento de qualquer corpo redondo rolando suavemente em uma superfície pode ser separado em movimentos puros de rotação e translação, como nas Figs. 11-4a e 11-4b.

### Rolagem como uma Rotação Pura

A Fig. 11-6 sugere outra forma de descrever o movimento de rolagem de uma roda: como uma rotação pura em torno de um eixo que sempre passa pelo ponto de contato entre a roda e a superfície na qual a roda está rolando. Consideramos o movimento de rolagem como uma rotação pura em torno de um eixo que passa pelo ponto  $P$  da Fig. 11-4c e é perpendicular ao plano do papel. Os vetores da Fig. 11-6 mostram a velocidade instantânea de alguns pontos da roda.

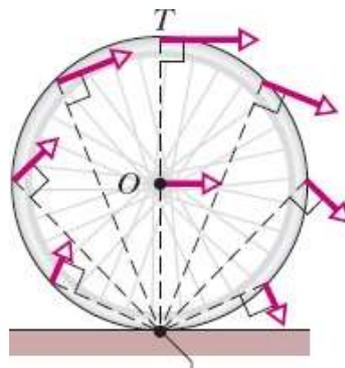
**Pergunta:** Que velocidade angular em torno desse novo eixo um observador estacionário atribuiria a uma roda de bicicleta?

**Resposta:** A mesma velocidade angular  $\omega$  que o ciclista atribui à roda quando a observa em movimento de rotação pura em torno de um eixo passando pelo centro de massa.

Para mostrar que essa resposta está correta, vamos usá-la para calcular a velocidade linear da extremidade superior da roda, do ponto de vista de um observador estacionário. Chamando de  $R$  o raio da roda, a extremidade superior está a uma distância  $2R$  do eixo que passa pelo ponto  $P$  na Fig. 11-6, de modo que, de acordo com a Eq. 11-2, a velocidade linear da extremidade superior é

$$v_{\text{sup}} = (\omega)(2R) = 2(\omega R) = 2v_{\text{CM}}$$

em perfeita concordância com a Fig. 11-4c. O leitor pode verificar que a concordância também é observada para os pontos  $O$  e  $P$  da Fig. 11-4c.



**Figura 11-6** A rolagem pode ser vista como uma rotação pura, com velocidade angular  $\omega$ , em torno de um eixo que sempre passa por  $P$ . Os vetores mostram as velocidades lineares instantâneas de alguns pontos da roda. Esses vetores podem ser obtidos combinando os movimentos de translação e rotação, como mostrado na Fig. 11-4.

### ☑ Teste 1

A roda traseira da bicicleta de um palhaço tem um raio duas vezes maior que a roda dianteira. (a) A velocidade linear da extremidade superior da roda traseira é maior, menor ou igual à velocidade linear da extremidade superior da roda dianteira quando a bicicleta está em movimento? (b) A velocidade angular da roda traseira é maior, menor ou igual à velocidade angular da roda dianteira?

## 11-2 AS FORÇAS E A ENERGIA CINÉTICA DA ROLAGEM

---

## Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

- 11.03** Calcular a energia cinética de um objeto em rolagem suave como a soma da energia cinética de translação do centro de massa com a energia cinética de rotação em torno do centro de massa.
- 11.04** Conhecer a relação entre o trabalho realizado sobre um objeto em rolagem suave e a variação da energia cinética do objeto.
- 11.05** Usar a lei de conservação da energia mecânica para relacionar a energia inicial de um objeto em rolagem suave à energia do mesmo objeto em um instante posterior.
- 11.06** Desenhar o diagrama de corpo livre de um objeto em rolagem suave que está se movendo em uma superfície horizontal ou inclinada sob a ação de uma ou mais forças.
- 11.07** Conhecer a relação entre a aceleração do centro de massa e a aceleração angular de um objeto em rolagem suave.
- 11.08** No caso de um objeto em rolagem suave que está se movendo em uma rampa, conhecer a relação entre a aceleração do objeto, o momento de inércia do objeto e o ângulo da rampa.

---

## Ideias-Chave

- A energia cinética de uma roda que está rolando suavemente é dada por

$$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2,$$

em que  $I_{CM}$  é o momento de inércia da roda em relação ao centro de massa e  $M$  é a massa da roda.

- A relação entre a aceleração do centro de massa  $a_{CM}$  e a aceleração angular  $\alpha$  de uma roda que está rolando suavemente é dada por

$$a_{CM} = \alpha R$$

- A componente em relação a um eixo  $x$  paralelo à rampa da aceleração de uma roda que está rolando suavemente para baixo em uma rampa de ângulo  $\theta$  é dada por

$$a_{CM,x} = -\frac{g \sen \theta}{1 + I_{CM}/MR^2}.$$

---

## A Energia Cinética da Rolagem

Vamos agora calcular a energia cinética de uma roda em rolagem do ponto de vista de um observador estacionário. Quando encaramos a rolagem como uma rotação pura em torno de um eixo que passa pelo ponto  $P$  da Fig. 11-6, a Eq. 10-34 nos dá

$$K = \frac{1}{2}I_P\omega^2, \quad (11-3)$$

em que  $\omega$  é a velocidade angular da roda e  $I_P$  é o momento de inércia da roda em relação a um eixo passando por  $P$ . De acordo com o teorema dos eixos paralelos da Eq. 10-36 ( $I = I_{CM} + Mh^2$ ), temos:

$$I_P = I_{CM} + MR^2, \quad (11-4)$$

em que  $M$  é a massa da roda,  $I_{CM}$  é o momento de inércia da roda em relação a um eixo passando pelo centro de massa e  $R$  (o raio da roda) é a distância perpendicular  $h$  entre os eixos. Substituindo a Eq. 11-4 na Eq. 11-3, obtemos

$$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2,$$

e usando a relação  $v_{CM} = \omega R$  (Eq. 11-2), temos

$$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2. \quad (11-5)$$

Podemos interpretar o termo  $\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$  como a energia cinética associada à rotação da roda em torno de um eixo que passa pelo centro de massa (Fig. 11-4a), e o termo  $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$  como a energia cinética associada ao movimento de translação do centro de massa da roda (Fig. 11-4b). Assim, temos a seguinte regra:

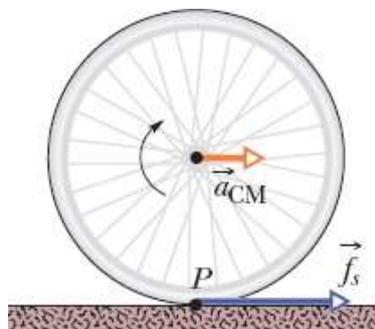


Um objeto em rolagem possui dois tipos de energia cinética: uma energia cinética de rotação ( $\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$ ) associada à rotação em torno do centro de massa e uma energia cinética de translação ( $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$ ) associada à translação do centro de massa.

## As Forças da Rolagem

### Atrito e Rolagem

Uma roda que rola com velocidade constante, como na Fig. 11-3, não tende a deslizar no ponto de contato  $P$  e, portanto, não está sujeita a uma força de atrito. Entretanto, se uma força age sobre a roda para aumentar ou diminuir a velocidade, essa força produz uma aceleração  $\vec{a}_{CM}$  do centro de massa na direção do movimento. A força também faz com que a roda gire mais depressa ou mais devagar, o que significa que ela produz uma aceleração angular  $\alpha$ . Essa aceleração tende a fazer a roda deslizar no ponto  $P$ . Assim, uma força de atrito passa a agir sobre a roda no ponto  $P$  para se opor a essa tendência.



**Figura 11-7** Uma roda rola horizontalmente sem deslizar enquanto acelera com uma aceleração linear  $\vec{a}_{CM}$ . A força de atrito estático  $\vec{f}_s$  age sobre a roda em  $P$ , impedindo o deslizamento.

Se a roda *não desliza*, a força é a força de atrito *estático*  $\vec{f}_s$  e o movimento é de rolagem suave. Nesse

caso, podemos relacionar a aceleração linear  $a_{\text{CM}}$  à aceleração angular  $\alpha$  derivando a Eq. 11-2 em relação ao tempo (com  $R$  constante). No lado esquerdo,  $dv_{\text{CM}}/dt$  é igual a  $a_{\text{CM}}$ ; no lado direito,  $d\omega/dt$  é igual a  $\alpha$ . Assim, no caso de uma rolagem suave, temos:

$$a_{\text{CM}} = \alpha R \quad (\text{rolagem suave}). \quad (11-6)$$

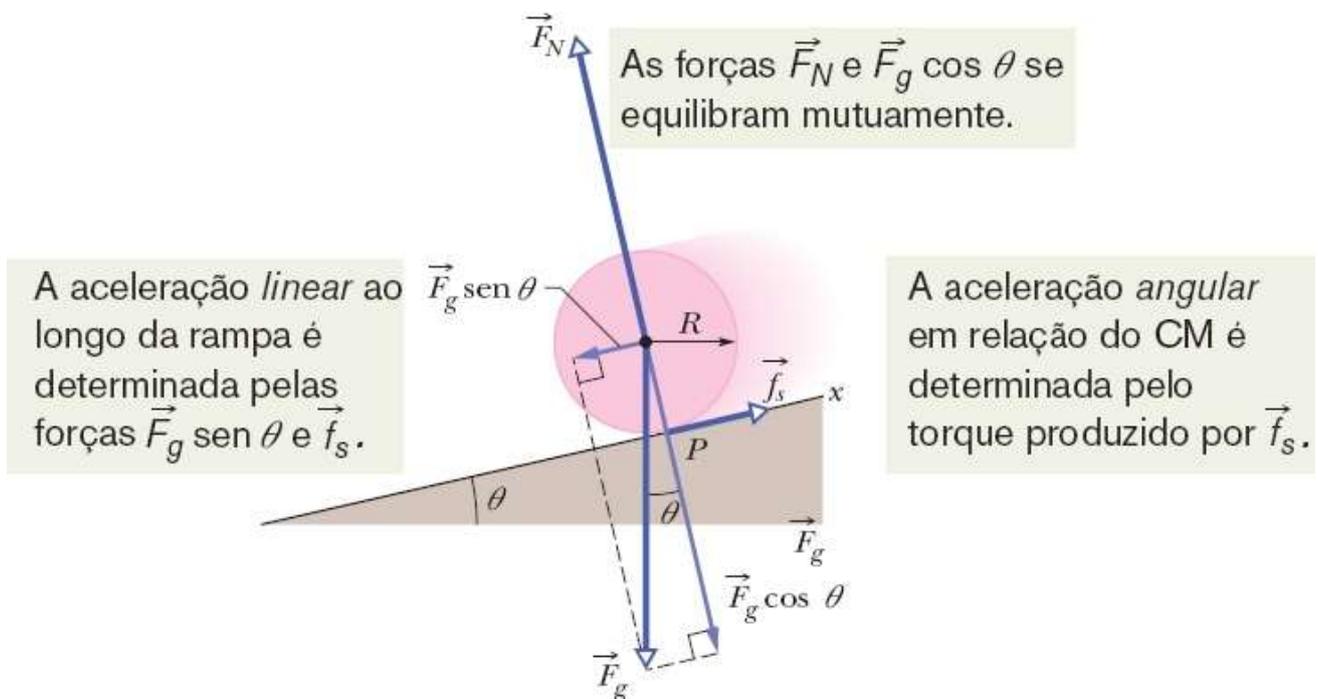
Se a roda *desliza* quando a força é aplicada, a força de atrito no ponto  $P$  da roda da Fig. 11-3 é a força de atrito *cinético*  $\vec{f}_k$ . Nesse caso, o movimento não é de rolagem suave e a Eq. 11-6 não se aplica. Neste capítulo, vamos discutir apenas movimentos de rolagem suave.

A Fig. 11-7 mostra um exemplo no qual uma roda está sendo acelerada enquanto rola para a direita ao longo de uma superfície plana, como acontece com a roda de uma bicicleta no início de uma corrida. O aumento da velocidade de rotação tende a fazer a parte inferior da roda deslizar para a esquerda no ponto  $P$ . Uma força de atrito em  $P$ , dirigida para a direita, se opõe à tendência de deslizamento. Se a roda não desliza, a força de atrito é a força de atrito estático  $\vec{f}_s$  (como na Fig. 11-7), o movimento é de rolagem suave e a Eq. 11-6 pode ser empregada. (Se não fosse o atrito, as corridas de bicicleta seriam estacionárias e muito enfadonhas.)

Se a velocidade de rotação da roda na Fig. 11-7 estivesse diminuindo, como no caso de uma bicicleta sendo freada, a figura teria que sofrer duas modificações: o sentido da aceleração do centro de massa  $\vec{a}_{\text{CM}}$  e o sentido da força de atrito  $\vec{f}_s$  no ponto  $P$  passariam a ser para a esquerda.

### Rolagem para Baixo em uma Rampa

A Fig. 11-8 mostra um corpo redondo, homogêneo, de massa  $M$  e raio  $R$ , rolando suavemente para baixo ao longo de um eixo  $x$  em uma rampa inclinada, de ângulo  $\theta$ . Queremos obter uma expressão para a aceleração do corpo  $a_{\text{CM},x}$  ao longo da rampa. Para isso, usamos as versões linear ( $F_{\text{res}} = Ma$ ) e angular ( $\tau_{\text{res}} = I\alpha$ ) da segunda lei de Newton.



**Figura 11-8** Um corpo redondo, homogêneo, de raio  $R$ , rola para baixo em uma rampa. As forças que agem sobre o corpo são a força gravitacional  $\vec{F}_g$ , a força normal  $\vec{F}_N$  e a força de atrito estático  $\vec{f}_s$ . (Para maior clareza, o vetor  $\vec{F}_N$  foi deslocado ao longo da linha de ação até a origem coincidir com o centro do corpo.)

Para começar, desenhamos as forças que agem sobre o corpo, como mostra a Fig. 11-8:

1. A força gravitacional  $\vec{F}_g$  que atua sobre o corpo aponta para baixo. A origem do vetor está no centro de massa do corpo. A componente paralela à rampa é  $F_g \sin \theta$ , que é igual a  $Mg \sin \theta$ .
2. A força normal  $\vec{F}_N$  é perpendicular à rampa e atua no ponto de contato  $P$ , mas, na Fig. 11-8, o vetor foi deslocado ao longo da linha de ação até que a origem ficasse no centro de massa do corpo.
3. A força de atrito estático  $\vec{f}_s$  atua no ponto de contato  $P$  e está dirigida para cima, paralelamente à rampa. (Você percebe por quê? Caso o corpo deslizesse no ponto  $P$ , o movimento seria *para baixo*, paralelamente à rampa. Assim, a força de atrito que se opõe ao deslizamento deve apontar *para cima*, paralelamente à rampa.)

Podemos escrever a segunda lei de Newton para as componentes em relação ao eixo  $x$  da Fig. 11-8 ( $F_{\text{res},x} = Ma_x$ ) como

$$f_s - Mg \sin \theta = Ma_{\text{CM},x} \quad (11-7)$$

A Eq. (11-7) tem duas incógnitas,  $f_s$  e  $a_{\text{CM},x}$ . (Não podemos dizer que o valor de  $f_s$  corresponde ao valor máximo,  $f_{s,\text{máx}}$ . Tudo que sabemos é que o valor de  $f_s$  é suficiente para que o corpo role suavemente para baixo na rampa, sem deslizar.)

Agora podemos usar a forma angular da segunda lei de Newton para descrever a rotação do corpo em torno de um eixo horizontal passando pelo centro de massa. Para começar, usamos a Eq. 10-41 ( $\tau = r_{\perp}F$ ) para calcular os torques a que o corpo está submetido. A força de atrito  $\vec{f}_s$  possui um braço de alavanca  $R$  e, portanto, produz um torque  $Rf_s$  que é positivo, já que tende a fazer o corpo girar no sentido anti-horário da Fig. 11-8. As forças  $\vec{F}_g$  e  $\vec{F}_N$  possuem braço de alavanca nulo em relação ao centro de massa e,

portanto, produzem torque nulo. Assim, podemos escrever a forma angular da segunda lei de Newton ( $\tau_{\text{res}} = I\alpha$ ) em relação a um eixo horizontal passando pelo centro de massa como

$$Rf_s = I_{\text{CM}}\alpha. \quad (11-8)$$

A Eq. (11-8) tem duas incógnitas,  $f_s$  e  $\alpha$ .

Como o corpo está rolando suavemente, podemos usar a Eq. 11-6 ( $a_{\text{CM}} = \alpha R$ ) para relacionar as incógnitas  $a_{\text{CM},x}$  e  $\alpha$ . Entretanto, devemos ter cuidado, pois nesse caso  $a_{\text{CM},x}$  é negativa (aponta no sentido negativo do eixo  $x$ ) e  $\alpha$  é positiva (aponta no sentido anti-horário). Assim, devemos fazer  $\alpha = -a_{\text{CM},x}/R$  na Eq. 11-8. Explicitando  $f_s$ , obtemos

$$f_s = -I_{\text{CM}} \frac{a_{\text{CM},x}}{R^2}. \quad (11-9)$$

Substituindo  $f_s$  na Eq. 11-7 pelo lado direito da Eq. 11-9, obtemos:

$$a_{\text{CM},x} = -\frac{g \sen \theta}{1 + I_{\text{CM}}/MR^2}. \quad (11-10)$$

Podemos usar a Eq. 11-10 para calcular a aceleração linear  $a_{\text{CM},x}$  de qualquer corpo que rola suavemente em um plano inclinado cujo ângulo com a horizontal é  $\theta$ .

Note que a força gravitacional faz o corpo descer a rampa, mas é a força de atrito estático que faz o corpo rolar. Se eliminarmos o atrito (passando graxa na rampa, por exemplo) ou se  $Mg \sen \theta > f_{s,\text{máx}}$ , em vez de rolar suavemente, o corpo passará a deslizar para baixo na rampa.

## ☑ Teste 2

Os discos  $A$  e  $B$  são iguais e rolam inicialmente em um piso horizontal com a mesma velocidade. O disco  $A$  sobe uma rampa com atrito e atinge uma altura máxima  $h$ ; o disco  $B$  sobe uma rampa igual à primeira, mas sem atrito. A altura máxima atingida pelo disco  $B$  é maior, menor ou igual a  $h$ ?

## Exemplo 11.01 Bola que desce uma rampa

Uma bola homogênea, de massa  $M = 6,00$  kg e raio  $R$ , rola suavemente, a partir do repouso, descendo uma rampa inclinada de ângulo  $\theta = 30,0^\circ$  (Fig. 11-8).

(a) A bola desce uma distância vertical  $h = 1,20$  m para chegar à base da rampa. Qual é a velocidade da bola ao chegar à base da rampa?

### IDEIAS-CHAVE

A energia mecânica  $E$  do sistema bola-Terra é conservada quando a bola rola rampa abaixo. Isso acontece porque a única força que realiza trabalho sobre a bola é a força gravitacional, que é uma força conservativa. A força normal exercida pela rampa sobre a bola não realiza trabalho porque é perpendicular à trajetória da bola. A força de atrito exercida pela rampa sobre a bola não transforma energia em energia térmica porque a bola não desliza (a bola *rola suavemente*).

Sendo assim, podemos escrever a lei de conservação da energia mecânica ( $E_f = E_i$ ) na forma

$$K_f + U_f = K_i + U_i, \quad (11-11)$$

em que os índices  $f$  e  $i$  se referem aos valores final (na base da rampa) e inicial (no alto da rampa), respectivamente. A energia potencial gravitacional é, inicialmente,  $U_i = Mgh$  (em que  $M$  é a massa da bola). Na situação final,  $U_f = 0$ . A energia cinética é, inicialmente,  $K_i = 0$ . Para calcular a energia cinética final  $K_f$ , precisamos de uma ideia adicional: Como a bola rola, a energia cinética envolve translação e rotação, de modo que devemos incluir as duas formas de energia cinética usando o lado direito da Eq. 11-5.

**Cálculos:** Substituindo todas essas expressões na Eq. 11-11, obtemos

$$\left(\frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2\right) + 0 = 0 + Mgh, \quad (11-12)$$

em que  $I_{\text{CM}}$  é o momento de inércia da bola em relação a um eixo que passa pelo centro de massa,  $v_{\text{CM}}$  é a velocidade pedida na base da rampa e  $\omega$  é a velocidade angular na base da rampa.

Como a bola rola suavemente, podemos usar a Eq. 11-2 para substituir  $\omega$  por  $v_{\text{CM}}/R$  e reduzir o número de incógnitas da Eq. 11-12. Fazendo isso, substituindo  $I_{\text{CM}}$  por  $MR^2$  (de acordo com a Tabela 10-2f) e explicitando  $v_{\text{CM}}$ , obtemos

$$\begin{aligned} v_{\text{CM}} &= \sqrt{\left(\frac{10}{7}\right)gh} = \sqrt{\left(\frac{10}{7}\right)(9,8 \text{ m/s}^2)(1,20 \text{ m})} \\ &= 4,10 \text{ m/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Note que a resposta não depende de  $M$  ou de  $R$ .

(b) Quais são o módulo e a orientação da força de atrito que age sobre a bola quando a bola desce a rampa rolando suavemente?

### IDEIA-CHAVE

---

Como a bola rola suavemente, a força de atrito que age sobre a bola é dada pela Eq. 11-9.

**Cálculos:** Para usar a Eq. 11-9, precisamos conhecer a aceleração da bola,  $a_{\text{CM},x}$ , que pode ser calculada com o auxílio da Eq. 11-10:

$$\begin{aligned}
 a_{\text{CM},r} &= -\frac{g \sin \theta}{1 + I_{\text{CM}}/MR^2} = -\frac{g \sin \theta}{1 + \frac{2}{5}MR^2/MR^2} \\
 &= -\frac{(9,8 \text{ m/s}^2) \sin 30,0^\circ}{1 + \frac{2}{5}} = -3,50 \text{ m/s}^2.
 \end{aligned}$$

Note que não precisamos conhecer a massa  $M$  e o raio  $R$  da bola para calcular  $a_{\text{CM},r}$ . Isso significa que uma bola de qualquer tamanho e qualquer massa (contanto que a distribuição de massa seja uniforme) tem a mesma aceleração para baixo em uma rampa com uma inclinação de  $30,0^\circ$ , desde que role suavemente.

Podemos agora resolver a Eq. 11-9 para obter o valor do módulo da força de atrito:

$$\begin{aligned}
 f_s &= -I_{\text{CM}} \frac{a_{\text{CM},r}}{R^2} = -\frac{2}{5}MR^2 \frac{a_{\text{CM},r}}{R^2} = -\frac{2}{5}Ma_{\text{CM},r} \\
 &= -\frac{2}{5}(6,00 \text{ kg})(-3,50 \text{ m/s}^2) = 8,40 \text{ N.} \quad (\text{Resposta})
 \end{aligned}$$

Note que precisamos da massa  $M$ , mas não do raio  $R$ . Isso significa que a força de atrito exercida sobre qualquer bola de  $6,00 \text{ kg}$  que rolar suavemente em uma rampa de  $30,0^\circ$  será de  $8,40 \text{ N}$ , independentemente do raio da bola.

## 11-3 o ioiô

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

- 11.09** Desenhar o diagrama de corpo livre de um ioiô em movimento.
- 11.10** Saber que o ioiô é um objeto que rola suavemente para cima e para baixo em uma rampa com uma inclinação de  $90^\circ$ .
- 11.11** Conhecer a relação entre a aceleração e o momento de inércia de um ioiô.
- 11.12** Calcular a tração da corda que sustenta um ioiô em movimento.

### Ideia-Chave

- Um ioiô pode ser considerado como uma roda que rola suavemente para cima e para baixo em uma rampa com uma inclinação de  $90^\circ$ .

### O ioiô

O ioiô é um laboratório de física que cabe no bolso. Se um ioiô desce rolando uma distância  $h$  ao longo da corda, ele perde uma quantidade de energia potencial igual a  $mgh$ , mas ganha energia cinética tanto na forma de translação ( $\frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2$ ) como de rotação ( $\frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2$ ). Quando volta a subir, perde energia cinética e readquire energia potencial. 

Nos ioiôs modernos, a corda não está presa no eixo, mas forma uma laçada em torno do eixo. Quando o ioiô “bate” na extremidade inferior da corda, uma força dirigida para cima, exercida pela corda sobre

o eixo, interrompe a descida. O ioiô passa a girar, com o eixo enlaçado pela corda, apenas com energia cinética rotacional. O ioiô se mantém girando (“adormecido”) até ser “despertado” por um puxão na corda, que a faz se enrolar no eixo; conseqüentemente, o ioiô volta a subir. A energia cinética rotacional do ioiô na extremidade inferior da corda (e, portanto, o tempo de “sono”) pode ser consideravelmente aumentada arremessando o ioiô para baixo para que comece a descer a corda com velocidade linear inicial  $v_{CM}$  e velocidade angular  $\omega$  em vez de rolar para baixo a partir do repouso.

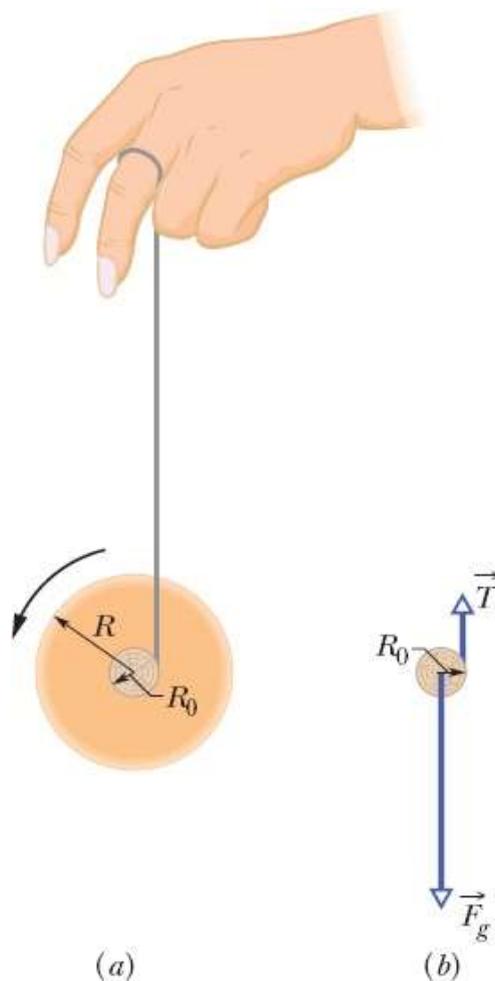
Para obter uma expressão para a aceleração linear  $a_{CM}$  de um ioiô que rola para baixo em uma corda, podemos usar a segunda lei de Newton, como fizemos para o corpo que rolava para baixo na rampa da Fig. 11-8. A análise é a mesma, exceto pelo seguinte:

1. Em vez de descer rolando em uma rampa que faz um ângulo  $\theta$  com a horizontal, o ioiô desce por uma corda que faz um ângulo  $\theta = 90^\circ$  com a horizontal.
2. Em vez de rolar na superfície externa de raio  $R$ , o ioiô rola em torno de um eixo de raio  $R_0$  (Fig. 11-9a).
3. Em vez de ser freado pela força de atrito  $\vec{f}_s$ , o ioiô é freado pela força de tração  $\vec{T}$  que a corda exerce sobre ele (Fig. 11-9b).

A análise do movimento nos levaria novamente à Eq. 11-10. Assim, vamos apenas mudar a notação da Eq. 11-10 e fazer  $\theta = 90^\circ$  para escrever a aceleração linear como

$$a_{CM} = -\frac{g}{1 + I_{CM}/MR_0^2}, \quad (11-13)$$

em que  $I_{CM}$  é o momento de inércia do ioiô em relação a um eixo passando pelo centro e  $M$  é a massa. Um ioiô possui a mesma aceleração para baixo quando está subindo de volta.



**Figura 11-9** (a) Um ioiô visto de lado. A corda, considerada de espessura desprezível, está enrolada em um eixo de raio  $R_0$ . (b) Diagrama de corpo livre do ioiô durante a descida. Apenas o eixo é mostrado.

## 11-4 REVISÃO DO TORQUE

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

- 11.13** Saber que o torque é uma grandeza vetorial.
- 11.14** Saber que o ponto em relação ao qual o torque é calculado deve sempre ser especificado.
- 11.15** Determinar o torque produzido por uma força sobre uma partícula calculando o produto vetorial do vetor posição da partícula pelo vetor que representa a força.
- 11.16** Usar a regra da mão direita para determinar a orientação de um torque.

### Ideias-Chave

- Em três dimensões, o torque  $\vec{\tau}$  é uma grandeza vetorial definida em relação a um ponto fixo (em geral, a origem de um sistema de coordenadas) por meio da equação

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

em que  $\vec{F}$  é uma força aplicada a uma partícula e  $\vec{r}$  é o vetor posição da partícula em relação ao ponto fixo.

- O módulo de  $\vec{\tau}$  é dado por

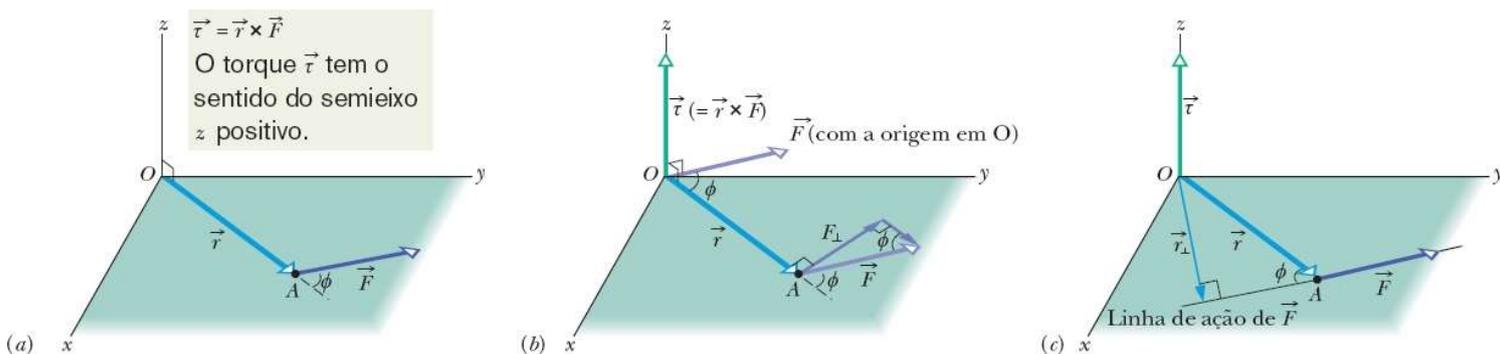
$$\tau = rF \sin \varphi = rF_{\perp} = r_{\perp}F,$$

em que  $\varphi$  é o ângulo entre  $\vec{F}$  e  $\vec{r}$ ,  $F_{\perp}$  é a componente de  $\vec{F}$  perpendicular a  $\vec{r}$  e  $r_{\perp}$  é o braço de alavanca de  $\vec{F}$ .

- A orientação de  $\vec{\tau}$  é dada pela regra da mão direita para produtos vetoriais.

## Revisão do Torque

No Capítulo 10, definimos o torque  $\tau$  de um corpo rígido capaz de girar em torno de um eixo fixo, com todas as partículas do corpo forçadas a se mover em trajetórias circulares com centro nesse eixo. Agora, vamos ampliar a definição de torque para aplicá-la a uma partícula que se move em uma trajetória qualquer em relação a um *ponto* fixo (em vez de um eixo fixo). A trajetória não precisa mais ser circular, e devemos escrever o torque como um vetor  $\vec{\tau}$  que pode ter qualquer orientação. Podemos calcular o módulo desse vetor usando uma expressão matemática e determinar a orientação desse vetor usando a regra da mão direita para produtos vetoriais.



**Figura 11-10** Definição do torque. (a) Uma força  $\vec{F}$ , no plano  $xy$ , age sobre uma partícula situada no ponto  $A$ . (b) A força produz um torque  $\vec{\tau} (= \vec{r} \times \vec{F})$  sobre a partícula em relação à origem  $O$ . De acordo com a regra da mão direita para o produto vetorial, o vetor torque aponta no sentido positivo do eixo  $z$ . O módulo do vetor é dado por  $rF_{\perp}$  em (b) e por  $r_{\perp}F$  em (c).

A Fig. 11-10a mostra uma partícula no ponto  $A$  de um plano  $xy$ . Uma única força  $\vec{F}$  nesse plano age sobre a partícula, e a posição da partícula em relação à origem  $O$  é dada pelo vetor posição  $\vec{r}$ . O torque  $\vec{\tau}$  que age sobre a partícula em relação ao ponto fixo  $O$  é uma grandeza vetorial definida por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (\text{definição de torque}). \quad (11-14)$$

Podemos calcular o produto vetorial envolvido na definição de  $\vec{\tau}$  usando as regras do produto vetorial que aparecem no Módulo 3-3. Para determinar a orientação de  $\vec{\tau}$ , deslocamos o vetor  $\vec{F}$  (sem mudar a orientação) até que a origem do vetor esteja no ponto  $O$ , o que faz coincidirem as origens dos dois vetores envolvidos no produto vetorial, como na Fig. 11-10b. Em seguida, usamos a regra da mão direita para os produtos vetoriais da Fig. 3-19a, envolvendo com os dedos da mão direita o vetor  $\vec{r}$  (o primeiro vetor no produto), com as pontas dos dedos apontando para  $\vec{F}$  (o segundo vetor). O polegar direito, esticado, mostra a orientação de  $\vec{\tau}$ . Na Fig. 11-10b, a orientação de  $\vec{\tau}$  é o sentido positivo do eixo  $z$ .

Para determinar o módulo de  $\vec{\tau}$ , aplicamos a expressão geral da Eq. 3-27 ( $c = ab \text{ sen } \phi$ ), que nos dá

$$\tau = rF \text{ sen } \phi, \quad (11-15)$$

em que  $\phi$  é o menor dos ângulos entre  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$  quando as origens dos vetores coincidem. De acordo com a Fig. 11-10b, a Eq. 11-15 pode ser escrita na forma

$$\tau = rF_{\perp}, \quad (11-16)$$

em que  $F_{\perp} (= F \text{ sen } \phi)$  é a componente de  $\vec{F}$  perpendicular a  $\vec{r}$ . De acordo com a Fig. 11-10c, a Eq. 11-15 também pode ser escrita na forma

$$\tau = r_{\perp}F, \quad (11-17)$$

em que  $r_{\perp} (= r \text{ sen } \phi)$  é o braço de alavanca de  $\vec{F}$  (a distância perpendicular entre o ponto  $O$  e a linha de ação de  $\vec{F}$ ).

### ☑ Teste 3

O vetor posição  $\vec{r}$  de uma partícula aponta no sentido positivo de um eixo  $z$ . Se o torque a que a partícula está submetida (a) é zero, (b) aponta no sentido negativo de  $x$ , e (c) aponta no sentido negativo de  $y$ , qual é a orientação da força responsável pelo torque?

### Exemplo 11.02 Torque exercido por uma força sobre uma partícula

Na Fig. 11-11a, três forças, todas de módulo 2,0 N, agem sobre uma partícula. A partícula está no plano  $xy$ , em um ponto  $A$ , dado por um vetor posição  $\vec{r}$  tal que  $r = 3,0$  m e  $\theta = 30^\circ$ . Qual é o torque, em relação à origem  $O$ , produzido por cada uma das três forças?

#### IDEIA-CHAVE

Como os três vetores das forças não estão no mesmo plano, não podemos calcular os torques como no Capítulo 10. Em vez disso, devemos usar produtos vetoriais, com módulos dados pela Eq. 11-15 ( $\tau = rF \text{ sen } \phi$ ) e orientações dadas pela regra da mão direita para produtos vetoriais.

**Cálculos:** Como estamos interessados em calcular os torques em relação à origem  $O$ , o vetor  $\vec{r}$  usado para calcular os produtos vetoriais é o próprio vetor posição que aparece no enunciado do problema. Para determinar o ângulo  $\phi$  entre a orientação de  $\vec{r}$  e a orientação de cada força, deslocamos os vetores força da Fig. 11-11a, um de cada vez, para que a origem coincida com o ponto  $O$ . As Figs. 11-11b, 11-11c e 11-11d, que são vistas diretas do plano  $xz$ , mostram os vetores força deslocados  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$ , respectivamente. (Observe como isso torna muito mais fácil visualizar os ângulos.) Na Fig. 11-11d, o ângulo entre as orientações

de  $\vec{r}$  e  $\vec{F}_3$  é  $90^\circ$  e o símbolo  $\otimes$  significa que o sentido de  $\vec{F}_3$  é para dentro do papel. (Se o sentido da força fosse para fora do papel, ela seria representada pelo símbolo  $\odot$ .)

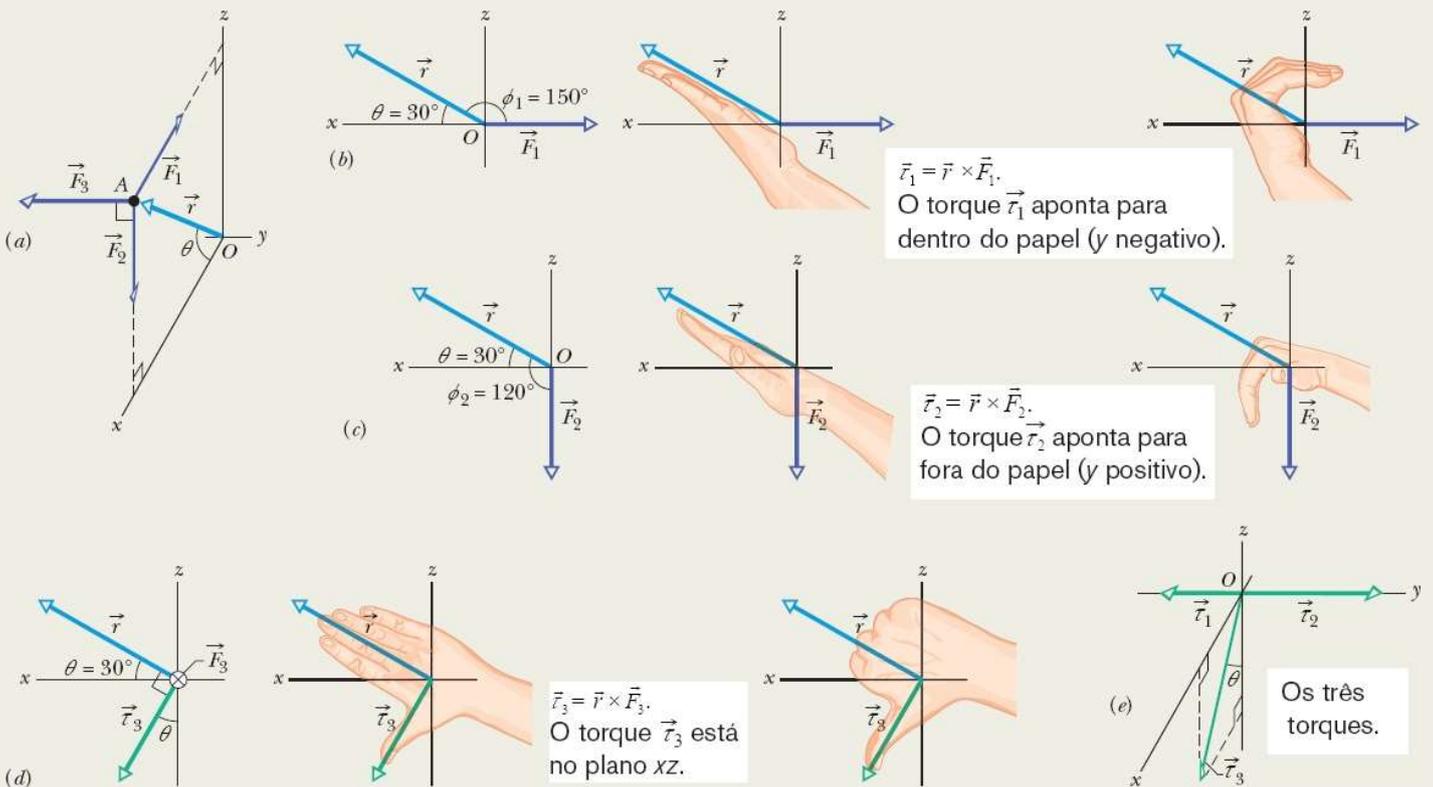
Aplicando a Eq. 11-15 a cada força, obtemos os módulos dos torques:

$$\tau_1 = rF_1 \sin \phi_1 = (3,0 \text{ m})(2,0 \text{ N})(\sin 150^\circ) = 3,0 \text{ N} \cdot \text{m},$$

$$\tau_2 = rF_2 \sin \phi_2 = (3,0 \text{ m})(2,0 \text{ N})(\sin 120^\circ) = 5,2 \text{ N} \cdot \text{m},$$

$$\text{e} \quad \tau_3 = rF_3 \sin \phi_3 = (3,0 \text{ m})(2,0 \text{ N})(\sin 90^\circ) = 6,0 \text{ N} \cdot \text{m}. \quad (\text{Resposta})$$

Para determinar a orientação desses torques, usamos a regra da mão direita, posicionando os dedos da mão direita em volta de  $\vec{r}$  de modo a que apontem para  $\vec{F}$  na direção do *menor* dos ângulos entre os dois vetores. O polegar aponta na direção do torque. Assim,  $\vec{\tau}_1$  aponta para dentro do papel na Fig. 11-11b;  $\vec{\tau}_2$  aponta para fora do papel na Fig. 11-11c;  $\vec{\tau}_3$  tem a orientação mostrada na Fig. 11-11d. Os três vetores torque são mostrados na Fig. 11-11e.



**Figura 11-11** (a) Uma partícula no ponto A sofre a ação de três forças, cada uma paralela a um dos eixos de coordenadas. O ângulo  $\phi$  (usado para determinar o torque) é mostrado (b) para  $\vec{F}_1$  e (c) para  $\vec{F}_2$ . (d) O torque  $\vec{\tau}_3$  é perpendicular tanto a  $\vec{r}$  como a  $\vec{F}_3$  (a força  $\vec{F}_3$  aponta para dentro do papel). (e) Os torques (em relação à origem O) que agem sobre a partícula.

## 11-5 MOMENTO ANGULAR

## Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

**11.17** Saber que o momento angular é uma grandeza vetorial.

**11.18** Saber que o ponto fixo em relação ao qual o momento angular é calculado deve sempre ser especificado.

**11.19** Determinar o momento angular de uma partícula calculando o produto vetorial do vetor posição da partícula pelo vetor que representa o momento.

**11.20** Usar a regra da mão direita para determinar a orientação de um momento angular.

## Ideias-Chave

• O momento angular  $\vec{\ell}$  de uma partícula de momento linear  $\vec{p}$ , massa  $m$  e velocidade linear  $\vec{v}$  é uma grandeza vetorial definida em relação a um ponto fixo (em geral, a origem de um sistema de coordenadas) por meio da equação

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}).$$

• O módulo de  $\vec{\ell}$  é dado por

$$\begin{aligned}\ell &= rmv \sin \phi \\ &= rp_{\perp} = rmv_{\perp} \\ &= r_{\perp} p = r_{\perp} mv,\end{aligned}$$

em que  $\phi$  é o ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\vec{p}$ ,  $p_{\perp}$  e  $v_{\perp}$  são as componentes de  $\vec{p}$  e  $\vec{v}$  perpendiculares a  $\vec{r}$  e  $r_{\perp}$  é a distância perpendicular entre o ponto fixo e o prolongamento de  $\vec{p}$ .

• A orientação de  $\vec{\ell}$  é dada pela regra da mão direita para produtos vetoriais. Posicione a mão direita para que os dedos estejam na direção de  $\vec{r}$  e faça girar os dedos em torno da palma até que estejam na direção de  $\vec{p}$ . O polegar estendido fornecerá a orientação de  $\vec{\ell}$ .

## Momento Angular

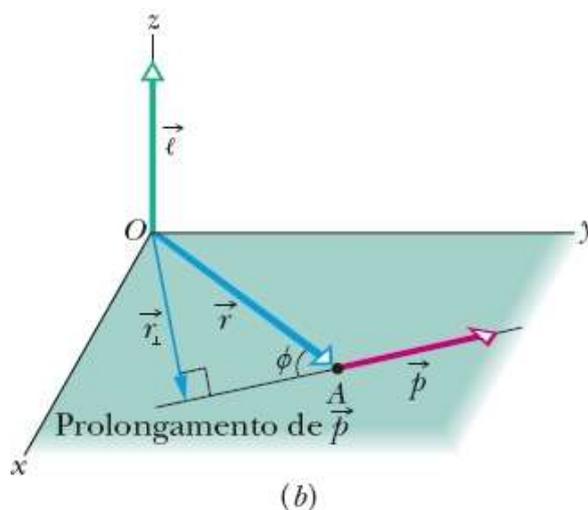
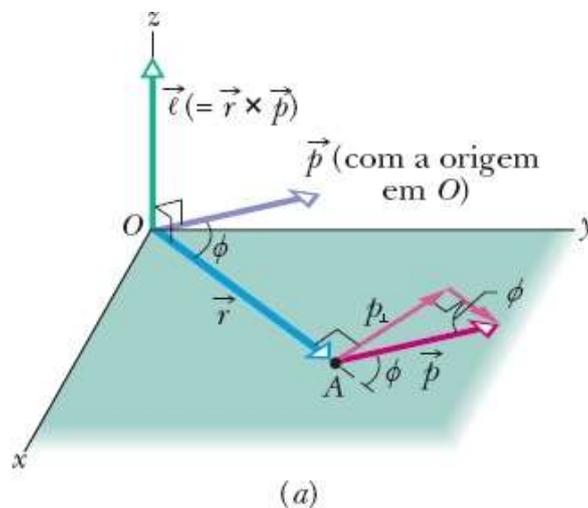
Como vimos em capítulos anteriores, o conceito de momento linear  $\vec{p}$  e o princípio de conservação do momento linear são ferramentas extremamente poderosas, que permitem prever, por exemplo, o resultado de uma colisão de dois carros sem conhecer os detalhes da colisão. Vamos iniciar agora a discussão de uma grandeza correspondente a  $\vec{p}$  para movimentos de rotação, terminando no Módulo 11-8 com uma lei, para movimentos de rotação, análoga à lei de conservação do momento linear, que pode levar a movimentos espetaculares (quase mágicos) no balé, nos saltos ornamentais, na patinação no gelo, e em muitas outras atividades esportivas.

A Fig. 11-12 mostra uma partícula de massa  $m$  e momento linear  $\vec{p}$  ( $= m\vec{v}$ ) que está passando pelo ponto  $A$  de um plano  $xy$ . O **momento angular**  $\vec{\ell}$  da partícula em relação à origem  $O$  é uma grandeza vetorial definida por meio da equação

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \quad (\text{definição de momento angular}), \quad (11-18)$$

em que  $\vec{r}$  é o vetor posição da partícula em relação a  $O$ . Quando a partícula se move em relação a  $O$  na

direção do momento linear  $\vec{P}$  ( $= m\vec{v}$ ), o vetor posição  $\vec{r}$  gira em torno de  $O$ . Observe que, para possuir momento angular em relação a  $O$ , a partícula *não precisa* estar girando em torno de  $O$ . Comparando as Eqs. 11-14 e 11-18, vemos que a relação entre o momento angular e o momento linear é a mesma que entre o torque e a força. A unidade de momento angular do SI é o quilograma-metro quadrado por segundo ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ), que equivale ao joule-segundo ( $\text{J} \cdot \text{s}$ ).



**Figura 11-12** Definição de momento angular. Uma partícula ao passar pelo ponto  $A$  tem momento linear  $\vec{P}$  ( $= m\vec{v}$ ), com o vetor  $\vec{P}$  no plano  $xy$ . A partícula tem momento angular  $\vec{\ell}$  ( $= \vec{r} \times \vec{P}$ ) em relação à origem  $O$ . Pela regra da mão direita, o vetor momento angular aponta no sentido positivo de  $z$ . (a) O módulo de  $\vec{\ell}$  é dado por  $\ell = rp_{\perp} = rmv_{\perp}$ . (b) O módulo de  $\vec{\ell}$  também é dado por  $\ell = r_{\perp}p = r_{\perp}mv$ .

**Orientação.** Para determinar a orientação do vetor momento angular  $\vec{\ell}$  na Fig. 11-12, deslocamos o vetor  $\vec{P}$  até que a origem coincida com o ponto  $O$ . Em seguida, usamos a regra da mão direita para produtos vetoriais envolvendo o vetor  $\vec{r}$  com os dedos da mão direita apontados para o vetor  $\vec{P}$ . O dedo polegar esticado mostra que  $\vec{\ell}$  aponta no sentido positivo do eixo  $z$  da Fig. 11-12. O sentido positivo corresponde a uma rotação do vetor posição  $\vec{r}$  no sentido anti-horário em torno do eixo  $z$ , associada ao movimento da partícula. (O sentido negativo de  $\vec{\ell}$  corresponderia a uma rotação de  $\vec{r}$  em torno do eixo  $z$  no sentido horário.)

**Módulo.** Para determinar o módulo de  $\vec{\ell}$ , usamos a Eq. 3-27 para escrever

$$\ell = rmv \sin \phi, \quad (11-19)$$

em que  $\phi$  é o menor ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\vec{P}$  quando os dois vetores têm uma origem comum. De acordo com a Fig. 11-12a, a Eq. 11-19 pode ser escrita na forma

$$\ell = rp_{\perp} = rmv_{\perp}, \quad (11-20)$$

em que  $p_{\perp}$  é a componente de  $\vec{P}$  perpendicular a  $\vec{r}$  e  $v_{\perp}$  é a componente de  $\vec{v}$  perpendicular a  $\vec{r}$ . De acordo com a Fig. 11-12b, a Eq. 11-19 pode ser escrita na forma

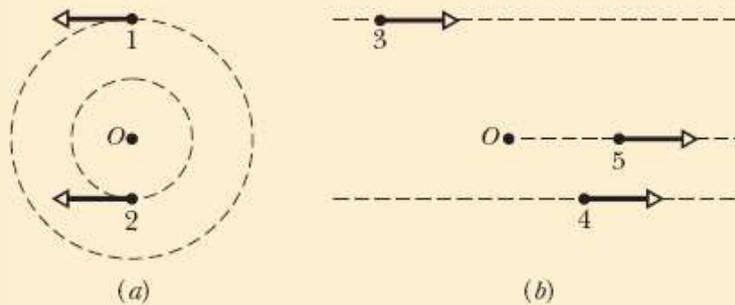
$$\ell = r_{\perp}p = r_{\perp}mv, \quad (11-21)$$

em que  $r_{\perp}$  é a distância perpendicular entre  $O$  e a extensão de  $\vec{P}$ .

**Importante.** Note o seguinte: (1) o momento angular tem significado apenas em relação a um ponto dado; (2) o vetor momento angular é sempre perpendicular ao plano formado pelos vetores posição e momento linear,  $\vec{r}$  e  $\vec{P}$ .

#### ☑ Teste 4

Na parte *a* da figura, as partículas 1 e 2 giram em torno do ponto  $O$  em sentidos opostos, em circunferências de 4 m e 2 m de raio, respectivamente. Na parte *b*, as partículas 3 e 4 se movem na mesma direção, em linha reta, a 4 m e 2 m de distância perpendicular do ponto  $O$ , respectivamente. A partícula 5 se afasta de  $O$  ao longo de uma linha reta que passa por  $O$ . As cinco partículas têm a mesma massa e a mesma velocidade constante. (a) Ordene as partículas de acordo com o módulo do momento angular em relação a  $O$ , em ordem decrescente. (b) Quais das partículas possuem momento angular negativo em relação a  $O$ ?



#### 📍 Exemplo 11.03 Momento angular de um sistema de duas partículas

A Fig. 11-13 mostra uma vista superior de duas partículas que se movem com velocidade constante ao longo de trajetórias horizontais. A partícula 1, com um momento de módulo  $p_1 = 5,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ , tem um vetor posição  $\vec{r}_1$  e passará a 2,0 m de distância do ponto  $O$ . A partícula 2, com um momento de módulo  $p_2 = 2,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ , tem um vetor posição  $\vec{r}_2$  e passará a 4,0 m de distância do ponto  $O$ . Qual é o módulo e qual é a orientação do momento angular total  $\vec{L}$  em relação ao ponto  $O$  do sistema formado pelas

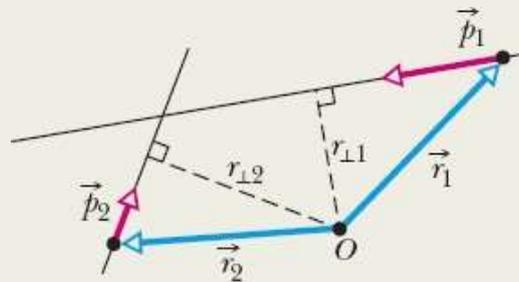
duas partículas?

### IDEIA-CHAVE

Para determinar  $\vec{L}$ , basta calcular os momentos angulares das duas partículas,  $\vec{\ell}_1$  e  $\vec{\ell}_2$ , e somá-los. Para calcular o módulo dos momentos angulares, podemos usar qualquer das Eqs. 11-18 a 11-21. Entretanto, a Eq. 11-21 é a mais fácil neste caso, já que conhecemos as distâncias perpendiculares  $r_{\perp 1}$  ( $= 2,0$  m) e  $r_{\perp 2}$  ( $= 4,0$  m) e o módulo dos momentos lineares,  $p_1$  e  $p_2$ .

**Cálculos:** No caso da partícula 1, a Eq. 11-21 nos dá

$$\begin{aligned}\ell_1 &= r_{\perp 1} p_1 = (2,0 \text{ m})(5,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}) \\ &= 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.\end{aligned}$$



**Figura 11-13** Duas partículas passam nas proximidades do ponto  $O$ .

Para determinar a orientação do vetor  $\vec{\ell}_1$ , usamos a Eq. 11-18 e a regra da mão direita para produtos vetoriais. No caso de  $\vec{r}_1 \times \vec{p}_1$ , o produto vetorial aponta para fora do papel, perpendicularmente ao plano da Fig. 11-13. Este é o sentido positivo, já que o vetor posição  $\vec{r}_1$  da partícula gira no sentido anti-horário em relação a  $O$  quando a partícula 1 se move. Assim, o vetor momento angular da partícula 1 é

$$\ell_1 = +10 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Analogamente, o módulo de  $\vec{\ell}_2$  é

$$\begin{aligned}\ell_2 &= r_{\perp 2} p_2 = (4,0 \text{ m})(2,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}) \\ &= 8,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s},\end{aligned}$$

e o produto vetorial  $\vec{r}_2 \times \vec{p}_2$  aponta para dentro do papel, que é o sentido negativo, já que o vetor posição  $\vec{r}_2$  gira no sentido horário em relação a  $O$  quando a partícula 2 se move. Assim, o vetor momento angular da partícula 2 é

$$\ell_2 = -8,0 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

O momento angular total do sistema formado pelas duas partículas é

$$L = \ell_1 + \ell_2 = +10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} + (-8,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})$$

$$= +2,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}. \quad (\text{Resposta})$$

O sinal positivo indica que o momento angular resultante do sistema em relação ao ponto  $O$  aponta para fora do papel.

## 11-6 A SEGUNDA LEI DE NEWTON PARA ROTAÇÕES

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

**11.21** Usar a segunda lei de Newton para rotações para relacionar o torque que age sobre uma partícula à variação do momento angular da partícula.

### Ideia-Chave

- A segunda lei de Newton para rotações é expressa pela equação

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt},$$

em que  $\vec{\tau}_{\text{res}}$  é o torque resultante que age sobre a partícula e  $\vec{\ell}$  é o momento angular da partícula.

### A Segunda Lei de Newton para Rotações

A segunda lei de Newton escrita na forma

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{partícula isolada}). \quad (11-22)$$

expressa a relação entre força e momento linear para uma partícula isolada. Temos visto um paralelismo suficiente entre grandezas lineares e angulares para estar seguros de que existe também uma relação entre torque e momento angular. Guiados pela Eq. 11-22, podemos até mesmo conjecturar que essa relação seja a seguinte:

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \quad (\text{partícula isolada}). \quad (11-23)$$

A Eq. 11-23 é, de fato, uma forma da segunda lei de Newton que se aplica ao movimento de rotação de uma partícula isolada:



A soma (vetorial) dos torques que agem sobre uma partícula é igual à taxa de variação com o tempo do momento angular da

partícula.

A Eq. 11-23 não faz sentido, a menos que o torque  $\vec{\tau}_{\text{res}}$  e o momento angular  $\vec{\ell}$  sejam definidos em relação ao mesmo ponto, que, em geral, é a origem do sistema de coordenadas escolhido.

### Demonstração da Equação 11-23

Começamos com a Eq. 11-18, a definição do momento angular de uma partícula:

$$\vec{\ell} = m(\vec{r} \times \vec{v}),$$

em que  $\vec{r}$  é o vetor posição da partícula e  $\vec{v}$  é a velocidade da partícula. Derivando<sup>1</sup> ambos os membros em relação ao tempo  $t$ , obtemos:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m \left( \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} \right). \quad (11-24)$$

Como  $d\vec{v}/dt$  é a aceleração  $\vec{a}$  da partícula, e  $d\vec{r}/dt$  é a velocidade  $\vec{v}$ , podemos escrever a Eq. 11-24 na forma

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v}).$$

Acontece que  $\vec{v} \times \vec{v} = 0$  (o produto vetorial de qualquer vetor por si próprio é zero, pois o ângulo entre os dois vetores é necessariamente zero). Assim, o último termo da expressão é nulo, e temos:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times m\vec{a}.$$

Podemos usar a segunda lei de Newton ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ) para substituir  $m\vec{a}$  pela soma das forças que atuam sobre a partícula, obtendo

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{res}} = \sum(\vec{r} \times \vec{F}). \quad (11-25)$$

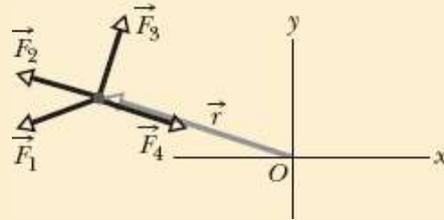
Aqui, o símbolo  $\Sigma$  indica que devemos somar os produtos vetoriais  $\vec{r} \times \vec{F}$  para todas as forças. Entretanto, de acordo com a Eq. 11-14, cada um desses produtos vetoriais é o torque associado à força correspondente. Assim, a Eq. 11-25 nos diz que

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}.$$

Trata-se da Eq. 11-23, a relação que queríamos demonstrar.

## ✓ Teste 5

A figura mostra o vetor posição  $\vec{r}$  de uma partícula em um certo instante e quatro opções para a orientação de uma força que deve acelerar a partícula. As quatro opções estão no plano  $xy$ . (a) Ordene as opções de acordo com o módulo da taxa de variação com o tempo ( $d\vec{\ell}/dt$ ) que produzem no momento angular da partícula em relação ao ponto  $O$ , em ordem decrescente. (b) Qual das opções está associada a uma taxa de variação negativa do momento angular em relação ao ponto  $O$ ?



### Exemplo 11.04 Torque e derivada do momento angular em relação ao tempo

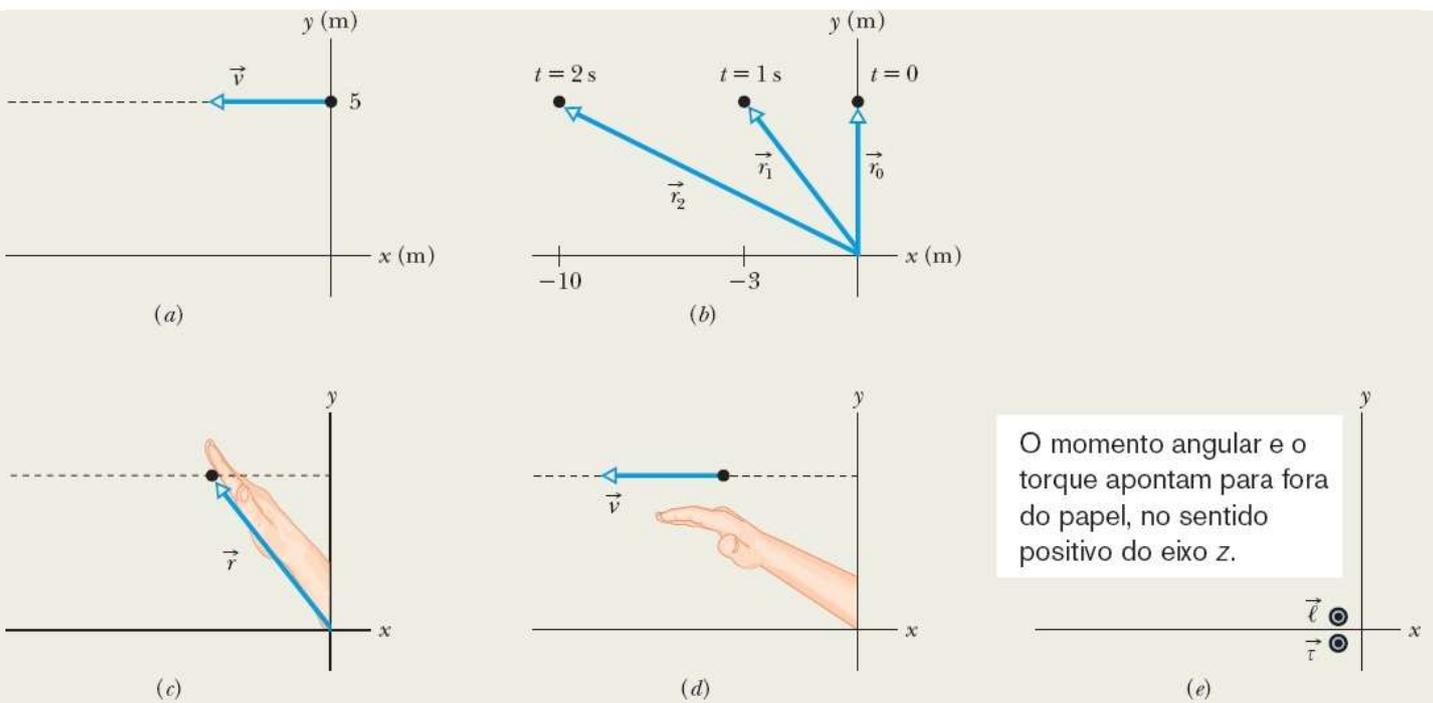
A Fig. 11-14a mostra o instantâneo de uma partícula de 0,500 kg que se move em linha reta com um vetor posição dado por

$$\vec{r} = (-2,00t^2 - t)\hat{i} + 5,00\hat{j},$$

com  $\vec{r}$  em metros e  $t$  em segundos, para  $t = 0$ . O vetor posição aponta da origem para a partícula. Determine, na notação dos vetores unitários, o momento angular  $\vec{\ell}$  da partícula e o torque  $\vec{\tau}$  a que a partícula está sujeita, ambos em relação à origem. Justifique os sinais algébricos em termos do sentido do movimento da partícula.

#### IDEIAS-CHAVE

(1) O ponto em relação ao qual o momento angular de uma partícula será calculado deve sempre ser especificado. Neste exemplo, o ponto é a origem. (2) O momento angular  $\vec{\ell}$  de uma partícula é dado pela Eq. 11-18 [ $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$ ]. (3) O sinal associado ao momento angular da partícula é dado pelo sentido da rotação do vetor posição da partícula (em torno do ponto de referência) quando a partícula se move: se a rotação é no sentido horário, o sinal é negativo; se a rotação é no sentido anti-horário, o sinal é positivo. (4) Se o torque aplicado a uma partícula e o momento angular da partícula são calculados em relação ao *mesmo* ponto, a relação entre o torque e o momento angular é dada pela Eq. 11-23 ( $\vec{\tau} = d\vec{\ell}/dt$ ).



**Figura 11-14** (a) Uma partícula que se move em linha reta, mostrada no instante  $t = 0$ . (b) O vetor posição em  $t = 0, 1,00$  s e  $2,00$  s. (c) O primeiro passo para aplicar a regra da mão direita para produtos vetoriais. (d) O segundo passo. (e) O vetor momento angular e o vetor torque apontam no sentido positivo do eixo  $z$ , ou seja, para fora do papel.

**Cálculos:** Para calcular o momento angular em relação à origem, usamos a Eq. 11-18; a velocidade da partícula é obtida derivando o vetor posição da partícula em relação ao tempo. De acordo com a Eq. 4-10 ( $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ ), temos:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt}((-2,00t^2 - t)\hat{i} + 5,00\hat{j}) \\ &= (-4,00t - 1,00)\hat{i}, \end{aligned}$$

com  $\vec{v}$  em m/s.

Em seguida, calculamos o produto vetorial de  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  usando o resultado genérico expresso pela Eq. 3-27:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{k}.$$

Em nosso caso, teríamos de substituir  $\vec{a}$  por  $\vec{r}$  e  $\vec{b}$  por  $\vec{v}$ . Entretanto, podemos economizar algum trabalho raciocinando primeiro em termos do produto genérico. Como  $\vec{r}$  não tem componente  $z$  e as componentes  $y$  e  $z$  de  $\vec{v}$  são nulas, o único termo diferente de zero do produto genérico é o último  $(-b_x a_y)\hat{k}$ . Assim, temos:

$$\vec{r} \times \vec{v} = -(-4,00t - 1,00)(5,00)\hat{k} = (20,0t + 5,00)\hat{k} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Note que, como sempre, o resultado do produto vetorial é um vetor perpendicular aos vetores originais.

Para aplicar a Eq. 11-18, multiplicamos esse resultado pela massa da partícula, que nos dá

$$\begin{aligned}\vec{\ell} &= (0,500 \text{ kg})[(20,0t + 5,00)\hat{k} \text{ m}^2/\text{s}] \\ &= (10,0t + 2,50)\hat{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}. \quad (\text{Resposta})\end{aligned}$$

O torque em relação à origem é dado pela Eq. 11-23:

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \frac{d}{dt}(10,0t + 2,50)\hat{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \\ &= 10,0\hat{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 10,0\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}, \quad (\text{Resposta})\end{aligned}$$

o que mostra que o torque aponta no sentido positivo do eixo z.

O resultado obtido para  $\vec{\ell}$  mostra que o momento angular aponta no sentido positivo do eixo z. Para verificar se o sentido de  $\vec{\ell}$  é coerente com o sentido de rotação do vetor posição, vamos calcular o vetor posição para vários instantes de tempo:

$$\begin{aligned}t = 0, \quad \vec{r}_0 &= 5,00\hat{j} \text{ m} \\ t = 1,00 \text{ s}, \quad \vec{r}_1 &= -3,00\hat{i} + 5,00\hat{j} \text{ m} \\ t = 2,00 \text{ s}, \quad \vec{r}_2 &= -10,0\hat{i} + 5,00\hat{j} \text{ m}\end{aligned}$$

Desenhando esses resultados, como na Fig. 11-14b, vemos que  $\vec{r}$  gira no sentido anti-horário (que é o sentido positivo de rotação) para acompanhar o movimento da partícula. Assim, embora a partícula esteja se movendo em linha reta, seu vetor posição está girando no sentido anti-horário em relação à origem e, portanto, a partícula possui um momento angular positivo em relação à origem.

Podemos também verificar se o sentido de  $\vec{\ell}$  está correto, aplicando a regra da mão direita para produtos vetoriais ao produto  $\vec{r} \times \vec{v}$ , ou, se o leitor preferir, ao produto  $m\vec{r} \times \vec{v}$  que tem a mesma orientação. Em qualquer instante do movimento da partícula, os dedos da mão direita estão inicialmente estendidos na direção do primeiro vetor do produto vetorial ( $\vec{r}$ ), como mostra a Fig. 11-14c. Em seguida, a orientação da mão é ajustada para que os dedos girem em torno da palma até ficarem na direção do segundo vetor do produto vetorial ( $\vec{v}$ ), como indicado na Fig. 11-14d. Nesse instante, o polegar estendido mostra a orientação do vetor que resulta do produto vetorial. Como mostra a Fig. 11-14e, esse vetor aponta no sentido positivo do eixo z (ou seja, para fora do plano do papel), o que está de acordo com o resultado anterior. A Fig. 11-14e mostra ainda a orientação de  $\vec{\ell}$ , que também aponta no sentido positivo do eixo z porque o momento angular aponta nessa direção e o módulo do momento angular está aumentando.

## 11-7 MOMENTO ANGULAR DE UM CORPO RÍGIDO

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

- 11.22** Usar a segunda lei de Newton para rotações para relacionar o torque que age sobre um sistema de partículas à variação do momento angular do sistema.

**11.23** Conhecer a relação entre o momento angular de um corpo rígido em relação a um eixo fixo, o momento de inércia do corpo e a velocidade angular do corpo em relação ao eixo.

**11.24** Calcular o momento angular resultante de um sistema de dois corpos rígidos que giram em torno do mesmo eixo.

## Ideias-Chave

• O momento angular  $\vec{L}$  de um sistema de partículas é a soma vetorial dos momentos angulares das partículas do sistema:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^n \vec{\ell}_i.$$

• A taxa de variação do momento angular com o tempo é igual ao torque resultante externo que age sobre o sistema (a soma vetorial dos torques produzidos por forças externas que agem sobre partículas do sistema):

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (\text{sistema de partículas}).$$

• No caso de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo, a componente do momento angular paralela ao eixo de rotação é dada por

$$L = I\omega \quad (\text{corpo rígido eixo fixo}).$$

## Momento Angular de um Sistema de Partículas

Voltamos agora nossa atenção para o momento angular de um sistema de partículas em relação a uma origem. O momento angular total  $\vec{L}$  do sistema é a soma (vetorial) dos momentos angulares  $\vec{\ell}$  das partículas do sistema:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^n \vec{\ell}_i. \quad (11-26)$$

Os momentos angulares das partículas podem variar com o tempo por causa de forças externas ou por causa de interações entre as partículas. Podemos determinar a variação total de  $\vec{L}$  derivando a Eq. 11-26 em relação ao tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{\ell}_i}{dt}. \quad (11-27)$$

De acordo com a Eq. 11-23,  $d\vec{\ell}_i/dt$  é igual ao torque resultante  $\vec{\tau}_{\text{res},i}$  a que está submetida a partícula de ordem  $i$ . Assim, a Eq. 11-27 pode ser escrita na forma

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_{\text{res},i}. \quad (11-28)$$

Isso significa que a taxa de variação do momento angular  $\vec{L}$  do sistema é igual à soma vetorial dos

torques a que estão submetidas as partículas do sistema. Esses torques podem ser *torques internos* (produzidos por forças associadas a outras partículas do sistema) e *torques externos* (produzidos por forças associadas a corpos externos ao sistema). Entretanto, como as forças exercidas pelas partículas do sistema sempre aparecem na forma de pares de forças da terceira lei, a soma dos torques produzidos por essas forças é nula. Assim, os únicos torques que podem fazer variar o momento angular total  $\vec{L}$  do sistema são os torques produzidos por forças externas ao sistema.

**Torque Externo Resultante.** Chamando de  $\vec{\tau}_{\text{res}}$  o torque externo resultante, ou seja, a soma vetorial dos torques externos que agem sobre as partículas do sistema, a Eq. 11-28 pode ser escrita na forma

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (\text{sistema de partículas}), \quad (11-29)$$

que é a segunda lei de Newton para rotações. Em palavras:



O torque externo resultante  $\vec{\tau}_{\text{res}}$  que age sobre um sistema de partículas é igual à taxa de variação com o tempo do momento angular total  $\vec{L}$  do sistema.

A Eq. 11-29 é análoga à Eq. 9-27 ( $\vec{F}_{\text{res}} = d\vec{p}/dt$ ), mas requer um cuidado adicional: Os torques e o momento angular do sistema devem ser medidos em relação à mesma origem. Se o centro de massa do sistema não está acelerado em relação a um referencial inercial, essa origem pode ser qualquer ponto. Caso, porém, o centro de massa do sistema *esteja* acelerado, a origem *deve ser* o centro de massa. Considere, por exemplo, uma roda como o sistema de partículas. Se a roda está girando em torno de um eixo fixo em relação ao solo, a origem usada para aplicar a Eq. 11-29 pode ser qualquer ponto estacionário em relação ao solo. Entretanto, se a roda estiver girando em torno de um eixo acelerado (como acontece, por exemplo, quando a roda está descendo uma rampa), a origem deve ser o centro de massa da roda.

## Momento Angular de um Corpo Rígido Girando em Torno de um Eixo Fixo

Vamos agora calcular o momento angular de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo. A Fig. 11-15a mostra um corpo desse tipo. O eixo fixo de rotação é o eixo z, e o corpo gira em torno do eixo com uma velocidade angular constante  $\omega$ . Estamos interessados em calcular o momento angular do corpo em relação a esse eixo.

Podemos calcular o momento angular somando as componentes z do momento angular de todos os elementos de massa do corpo. Na Fig. 11-15a, um elemento de massa típico, de massa  $\Delta m_i$ , está se movendo em torno do eixo z em uma trajetória circular. A posição do elemento de massa em relação à origem O é dada pelo vetor posição  $\vec{r}_i$ . O raio da trajetória circular do elemento de massa é  $\vec{r}_{\perp i}$ , a

distância perpendicular entre o elemento e o eixo z.

O módulo do momento angular  $\vec{\ell}_i$  desse elemento de massa em relação a  $O$  é dado pela Eq. 11-19:

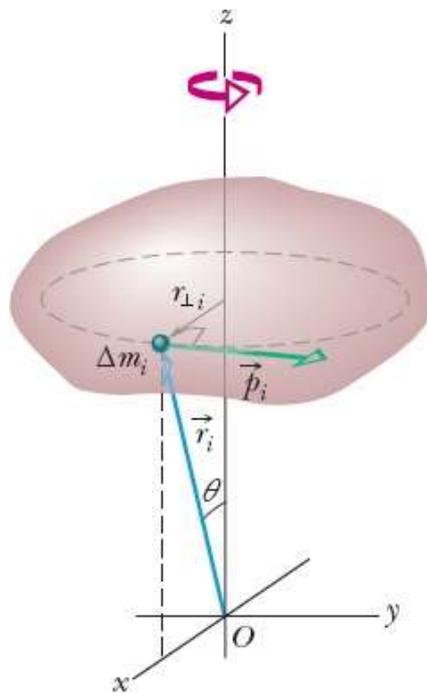
$$\ell_i = (r_i)(p_i)(\text{sen } 90^\circ) = (r_i)(\Delta m_i v_i),$$

em que  $p_i$  e  $v_i$  são o momento linear e a velocidade linear do elemento de massa, e  $90^\circ$  é o ângulo entre  $\vec{r}_i$  e  $\vec{P}_i$ . O vetor momento angular  $\vec{\ell}_i$  do elemento de massa da Fig. 11-15a aparece na Fig. 11-15b; o vetor é perpendicular a  $\vec{r}_i$  e  $\vec{P}_i$ .

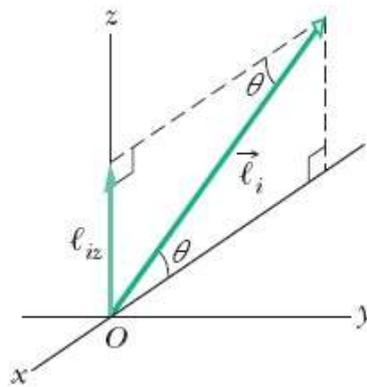
**As Componentes z.** Estamos interessados na componente de  $\vec{\ell}_i$  na direção paralela ao eixo de rotação, em nosso caso o eixo z. Essa componente é dada por

$$\ell_{iz} = \ell_i \text{sen } \theta = (r_i \text{ sen } \theta)(\Delta m_i v_i) = r_{\perp i} \Delta m_i v_i.$$

A componente z do momento angular do corpo rígido como um todo pode ser calculada somando as contribuições de todos os elementos de massa do corpo. Como  $v = \omega r_{\perp}$ , podemos escrever



(a)



(b)

**Figura 11-15** (a) Um corpo rígido gira em torno de um eixo  $z$  com velocidade angular  $\omega$ . Um elemento de massa  $\Delta m_i$  situado no interior do corpo se move em torno do eixo  $z$  em um círculo de raio  $r_{\perp i}$ . O elemento de massa possui momento linear  $\vec{P}_i$ , e sua posição em relação à origem  $O$  é determinada pelo vetor posição  $\vec{r}_i$ . O elemento de massa é mostrado na figura no instante em que  $r_{\perp i}$  está paralelo ao eixo  $x$ . (b) O momento angular  $\vec{\ell}_i$  do elemento de massa do item (a) em relação a  $O$ . A componente  $z$ ,  $\ell_{iz}$ , também é mostrada na figura.

$$\begin{aligned}
 L_z &= \sum_{i=1}^n \ell_{iz} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i v_i r_{\perp i} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i (\omega r_{\perp i}) r_{\perp i} \\
 &= \omega \left( \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_{\perp i}^2 \right).
 \end{aligned}
 \tag{11-30}$$

Podemos colocar  $\omega$  do lado de fora do somatório porque tem o mesmo valor em todos os pontos do corpo rígido.

O fator  $\sum \Delta m_i r_{\perp i}^2$  da Eq. 11-30 é o momento de inércia  $I$  do corpo em relação ao eixo fixo (veja a Eq. 10-33). Assim, a Eq. 11-30 se reduz a

$$L = I\omega \quad (\text{corpo rígido, eixo fixo}). \quad (11-31)$$

O índice  $z$  foi omitido na Eq. 11-31, mas o leitor deve ter em mente que o momento angular que aparece na equação é o momento angular em torno do eixo de rotação e que  $I$  é o momento de inércia em relação ao mesmo eixo.

A Tabela 11-1, que complementa a Tabela 10-3, amplia nossa lista de correspondências entre movimentos de translação e rotação.

**Tabela 11-1** Outras Correspondências entre os Movimentos de Translação e Rotação<sup>a</sup>

Translação		Rotação	
Força	$\vec{F}$	Torque	$\vec{\tau} (= \vec{r} \times \vec{F})$
Momento linear	$\vec{P}$	Momento angular	$\vec{\ell} (= \vec{r} \times \vec{F})$
Momento linear <sup>b</sup>	$\vec{P} (= \Sigma \vec{P}_i)$	Momento angular <sub>b</sub>	$\vec{L} (= \Sigma \vec{\ell}_i)$
Momento linear <sup>b</sup>	$\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$	Momento angular <sub>c</sub>	$L = I\omega$
Segunda lei de Newton <sup>b</sup>	$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{P}}{dt}$	Segunda lei de Newton <sub>b</sub>	$\vec{\tau}_{res} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Lei de conservação <sup>d</sup>	$\vec{P} = \text{constante}$	Lei de conservação <sup>d</sup>	$\vec{L} = \text{constante}$

<sup>a</sup>Veja também a Tabela 10-3.

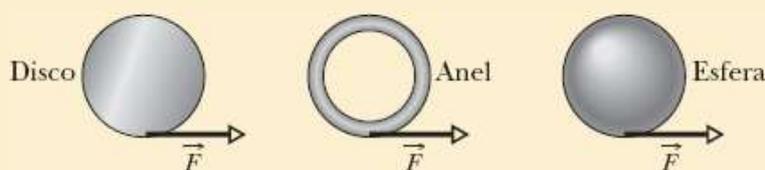
<sup>b</sup>Para sistemas de partículas, incluindo corpos rígidos.

<sup>c</sup>Para um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo;  $L$  é a componente paralela ao eixo.

<sup>d</sup>Para um sistema fechado e isolado.

## ☑ Teste 6

Na figura, um disco, um anel e uma esfera maciça são postos para girar em torno de um eixo central fixo (como piões) por meio de um barbante enrolado, que aplica a mesma força tangencial constante  $\vec{F}$  aos três objetos. Os três objetos têm a mesma massa e o mesmo raio e estão inicialmente em repouso. Ordene os objetos de acordo (a) com o momento angular em relação ao eixo central e (b) com a velocidade angular, em ordem decrescente, após o barbante ter sido puxado durante o mesmo intervalo de tempo  $\Delta t$ .



## 11-8 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

### Objetivo do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

**11.25** Se nenhuma força resultante externa age sobre um sistema ao longo de um eixo, aplicar a esse eixo a lei de conservação do momento angular para relacionar o momento angular inicial do sistema ao momento angular em um instante posterior.

### Ideia-Chave

• O momento angular  $\vec{L}$  de um sistema permanece constante se o torque resultante externo que age sobre o sistema é zero:

$$\vec{L} = \text{constante} \quad (\text{sistema isolado})$$

ou

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad (\text{sistema isolado}).$$

Essa é a lei de conservação do momento angular.

### Conservação do Momento Angular

Até o momento, discutimos apenas duas leis de conservação: a lei de conservação da energia e a lei de conservação do momento linear. Vamos agora falar de uma terceira lei do mesmo tipo, que envolve a conservação do momento angular. O ponto de partida é a Eq. 11-29 ( $\vec{\tau}_{\text{res}} = d\vec{L}/dt$ ), que é a segunda lei de Newton para rotações. Se nenhum torque externo resultante age sobre o sistema, a equação se torna  $d\vec{L}/dt = 0$  ou seja,

$$\vec{L} = \text{constante} \quad (\text{sistema isolado}). \quad (11-32)$$

Esse resultado, conhecido como **lei de conservação do momento angular**, também pode ser escrito na forma

$$\left( \begin{array}{l} \text{momento angular total} \\ \text{em um instante inicial } t_i \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{momento angular total em} \\ \text{um instante posterior } t_f \end{array} \right),$$

$$\text{ou} \quad \vec{L}_i = \vec{L}_f \quad (\text{sistema isolado}). \quad (11-33)$$

As Eqs. 11-32 e 11-33 significam o seguinte:



Se o torque externo resultante que age sobre um sistema é nulo, o momento angular  $\vec{L}$  do sistema permanece constante, sejam quais forem as mudanças que ocorrem dentro do sistema.

As Eqs. 11-32 e 11-33 são equações vetoriais; como tais, são equivalentes a três equações para as componentes, que correspondem à conservação do momento angular em três direções mutuamente perpendiculares. Dependendo dos torques externos que agem sobre um sistema, o momento angular pode ser conservado apenas em uma ou duas direções:



Se a componente do torque *externo* resultante que age sobre um sistema ao longo de um eixo é nula, a componente do momento angular do sistema ao longo desse eixo permanece constante, sejam quais forem as mudanças que ocorrem dentro do sistema.

Trata-se de uma informação importante: Em situações desse tipo, podemos considerar apenas os estados inicial e final do sistema, sem nos preocuparmos com o que acontece nos estados intermediários.

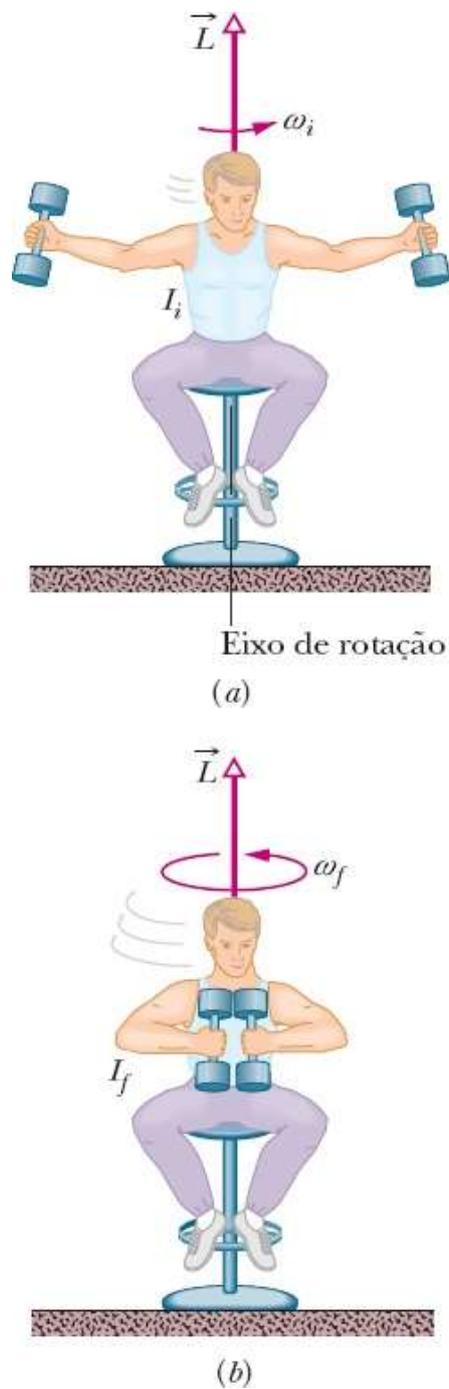
Podemos aplicar essa lei ao corpo isolado da Fig. 11-15, que está girando em torno do eixo  $z$ . Suponha que, em um certo instante, a massa do corpo seja redistribuída de tal forma que o momento de inércia em relação ao eixo  $z$  mude de valor. De acordo com as Eqs. 11-32 e 11-33, o momento angular do corpo não pode mudar. Substituindo a Eq. 11-31 (para o momento angular ao longo do eixo de rotação) na Eq. 11-33, essa lei de conservação se torna

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f \quad (11-34)$$

Os índices, aqui, se referem aos valores do momento de inércia  $I$  e da velocidade  $v$  antes e depois da redistribuição de massa.

Como acontece com as duas outras leis de conservação discutidas anteriormente, as aplicações das Eqs. 11-32 e 11-33 vão além dos limites da mecânica newtoniana. As mesmas equações são válidas para partículas que se movem a uma velocidade próxima da velocidade da luz (caso em que deve ser usada a teoria da relatividade especial) e permanecem verdadeiras no mundo das partículas subatômicas (em que reina a física quântica). Nenhuma exceção à lei de conservação do momento angular jamais foi descoberta.

Discutiremos a seguir quatro exemplos que envolvem essa lei.



**Figura 11-16** (a) O estudante possui um momento de inércia relativamente grande em relação ao eixo de rotação e uma velocidade angular relativamente pequena. (b) Diminuindo o momento de inércia, o estudante automaticamente aumenta a velocidade angular. O momento angular  $\vec{L}$  do sistema permanece inalterado.

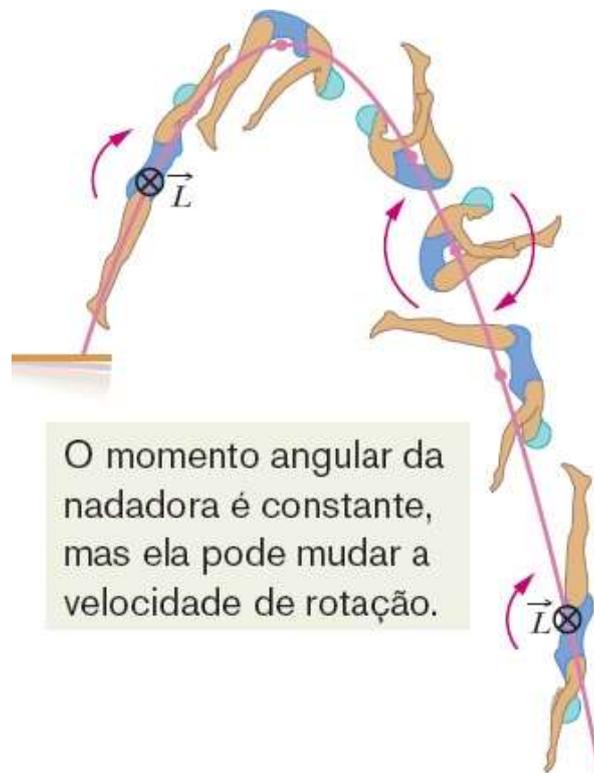
1. **Aluno que gira** A Fig. 11-16 mostra um estudante sentado em um banco que pode girar livremente em torno de um eixo vertical. O estudante, que foi posto em rotação com uma pequena velocidade angular inicial  $\omega_i$ , segura dois halteres com os braços abertos. O vetor momento angular  $\vec{L}$  do estudante coincide com o eixo de rotação e aponta para cima.

O professor pede ao estudante para fechar os braços; esse movimento reduz o momento de inércia do valor inicial  $I_i$  para um valor menor  $I_f$ , pois a massa dos halteres fica mais próxima do eixo de rotação. A velocidade angular do estudante aumenta consideravelmente, de  $\omega_i$  para  $\omega_f$ . O estudante

pode reduzir a velocidade angular estendendo novamente os braços para afastar os halteres do eixo de rotação.

Nenhum torque externo resultante age sobre o sistema formado pelo estudante, o banco e os halteres. Assim, o momento angular do sistema em relação ao eixo de rotação permanece constante, independentemente do modo como o estudante segura os halteres. Na Fig. 11-16a, a velocidade angular  $\omega_i$  do estudante é relativamente baixa e o momento de inércia  $I_i$  é relativamente alto. De acordo com a Eq. 11-34, a velocidade angular na Fig. 11-16b deve ser maior para compensar a redução de  $I_f$ .

- 2. Salto de trampolim** A Fig. 11-17 mostra uma atleta executando um salto duplo e meio mortal carpado. Como era de se esperar, o centro de massa descreve uma trajetória parabólica. A atleta deixa o trampolim com um momento angular  $\vec{L}$  em relação a um eixo horizontal que passa pelo centro de massa, representado por um vetor perpendicular ao papel na Fig. 11-17. Quando a mergulhadora está no ar, ela não sofre nenhum torque externo e, portanto, o momento angular em torno do mesmo eixo não pode variar. Levando braços e pernas para a *posição carpada*, ela reduz consideravelmente o momento de inércia em torno desse eixo e, assim, de acordo com a Eq. 11-34, a mergulhadora aumenta consideravelmente sua velocidade angular. Quando passa da posição carpada para a *posição esticada* no final do salto, o momento de inércia aumenta e a velocidade angular diminui o suficiente para a atleta mergulhar espirrando o mínimo possível de água. Mesmo em um salto mais complicado, que envolva também um movimento de parafuso, o momento angular da mergulhadora é conservado, em módulo e orientação, durante todo o salto. 
- 3. Salto em distância** Quando uma atleta deixa o solo em uma prova de salto em distância, a força exercida pelo solo sobre o pé de impulsão imprime ao corpo uma rotação para a frente em torno de um eixo horizontal. Essa rotação, caso não seja controlada, impede que a atleta chegue ao solo com a postura correta: Na descida, as pernas devem estar juntas e estendidas para a frente, para que os calcanhares toquem a areia o mais longe possível do ponto de partida. Depois que a atleta deixa o solo, o momento angular não pode mudar (é conservado), já que não existe nenhum torque externo. Entretanto, a atleta pode transferir a maior parte do momento angular para os braços, fazendo-os girar em um plano vertical (veja a Fig. 11-18). Com isso, o corpo permanece na orientação correta para a parte final do salto. 



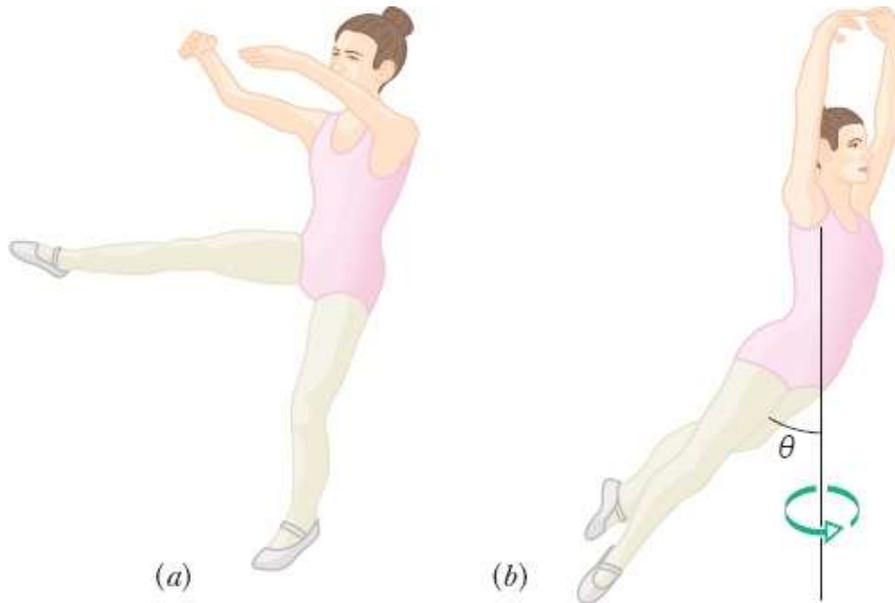
O momento angular da nadadora é constante, mas ela pode mudar a velocidade de rotação.

**Figura 11-17** O momento angular  $\vec{L}$  da nadadora é constante durante o salto, sendo representado pela origem  $\otimes$  de uma seta perpendicular ao plano do papel. Note também que o centro de massa da nadadora (representado pelos pontos) segue uma trajetória parabólica.

4. **Tour jeté** Em um *tour jeté*, uma bailarina salta com um pequeno movimento de rotação, mantendo uma perna vertical e a outra perpendicular ao corpo (veja a Fig. 11-19a). A velocidade angular é tão pequena que pode não ser percebida pela plateia. Enquanto está subindo, a bailarina movimenta para baixo a perna que estava levantada e levanta a outra perna, fazendo com que ambas assumam um ângulo  $\theta$  com o corpo (Fig. 11-19b). O movimento é elegante, mas também serve para aumentar a velocidade angular, já que o momento de inércia da bailarina é menor na nova posição. Como o corpo da bailarina não está sujeito a nenhum torque externo, o momento angular não pode variar. Assim, se o momento de inércia diminui, a velocidade angular deve aumentar. Quando o salto é bem executado, a impressão para a plateia é de que a bailarina começa a girar de repente e executa uma volta de  $180^\circ$  antes que as orientações iniciais das pernas sejam invertidas em preparação para o pouso. Quando uma das pernas é novamente estendida, a rotação parece desaparecer magicamente.



**Figura 11-18** No salto em distância, a rotação dos braços ajuda a manter o corpo na orientação correta para a parte final do salto.



**Figura 11-19** (a) Parte inicial de um *tour jeté*: o momento de inércia é grande e a velocidade angular é pequena. (b) Parte intermediária: o momento de inércia é menor e a velocidade angular é maior.

### ✓ Teste 7

Um besouro-rinoceronte está na borda de um pequeno disco que gira como um carrossel. Se o besouro se desloca em direção ao centro do disco, as seguintes grandezas (todas em relação ao eixo central) aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas: (a) momento de inércia, (b) momento angular e (c) velocidade angular?

### 📍 Exemplo 11.05 Conservação do momento angular: rotação de uma roda e de um banco

A Fig. 11-20a mostra um estudante, novamente sentado em um banco que pode girar livremente em torno de um eixo vertical. O estudante, inicialmente em repouso, segura uma roda de bicicleta cuja borda é feita de chumbo e cujo momento de inércia  $I_r$ , em relação ao eixo central é  $1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . (O chumbo serve para aumentar o valor do momento de inércia.)

A roda gira com uma velocidade angular  $\omega_r$  de  $3,9 \text{ rev/s}$ ; vista de cima, a rotação é no sentido anti-horário. O eixo da roda é vertical e o momento angular  $\vec{L}_r$  aponta verticalmente para cima.

O estudante inverte a roda que, vista de cima, passa a girar no sentido horário (Fig. 11-20b); o momento angular agora é  $-\vec{L}_r$ . A inversão faz com que o estudante, o banco e o centro da roda girem juntos, como um corpo rígido composto, em torno do eixo de rotação do banco, com um momento de inércia  $I_c = 6,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . (O fato de a roda estar girando não afeta a distribuição de massa do corpo composto, ou seja,  $I_c$  possui o mesmo valor, independentemente de a roda estar girando ou não.) Com que velocidade angular  $\omega_c$  e em que sentido o corpo composto gira após a inversão da roda?

(c) O momento angular total do sistema é o mesmo antes e depois da inversão.

## IDEIAS-CHAVE

1. A velocidade angular  $\omega_c$  pedida está relacionada ao momento angular final  $\vec{L}_c$  do corpo composto em relação ao eixo de rotação do banco pela Eq. 11-31 ( $L = I\omega$ ).
2. A velocidade angular inicial  $\omega_r$  da roda está relacionada ao momento angular  $\vec{L}_r$  da roda em relação ao centro pela mesma equação.
3. A soma dos vetores  $\vec{L}_c$  e  $\vec{L}_r$  fornece o momento angular total  $\vec{L}_{\text{tot}}$  do sistema formado pelo estudante, o banco e a roda.
4. Quando a roda é invertida, nenhum torque *externo* age sobre o sistema para mudar  $\vec{L}_{\text{tot}}$  em relação a qualquer eixo vertical. (Os torques produzidos por forças entre o estudante e a roda quando o estudante inverte a roda são *internos* ao sistema.) Assim, o momento angular total do sistema é conservado em relação a qualquer eixo vertical.

**Cálculos:** A conservação de  $\vec{L}_{\text{tot}}$  está representada por vetores na Fig. 11-20c. Podemos também escrever essa conservação em termos das componentes verticais:

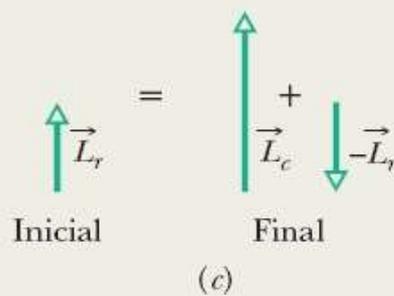
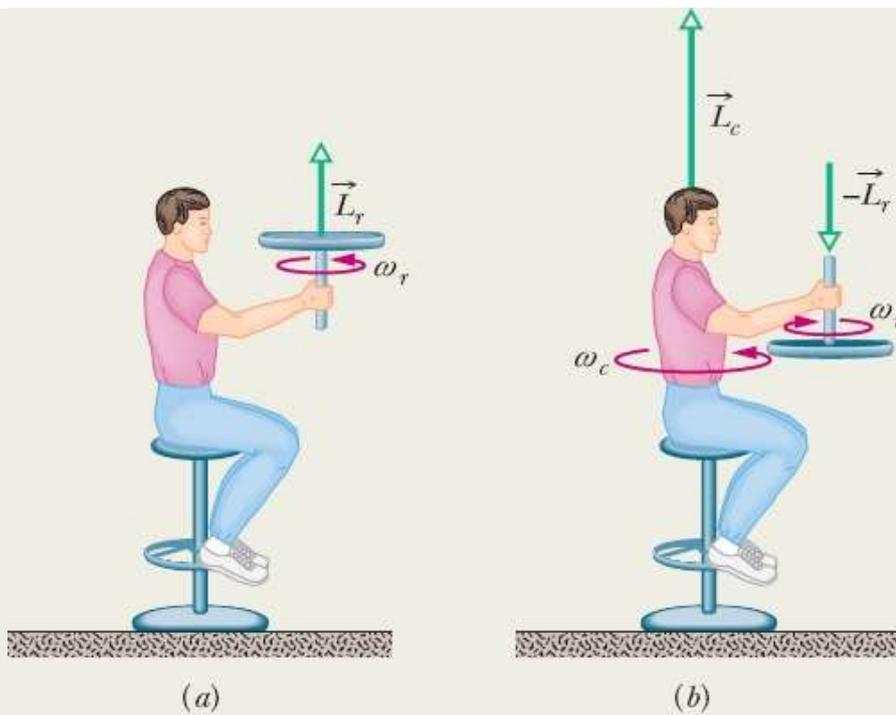
$$L_{cf} + L_{rf} = L_{ci} + L_{ri} \quad (11-35)$$

em que os índices *i* e *f* indicam o estado inicial (antes da inversão da roda) e o estado final (depois da inversão). Como a inversão da roda inverteu o momento angular associado à rotação da roda, substituímos  $L_{rf}$  por  $-L_{ri}$ . Fazendo  $L_{ci} = 0$  (pois o estudante, o banco e o centro da roda estão inicialmente em repouso), a Eq. 11-35 se torna

$$L_{cf} = 2L_{ri}$$

Usando a Eq. 11-31, substituímos  $L_c/m_c$  por  $I_c\omega_c$  e  $L_{ri}$  por  $I_r\omega_r$  e explicitamos  $\omega_c$  obtendo

$$\begin{aligned} \omega_c &= \frac{2I_r}{I_c} \omega_r \\ &= \frac{(2)(1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(3,9 \text{ rev/s})}{6,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 1,4 \text{ rev/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$



O estudante agora possui um momento angular, e a resultante dos dois vetores é igual ao vetor inicial.

**Figura 11-20** (a) Um estudante segura uma roda de bicicleta que gira em torno de um eixo vertical. (b) O estudante inverte a roda e o banco começa a girar. (c) O momento angular total do sistema é o mesmo antes e depois da inversão.

Este resultado positivo mostra que o estudante gira no sentido anti-horário em torno do eixo do banco, quando visto de cima. Para parar de rodar, o estudante tem apenas que inverter novamente a roda.

### Exemplo 11.06 Conservação do momento angular de uma barata em um disco

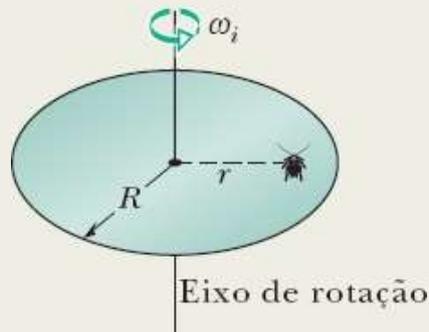
Na Fig. 11-21, uma barata de massa  $m$  está em um disco de massa  $6,00m$  e raio  $R$ . O disco gira como um carrossel em torno do eixo central, com uma velocidade angular  $\omega_i = 1,50 \text{ rad/s}$ . A barata está inicialmente a uma distância  $r = 0,800R$  do centro do disco, mas rasteja até a borda do disco. Trate a barata como se fosse uma partícula. Qual é a velocidade angular do inseto ao chegar à borda do disco?

#### IDEIAS-CHAVE

(1) Ao se deslocar, a barata muda a distribuição de massa (e, portanto, o momento de inércia) do sistema barata-disco. (2) O

momento angular do sistema não varia porque não está sujeito a nenhum torque externo. (As forças e torques associados ao movimento da barata são internos ao sistema.) (3) O módulo do momento angular de um corpo rígido ou de uma partícula é dado pela Eq. (11-31) ( $L = I\omega$ ).

**Cálculos:** Podemos determinar a velocidade angular final igualando o momento angular final  $L_f$  ao momento angular inicial  $L_i$ , já que ambos envolvem a velocidade angular e o momento de inércia. Para começar, vamos calcular o momento de inércia do sistema barata-disco antes e depois do deslocamento da barata.



**Figura 11-21** Uma barata está a uma distância  $r$  do centro de um disco que gira como um carrossel.

De acordo com a Tabela 10-2c, o momento de inércia de um disco que gira em torno do eixo central é  $MR^2$ . Como  $M = 6,00m$ , o momento de inércia do disco é

$$I_d = 3,00mR^2. \quad (11-36)$$

(Não conhecemos os valores de  $m$  e  $R$ , mas vamos prosseguir com a coragem tradicional dos físicos.)

De acordo com a Eq. 10-33, o momento de inércia da barata (supondo que esta se comporta como uma partícula) é  $mr^2$ . Substituindo os valores da distância inicial entre a barata e o centro do disco ( $r = 0,800R$ ) e da distância final ( $r = R$ ), descobrimos que o momento de inércia inicial da barata em relação ao eixo de rotação é

$$I_{ci} = 0,64mR^2 \quad (11-37)$$

e que o momento de inércia final em relação ao mesmo eixo é

$$I_{cf} = mR^2. \quad (11-38)$$

Assim, o momento de inércia inicial do sistema barata-disco é

$$I_i = I_d + I_{ci} = 3,64mR^2, \quad (11-39)$$

e o momento de inércia final é

$$I_f = I_d + I_{cf} = 4,00mR^2. \quad (11-40)$$

Em seguida, usamos a Eq. 11-31 ( $L = I\omega$ ) para levar em conta o fato de que o momento angular final  $L_f$  do sistema é igual ao momento angular inicial  $L_i$ :

$$I_f \omega_f = I_i \omega_i$$

ou  $4,00mR^2 \omega_f = 3,64mR^2(1,50 \text{ rad/s}).$

Depois de cancelar as incógnitas  $m$  e  $R$ , obtemos

$$\omega_f = 1,37 \text{ rad/s.} \quad (\text{Resposta})$$

Observe que a velocidade angular diminuiu porque a distância entre parte da massa e o eixo de rotação aumentou.

## 11-9 PRECESSÃO DE UM GIROSCÓPIO

### Objetivos do Aprendizado

Depois de ler este módulo, você será capaz de ...

- 11.26 Saber que a ação da força gravitacional sobre um giroscópio em rotação faz com que o vetor momento angular (e o próprio giroscópio) gire em torno do eixo vertical, um movimento conhecido como precessão.
- 11.27 Calcular a taxa de precessão de um giroscópio.
- 11.28 Saber que a taxa de precessão de um giroscópio não depende da massa do giroscópio.

### Ideia-Chave

- A taxa de precessão de um giroscópio em rotação é dada por

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega},$$

em que  $M$  é a massa do giroscópio,  $r$  é o braço de alavanca,  $I$  é o momento de inércia e  $\omega$  é a velocidade angular.

### Precessão de um Giroscópio

Um giroscópio simples é formado por uma roda fixada a um eixo e livre para girar em torno do eixo. Se uma das extremidades do eixo de um giroscópio *estacionário* é apoiada em um suporte, como na Fig. 11-22a, e o giroscópio é liberado, o giroscópio cai, girando para baixo em torno da extremidade do suporte. Como a queda envolve uma rotação, é governada pela segunda lei de Newton para rotações, dada pela Eq. 11-29:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (11-41)$$

De acordo com a Eq. (11-41), o torque que causa a rotação para baixo (a queda) faz variar o momento

angular  $\vec{L}$  do giroscópio a partir do valor inicial, que é zero. O torque  $\vec{\tau}$  é produzido pela força gravitacional  $M\vec{g}$  sobre o centro de massa do giroscópio, que tomamos como o centro da roda. O braço de alavanca em relação à extremidade do suporte, situada no ponto  $O$  da Fig. 11-22a, é  $\vec{r}$ . O módulo de  $\vec{\tau}$  é

$$\tau = Mgr \sin 90^\circ = Mgr \quad (11-42)$$

(já que o ângulo entre  $M\vec{g}$  e  $\vec{r}$  é  $90^\circ$ ) e o sentido é o que aparece na Fig. 11-22a.

Um giroscópio que gira rapidamente se comporta de outra forma. Suponha que o giroscópio seja liberado com o eixo ligeiramente inclinado para cima. Nesse caso, começa a cair, girando em torno de um eixo horizontal que passa por  $O$ , mas, em seguida, com a roda ainda girando em torno do eixo, passa a girar horizontalmente em torno de um eixo vertical que passa pelo ponto  $O$ , um movimento que é chamado de **precessão**.

**Por que o Giroscópio Não Cai?** Por que o giroscópio em rotação permanece suspenso em vez de cair, como o giroscópio estacionário? Isso acontece porque, quando o giroscópio em rotação é liberado, o torque produzido pela força gravitacional,  $M\vec{g}$ , faz variar, não um momento angular inicialmente nulo, mas um momento angular já existente, graças à rotação da roda.

Para entender por que esse momento angular inicial leva à precessão, considere o momento angular  $\vec{L}$  do giroscópio devido à rotação da roda. Para simplificar a situação, suponha que a rotação é tão rápida que o momento angular devido à precessão é desprezível em relação a  $\vec{L}$ . Suponha também que o eixo do giroscópio está na horizontal quando a precessão começa, como na Fig. 11-22b. O módulo de  $\vec{L}$  é dado pela Eq. 11-31:

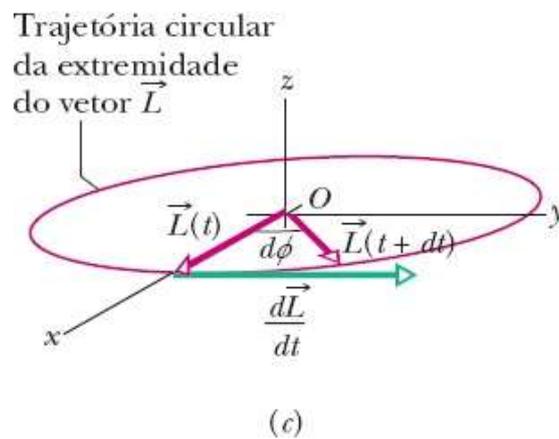
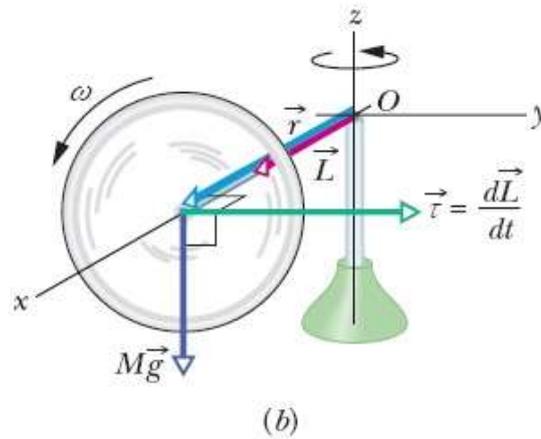
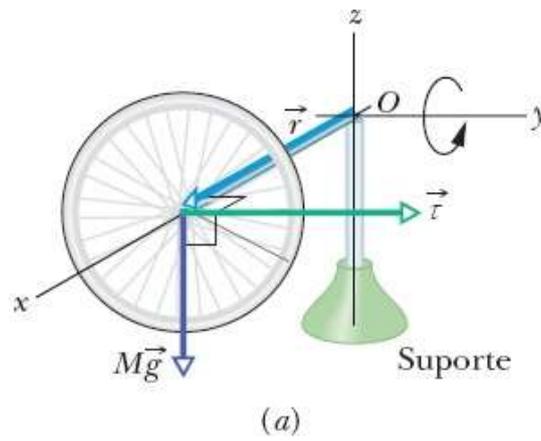
$$L = I\omega, \quad (11-43)$$

em que  $I$  é o momento de inércia do giroscópio em relação ao eixo e  $\omega$  é a velocidade angular da roda. O vetor  $\vec{L}$  aponta ao longo do suporte, como na Fig. 11-22b. Como  $\vec{L}$  é paralelo a  $\vec{r}$ , o torque  $\vec{\tau}$  é perpendicular a  $\vec{L}$ .

De acordo com a Eq. 11-41, o torque  $\vec{\tau}$  causa uma variação incremental  $d\vec{L}$  do momento angular do giroscópio em um intervalo de tempo incremental  $dt$ , ou seja,

$$d\vec{L} = \vec{\tau} dt. \quad (11-44)$$

Entretanto, no caso de um giroscópio que *gira rapidamente*, o módulo de  $\vec{L}$  é fixado pela Eq. 11-43. Assim, o torque pode mudar a orientação de  $\vec{L}$ , mas não o módulo.



**Figura 11-22** (a) Um giroscópio parado gira em um plano  $xz$  devido ao torque  $\vec{\tau}$  produzido pela força gravitacional. (b) Um giroscópio que gira rapidamente com momento angular  $\vec{L}$  executa um movimento de precessão em torno do eixo  $z$ . O movimento de precessão acontece no plano  $xy$ . (c) A variação  $d\vec{L}/dt$  do momento angular leva a uma rotação de  $\vec{L}$  em torno do ponto  $O$ .

De acordo com a Eq. 11-44, a orientação de  $d\vec{L}$  é a mesma de  $\vec{\tau}$ , perpendicular a  $\vec{L}$ . A única maneira pela qual  $\vec{L}$  pode variar na direção de  $\vec{\tau}$  sem que o módulo  $L$  seja alterado é girar em torno do eixo  $z$ , como na Fig. 11-22c. Assim,  $\vec{L}$  conserva o módulo, a extremidade do vetor  $\vec{L}$  descreve uma trajetória circular e  $\vec{\tau}$  é sempre tangente a essa trajetória. Como  $\vec{L}$  tem de apontar na direção do eixo da roda, o eixo tem de girar em torno do eixo  $z$  na direção de  $\vec{\tau}$ . Essa é a origem da precessão. Como o giroscópio em rotação precisa obedecer à segunda lei de Newton para rotações em resposta a qualquer mudança do

momento angular inicial, ele precisa realizar uma precessão em vez de simplesmente tombar.

**Precessão.** Podemos calcular a **taxa de precessão**  $\Omega$  usando primeiro as Eqs. 11-44 e 11-42 para obter o módulo de  $d\vec{L}$ :

$$dL = \tau dt = Mgr dt. \quad (11-45)$$

Quando  $\vec{L}$  varia de um valor incremental durante um tempo incremental  $dt$ , o eixo e  $\vec{L}$  precessam em torno do eixo  $z$  de um ângulo incremental  $d\phi$ . (Na Fig. 11-22c, o ângulo  $d\phi$  foi exagerado para maior clareza.) Com a ajuda das Eqs. 11-43 e 11-45, descobrimos que  $d\phi$  é dado por

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{Mgr dt}{I\omega}.$$

Dividindo essa expressão por  $dt$  e fazendo a taxa de precessão  $\Omega$  igual a  $d\phi/dt$ , obtemos

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega} \quad (\text{velocidade de precessão}). \quad (11-46)$$

Esse resultado é válido contanto que a velocidade angular  $\omega$  seja elevada. Note que  $\Omega$  diminui quando  $\omega$  aumenta. Observe também que não haveria precessão se a força gravitacional  $M\vec{g}$  não agisse sobre o giroscópio; entretanto, como  $I$  é uma função linear de  $M$ , as massas no numerador e denominador da Eq. 11-46 se cancelam, ou seja,  $\Omega$  não depende da massa do corpo.

A Eq. 11-46 também é válida quando o eixo do giroscópio faz um ângulo diferente de zero com a horizontal e, portanto, pode ser aplicada a um pião de brinquedo. ~~uma~~

## Revisão e Resumo

**Corpos em Rolagem** No caso de uma roda de raio  $R$  rolando suavemente,

$$v_{\text{CM}} = \omega R, \quad (11-2)$$

em que  $v_{\text{CM}}$  é a velocidade linear do centro de massa da roda e  $\omega$  é a velocidade angular da roda em torno do centro. A roda pode também ser vista como se estivesse girando instantaneamente em torno do ponto  $P$  do “piso” que está em contato com a roda. A velocidade angular da roda em torno desse ponto é igual à velocidade angular da roda em torno do centro. Uma roda que rola tem uma energia cinética dada por

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2, \quad (11-5)$$

em que  $I_{\text{CM}}$  é o momento de inércia da roda em relação ao centro de massa e  $M$  é a massa da roda. Se a roda está sendo acelerada, mas rola suavemente, a aceleração do centro de massa  $\vec{a}_{\text{CM}}$  está relacionada à aceleração angular  $\alpha$  em relação ao centro de rotação por meio da equação

$$a_{CM} = \alpha R. \quad (11-6)$$

Se a roda desce uma rampa de ângulo  $\theta$  rolando suavemente, a aceleração ao longo de um eixo  $x$  paralelo à rampa é dada por

$$a_{CM,x} = -\frac{g \operatorname{sen} \theta}{1 + I_{CM}/MR^2}. \quad (11-10)$$

**O Torque como um Vetor** Em três dimensões, o *torque*  $\vec{\tau}$  é uma grandeza vetorial definida em relação a um ponto fixo (em geral, a origem) por meio da equação

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (11-14)$$

em que  $\vec{F}$  é a força aplicada à partícula e  $\vec{r}$  é o vetor posição da partícula em relação ao ponto fixo. O módulo de  $\vec{\tau}$  é dado por

$$\tau = rF \operatorname{sen} \phi = rF_{\perp} = r_{\perp}F, \quad (11-15, 11-16, 11-17)$$

em que  $\phi$  é o ângulo entre  $\vec{F}$  e  $\vec{r}$ ,  $F_{\perp}$  é a componente de  $\vec{F}$  perpendicular a  $\vec{r}$ , e  $r_{\perp}$  é o braço de alavanca de  $\vec{F}$ . A orientação de  $\vec{\tau}$  é dada pela regra da mão direita.

**Momento Angular de uma Partícula** O *momento angular*  $\vec{\ell}$  de uma partícula com momento linear  $\vec{p}$ , massa  $m$  e velocidade linear  $\vec{v}$  é uma grandeza vetorial definida em relação a um ponto fixo (em geral, a origem) por meio da equação

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}). \quad (11-18)$$

O módulo de  $\vec{\ell}$  é dado por

$$\ell = rmv \operatorname{sen} \phi \quad (11-19)$$

$$= rp_{\perp} = rmv_{\perp} \quad (11-20)$$

$$= r_{\perp}p = r_{\perp}mv, \quad (11-21)$$

em que  $\phi$  é o ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\vec{p}$ ,  $p_{\perp}$  e  $v_{\perp}$  são as componentes de  $\vec{p}$  e  $\vec{v}$  perpendiculares a  $\vec{r}$ , e  $r_{\perp}$  é a distância perpendicular entre o ponto fixo e a extensão de  $\vec{p}$ . A orientação de  $\vec{\ell}$  é dada pela regra da mão direita para produtos vetoriais.

**Segunda Lei de Newton para Rotações** A segunda lei de Newton para a rotação de uma partícula pode ser escrita na forma

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}, \quad (11-23)$$

em que  $\vec{\tau}_{\text{res}}$  é o torque resultante que age sobre a partícula e  $\vec{\ell}$  é o momento angular da partícula.

**Momento Angular de um Sistema de Partículas** O momento angular  $\vec{L}$  de um sistema de partículas é a soma vetorial dos momentos angulares das partículas:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^n \vec{\ell}_i. \quad (11-26)$$

A taxa de variação com o tempo do momento angular é igual ao torque externo resultante que age sobre o sistema (a soma vetorial dos torques produzidos pelas interações das partículas do sistema com partículas externas ao sistema):

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (\text{sistema de partículas}). \quad (11-29)$$

**Momento Angular de um Corpo Rígido** No caso de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo, a componente do momento angular paralela ao eixo de rotação é

$$L = I\omega \quad (\text{corpo rígido, eixo fixo}). \quad (11-31)$$

**Conservação do Momento Angular** O momento angular  $\vec{L}$  de um sistema permanece constante se o torque externo resultante que age sobre o sistema é nulo:

$$\vec{L} = \text{constante} \quad (\text{sistema isolado}) \quad (11-32)$$

ou 
$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad (\text{sistema isolado}). \quad (11-33)$$

Essa é a **lei de conservação do momento angular**.

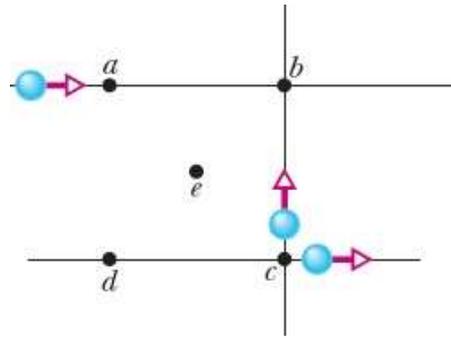
**Precessão de um Giroscópio** Um giroscópio pode realizar, em torno de um eixo vertical que passa pelo suporte, um movimento de precessão a uma taxa dada por

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}, \quad (11-46)$$

em que  $M$  é a massa do giroscópio,  $r$  é o braço de alavanca,  $I$  é o momento de inércia e  $\omega$  é a velocidade angular do giroscópio.

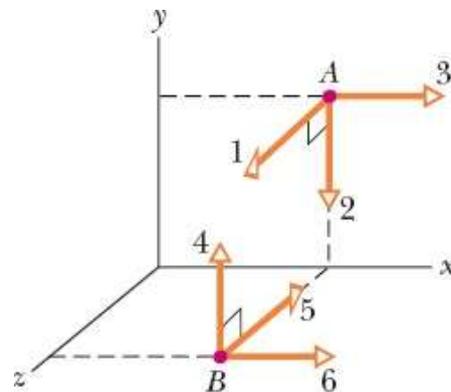
## Perguntas

**1** A Fig. 11-23 mostra três partículas de mesma massa e mesma velocidade escalar constante que se movem nas orientações indicadas pelos vetores velocidade. Os pontos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  formam um quadrado, com o ponto  $e$  no centro. Ordene os pontos de acordo com o módulo do momento angular resultante em relação aos pontos do sistema de três partículas, em ordem decrescente.



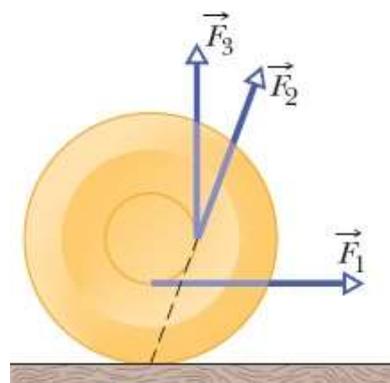
**Figura 11-23** Pergunta 1.

2 A Fig. 11-24 mostra duas partículas,  $A$  e  $B$ , nas coordenadas  $(1\text{ m}, 1\text{ m}, 0)$  e  $(1\text{ m}, 0, 1\text{ m})$ . Sobre cada partícula agem três forças numeradas de mesmo módulo, cada uma paralela a um dos eixos. (a) Qual das forças produz um torque, em relação à origem, paralelo a  $y$ ? (b) Ordene as forças de acordo com o módulo do torque em relação à origem que aplicam às partículas, em ordem decrescente.



**Figura 11-24** Pergunta 2.

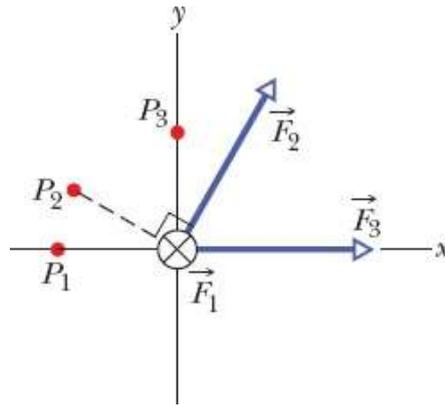
3 O que acontece ao ioiô inicialmente estacionário da Fig. 11-25 se é puxado, com o auxílio da corda, (a) pela força  $\vec{F}_2$  (cuja linha de ação passa pelo ponto de contato do ioiô com a mesa, como mostra a figura), (b) pela força  $\vec{F}_1$  (cuja a linha de ação passa acima do ponto de contato) e (c) pela força  $\vec{F}_3$  (cuja linha de ação passa à direita do ponto de contato)?



**Figura 11-25** Pergunta 3.

4 O vetor posição  $\vec{r}$  de uma partícula em relação a um certo ponto tem um módulo de 3 m, e a força  $\vec{F}$  aplicada à partícula tem um módulo de 4 N. Qual é o ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$  se o módulo do torque associado é igual (a) a zero e (b) a  $12 \text{ N} \cdot \text{m}$ ?

5 Na Fig. 11-26, três forças de mesmo módulo são aplicadas a uma partícula localizada na origem ( $\vec{F}_1$  é aplicada perpendicularmente ao plano do papel). Ordene as forças de acordo com os módulos do torque que produzem (a) em relação ao ponto  $P_1$ , (b) em relação ao ponto  $P_2$  e (c) em relação ao ponto  $P_3$ , em ordem decrescente.

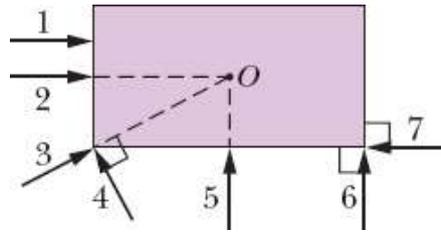


**Figura 11-26** Pergunta 5.

6 O momento angular  $\ell(t)$  de uma partícula em quatro situações é (1)  $\ell = 3t + 4$ ; (2)  $\ell = -6t^2$ ; (3)  $\ell = 2$ ; (4)  $\ell = 4/t$ . Em que situação o torque resultante que age sobre a partícula é (a) zero, (b) positivo e constante, (c) negativo e com o módulo crescente para  $t > 0$  e (d) negativo e com o módulo decrescente para  $t > 0$ ?

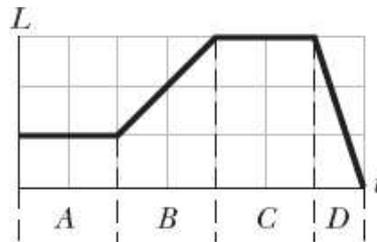
7 Um besouro-rinoceronte está na borda de um disco horizontal que gira como um carrossel no sentido anti-horário. Se o besouro caminha ao longo da borda no sentido da rotação, o módulo das grandezas a seguir (medidas em relação ao eixo de rotação) aumenta, diminui, ou permanece o mesmo (com o disco ainda girando no sentido anti-horário): (a) o momento angular do sistema besouro-disco, (b) o momento angular e velocidade angular do besouro e (c) o momento angular e velocidade angular do disco? (d) Quais são as respostas se o besouro caminha no sentido oposto ao da rotação?

8 A Fig. 11-27 mostra a vista superior de uma placa retangular que pode girar como um carrossel em torno do centro  $O$ . Também são mostradas sete trajetórias ao longo das quais bolinhas de goma de mascar podem ser jogadas (todas com a mesma velocidade escalar e mesma massa) para grudar na placa estacionária. (a) Ordene as trajetórias, em ordem decrescente, de acordo com a velocidade angular da placa (e da goma de mascar) após a goma grudar. (b) Para que trajetórias o momento angular da placa (e da goma) em relação ao ponto  $O$  é negativo do ponto de vista da Fig. 11-27?



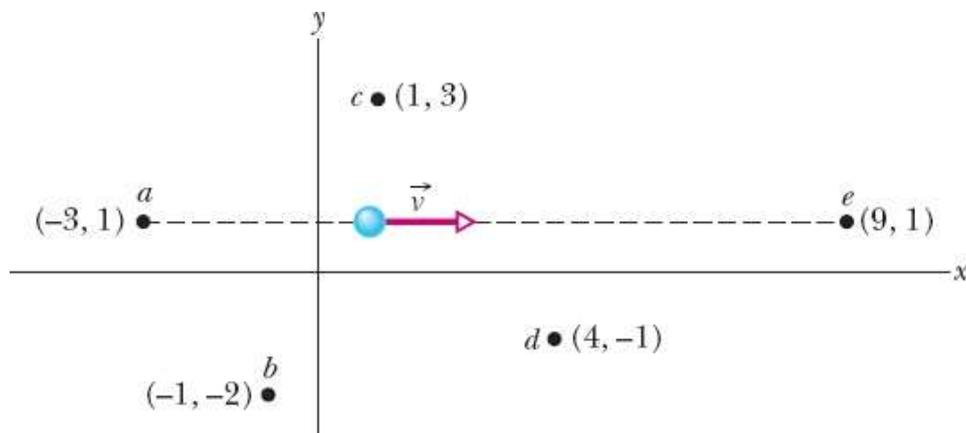
**Figura 11-27** Pergunta 8.

9 A Fig. 11-28 mostra o módulo do momento angular  $L$  de uma roda em função do tempo  $t$ . Ordene os quatro intervalos de tempo, indicados por letras, de acordo com o módulo do torque que age sobre a roda, em ordem decrescente.



**Figura 11-28** Pergunta 9.

10 A Fig. 11-29 mostra uma partícula se movendo com velocidade constante  $\vec{v}$  e cinco pontos com suas coordenadas  $xy$ . Ordene os pontos de acordo com o módulo do momento angular da partícula em relação a eles, em ordem decrescente.



**Figura 11-29** Pergunta 10.

11 Uma bala de canhão e uma bola de gude rolam para baixo suavemente, a partir do repouso, em uma rampa. (a) A bala de canhão chega à base da rampa antes, ao mesmo tempo, ou depois da bola de gude? (b) Ao chegar à base da rampa, a energia cinética de translação da bala de canhão é maior, igual, ou menor que a da bola de gude?

12 Um cilindro de latão e um cilindro de madeira têm o mesmo raio e a mesma massa (o que significa que o cilindro de madeira é mais comprido). Os dois cilindros rolam suavemente para baixo em uma

rampa, a partir do repouso. (a) Qual dos dois cilindros chega primeiro à base da rampa? (b) Se o cilindro de madeira é cortado para ficar com o mesmo comprimento do cilindro de latão, e uma cavidade é aberta ao longo do eixo central do cilindro de latão para que fique com a mesma massa que o cilindro de madeira, qual dos dois cilindros chega primeiro à base da rampa?

## Problemas

.- ... O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema.

 Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

### Módulo 11-1 Rolagem como uma Combinação de Translação e Rotação

•1 Um carro se move a 80,0 km/h em uma estrada plana no sentido positivo de um eixo  $x$ . Os pneus têm um diâmetro de 66 cm. Em relação a uma mulher que viaja no carro e na notação dos vetores unitários, determine a velocidade  $\vec{v}$  (a) no centro, (b) no alto e (c) na base de cada pneu e o módulo  $a$  da aceleração (d) no centro, (e) no alto e (f) na base de cada pneu. Em relação a uma pessoa parada no acostamento da estrada e na notação dos vetores unitários, determine a velocidade  $\vec{v}$  (g) no centro, (h) no alto e (i) na base de cada pneu e o módulo da aceleração  $a$  (j) no centro, (k) no alto e (l) na base de cada pneu.

•2 Os pneus de um automóvel que se move a 80 km/h têm 75,0 cm de diâmetro. (a) Qual é a velocidade angular dos pneus em relação aos respectivos eixos? (b) Se o carro é freado com aceleração constante e as rodas descrevem 30 voltas completas (sem deslizamento), qual é o módulo da aceleração angular das rodas? (c) Que distância o carro percorre durante a frenagem?

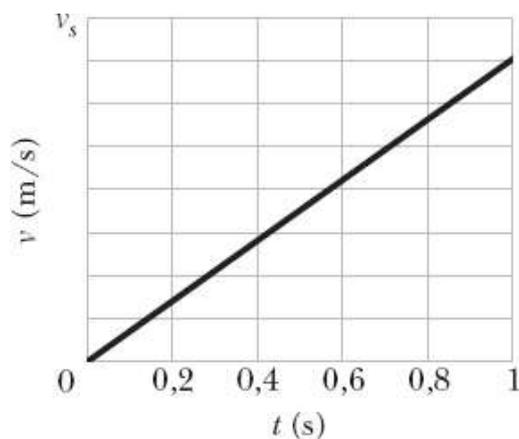
### Módulo 11-2 As Forças e a Energia Cinética da Rolagem

•3 Um aro de 140 kg rola em um piso horizontal de tal forma que o centro de massa tem uma velocidade de 0,150 m/s. Qual é o trabalho necessário para fazê-lo parar?

•4 Uma esfera maciça, homogênea, rola para baixo em uma rampa. (a) Qual deve ser o ângulo de inclinação da rampa para que a aceleração linear do centro da esfera tenha um módulo de  $0,10g$ ? (b) Se um bloco sem atrito deslizesse para baixo na mesma rampa, o módulo da aceleração seria maior, menor ou igual a  $0,10g$ ? Por quê?

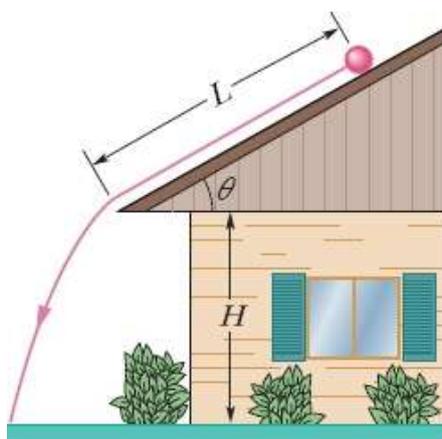
•5 Um carro de 1000 kg tem quatro rodas de 10 kg. Quando o carro está em movimento, que fração da energia cinética total se deve à rotação das rodas em torno dos respectivos eixos? Suponha que as rodas tenham o mesmo momento de inércia que discos homogêneos de mesma massa e tamanho. Por que não é preciso conhecer o raio das rodas?

•6 A Fig. 11-30 mostra a velocidade escalar  $v$  em função do tempo  $t$  para um objeto de 0,500 kg e 6,00 cm de raio que rola suavemente para baixo em uma rampa de  $30^\circ$ . A escala do eixo das velocidades é definida por  $v_s = 4,0$  m/s. Qual é o momento de inércia do objeto?



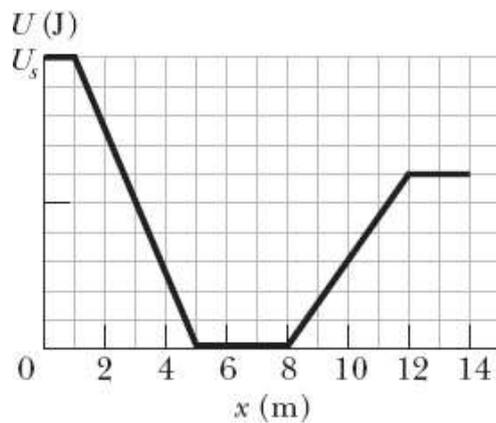
**Figura 11-30** Problema 6.

••7 Na Fig. 11-31, um cilindro maciço com 10 cm de raio e massa de 12 kg parte do repouso e rola para baixo uma distância  $L = 6,0$  m, sem deslizar, em um telhado com uma inclinação  $\theta = 30^\circ$ . (a) Qual é a velocidade angular do cilindro em relação ao eixo central ao deixar o telhado? (b) A borda do telhado está a uma altura  $H = 5,0$  m. A que distância horizontal da borda do telhado o cilindro atinge o chão?



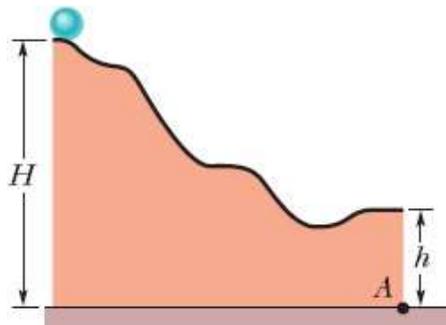
**Figura 11-31** Problema 7.

••8 A Fig. 11-32 mostra a energia potencial  $U(x)$  de uma bola maciça que pode rolar ao longo de um eixo  $x$ . A escala do eixo  $U$  é definida por  $U_s = 100$  J. A bola é homogênea, rola suavemente e possui uma massa de 0,400 kg. Ela é liberada em  $x = 7,0$  m quando se move no sentido negativo do eixo  $x$  com uma energia mecânica de 75 J. (a) Se a bola pode chegar ao ponto  $x = 0$  m, qual é sua velocidade nesse ponto? Se não pode, qual é o ponto de retorno? Suponha que, em vez disso, a bola esteja se movendo no sentido positivo do eixo  $x$  ao ser liberada em  $x = 7,0$  m com 75 J. (b) Se a bola pode chegar ao ponto  $x = 13$  m, qual é sua velocidade nesse ponto? Se não pode, qual é o ponto de retorno?



**Figura 11-32** Problema 8.

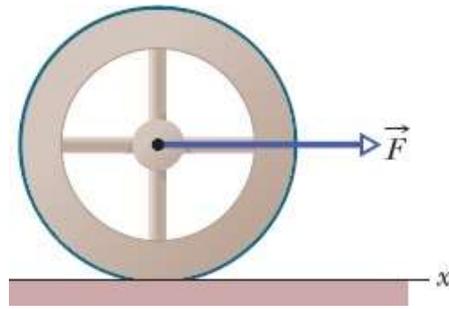
••9 Na Fig. 11-33, uma bola maciça rola suavemente a partir do repouso (começando na altura  $H = 6,0$  m) até deixar a parte horizontal no fim da pista, a uma altura  $h = 2,0$  m. A que distância horizontal do ponto A a bola toca o chão?



**Figura 11-33** Problema 9.

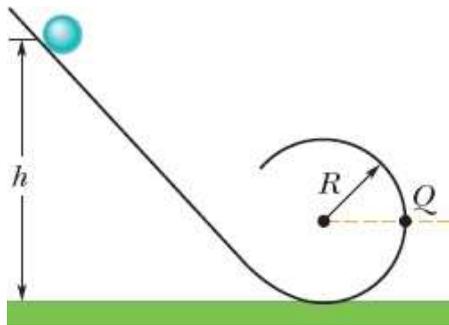
••10 Uma esfera oca, com  $0,15$  m de raio e momento de inércia  $I = 0,040 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  em relação a uma reta que passa pelo centro de massa, rola sem deslizar, subindo uma superfície com uma inclinação de  $30^\circ$  em relação à horizontal. Em determinada posição inicial, a energia cinética total da esfera é  $20$  J. (a) Quanto desta energia cinética inicial se deve à rotação? (b) Qual é a velocidade do centro de massa da esfera na posição inicial? Após a esfera ter se deslocado  $1,0$  m ao longo da superfície inclinada a partir da posição inicial, qual é (c) a energia cinética total e (d) qual é a velocidade do centro de massa?

••11 Na Fig. 11-34, uma força horizontal constante  $\vec{F}$  de módulo  $10$  N é aplicada a uma roda de massa  $10$  kg e raio  $0,30$  m. A roda rola suavemente na superfície horizontal, e o módulo da aceleração do centro de massa é  $0,60 \text{ m/s}^2$ . (a) Na notação dos vetores unitários, qual é a força de atrito que age sobre a roda? (b) Qual é o momento de inércia da roda em relação ao eixo de rotação, que passa pelo centro de massa?



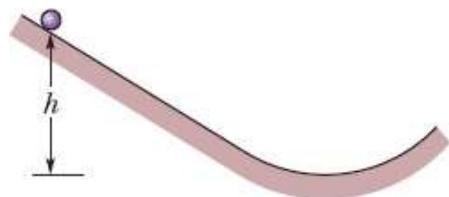
**Figura 11-34** Problema 11.

••12 Na Fig. 11-35, uma bola maciça, de latão, de massa  $0,280 \text{ g}$ , rola suavemente ao longo do trilho quando é liberada a partir do repouso no trecho retilíneo. A parte circular do trilho tem um raio  $R = 14,0 \text{ cm}$  e a bola tem um raio  $r \ll R$ . (a) Quanto vale  $h$  se a bola está na iminência de perder contato com o trilho quando chega ao ponto mais alto da parte curva do trilho? Se a bola é liberada a uma altura  $h = 6,00R$ , qual é (b) o módulo e (c) qual é a orientação da componente horizontal da força que age sobre a bola no ponto  $Q$ ?



**Figura 11-35** Problema 12.

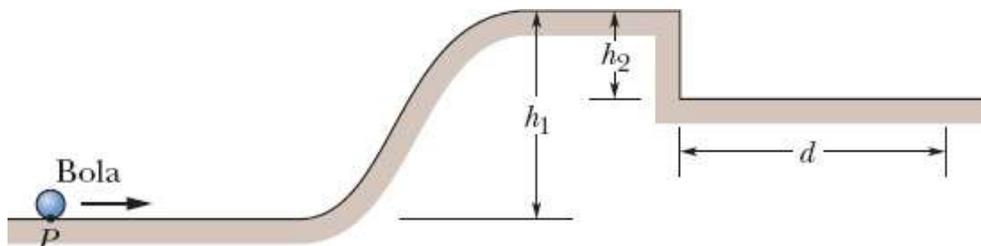
•••13 *Bola não homogênea.* Na Fig. 11-36, uma bola, de massa  $M$  e raio  $R$ , rola suavemente, a partir do repouso, descendo uma rampa e passando por uma pista circular com  $0,48 \text{ m}$  de raio. A altura inicial da bola é  $h = 0,36 \text{ m}$ . Na parte mais baixa da curva, o módulo da força normal que a pista exerce sobre a bola é  $2,00Mg$ . A bola é formada por uma casca esférica externa homogênea (com uma certa massa específica) e uma esfera central, também homogênea (com uma massa específica diferente). O momento de inércia da bola é dado pela expressão geral  $I = \beta MR^2$ , mas  $\beta$  não é igual a  $0,4$ , como no caso de uma bola homogênea. Determine o valor de  $\beta$ .



**Figura 11-36** Problema 13.

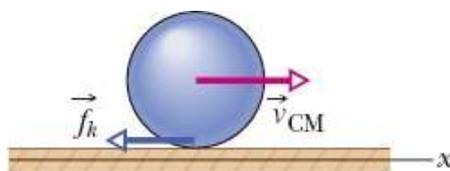
•••14 Na Fig. 11-37, uma bola pequena, maciça, homogênea, é lançada do ponto  $P$ , rola suavemente em

uma superfície horizontal, sobe uma rampa e chega a um platô. Em seguida, deixa o platô horizontalmente para pousar em outra superfície mais abaixo, a uma distância horizontal  $d$  da extremidade do platô. As alturas verticais são  $h_1 = 5,00$  cm e  $h_2 = 1,60$  cm. Com que velocidade a bola deve ser lançada no ponto  $P$  para pousar em  $d = 6,00$  cm?



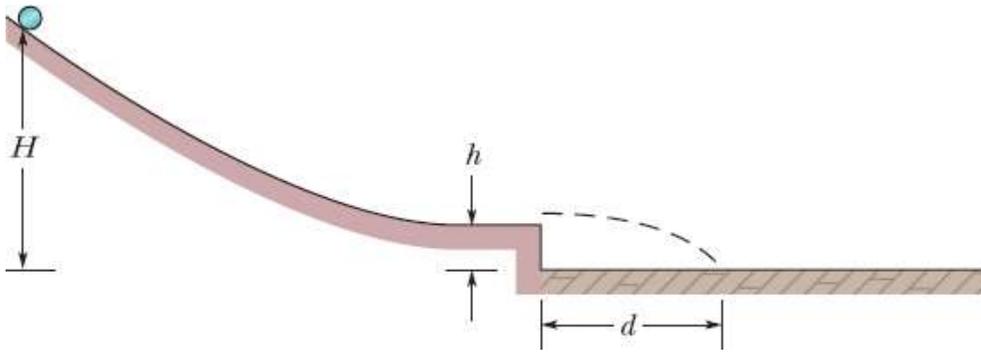
**Figura 11-37** Problema 14.

...15 Um jogador de boliche arremessa uma bola de raio  $R = 11$  cm ao longo de uma pista. A bola (Fig. 11-38) desliza na pista com uma velocidade inicial  $v_{CM} = 8,5$  m/s e velocidade angular inicial  $\omega_0 = 0$ . O coeficiente de atrito cinético entre a bola e a pista é 0,21. A força de atrito cinético  $\vec{f}_k$  que age sobre a bola produz uma aceleração linear e uma aceleração angular. Quando a velocidade  $v_{CM}$  diminui o suficiente e a velocidade angular  $\omega$  aumenta o suficiente, a bola para de deslizar e passa a rolar suavemente. (a) Qual é o valor de  $v_{CM}$  em termos de  $\omega$  nesse instante? Durante o deslizamento, qual é (b) a aceleração linear e (c) qual é a aceleração angular da bola? (d) Por quanto tempo a bola desliza? (e) Que distância a bola desliza? (f) Qual é a velocidade linear da bola quando começa a rolar suavemente?



**Figura 11-38** Problema 15.

...16 Objeto cilíndrico não homogêneo. Na Fig. 11-39, um objeto cilíndrico de massa  $M$  e raio  $R$  rola suavemente descendo uma rampa, a partir do repouso, e passa para um trecho horizontal da pista. Em seguida, o objeto sai da pista, pousando no solo a uma distância horizontal  $d = 0,506$  m do final da pista. A altura inicial do objeto é  $H = 0,90$  m; a extremidade da pista está a uma altura  $h = 0,10$  m. O objeto é composto por uma camada cilíndrica externa, homogênea (com uma certa massa específica), e um cilindro central, também homogêneo (com uma massa específica diferente). O momento de inércia do objeto é dado pela expressão geral  $I = \beta MR^2$ , mas  $\beta$  não é igual a 0,5, como no caso de um cilindro homogêneo. Determine o valor de  $\beta$ .



**Figura 11-39** Problema 16.

**Módulo 11-3 O Ioiô**

•17  Um ioiô possui um momento de inércia de  $950 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$  e uma massa de  $120 \text{ g}$ . O raio do eixo é  $3,2 \text{ mm}$  e a corda tem  $120 \text{ cm}$  de comprimento. O ioiô rola para baixo, a partir do repouso, até a extremidade da corda. (a) Qual é o módulo da aceleração linear do ioiô? (b) Quanto tempo o ioiô leva para chegar à extremidade da corda? Ao chegar à extremidade da corda, (c) qual é a velocidade linear, (d) qual é a energia cinética de translação, (e) qual é a energia cinética de rotação e (f) qual é a velocidade angular?

•18  Em 1980, na Baía de San Francisco, um grande ioiô foi solto de um guindaste. O ioiô de  $116 \text{ kg}$  era formado por dois discos homogêneos com  $32 \text{ cm}$  de raio, ligados por um eixo com  $3,2 \text{ cm}$  de raio. Qual foi o módulo da aceleração do ioiô (a) durante a descida e (b) durante a subida? (c) Qual foi a tração da corda? (d) A tração estava próxima do limite de resistência da corda,  $52 \text{ kN}$ ? Suponha que você construa uma versão ampliada do ioiô (com a mesma forma e usando os mesmos materiais, porém maior). (e) O módulo da aceleração do seu ioiô durante a queda será maior, menor ou o igual ao do ioiô de San Francisco? (f) E a tração da corda?

**Módulo 11-4 Revisão do Torque**

•19 Na notação dos vetores unitários, qual é o torque resultante em relação à origem  $a$  que está submetida uma pulga localizada nas coordenadas  $(0; -4,0 \text{ m}; 5,0 \text{ m})$  quando as forças  $\vec{F}_1 = (3,0 \text{ N})\hat{k}$  e  $\vec{F}_2 = (-2,0 \text{ N})\hat{j}$  agem sobre a pulga?

•20 Uma ameixa está localizada nas coordenadas  $(-2,0 \text{ m}; 0; 4,0 \text{ m})$ . Na notação dos vetores unitários, qual é o torque em relação à origem  $a$  que está submetida a ameixa se esse torque se deve a uma força  $\vec{F}$  cuja única componente é (a)  $F_x = 6,0 \text{ N}$ , (b)  $F_x = -6,0 \text{ N}$ , (c)  $F_z = 6,0 \text{ N}$ , (d)  $F_z = -6,0 \text{ N}$ ?

•21 Na notação dos vetores unitários, qual é o torque em relação à origem  $a$  que está submetida uma partícula localizada nas coordenadas  $(0; -4,0 \text{ m}; 3,0 \text{ m})$  se esse torque se deve (a) a uma força  $\vec{F}_1$  de componentes  $F_{1x} = 2,0 \text{ N}$ ,  $F_{1y} = F_{1z} = 0$ , e (b) a uma força  $\vec{F}_2$  de componentes  $F_{2x} = 0$ ,  $F_{2y} = 2,0 \text{ N}$ ,  $F_{2z} = 4,0 \text{ N}$ ?

••22 Uma partícula se move em um sistema de coordenadas  $xyz$  sob a ação de uma força. Quando o vetor posição da partícula é  $\vec{r} = (2,00 \text{ m})\hat{i} - (3,00 \text{ m})\hat{j} + (2,00 \text{ m})\hat{k}$  a força é  $\vec{F} = F_x\hat{i} + (7,00 \text{ N})\hat{j} - (6,00 \text{ N})\hat{k}$  e o torque correspondente em relação à origem é  $\vec{\tau} = (4,00 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{i} + (2,00 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{j} - (1,00 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{k}$ .

Determine  $F_x$ .

••23 A força  $\vec{F} = (2,0 \text{ N})\hat{i} - (3,0 \text{ N})\hat{k}$  age sobre uma pedra cujo vetor posição é  $\vec{r} = (0,50 \text{ m})\hat{j} - (2,0 \text{ m})\hat{k}$  em relação à origem. Em termos dos vetores unitários, qual é o torque resultante a que a pedra está submetida (a) em relação à origem e (b) em relação ao ponto  $(2,0 \text{ m}; 0; -3,0 \text{ m})$ ?

••24 Na notação dos vetores unitários, qual é o torque em relação à origem a que está submetido um vidro de pimenta localizado nas coordenadas  $(3,0 \text{ m}; -2,0 \text{ m}; 4,0 \text{ m})$  (a) devido à força  $\vec{F}_1 = (3,0 \text{ N})\hat{i} - (4,0 \text{ N})\hat{j} + (5,0 \text{ N})\hat{k}$ , (b) devido à força  $\vec{F}_2 = (3,0 \text{ N})\hat{i} - (4,0 \text{ N})\hat{j} - (5,0 \text{ N})\hat{k}$  e (c) devido à soma vetorial de  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ ? (d) Repita o item (c) para o torque em relação ao ponto de coordenadas  $(3,0 \text{ m}; 2,0 \text{ m}; 4,0 \text{ m})$ .

••25 A força  $\vec{F} = (-8,0 \text{ N})\hat{i} + (6,0 \text{ N})\hat{j}$  age sobre uma partícula cujo vetor posição é  $\vec{r} = (3,0 \text{ m})\hat{i} + (4,0 \text{ m})\hat{j}$ . (a) Qual é o torque em relação à origem a que está submetida a partícula, em termos dos vetores unitários? (b) Qual é o ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ ?

### Módulo 11-5 Momento Angular

•26 No instante da Fig. 11-40, uma partícula  $P$  de  $2,0 \text{ kg}$  tem um vetor posição  $\vec{r}$  de módulo  $3,0 \text{ m}$  e ângulo  $\theta_1 = 45^\circ$  e uma velocidade  $\vec{v}$  de módulo  $4,0 \text{ m/s}$  e ângulo  $\theta_2 = 30^\circ$ . A força  $\vec{F}$ , de módulo  $2,0 \text{ N}$  e ângulo  $\theta_3 = 30^\circ$ , age sobre  $P$ . Os três vetores estão no plano  $xy$ . Determine, em relação à origem, (a) o módulo e (b) a orientação do momento angular de  $P$  e (c) o módulo e (d) a orientação do torque que age sobre  $P$ .

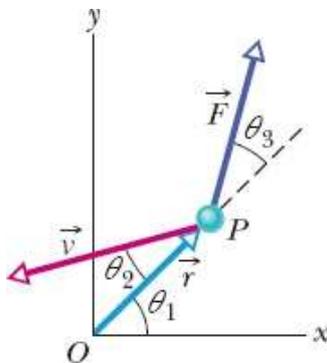


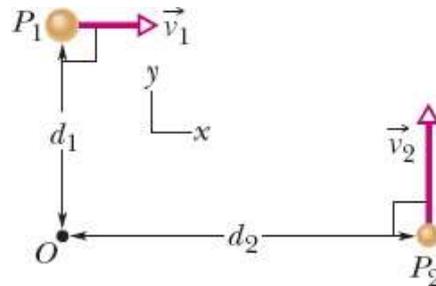
Figura 11-40 Problema 26.

•27 Em certo instante, a força  $\vec{F} = 4,0\hat{j} \text{ N}$  age sobre um objeto de  $0,25 \text{ kg}$  cujo vetor posição é  $\vec{r} = (2,0\hat{i} - 2,0\hat{k})$  e cujo vetor velocidade é  $\vec{v} = (-5,0\hat{i} + 5,0\hat{k}) \text{ m/s}$ . Em relação à origem e na notação dos vetores unitários, determine (a) o momento angular do objeto e (b) o torque que age sobre o objeto.

•28 Um objeto de  $2,0 \text{ kg}$ , que se comporta como uma partícula, se move em um plano com componentes de velocidade  $v_x = 30 \text{ m/s}$  e  $v_y = 60 \text{ m/s}$  ao passar por um ponto de coordenadas  $(3,0; -4,0) \text{ m}$ . Nesse instante, na notação dos vetores unitários, qual é o momento angular do objeto em relação (a) à origem e (b) ao ponto  $(-2,0; -2,0) \text{ m}$ ?

•29 No instante da Fig. 11-41, duas partículas se movem em um plano  $xy$ . A partícula  $P_1$  tem massa de  $6,5$

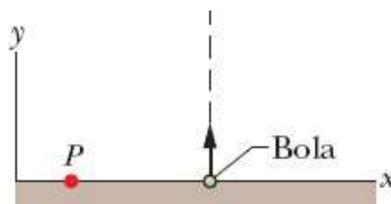
kg e velocidade  $v_1 = 2,2 \text{ m/s}$  e está a uma distância  $d_1 = 1,5 \text{ m}$  do ponto  $O$ . A partícula  $P_2$  tem massa de  $3,1 \text{ kg}$  e velocidade  $v_2 = 3,6 \text{ m/s}$  e está a uma distância  $d_2 = 2,8 \text{ m}$  do ponto  $O$ . (a) Qual é o módulo e (b) qual é a orientação do momento angular resultante das duas partículas em relação ao ponto  $O$ ?



**Figura 11-41** Problema 29.

••30 No instante em que o deslocamento de um objeto de  $2,00 \text{ kg}$  em relação à origem é  $\vec{d} = (2,00 \text{ m})\hat{i} + (4,00 \text{ m})\hat{j} - (3,00 \text{ m})\hat{k}$  a velocidade do objeto é  $\vec{v} = -(6,00 \text{ m/s})\hat{i} + (3,00 \text{ m/s})\hat{j} + (3,00 \text{ m/s})\hat{k}$  e o objeto está sujeito a uma força  $\vec{F} = (6,00 \text{ N})\hat{i} - (8,00 \text{ N})\hat{j} + (4,00 \text{ N})\hat{k}$ . Determine (a) a aceleração do objeto, (b) o momento angular do objeto em relação à origem, (c) o torque em relação à origem a que está submetido o objeto e (d) o ângulo entre a velocidade do objeto e a força que age sobre ele.

••31 Na Fig. 11-42, uma bola de  $0,400 \text{ kg}$  é lançada verticalmente para cima com velocidade inicial de  $40,0 \text{ m/s}$ . Qual é o momento angular da bola em relação a  $P$ , um ponto a uma distância horizontal de  $2,00 \text{ m}$  do ponto de lançamento, quando a bola está (a) na altura máxima e (b) na metade do caminho de volta ao chão? Qual é o torque em relação a  $P$  a que a bola é submetida devido à força gravitacional quando está (a) na altura máxima e (b) na metade do caminho de volta ao chão?



**Figura 11-42** Problema 31.

#### Módulo 11-6 A Segunda Lei de Newton para Rotações

•32 Uma partícula sofre a ação de dois torques em relação à origem:  $\vec{\tau}_1$  tem um módulo de  $2,0 \text{ N} \cdot \text{m}$  e aponta no sentido positivo do eixo  $x$ ;  $\vec{\tau}_2$  tem um módulo de  $4,0 \text{ N} \cdot \text{m}$  e aponta no sentido negativo do eixo  $y$ . Determine  $d\vec{\ell}/dt$ , em que  $\vec{\ell}$  é o momento angular da partícula em relação à origem, em termos dos vetores unitários.

•33 No instante  $t = 0$ , uma partícula de  $3,0 \text{ kg}$  com uma velocidade  $\vec{v} = (5,0 \text{ m/s})\hat{i} - (6,0 \text{ m/s})\hat{j}$  está passando pelo ponto  $x = 3,0 \text{ m}$ ,  $y = 8,0 \text{ m}$ . A partícula é puxada por uma força de  $7,0 \text{ N}$  no sentido negativo do eixo  $x$ . Determine, em relação à origem, (a) o momento angular da partícula, (b) o torque que age sobre a partícula e (c) a taxa com a qual o momento angular está variando.

•34 Uma partícula se move em um plano  $xy$ , em torno da origem, no sentido horário, do ponto de vista do lado positivo do eixo  $z$ . Na notação dos vetores unitários, qual é o torque que age sobre a partícula se o módulo do momento angular da partícula em relação à origem é (a)  $4,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ , (b)  $4,0t^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ , (c)  $4,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$  e (d)  $4,0/t^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ?

•35 No instante  $t$ , o vetor  $\vec{r} = 4,0t^2\hat{i} - (2,0t + 6,0t^2)\hat{j}$  fornece a posição de uma partícula de  $3,0 \text{ kg}$  em relação à origem de um sistema de coordenadas  $xy$  ( $\vec{r}$  está em metros e  $t$  em segundos). (a) Escreva uma expressão para o torque em relação à origem que age sobre a partícula. (b) O módulo do momento angular da partícula em relação à origem está aumentando, diminuindo ou permanece o mesmo?

#### Módulo 11-7 Momento Angular de um Corpo Rígido

•36 A Fig. 11-43 mostra três discos homogêneos acoplados por duas correias. Uma correia passa pelas bordas dos discos  $A$  e  $C$ ; a outra passa por um cubo do disco  $A$  e pela borda do disco  $B$ . As correias se movem suavemente, sem deslizar nas bordas e no cubo. O disco  $A$  tem raio  $R$  e seu cubo tem raio  $0,5000R$ ; o disco  $B$  tem raio  $0,2500R$ ; o disco  $C$  tem raio  $2,000R$ . Os discos  $B$  e  $C$  têm a mesma massa específica (massa por unidade de volume) e a mesma espessura. Qual é a razão entre o módulo do momento angular do disco  $C$  e o módulo do momento angular do disco  $B$ ?

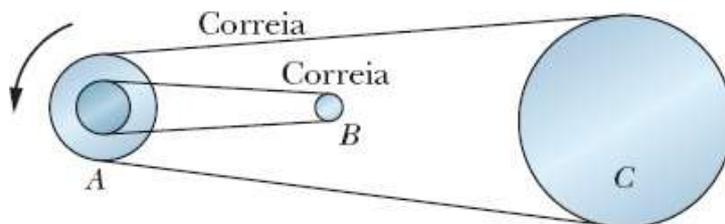


Figura 11-43 Problema 36.

•37 Na Fig. 11-44, três partículas de massa  $m = 23 \text{ g}$  estão presas a três barras de comprimento  $d = 12 \text{ cm}$  e massa desprezível. O conjunto gira em torno do ponto  $O$  com velocidade angular  $\omega = 0,85 \text{ rad/s}$ . Determine, em relação ao ponto  $O$ , (a) o momento de inércia do conjunto, (b) o módulo do momento angular da partícula do meio e (c) o módulo do momento angular do conjunto.

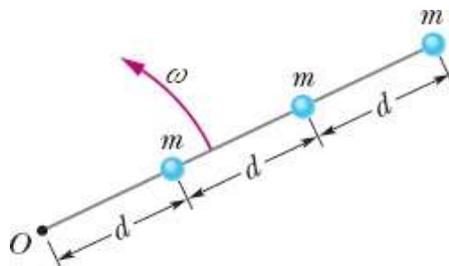


Figura 11-44 Problema 37.

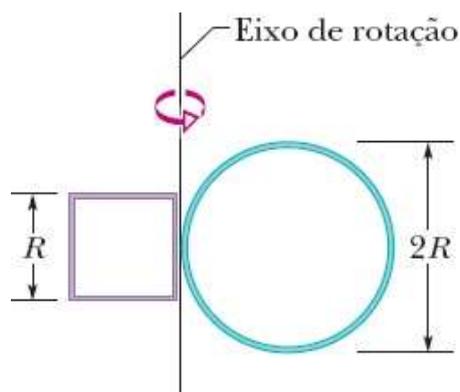
•38 Um disco de polimento, com momento de inércia  $1,2 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , está preso a uma broca elétrica cujo motor produz um torque de módulo  $16 \text{ N} \cdot \text{m}$  em relação ao eixo central do disco. Com o torque aplicado durante  $33 \text{ ms}$ , qual é o módulo (a) do momento angular e (b) da velocidade angular do disco?

em relação a esse eixo?

•39 O momento angular de um volante com um momento de inércia de  $0,140 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  em relação ao eixo central diminui de  $3,00$  para  $0,800 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$  em  $1,50 \text{ s}$ . (a) Qual é o módulo do torque médio em relação ao eixo central que age sobre o volante durante esse período? (b) Supondo uma aceleração angular constante, de que ângulo o volante gira? (c) Qual é o trabalho realizado sobre o volante? (d) Qual é a potência média do volante?

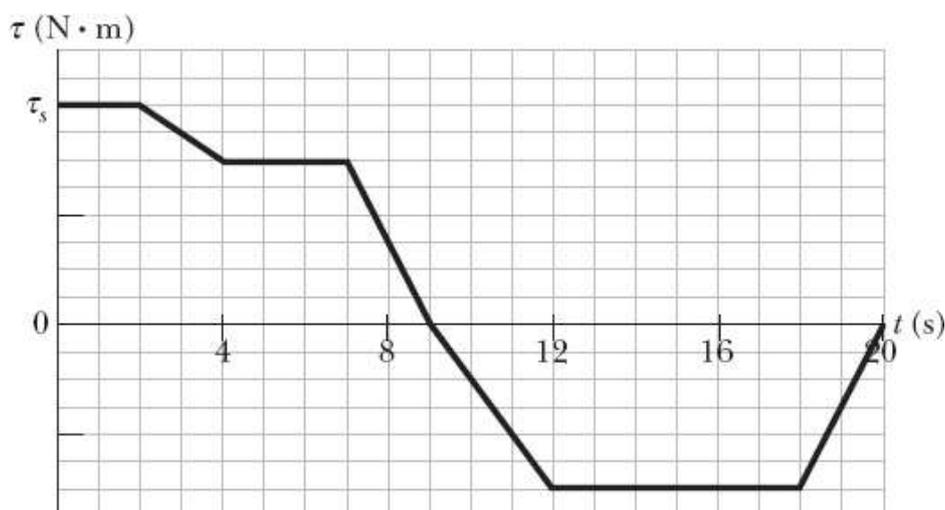
•40 Um disco com um momento de inércia de  $7,00 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  gira como um carrossel sob o efeito de um torque variável dado por  $t = (5,00 + 2,00t) \text{ N} \cdot \text{m}$ . No instante  $t = 1,00 \text{ s}$ , o momento angular do disco é  $5,00 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ . Qual é o momento angular do disco no instante  $t = 3,00 \text{ s}$ ?

•41 A Fig. 11-45 mostra uma estrutura rígida formada por um aro, de raio  $R$  e massa  $m$ , e um quadrado feito de quatro barras finas, de comprimento  $R$  e massa  $m$ . A estrutura rígida gira com velocidade constante em torno de um eixo vertical, com um período de rotação de  $2,5 \text{ s}$ . Supondo que  $R = 0,50 \text{ m}$  e  $m = 2,0 \text{ kg}$ , calcule (a) o momento de inércia da estrutura em relação ao eixo de rotação e (b) o momento angular da estrutura em relação ao eixo.



**Figura 11-45** Problema 41.

•42 A Fig. 11-46 mostra a variação com o tempo do torque  $t$  que age sobre um disco inicialmente em repouso que pode girar como um carrossel em torno do centro. A escala do eixo  $t$  é definida por  $t_s = 4,0 \text{ N} \cdot \text{m}$ . Qual é o momento angular do disco em relação ao eixo de rotação no instante (a)  $t = 7,0 \text{ s}$  e (b) no instante  $t = 20 \text{ s}$ ?



**Figura 11-46** Problema 42.

**Módulo 11-8 Conservação do Momento Angular**

**•43** Na Fig. 11-47, duas patinadoras com 50 kg de massa, que se movem com uma velocidade escalar de 1,4 m/s, se aproximam em trajetórias paralelas separadas por 3,0 m. Uma das patinadoras carrega uma vara comprida, de massa desprezível, segurando-a em uma extremidade, e a outra se agarra à outra extremidade ao passar pela vara, o que faz com que as patinadoras passem a descrever uma circunferência em torno do centro da vara. Suponha que o atrito entre as patinadoras e o gelo seja desprezível. Determine (a) o raio da circunferência, (b) a velocidade angular das patinadoras e (c) a energia cinética do sistema das duas patinadoras. Em seguida, as patinadoras puxam a vara até ficarem separadas por uma distância de 1,0 m. Nesse instante, (d) qual é a velocidade angular das patinadoras e (e) qual é a energia cinética do sistema? (f) De onde vem a energia cinética adicional?



**Figura 11-47** Problema 43.

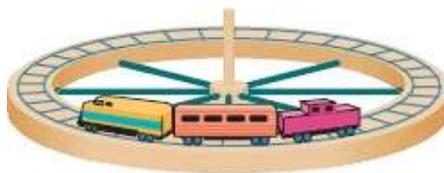
**•44** Uma barata, de massa 0,17 kg, corre no sentido anti-horário na borda de um disco circular de raio 15 cm e momento de inércia  $5,0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , montado em um eixo vertical com atrito desprezível. A velocidade da barata (em relação ao chão) é 2,0 m/s, e o disco gira no sentido horário com uma velocidade angular  $\omega_0 = 2,8 \text{ rad/s}$ . A barata encontra uma migalha de pão na borda e, obviamente, para. (a) Qual é a velocidade angular do disco depois que a barata para? A energia mecânica é conservada quando a barata para?

**•45** Um homem está de pé em uma plataforma que gira (sem atrito) com uma velocidade angular de 1,2 rev/s; os braços do homem estão abertos e ele segura um tijolo em cada mão. O momento de inércia do

sistema formado pelo homem, os tijolos e a plataforma em relação ao eixo vertical central da plataforma é  $6,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Se, ao mover os braços, o homem reduz o momento de inércia do sistema para  $2,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , determine (a) a nova velocidade angular da plataforma e (b) a razão entre a nova energia cinética do sistema e a energia cinética inicial. (c) De onde vem a energia cinética adicional?

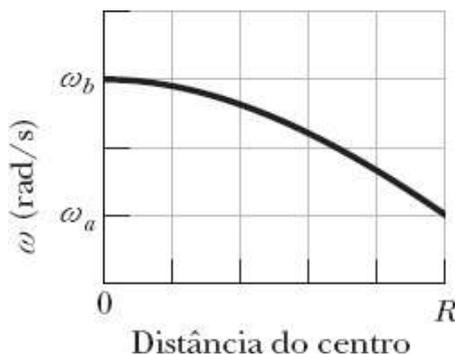
•46 O momento de inércia de uma estrela que sofre uma contração enquanto gira em torno de si mesma cai para  $1/3$  do valor inicial. Qual é a razão entre a nova energia cinética de rotação e a energia antiga?

•47 Uma pista é montada em uma grande roda que pode girar livremente, com atrito desprezível, em torno de um eixo vertical (Fig. 11-48). Um trem de brinquedo, de massa  $m$ , é colocado na pista e, com o sistema inicialmente em repouso, a alimentação elétrica do brinquedo é ligada. O trem adquire uma velocidade de  $0,15 \text{ m/s}$  em relação à pista. Qual é a velocidade angular da roda se esta tem massa de  $1,1m$  e raio de  $0,43 \text{ m}$ ? (Trate a roda como um aro e despreze a massa dos raios e do cubo da roda.)



**Figura 11-48** Problema 47.

•48 Uma barata está no centro de um disco circular que gira livremente como um carrossel, sem torques externos. A barata caminha em direção à borda do disco, cujo raio é  $R$ . A Fig. 11-49 mostra a velocidade angular  $\omega$  do sistema barata-disco durante a caminhada. A escala do eixo  $\omega$  é definida por  $\omega_a = 5,0 \text{ rad/s}$  e  $\omega_b = 6,0 \text{ rad/s}$ . Qual é a razão entre o momento de inércia do inseto e o momento de inércia do disco, ambos calculados em relação ao eixo de rotação, quando a barata chega à borda do disco?



**Figura 11-49** Problema 48.

•49 Dois discos estão montados (como um carrossel) no mesmo eixo, com rolamentos de baixo atrito, e podem ser acoplados e girar como se fossem um só disco. O primeiro disco, com um momento de inércia de  $3,30 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  em relação ao eixo central, é posto para girar no sentido anti-horário a  $450 \text{ rev/min}$ . O segundo disco, com um momento de inércia de  $6,60 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  em relação ao eixo central, é posto para girar no sentido anti-horário a  $900 \text{ rev/min}$ . Em seguida, os discos são acoplados. (a) Qual é a velocidade angular dos discos após o acoplamento? Se, em vez disso, o segundo disco é posto para girar a  $900$

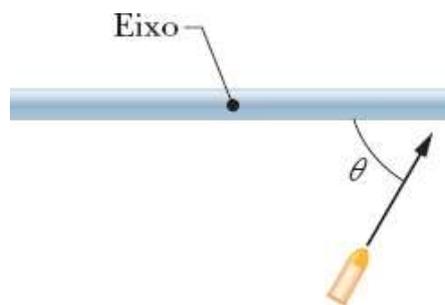
rev/min no sentido horário, qual é (b) a velocidade angular e (c) qual o sentido de rotação dos discos após o acoplamento?

•50 O rotor de um motor elétrico tem um momento de inércia  $I_m = 2,0 \times 10^{23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  em relação ao eixo central. O motor é usado para mudar a orientação da sonda espacial na qual está montado. O eixo do motor coincide com o eixo central da sonda; a sonda possui um momento de inércia  $I_p = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  em relação a esse eixo. Calcule o número de revoluções do rotor necessárias para fazer a sonda girar  $30^\circ$  em torno do eixo central.

•51 Uma roda está girando livremente com uma velocidade angular de 800 rev/min em torno de um eixo cujo momento de inércia é desprezível. Uma segunda roda, inicialmente em repouso e com um momento de inércia duas vezes maior que a primeira, é acoplada à mesma haste. (a) Qual é a velocidade angular da combinação resultante do eixo e duas rodas? (b) Que fração da energia cinética de rotação inicial é perdida?

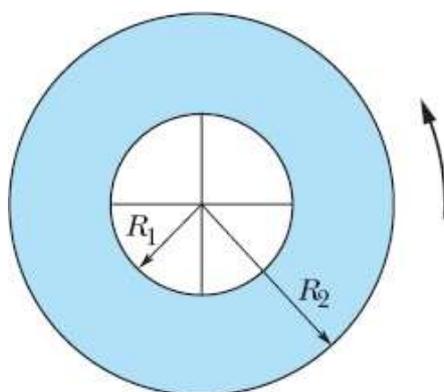
•52 Uma barata de massa  $m$  está na borda de um disco homogêneo de massa  $4,00m$  que pode girar livremente em torno do centro como um carrossel. Inicialmente, a barata e o disco giram juntos com uma velocidade angular de  $0,260 \text{ rad/s}$ . A barata caminha até metade da distância ao centro do disco. (a) Qual é, nesse instante, a velocidade angular do sistema barata-disco? (b) Qual é a razão  $K/K_0$  entre a nova energia cinética do sistema e a energia cinética antiga? (c) Por que a energia cinética varia?

•53 Uma barra fina, homogênea, com  $0,500 \text{ m}$  de comprimento e  $4,00 \text{ kg}$  de massa, pode girar em um plano horizontal em torno de um eixo vertical que passa pelo centro da barra. A barra está em repouso quando uma bala de  $3,0 \text{ g}$  é disparada, no plano de rotação, em direção a uma das extremidades. Vista de cima, a trajetória da bala faz um ângulo  $\theta = 60,0^\circ$  com a barra (Fig. 11-50). Se a bala se aloja na barra e a velocidade angular da barra é  $10 \text{ rad/s}$  imediatamente após a colisão, qual era a velocidade da bala imediatamente antes do impacto?



**Figura 11-50** Problema 53.

•54 A Fig. 11-51 mostra a vista, de cima, de um anel que pode girar em torno do centro como um carrossel. O raio externo  $R_2$  é  $0,800 \text{ m}$ , o raio interno  $R_1$  é  $R_2/2,00$ , a massa  $M$  é  $8,00 \text{ kg}$  e a massa da cruz no centro é desprezível. Inicialmente, o disco gira com uma velocidade angular de  $8,00 \text{ rad/s}$ , com um gato, de massa  $m = M/4,00$ , na borda externa, a uma distância  $R_2$  do centro. De quanto o gato vai aumentar a energia cinética do sistema gato-disco se rastejar até a borda interna, de raio  $R_1$ ?



**Figura 11-51** Problema 54.

••55 Um disco de vinil, horizontal, de massa  $0,10 \text{ kg}$  e raio  $0,10 \text{ m}$ , gira livremente em torno de um eixo vertical que passa pelo centro com uma velocidade angular de  $4,7 \text{ rad/s}$ . O momento de inércia do disco em relação ao eixo de rotação é  $5,0 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Um pedaço de massa de modelar, de massa  $0,020 \text{ kg}$ , cai verticalmente e gruda na borda do disco. Qual é a velocidade angular do disco imediatamente após a massa cair?

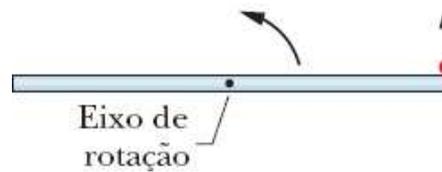
••56  No salto em distância, o atleta deixa o solo com um momento angular que tende a girar o corpo para a frente. Essa rotação, caso não seja controlada, impede que o atleta chegue ao solo com a postura correta. O atleta evita que ela ocorra girando os braços estendidos para “absorver” o momento angular (Fig. 11-18). Em  $0,700 \text{ s}$ , um dos braços descreve  $0,500 \text{ rev}$  e o outro descreve  $1,000 \text{ rev}$ . Trate cada braço como uma barra fina, de massa  $4,0 \text{ kg}$  e comprimento  $0,60 \text{ m}$ , girando em torno de uma das extremidades. Qual é o módulo do momento angular total dos braços do atleta em relação a um eixo de rotação comum, passando pelos ombros, no referencial do atleta?

••57 Um disco homogêneo, de massa  $10m$  e raio  $3,0r$ , pode girar livremente como um carrossel em torno do centro fixo. Um disco homogêneo, menor, de massa  $m$  e raio  $r$ , está sobre o disco maior, concêntrico com ele. Inicialmente, os dois discos giram juntos com uma velocidade angular de  $20 \text{ rad/s}$ . Em seguida, uma pequena perturbação faz com que o disco menor deslize para fora em relação ao disco maior até que sua borda fique presa na borda do disco maior. Depois disso, os dois discos passam novamente a girar juntos (sem que haja novos deslizamentos). (a) Qual é a velocidade angular final do sistema em relação ao centro do disco maior? (b) Qual é a razão  $K/K_0$  entre a nova energia cinética do sistema e a energia cinética inicial?

••58 Uma plataforma horizontal na forma de um disco circular gira sem atrito em torno de um eixo vertical que passa pelo centro do disco. A plataforma tem uma massa de  $150 \text{ kg}$ , um raio de  $2,0 \text{ m}$  e um momento de inércia de  $300 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  em relação ao eixo de rotação. Uma estudante de  $60 \text{ kg}$  caminha lentamente, a partir da borda da plataforma, em direção ao centro. Se a velocidade angular do sistema é  $1,5 \text{ rad/s}$  quando a estudante está na borda, qual é a velocidade angular quando ela está a  $0,50 \text{ m}$  de distância do centro?

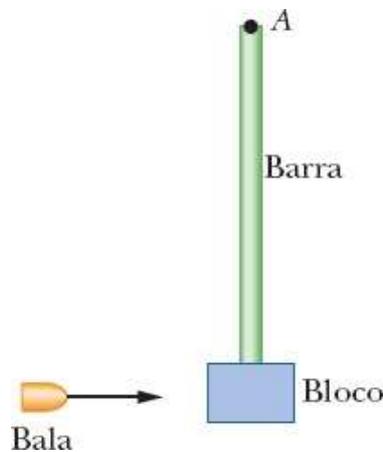
••59 A Fig. 11-52 é a vista, de cima, de uma barra fina, homogênea, de comprimento  $0,800 \text{ m}$  e massa  $M$ ,

girando horizontalmente a  $20,0 \text{ rad/s}$ , no sentido anti-horário, em torno de um eixo que passa pelo centro. Uma partícula, de massa  $M/3,00$ , inicialmente presa a uma extremidade da barra, é liberada e assume uma trajetória perpendicular à posição da barra no instante em que a partícula foi liberada. Se a velocidade  $v_p$  da partícula é  $6,00 \text{ m/s}$  maior que a velocidade da barra imediatamente após a liberação, qual é o valor de  $v_p$ ?



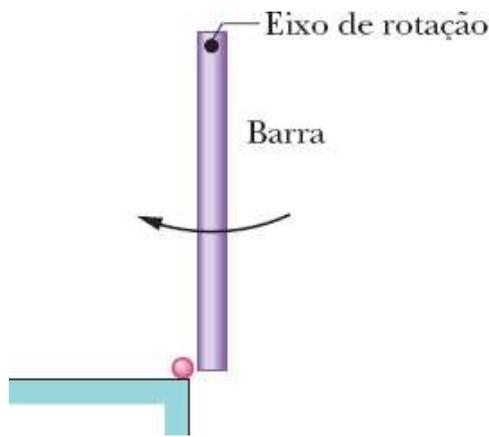
**Figura 11-52** Problema 59.

••60 Na Fig. 11-53, uma bala de  $1,0 \text{ g}$  é disparada contra um bloco de  $0,50 \text{ kg}$  preso à extremidade de uma barra não homogênea, de  $0,50 \text{ kg}$  com  $0,60 \text{ m}$  de comprimento. O sistema bloco-barra-bala passa a girar no plano do papel, em torno de um eixo fixo que passa pelo ponto  $A$ . O momento de inércia da barra em relação a esse eixo é  $0,060 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Trate o bloco como uma partícula. (a) Qual é o momento de inércia do sistema bloco-haste-bala em relação ao eixo que passa pelo ponto  $A$ ? (b) Se a velocidade angular do sistema em relação ao eixo que passa pelo ponto  $A$  imediatamente após o impacto é  $4,5 \text{ rad/s}$ , qual é a velocidade da bala imediatamente antes do impacto?



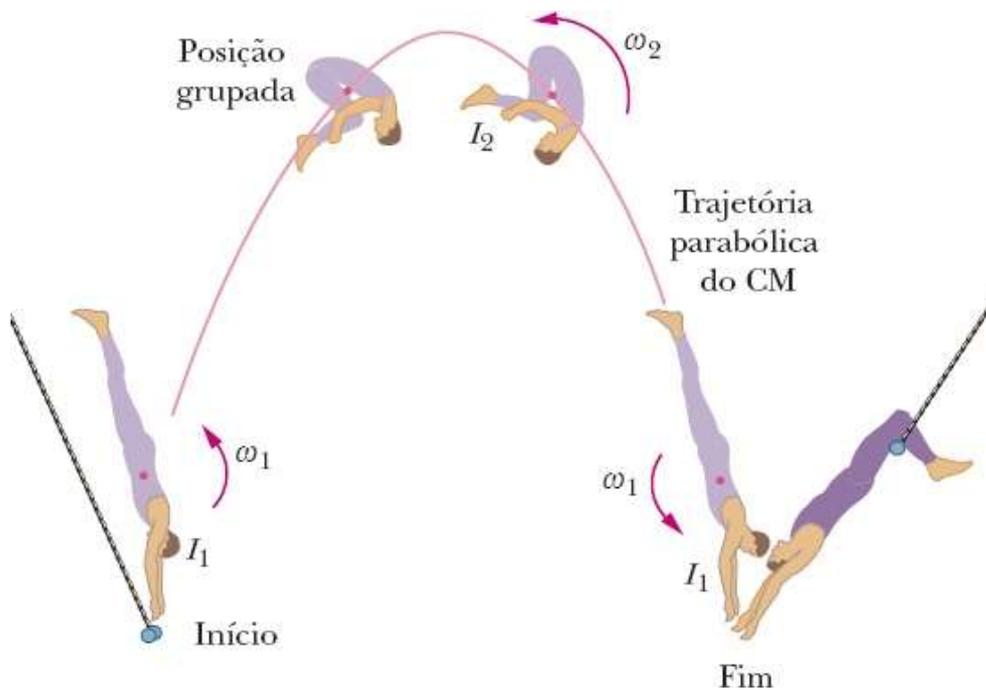
**Figura 11-53** Problema 60.

••61 A barra homogênea (de  $0,60 \text{ m}$  de comprimento e  $1,0 \text{ kg}$  de massa) mostrada na Fig. 11-54 gira no plano do papel em torno de um eixo que passa por uma das extremidades, com um momento de inércia de  $0,12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Quando passa pela posição mais baixa, a barra colide com uma bola, de massa de modelar, de  $0,20 \text{ kg}$ , que fica grudada na extremidade da barra. Se a velocidade angular da barra imediatamente antes da colisão é  $2,4 \text{ rad/s}$ , qual é a velocidade angular do sistema barra-massa de modelar imediatamente após a colisão?



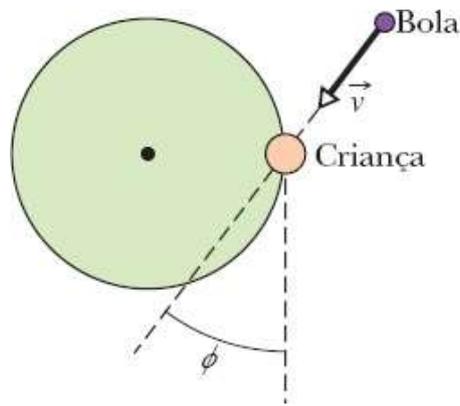
**Figura 11-54** Problema 61.

...62  Um trapezista pretende dar quatro cambalhotas em um intervalo de tempo  $\Delta t = 1,87$  s antes de chegar ao companheiro. No primeiro e no último quarto de volta, ele mantém o corpo esticado, como na Fig. 11-55, com um momento de inércia  $I_1 = 19,9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  em relação ao centro de massa (o ponto da figura). No resto do salto, mantém o corpo na posição grupada, com um momento de inércia  $I_2 = 3,93 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Qual deve ser a velocidade angular  $\omega_2$  do trapezista quando está na posição grupada?



**Figura 11-55** Problema 62.

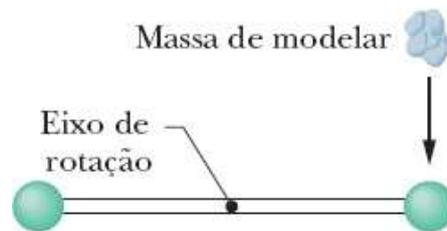
...63 Na Fig. 11-56, uma criança de 30 kg está de pé na borda de um carrossel estacionário, de raio 2,0 m. O momento de inércia do carrossel em relação ao eixo de rotação é  $150 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . A criança agarra uma bola, de massa 1,0 kg, lançada por um colega. Imediatamente antes de ser agarrada, a bola tem uma velocidade  $\vec{v}$  de módulo 12 m/s que faz um ângulo  $\phi = 37^\circ$  com uma reta tangente à borda do carrossel, como mostra a figura. Qual é a velocidade angular do carrossel imediatamente após a criança agarrar a bola?



**Figura 11-56** Problema 63.

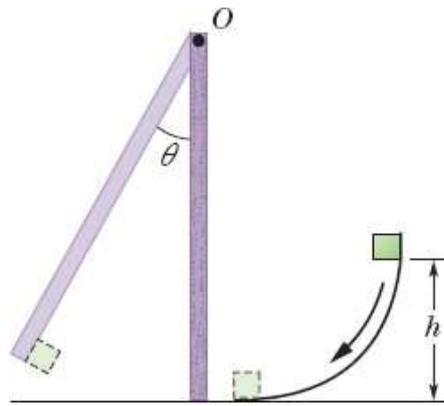
...64 Uma bailarina começa um *tour jeté* (Fig. 11-19a) com uma velocidade angular  $\omega_i$  e um momento de inércia formado por duas partes:  $I_{\text{perna}} = 1,44 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  da perna estendida, que faz um ângulo  $\theta = 90,0^\circ$  com o corpo, e  $I_{\text{tronco}} = 0,660 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  do resto do corpo (principalmente o tronco). Quando está quase atingindo a altura máxima, as duas pernas fazem um ângulo  $\theta = 30^\circ$  com o corpo, e a velocidade angular é  $\omega_f$  (Fig. 11-19b). Supondo que  $I_{\text{tronco}}$  permanece o mesmo, qual é o valor da razão  $\omega_f/\omega_i$ ?

...65 Duas bolas, de 2,00 kg, estão presas às extremidades de uma barra fina, de 50,0 cm de comprimento e massa desprezível. A barra está livre para girar sem atrito em um plano vertical em torno de um eixo horizontal que passa pelo centro. Com a barra inicialmente na horizontal (Fig. 11-57), um pedaço de massa de modelar de 50,0 g cai em uma das bolas, atingindo-a com uma velocidade de 3,00 m/s e aderindo a ela. (a) Qual é a velocidade angular do sistema imediatamente após o choque com a massa de modelar? (b) Qual é a razão entre a energia cinética do sistema após o choque e a energia cinética do pedaço de massa de modelar imediatamente antes do choque? (c) De que ângulo o sistema gira antes de parar momentaneamente?



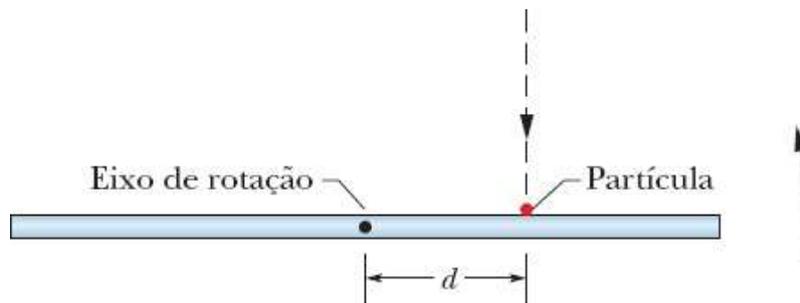
**Figura 11-57** Problema 65.

...66 Na Fig. 11-58, um pequeno bloco de 50 g desliza para baixo em uma superfície curva, sem atrito, a partir de uma altura  $h = 20 \text{ cm}$  e depois adere a uma barra homogênea, de massa 100 g e comprimento 40 cm. A barra gira de um ângulo  $\theta$  em torno do ponto  $O$  antes de parar momentaneamente. Determine  $\theta$ .



**Figura 11-58** Problema 66.

••67 A Fig. 11-59 é uma vista, de cima, de uma barra fina, homogênea, de comprimento  $0,600\text{ m}$  e massa  $M$ , girando horizontalmente a  $80,0\text{ rad/s}$  no sentido anti-horário em torno de um eixo que passa pelo centro. Uma partícula, de massa  $M/3,00$ , que se move horizontalmente com uma velocidade de  $40,0\text{ m/s}$ , choca-se com a barra e fica presa. A trajetória da partícula é perpendicular à barra no momento do choque, que ocorre a uma distância  $d$  do centro da barra. (a) Para qual valor de  $d$  a barra e a partícula permanecem em repouso após o choque? (b) Em que sentido a barra e a partícula giram após o choque, se  $d$  é maior que o valor calculado em (a)?



**Figura 11-59** Problema 67.

**Módulo 11-9** Precessão de um Giroscópio

••68 Um pião gira a  $30\text{ rev/s}$  em torno de um eixo que faz um ângulo de  $30^\circ$  com a vertical. A massa do pião é  $0,50\text{ kg}$ , o momento de inércia em relação ao eixo central é  $5,0 \times 10^{-4}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$  e o centro de massa está a  $4,0\text{ cm}$  do ponto de apoio. Se a rotação é no sentido horário quando o pião é visto de cima, qual é (a) a taxa de precessão e (b) qual é o sentido da precessão quando o pião é visto de cima?

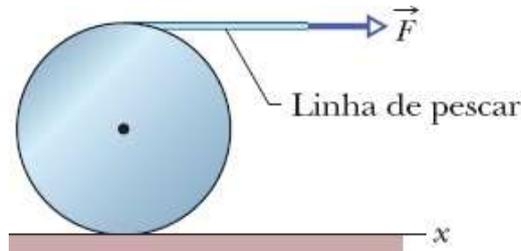
••69 Um giroscópio é formado por um disco homogêneo com  $50\text{ cm}$  de raio montado no centro de um eixo, de  $11\text{ cm}$  de comprimento e de massa desprezível. O eixo está na posição horizontal, apoiado em uma das extremidades. Se o disco está girando em torno do eixo a  $1000\text{ rev/min}$ , qual é a taxa de precessão?

**Problemas Adicionais**

70 Uma bola maciça, homogênea, rola suavemente em um piso horizontal e depois começa a subir uma rampa com uma inclinação de  $15,0^\circ$ . A bola para momentaneamente após ter rolado  $1,50\text{ m}$  ao longo da

rampa. Qual era a velocidade inicial?

**71** Na Fig. 11-60, uma força horizontal constante  $\vec{F}$  de módulo 12 N é aplicada a um cilindro maciço, homogêneo, por meio de uma linha de pescar enrolada no cilindro. A massa do cilindro é 10 kg, o raio é 0,10 m e o cilindro rola suavemente em uma superfície horizontal. (a) Qual é o módulo da aceleração do centro de massa do cilindro? (b) Qual é o módulo da aceleração angular do cilindro em relação ao centro de massa? (c) Em termos dos vetores unitários, qual é a força de atrito que age sobre o cilindro?



**Figura 11-60** Problema 71.

**72** Um cano de paredes finas rola no chão. Qual é a razão entre a energia cinética de translação e a energia cinética de rotação em relação ao eixo central do cano?

**73** Um carro de brinquedo, de 3,0 kg, se move ao longo de um eixo  $x$  com uma velocidade dada por  $\vec{v} = -2,0t^3\hat{i}$  m/s, com  $t$  em segundos. Para  $t > 0$ , qual é (a) o momento angular  $\vec{L}$  do carro e (b) qual é o torque  $\tau$  sobre o carro, ambos calculados em relação à origem? Qual é o valor (c) de  $\vec{L}$  e (d) de  $\vec{\tau}$  em relação ao ponto (2,0 m; 5,0 m; 0)? Qual é o valor (e) de  $\vec{L}$  e (f) de  $\vec{\tau}$  em relação ao ponto (2,0 m; -5,0 m; 0)?

**74** Uma roda gira no sentido horário em torno do eixo central com um momento angular de  $600 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ . No instante  $t = 0$ , um torque, de módulo  $50 \text{ N} \cdot \text{m}$ , é aplicado à roda para inverter a rotação. Em que instante  $t$  a velocidade angular da roda se anula?

**75** Em um parquinho existe um pequeno carrossel com 1,20 m de raio e 180 kg de massa. O raio de giração do carrossel (veja o Problema 79 do Capítulo 10) é 91,0 cm. Uma criança com 44,0 kg de massa corre a uma velocidade de 3,00 m/s em uma trajetória tangente à borda do carrossel, inicialmente em repouso, e pula no carrossel. Despreze o atrito entre os rolamentos e o eixo do carrossel. Calcule (a) o momento de inércia do carrossel em relação ao eixo de rotação, (b) o módulo do momento angular da criança em relação ao eixo de rotação do carrossel e (c) a velocidade angular do carrossel e da criança após a criança saltar no carrossel.

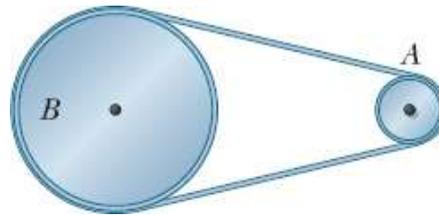
**76** Um bloco homogêneo, de granito, em forma de livro possui faces de 20 cm por 15 cm e uma espessura de 1,2 cm. A massa específica (massa por unidade de volume) do granito é  $2,64 \text{ g}/\text{cm}^3$ . O bloco gira em torno de um eixo perpendicular às faces, situado a meia distância entre o centro e um dos cantos. O momento angular em torno desse eixo é  $0,104 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ . Qual é a energia cinética de rotação do bloco em torno desse eixo?

**77** Duas partículas, de massa  $2,90 \times 10^{-4} \text{ kg}$  e velocidade 5,46 m/s, se movem em sentidos opostos ao

longo de retas paralelas separadas por uma distância de 4,20 cm. (a) Qual é o módulo  $L$  do momento angular do sistema das duas partículas em relação ao ponto médio da distância entre as duas retas? (b) O valor de  $L$  muda se o ponto em relação ao qual é calculado não está a meia distância entre as retas? Se o sentido de movimento de uma das partículas é invertido, qual é (c) a resposta do item (a) e (d) qual é a resposta do item (b)?

**78** Uma roda com 0,250 m de raio, que está se movendo inicialmente a 43,0 m/s, rola 225 m até parar. Calcule o módulo (a) da aceleração linear e (b) da aceleração angular da roda. (c) Se o momento de inércia da roda em torno do eixo central é  $0,155 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , calcule o módulo do torque em relação ao eixo central devido ao atrito sobre a roda.

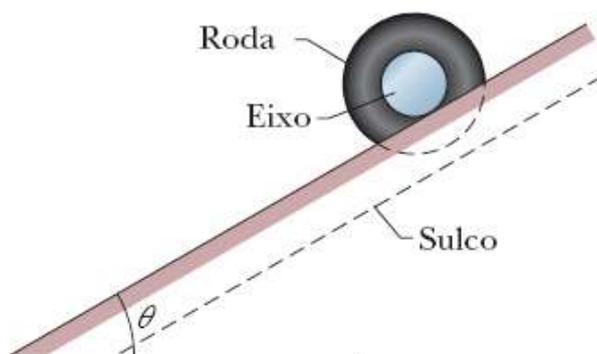
**79** As rodas  $A$  e  $B$  na Fig. 11-61 estão ligadas por uma correia que não desliza. O raio da roda  $B$  é 3,00 vezes maior que o raio da roda  $A$ . Qual é a razão  $I_A/I_B$  entre os momentos de inércia das duas rodas, se elas têm (a) o mesmo momento angular em relação aos respectivos eixos centrais e (b) a mesma energia cinética de rotação?



**Figura 11-61** Problema 79.

**80** Uma partícula de 2,50 kg que se move horizontalmente em um piso com uma velocidade de  $(-3,00 \text{ m/s})\hat{j}$  sofre uma colisão perfeitamente inelástica com uma partícula de 4,00 kg que se move horizontalmente no mesmo piso com uma velocidade de  $(4,50 \text{ m/s})\hat{i}$ . A colisão ocorre nas coordenadas  $(-0,500 \text{ m}, -0,100 \text{ m})$ . Após a colisão e em termos dos vetores unitários, qual é o momento angular do sistema das duas partículas em relação à origem?

**81** Uma roda homogênea, de massa 10,0 kg e raio 0,400 m, está montada rigidamente em um eixo que passa pelo centro (Fig. 11-62). O raio do eixo é 0,200 m e o momento de inércia do conjunto roda-eixo em relação ao eixo é  $0,600 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . A roda está inicialmente em repouso no alto de uma rampa que faz um ângulo  $\theta = 30,0^\circ$  com a horizontal; o eixo está apoiado na rampa, enquanto a roda penetra em um sulco aberto na rampa, sem tocá-la. Depois de liberado, o eixo rola para baixo, suavemente e sem deslizamento, ao longo da rampa. Depois que o conjunto roda-eixo desce 2,00 m ao longo da rampa, (a) qual é a energia cinética de rotação e (b) qual a energia cinética de translação do conjunto?



**Figura 11-62** Problema 81.

**82** Uma barra homogênea gira em um plano horizontal em torno de um eixo vertical que passa por uma das extremidades. A barra tem 6,00 m de comprimento, pesa 10,0 N e gira a 240 rev/min. Calcule (a) o momento de inércia da barra em relação ao eixo de rotação e (b) o módulo do momento angular em torno desse eixo.

**83** Uma esfera maciça com 36,0 N de peso sobe rolando uma rampa com um ângulo de  $30,0^\circ$ . Na base da rampa, o centro de massa da esfera possui uma velocidade de translação de 4,90 m/s. (a) Qual é a energia cinética da esfera na base da rampa? (b) Que distância a esfera sobe ao longo da rampa? (c) A resposta do item (b) depende da massa da esfera?

**84** ~~Uma~~ Suponha que o ioiô no Problema 17, em vez de rolar a partir do repouso, seja arremessado para baixo com uma velocidade inicial de 1,3 m/s. (a) Quanto tempo o ioiô leva para chegar à extremidade da corda? Nesse instante, qual é o valor (b) da energia cinética total, (c) da velocidade linear, (d) da energia cinética de translação, (e) da velocidade angular e (f) da energia cinética de rotação?

**85** Uma menina, de massa  $M$ , está de pé na borda de um carrossel, sem atrito, de raio  $R$  e momento de inércia  $I$ , que está inicialmente em repouso. A menina joga uma pedra, de massa  $m$ , horizontalmente em uma direção tangente à borda do carrossel. A velocidade da pedra em relação ao chão é  $v$ . Depois disso, qual é (a) a velocidade angular do carrossel e (b) qual é a velocidade linear da menina?

**86** Um corpo, de raio  $R$  e massa  $m$ , rola suavemente com velocidade  $v$  em uma superfície horizontal e depois sobe uma colina até uma altura máxima  $h$ . (a) Se  $h = 3v^2/4g$ , qual é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação que passa pelo centro de massa? (b) Que corpo pode ser esse?

## APÊNDICE A

# O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)\*

Tabela 1 As Unidades Fundameo SI

Grandeza	Nome	Símbolo	Definição
comprimento	metro	m	"... a distância percorrida pela luz no vácuo em 1/299.792.458 de segundo." (1983)
massa	quilograma	kg	"... este protótipo [um certo cilindro de platina-irídio] será considerado daqui em diante como a unidade de massa." (1889)
tempo	segundo	s	"... aduração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de cézio 133." (1967)... "em repouso a 0 K". (1997)
corrente elétrica	ampère	A	"... a corrente constante, que, se mantida em dois condutores paralelos retos de comprimento infinito, de seção transversal circular desprezível e separados por uma distância de 1 m no vácuo, produziria entre esses condutores uma força igual a $2 \times 10^{-7}$ newton por metro de comprimento." (1946)
temperatura termodinâmica	kelvin	K	"... a fração 1/273,16 da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água." (1967)
quantidade de matéria	mol	mol	"... a quantidade de matéria de um sistema que contém um número de entidades elementares igual ao número de átomos que existem em 0,012 quilograma de carbono 12." (1971)
intensidade luminosa	candela	cd	"... a intensidade luminosa, em uma dada direção, de uma fonte que emite radiação monocromática de frequência $540 \times 10^{12}$ hertz e que irradia nesta direção com uma intensidade de 1/683 watt por esferorradiano." (1979)

Tabela 2 Algumas Unidades Secundárias do SI

Grandeza	Nome da Unidade	Símbolo
área	metro quadrado	m <sup>2</sup>
volume	metro cúbico	m <sup>3</sup>

frequência	hertz	Hz	$s^{-1}$
massa específica	quilograma por metro cúbico	$kg/m^3$	
velocidade	metro por segundo	m/s	
velocidade angular	radiano por segundo	rad/s	
aceleração	metro por segundo ao quadrado	$m/s^2$	
aceleração angular	radiano por segundo ao quadrado	$rad/s^2$	
força	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
pressão	pascal	Pa	$N/m^2$
trabalho, energia, quantidade de calor	joule	J	N · m
potência	watt	W	J/s
quantidade de carga elétrica	coulomb	C	A · s
diferença de potencial, força eletromotriz	volt	V	W/A
intensidade de campo elétrico	volt por metro (ou newton por coulomb)	V/m	N/C
resistência elétrica	ohm	$\Omega$	V/A
capacitância	farad	F	A · s/V
fluxo magnético	weber	Wb	V · s
indutância	henry	H	V · s/A
densidade de fluxo magnético	tesla	T	$Wb/m^2$
intensidade de campo magnético	ampère por metro	A/m	

entropia	joule por kelvin	J/K
calor específico	joule por quilograma-kelvin	J/(kg · K)
condutividade térmica	watt por metro-kelvin	W/(m · K)
intensidade radiante	watt por esferorradiano	W/sr

**Tabela 3** As Unidades Suplementares do SI

Grandeza	Nome da Unidade	Símbolo
ângulo plano	radiano	rad
ângulo sólido	esferorradiano	sr

---

\*Adaptado de “The International System of Units (SI)”, Publicação Especial 330 do National Bureau of Standards, edição de 2008. As definições acima foram adotadas pela Conferência Nacional de Pesos e Medidas, órgão internacional, nas datas indicadas. A candela não é usada neste livro.

## APÊNDICE B

# ALGUMAS CONSTANTES FUNDAMENTAIS DA FÍSICA\*

Constante	Símbolo	Valor Prático	Melhor Valor (2010)	
			Valor <sup>a</sup>	Incerteza <sup>b</sup>
Velocidade da luz no vácuo	$c$	$3,00 \times 10^8$ m/s	2,997 924 58	exata
Carga elementar	$e$	$1,60 \times 10^{-19}$ C	1,602 176 565	0,022
Constante gravitacional	$G$	$6,67 \times 10^{-11}$ m <sup>3</sup> /s <sup>2</sup> · kg	6,673 84	120
Constante universal dos gases	$R$	8,31 J/mol · K	8,314 462 1	0,91
Constante de Avogadro	$N_A$	$6,02 \times 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>	6,022 141 29	0,044
Constante de Boltzmann	$k$	$1,38 \times 10^{-23}$ J/K	1,380 648 8	0,91
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma$	$5,67 \times 10^{-8}$ W/m <sup>2</sup> ·K <sup>4</sup>	5,670 373	3,6
Volume molar de um gás ideal nas CNTP <sup>c</sup>	$V_m$	$2,27 \times 10^{-2}$ m <sup>3</sup> /mol	2,271 095 3	0,91
Constante elétrica	$\epsilon_0$	$8,85 \times 10^{-12}$ F/m	8,854 187 817...	exata
Constante magnética	$\mu_0$	$1,26 \times 10^{-6}$ H/m	1,256 637 061...	exata
Constante de Planck	$h$	$6,63 \times 10^{-34}$ J · s	6,626 06957	0,044
Massa do elétron <sup>d</sup>	$m_e$	$9,11 \times 10^{-31}$ kg	9,109 382 91	0,044
		$5,49 \times 10^{-4}$ u	5,485 799 094 6	$4,0 \times 10^{-4}$
Massa do próton <sup>d</sup>	$m_p$	$1,67 \times 10^{-27}$ kg	1,672 621 777	0,044
		1,0073 u	1,007 276 466 812	$8,9 \times 10^{-5}$

Razão entre a massa do próton e a massa do elétron	$m_p/m_e$	1840	1836,152 67245	$4,1 \times 10^{-4}$
Razão entre a massa e a carga do elétron	$e/m_e$	$1,76 \times 10^{11}$ C/kg	1,758 820 088	0,022
Massa do nêutron <sup>d</sup>	$m_n$	$1,68 \times 10^{-27}$ kg	1,674 927 351	0,044
		1,0087 u	1,008 664 916 00	$4,2 \times 10^{-4}$
Massa do átomo de hidrogênio <sup>d</sup>	$m_{1H}$	1,0078 u	1,007 825 032 07	$1,0 \times 10^{-4}$
Massa do átomo de deutério <sup>d</sup>	$m_{2H}$	2,0136 u	2,014 101 778 040	$4,0 \times 10^{-5}$
Massa do átomo de hélio <sup>d</sup>	$m_{4He}$	4,0026 u	4,002 603 254 131	$1,5 \times 10^{-5}$
Massa do múon	$m_\mu$	$1,88 \times 10^{-28}$ kg	1,883 531 475	0,051
Momento magnético do elétron	$\mu_e$	$9,28 \times 10^{-24}$ J/T	9,284 764 30	0,022
Momento magnético do próton	$\mu_p$	$1,41 \times 10^{-26}$ J/T	1,410 606 743	0,024
Magnéton de Bohr	$\mu_B$	$9,27 \times 10^{-24}$ J/T	9,274 009 68	0,022
Magnéton nuclear	$\mu_N$	$5,05 \times 10^{-27}$ J/T	5,050 783 53	0,022
Raio de Bohr	$a$	$5,29 \times 10^{-11}$ m	5,291 772 109 2	$3,2 \times 10^{-4}$
Constante de Rydberg	$R$	$1,10 \times 10^7$ m <sup>-1</sup>	1,097 373 156 853 9	$5,0 \times 10^{-6}$
Comprimento de onda de Compton do elétron	$\lambda_c$	$2,43 \times 10^{-12}$ m	2,426 310 238 9	$6,5 \times 10^{-4}$

<sup>a</sup>Os valores desta coluna têm a mesma unidade e potência de 10 que o valor prático.

<sup>b</sup>Partes por milhão.

<sup>c</sup>CNTP significa condições normais de temperatura e pressão: 0°C e 1,0 atm (0,1 MPa).

<sup>d</sup>As massas dadas em u estão em unidades unificadas de massa atômica:  $1 \text{ u} = 1,660 538 782 \times 10^{-27}$  kg.

---

\*Os valores desta tabela foram selecionados entre os valores recomendados pelo CODATA em 2010 ([www.physics.nist.gov](http://www.physics.nist.gov)).

## APÊNDICE C

# ALGUNS DADOS ASTRONÔMICOS

### Algumas Distâncias da Terra

À Lua*	$3,82 \times 10^8$ m	Ao centro da nossa galáxia	$2,2 \times 10^{20}$ m
Ao Sol*	$1,50 \times 10^{11}$ m	À galáxia de Andrômeda	$2,1 \times 10^{22}$ m
À estrela mais próxima ( <i>Proxima Centauri</i> )	$4,04 \times 10^{16}$ m	Ao limite do universo observável	$\sim 10^{26}$ m

\*Distância média.

### O Sol, a Terra e a Lua

Propriedade	Unidade	Sol	Terra	Lua
Massa	kg	$1,99 \times 10^{30}$	$5,98 \times 10^{24}$	$7,36 \times 10^{22}$
Raio médio	m	$6,96 \times 10^8$	$6,37 \times 10^6$	$1,74 \times 10^6$
Massa específica média	kg/m <sup>3</sup>	1410	5520	3340
Aceleração de queda livre na superfície	m/s <sup>2</sup>	274	9,81	1,67
Velocidade de escape	km/s	618	11,2	2,38
Período de rotação <sup>a</sup>	—	37 d nos polos <sup>b</sup>	26 d no equador <sup>b</sup>	23 h 56 min 27,3 d
Potência de radiação <sup>c</sup>	W	$3,90 \times 10^{26}$		

<sup>a</sup>Medido em relação às estrelas distantes.

<sup>b</sup>O Sol, uma bola de gás, não gira como um corpo rígido.

<sup>c</sup>Perto dos limites da atmosfera terrestre, a energia solar é recebida a uma taxa de  $1340 \text{ W/m}^2$ , supondo uma incidência normal.

### Algumas Propriedades dos Planetas

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno	Plutão <sup>d</sup>
Distância média do Sol, 10 <sup>6</sup> km	57,9	108	150	228	778	1430	2870	4500	5900

Período de revolução, anos	0,241	0,615	1,00	1,88	11,9	29,5	84,0	165	248
Período de rotação, <sup>a</sup> dias	58,7	-243 <sup>b</sup>	0,997	1,03	0,409	0,426	-0,451 <sup>b</sup>	0,658	6,39
Velocidade orbital, km/s	47,9	35,0	29,8	24,1	13,1	9,64	6,81	5,43	4,74
Inclinação do eixo em relação à órbita	<28°	≈3°	23,4°	25,0°	3,08°	26,7°	97,9°	29,6°	57,5°
Inclinação da órbita em relação à órbita da Terra	7,00°	3,39°		1,85°	1,30°	2,49°	0,77°	1,77°	17,2°
Excentricidade da órbita	0,206	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,0472	0,0086	0,250
Diâmetro equatorial, km	4880	12 100	12 800	6790	143 000	120 000	51 800	49 500	2300
Massa (Terra = 1)	0,0558	0,815	1,000	0,107	318	95,1	14,5	17,2	0,002
Densidade (água = 1)	5,60	5,20	5,52	3,95	1,31	0,704	1,21	1,67	2,03
Valor de <i>g</i> na superfície, <sup>c</sup> m/s <sup>2</sup>	3,78	8,60	9,78	3,72	22,9	9,05	7,77	11,0	0,5
Velocidade de escape, <sup>c</sup> km/s	4,3	10,3	11,2	5,0	59,5	35,6	21,2	23,6	1,3
Satélites conhecidos	0	0	1	2	67 + anel	62 + anéis	27 + anéis	13 + anéis	4

<sup>a</sup>Medido em relação às estrelas distantes.

<sup>b</sup>Vénus e Urano giram no sentido contrário ao do movimento orbital.

<sup>c</sup>Aceleração gravitacional medida no equador do planeta.

<sup>d</sup>Plutão é atualmente classificado como um planeta anão.

## APÊNDICE D

# FATORES DE CONVERSÃO

Os fatores de conversão podem ser lidos diretamente das tabelas a seguir. Assim, por exemplo, 1 grau =  $2,778 \times 10^{-3}$  revoluções e, portanto,  $16,7^\circ = 16,7 \times 2,778 \times 10^{-3}$  revoluções. As unidades do SI estão em letras maiúsculas. Adaptado parcialmente de G. Shortley and D. Williams, *Elements of Physics*, 1971, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

### Ângulo Plano

	o	'	"	RADIANOS	rev
1 grau = 1		60	3600	$1,745 \times 10^{-2}$	$2,778 \times 10^{-3}$
1 minuto = $1,667 \times 10^{-2}$		1	60	$2,909 \times 10^{-4}$	$4,630 \times 10^{-5}$
1 segundo = $2,778 \times 10^{-4}$		$1,667 \times 10^{-2}$	1	$4,848 \times 10^{-6}$	$7,716 \times 10^{-7}$
1 RADIANO = 57,30		3438	$2,063 \times 10^5$	1	0,1592
1 revolução = 360		$2,16 \times 10^4$	$1,296 \times 10^6$	6,283	1

### Ângulo Sólido

$$1 \text{ esfera} = 4\pi \text{ esferorradianos} = 12,57 \text{ esferorradianos}$$

### Comprimento

	cm	METROS	km	polegadas	pés	milhas
1 centímetro = 1		$10^{-2}$	$10^{-5}$	0,3937	$3,281 \times 10^{-2}$	$6,214 \times 10^{-6}$
1 METRO = 100		1	$10^{-3}$	39,37	3,281	$6,214 \times 10^{-4}$
1 quilômetro = $10^5$		1000	1	$3,937 \times 10^4$	3281	0,6214
1 polegada = 2,540		$2,540 \times 10^{-2}$	$2,540 \times 10^{-5}$	1	$8,333 \times 10^{-2}$	$1,578 \times 10^{-4}$

$10^{-5}$

1 pé = 30,48

03048

$3,048 \times 10^{-4}$

12

1

$1,894 \times 10^{-4}$

1 milha =  $1,609 \times 10^5$

1609

1,609

$6,336 \times 10^4$

5280

1

1 angström =  $10^{-10}$  m

1 milha marítima = 1852 m = 1,151 milha = 6076 pés

1 fermi =  $10^{-15}$  m

1 ano-luz =  $9,461 \times 10^{12}$  km

1 parsec =  $3,084 \times 10^{13}$  km

1 braça = 6 pés

1 raio de Bohr =  $5,292 \times 10^{-11}$  m

1 jarda = 3 pés

1 vara = 16,5 pés

1 mil =  $10^{-3}$  polegadas

1 nm =  $10^{-9}$  m

### Área

METROS<sup>2</sup>

cm<sup>2</sup>

pés<sup>2</sup>

polegadas<sup>2</sup>

1 METRO QUADRADO = 1

$10^4$

10,76

1550

1 centímetro quadrado =  $10^{-4}$

1

$1,076 \times 10^{-3}$

0,1550

1 pé quadrado =  $9,290 \times 10^{-2}$

929,0

1

144

1 polegada quadrada =  $6,452 \times 10^{-4}$

6,452

$6,944 \times 10^{-3}$

1

1 milha quadrada =  $2,788 \times 10^7$  pés<sup>2</sup> = 640 acres

1 barn =  $10^{-28}$  m<sup>2</sup>

1 acre = 43.560 pés<sup>2</sup>

1 hectare =  $10^4$  m<sup>2</sup> = 2,471 acres

### Volume

METROS<sup>3</sup>

cm<sup>3</sup>

L

pés<sup>3</sup>

polegadas<sup>3</sup>

1 METRO CÚBICO = 1

$10^6$

1000

35,31

$6,102 \times 10^4$

1 centímetro cúbico =  $10^{-6}$

1

$1,000 \times 10^{-3}$

$3,531 \times 10^{-5}$

$6,102 \times 10^{-2}$

1 litro =  $1,000 \times 10^{-3}$

1000

1

$3,531 \times 10^{-2}$

61,02

1 pé cúbico =  $2,832 \times 10^{-2}$

$2,832 \times 10^4$

28,32

1

1728

$$1 \text{ polegada cúbica} = 1,639 \times 10^{-5} \quad 16,39 \quad 1,639 \times 10^{-2} \quad 5,787 \times 10^{-4} \quad 1$$

1 galão americano = 4 quartos de galão americano = 8 quartilhos americanos = 128 onças fluidas americanas = 231 polegadas<sup>3</sup>  
 1 galão imperial britânico = 277,4 polegadas<sup>3</sup> = 1,201 galão americano

### Massa

As grandezas nas áreas sombreadas não são unidades de massa, mas são frequentemente usadas como tais. Assim, por exemplo, quando escrevemos 1 kg “=” 2,205 lb, isso significa um quilograma é a *massa* que *pesa* 2,205 libras em um local em que *g* tem o valor-padrão de 9,80665 m/s<sup>2</sup>.

	g	QUILOGRAMAS	slug	u	onças	libras	toneladas
1 grama = 1		0,001	$6,852 \times 10^{-5}$	$6,022 \times 10^{23}$	$3,527 \times 10^{-2}$	$2,205 \times 10^{-3}$	$1,102 \times 10^{-6}$
1 QUILOGRAMA = 1000		1	$6,852 \times 10^{-2}$	$6,022 \times 10^{26}$	35,27	2,205	$1,102 \times 10^{-3}$
1 slug = $1,459 \times 10^4$		14,59	1	$8,786 \times 10^{27}$	514,8	32,17	$1,609 \times 10^{-2}$
unidade de massa atômica (u) = $1,661 \times 10^{-24}$		$1,661 \times 10^{-27}$	$1,138 \times 10^{-28}$	1	$5,857 \times 10^{-26}$	$3,662 \times 10^{-27}$	$1,830 \times 10^{-30}$
1 onça = 28,35		$2,835 \times 10^{-2}$	$1,943 \times 10^{-3}$	$1,718 \times 10^{25}$	1	$6,250 \times 10^{-2}$	$3,125 \times 10^{-5}$
1 libra = 453,6		0,4536	$3,108 \times 10^{-2}$	$2,732 \times 10^{26}$	16	1	0,0005
1 tonelada = $9,072 \times 10^5$		907,2	62,16	$5,463 \times 10^{29}$	$3,2 \times 10^4$	2000	1

1 tonelada métrica = 1000 kg

### Massa Específica

As grandezas nas áreas sombreadas são pesos específicos e, como tais, dimensionalmente diferentes das massas específicas. Veja a nota na tabela de massas.

	slug/pé <sup>3</sup>	QUILOGRAMAS/METRO <sup>3</sup>	g/cm <sup>3</sup>	lb/pé <sup>3</sup>	lb/polegada <sup>3</sup>
1 slug por pé <sup>3</sup> = 1		515,4	0,5154	32,17	$1,862 \times 10^{-2}$
1 QUILOGRAMA por METRO <sup>3</sup> = $1,940 \times 10^{-3}$		1	0,001	$6,243 \times 10^{-2}$	$3,613 \times 10^{-5}$
1 grama por centímetro <sup>3</sup> = 1,940		1000	1	62,43	$3,613 \times 10^{-2}$

1 libra por pé <sup>3</sup>	= $3,108 \times 10^{-2}$	16,02	$16,02 \times 10^{-2}$	1	$5,787 \times 10^{-4}$
1 libra por polegada <sup>3</sup>	= 53,71	$2,768 \times 10^4$	27,68	1728	1

### Tempo

	ano	d	h	min	SEGUNDOS
1 ano	= 1	365,25	$8,766 \times 10^3$	$5,259 \times 10^5$	$3,156 \times 10^7$
1 dia	= $2,738 \times 10^{-3}$	1	24	1440	$8,640 \times 10^4$
1 hora	= $1,141 \times 10^{-4}$	$4,167 \times 10^{-2}$	1	60	3600
1 minuto	= $1,901 \times 10^{-6}$	$6,944 \times 10^{-4}$	$1,667 \times 10^{-2}$	1	60
1 SEGUNDO	= $3,169 \times 10^{-8}$	$1,157 \times 10^{-5}$	$2,778 \times 10^{-4}$	$1,667 \times 10^{-2}$	1

### Velocidade

	pés/s	km/h	METROS/SEGUNDO	milhas/h	cm/s
1 pé por segundo	= 1	1,097	0,3048	0,6818	30,48
1 quilômetro por hora	= 0,9113	1	0,2778	0,6214	27,78
1 METRO por SEGUNDO	= 3,281	3,6	1	2,237	100
1 milha por hora	= 1,467	1,609	0,4470	1	44,70
1 centímetro por segundo	= $3,281 \times 10^{-2}$	$3,6 \times 10^{-2}$	0,01	$2,237 \times 10^{-2}$	1

1 nó = 1 milha marítima/h = 1,688 pés/s 1 milha/min = 88,00 pés/s = 60,00 milhas/h

### Força

O grama-força e o quilograma-força são atualmente pouco usados. Um grama-força (= 1 gf) é a força da gravidade que atua sobre um objeto cuja massa é 1 grama em um local onde  $g$  possui o valor-padrão de  $9,80665 \text{ m/s}^2$ .

	dinas	NEWTONS	libras	poundals	gf	kgf
1 dina	= 1	$10^{-5}$	$2,248 \times 10^{-6}$	$7,233 \times 10^{-5}$	$1,020 \times 10^{-3}$	$1,020 \times 10^{-6}$
1 NEWTON	= $10^5$	1	0,2248	7,233	102,0	0,1020

1 libra	= $4,448 \times 10^5$	4,448	1	32,17	453,6	0,4536
1 poundal	= $1,383 \times 10^4$	0,1383	$3,108 \times 10^{-2}$	1	14,10	$1,410 \times 10^2$
1 grama-força	= 980,7	$9,807 \times 10^{-3}$	$2,205 \times 10^{-3}$	$7,093 \times 10^{-2}$	1	0,001
1 quilograma-força	= $9,807 \times 10^5$	9,807	2,205	70,93	1000	1

1 tonelada = 2000 libras

## Pressão

	atm	dinas/cm <sup>2</sup>	polegadas de água	cm Hg	PASCALS	libras/polegada <sup>2</sup>	libras/pé <sup>2</sup>
1 atmosfera	= 1	$1,013 \times 10^6$	406,8	76	$1,013 \times 10^5$	14,70	2116
1 dina por centímetro <sup>2</sup>	= $9,869 \times 10^{-7}$	1	$4,015 \times 10^{-4}$	$7,501 \times 10^{-5}$	0,1	$1,405 \times 10^{-5}$	$2,089 \times 10^{-3}$
1 polegada de água <sup>a</sup> a 4°C	= $2,458 \times 10^{-3}$	2491	1	0,1868	249,1	$3,613 \times 10^{-2}$	5,202
1 centímetro de mercúrio <sup>a</sup> a 0°C	= $1,316 \times 10^{-2}$	$1,333 \times 10^4$	5,353	1	1333	0,1934	27,85
1 PASCAL	= $9,869 \times 10^{-6}$	10	$4,015 \times 10^{-3}$	$7,501 \times 10^{-4}$	1	$1,450 \times 10^{-4}$	$2,089 \times 10^{-2}$
1 libra por polegada <sup>2</sup>	= $6,805 \times 10^{-2}$	$6,895 \times 10^4$	27,68	5,171	$6,895 \times 10^3$	1	144
1 libra por pé <sup>2</sup>	= $4,725 \times 10^{-4}$	478,8	0,1922	$3,591 \times 10^{-2}$	47,88	$6,944 \times 10^{-3}$	1

<sup>a</sup>Onde a aceleração da gravidade possui o valor-padrão de  $9,80665 \text{ m/s}^2$ .

1 bar =  $10^6 \text{ dina/cm}^2 = 0,1 \text{ MPa}$

1 milibar =  $10^3 \text{ dinas/cm}^2 = 10^2 \text{ Pa}$

1 torr = 1 mm Hg

## Energia, Trabalho e Calor

As grandezas nas áreas sombreadas não são unidades de energia, mas foram incluídas por conveniência. Elas se originam da fórmula relativística de equivalência entre massa e energia  $E = mc^2$  e representam a energia equivalente a um quilograma ou uma unidade unificada de massa atômica (u) (as duas últimas linhas) e a massa equivalente a uma unidade de energia (as duas colunas da extremidade direita).

	Btu	erg	pés-libras	hp · h	JOULES	cal	kW · h	eV	MeV	kg	u
1 Btu = 1		1,055 × 10 <sup>10</sup>	777,9	3,929 × 10 <sup>-4</sup>	1055	252,0	2,930 × 10 <sup>-4</sup>	6,585 × 10 <sup>21</sup>	6,585 × 10 <sup>15</sup>	1,174 × 10 <sup>-14</sup>	7,070 × 10 <sup>12</sup>
1 erg =	9,481 × 10 <sup>-11</sup>	1	7,376 × 10 <sup>-8</sup>	3,725 × 10 <sup>-14</sup>	10 <sup>-7</sup>	2,389 × 10 <sup>-8</sup>	2,778 × 10 <sup>-14</sup>	6,242 × 10 <sup>11</sup>	6,242 × 10 <sup>5</sup>	1,113 × 10 <sup>-24</sup>	670,2 × 10 <sup>9</sup>
1 pé-libra =	1,285 × 10 <sup>-3</sup>	1,356 × 10 <sup>7</sup>	1	5,051 × 10 <sup>-7</sup>	1,356	0,3238	3,766 × 10 <sup>-7</sup>	8,464 × 10 <sup>18</sup>	8,464 × 10 <sup>12</sup>	1,509 × 10 <sup>-17</sup>	9,037 × 10 <sup>9</sup>
1 horsepower- hora =	2545	2,685 × 10 <sup>13</sup>	1,980 × 10 <sup>6</sup>	1	2,685 × 10 <sup>6</sup>	6,413 × 10 <sup>5</sup>	0,7457 × 10 <sup>5</sup>	1,676 × 10 <sup>25</sup>	1,676 × 10 <sup>19</sup>	2,988 × 10 <sup>-11</sup>	1,799 × 10 <sup>16</sup>
1 JOULE =	9,481 × 10 <sup>-4</sup>	10 <sup>7</sup>	0,7376	3,725 × 10 <sup>-7</sup>	1	0,2389	2,778 × 10 <sup>-7</sup>	6,242 × 10 <sup>18</sup>	6,242 × 10 <sup>12</sup>	1,113 × 10 <sup>-17</sup>	6,702 × 10 <sup>9</sup>
1 caloria =	3,968 × 10 <sup>-3</sup>	4,1868 × 10 <sup>7</sup>	3,088	1,560 × 10 <sup>-6</sup>	4,1868	1	1,163 × 10 <sup>-6</sup>	2,613 × 10 <sup>19</sup>	2,613 × 10 <sup>13</sup>	4,660 × 10 <sup>-17</sup>	2,806 × 10 <sup>10</sup>
1 quilowatt- hora =	3413	3,600 × 10 <sup>13</sup>	2,655 × 10 <sup>6</sup>	1,341 × 10 <sup>6</sup>	3,600 × 10 <sup>6</sup>	8,600 × 10 <sup>5</sup>	1	2,247 × 10 <sup>25</sup>	2,247 × 10 <sup>19</sup>	4,007 × 10 <sup>-11</sup>	2,413 × 10 <sup>16</sup>
1 elétron-volt =	1,519 × 10 <sup>-22</sup>	1,602 × 10 <sup>-12</sup>	1,182 × 10 <sup>-19</sup>	5,967 × 10 <sup>-26</sup>	1,602 × 10 <sup>-19</sup>	3,827 × 10 <sup>-20</sup>	4,450 × 10 <sup>-26</sup>	1	10 <sup>-6</sup>	1,783 × 10 <sup>-36</sup>	1,074 × 10 <sup>-9</sup>
1 milhão de elétrons-volts =	1,519 × 10 <sup>-16</sup>	1,602 × 10 <sup>-6</sup>	1,182 × 10 <sup>-13</sup>	5,967 × 10 <sup>-20</sup>	1,602 × 10 <sup>-13</sup>	3,827 × 10 <sup>-14</sup>	4,450 × 10 <sup>-20</sup>	10 <sup>-6</sup>	1	1,783 × 10 <sup>-30</sup>	1,074 × 10 <sup>-3</sup>
1 quilograma =	8,521 × 10 <sup>13</sup>	8,987 × 10 <sup>23</sup>	6,629 × 10 <sup>16</sup>	3,348 × 10 <sup>10</sup>	8,987 × 10 <sup>16</sup>	2,146 × 10 <sup>16</sup>	2,497 × 10 <sup>10</sup>	5,610 × 10 <sup>35</sup>	5,610 × 10 <sup>29</sup>	1	6,022 × 10 <sup>26</sup>
1 unidade unificada de massa atômica =	1,415 × 10 <sup>-13</sup>	1,492 × 10 <sup>-3</sup>	1,101 × 10 <sup>-10</sup>	5,559 × 10 <sup>-17</sup>	1,492 × 10 <sup>-10</sup>	3,564 × 10 <sup>-11</sup>	4,146 × 10 <sup>-17</sup>	9,320 × 10 <sup>8</sup>	932, 0	1,661 × 10 <sup>-27</sup>	1

## Potência

	Btu/h	pés-libras/s	hp	cal/s	kW	WATTS
1 Btu por hora = 1		0,2161	3,929 × 10 <sup>-4</sup>	6,998 × 10 <sup>-2</sup>	2,930 × 10 <sup>-4</sup>	0,2930
1 pé-libra por segundo = 4,628		1	1,818 × 10 <sup>-3</sup>	0,3239	1,356 × 10 <sup>-3</sup>	1,356
1 horsepower = 2545		550	1	178,1	0,7457	745,7
1 caloria por segundo = 14,29		3,088	5,615 × 10 <sup>-3</sup>	1	4,186 × 10 <sup>-3</sup>	4,186
1 quilowatt = 3413		737,6	1,341	238,9	1	1000
1 WATT = 3,413		0,7376	1,341 × 10 <sup>-3</sup>	0,2389	0,001	1

## Campo Magnético

	gauss	TESLAS	miligauss
1 gauss = 1		10 <sup>-4</sup>	1000
1 TESLA = 10 <sup>4</sup>		1	10 <sup>7</sup>
1 miligauss = 0,001		10 <sup>-7</sup>	1

1 tesla = 1 weber/metro<sup>2</sup>

### Fluxo Magnético

---

	maxwell	WEBER
1 maxwell	= 1	10 <sup>-8</sup>
1 WEBER	= 10 <sup>8</sup>	1

---

## APÊNDICE E

# FÓRMULAS MATEMÁTICAS

## Geometria

Círculo de raio  $r$ : circunferência =  $2\pi r$ ; área =  $\pi r^2$ .

Esfera de raio  $r$ : área =  $4\pi r^2$ ; volume =  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .

Cilindro circular reto de raio  $r$  e altura  $h$ : área =  $2\pi r^2 + 2\pi rh$ ; volume =  $\pi r^2 h$ .

Triângulo de base  $a$  e altura  $h$ : área =  $\frac{1}{2}ah$ .

## Fórmula de Báskara

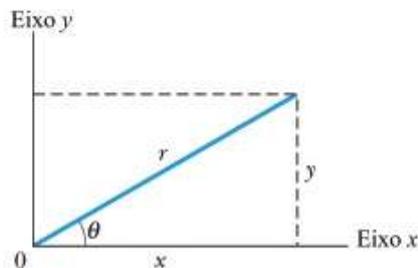
Se  $ax^2 + bx + c = 0$ , então  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

## Funções Trigonométricas do Ângulo $\theta$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \quad \operatorname{cos} \theta = \frac{x}{r}$$

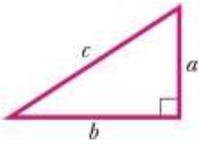
$$\operatorname{tan} \theta = \frac{y}{x} \quad \operatorname{cot} \theta = \frac{x}{y}$$

$$\operatorname{sec} \theta = \frac{r}{x} \quad \operatorname{csc} \theta = \frac{r}{y}$$



## Teorema de Pitágoras

Neste triângulo retângulo,  $a^2 + b^2 = c^2$



## Triângulos

Ângulos:  $A, B, C$

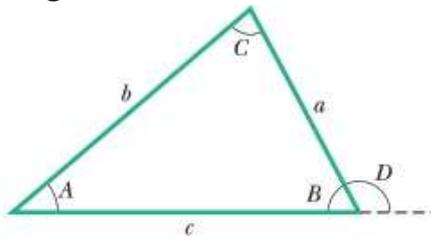
Lados opostos:  $a, b, c$

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Ângulo externo  $D = A + C$



## Sinais e Símbolos Matemáticos

= igual a

$\approx$  aproximadamente igual a

$\sim$  da ordem de grandeza de

$\neq$  diferente de

$\equiv$  idêntico a, definido como

$>$  maior que ( $\gg$  muito maior que)

$<$  menor que ( $\ll$  muito menor que)

$\geq$  maior ou igual a (não menor que)

$\leq$  menor ou igual a (não maior que)

$\pm$  mais ou menos

$\propto$  proporcional a

$\Sigma$  somatório de

$x_{\text{méd}}$  valor médio de  $x$

## Identidades Trigonômicas

$$\text{sen}(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\text{cos}(90^\circ - \theta) = \text{sen } \theta$$

$$\text{sen } \theta / \text{cos } \theta = \tan \theta$$

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$$

$$\text{sen}^2 \theta - \text{tan}^2 \theta = 1$$

$$\text{csc}^2 \theta - \text{cot}^2 \theta = 1$$

$$\text{sen } 2\theta = 2 \text{sen } \theta \text{ cos } \theta$$

$$\text{cos } 2\theta = \text{cos}^2 \theta - \text{sen}^2 \theta = 2 \text{cos}^2 \theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2 \theta$$

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen } \alpha \text{ cos } \beta \pm \text{cos } \alpha \text{ sen } \beta$$

$$\text{cos}(\alpha \pm \beta) = \text{cos } \alpha \text{ cos } \beta \mp \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\text{sen } \alpha \pm \text{sen } \beta = 2 \text{sen } \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \text{ cos } \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\text{cos } \alpha \pm \text{cos } \beta = 2 \text{cos } \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \text{ cos } \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\text{cos } \alpha - \text{cos } \beta = -2 \text{sen } \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \text{ sen } \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

## Teorema Binomial

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots \quad (x^2 < 1)$$

## Expansão Exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

## Expansão Logarítmica

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \quad (|x| < 1)$$

## Expansões Trigonômicas ( $\theta$ em radianos)

$$\text{sen } \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

$$\text{cos } \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

$$\text{tan } \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \dots$$

## Regra de Cramer

Um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas,  $x$  e  $y$ ,

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{e} \quad a_2x + b_2y = c_2,$$

tem como soluções

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

## Produtos de Vetores

Sejam  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  vetores unitários nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Nesse caso,

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1, \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0,$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0,$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

Qualquer vetor  $\vec{a}$  de componentes  $a_x$ ,  $a_y$  e  $a_z$  ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  pode ser escrito na forma

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}.$$

Sejam  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  vetores arbitrários de módulos  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Nesse caso,

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$$

$$(s\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (s\vec{b}) = s(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (\text{em que } s \text{ é um escalar}).$$

Seja  $\theta$  o menor dos dois ângulos entre  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Nesse caso,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \theta$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= (a_y b_z - b_y a_z) \hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \hat{j}$$

$$+ (a_x b_y - b_x a_y) \hat{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

## Derivadas e Integrais

Nas fórmulas a seguir, as letras  $u$  e  $v$  representam duas funções de  $x$ , e  $a$  e  $m$  são constantes. A cada integral indefinida deve-se somar uma constante de integração arbitrária. O *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.) contém uma tabela mais completa.

1.  $\frac{dx}{dx} = 1$

2.  $\frac{d}{dx} (au) = a \frac{du}{dx}$

3.  $\frac{d}{dx} (u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

4.  $\frac{d}{dx} x^m = mx^{m-1}$

5.  $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
6.  $\frac{d}{dx} (uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
7.  $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
8.  $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x$
9.  $\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x$
10.  $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
11.  $\frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{csc}^2 x$
12.  $\frac{d}{dx} \sec x = \tan x \sec x$
13.  $\frac{d}{dx} \operatorname{csc} x = -\cot x \operatorname{csc} x$
14.  $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$
15.  $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} u = \cos u \frac{du}{dx}$
16.  $\frac{d}{dx} \cos u = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$

1.  $\int dx = x$
2.  $\int au \, dx = a \int u \, dx$
3.  $\int (u + v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx$
4.  $\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$
5.  $\int \frac{dx}{x} = \ln |x|$
6.  $\int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx$
7.  $\int e^x \, dx = e^x$
8.  $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$
9.  $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$
10.  $\int \tan x \, dx = \ln |\sec x|$
11.  $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}2x$
12.  $\int e^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$
13.  $\int xe^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a^2}(ax + 1)e^{-ax}$
14.  $\int x^2e^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$

15.  $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$
16.  $\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
17.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$
18.  $\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$
19.  $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}}$
20.  $\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad (a > 0)$
21.  $\int \frac{x dx}{x + d} = x - d \ln(x + d)$

## APÊNDICE F

# PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS

Todas as propriedades físicas são dadas para uma pressão de 1 atm, a menos que seja indicado em contrário.

Elemento	Símbolo	Número Atômico, Z	Massa Molar, g/mol	Massa Específica, g/cm <sup>3</sup> a 20°C	Ponto de Fusão, °C	Ponto de Ebulição, °C	Calor Específico, J/(g · °C) a 25°C
Actínio	Ac	89	(227)	10,06	1323	(3473)	0,092
Alumínio	Al	13	26,9815	2,699	660	2450	0,900
Americío	Am	95	(243)	13,67	1541	—	—
Antimônio	Sb	51	121,75	6,691	630,5	1380	0,205
Argônio	Ar	18	39,948	$1,6626 \times 10^{-3}$	-189,4	-185,8	0,523
Arsênio	As	33	74,9216	5,78	817 (28 atm)	613	0,331
Astatínio	At	85	(210)	—	(302)	—	—
Bário	Ba	56	137,34	3,594	729	1640	0,205
Berílio	Be	4	9,0122	1,848	1287	2770	1,83
Berquélio	Bk	97	(247)	14,79	—	—	—
Bismuto	Bi	83	208,980	9,747	271,37	1560	0,122
Bóhrio	Bh	107	262,12	—	—	—	—
Boro	B	5	10,811	2,34	2030	—	1,11
Bromo	Br	35	79,909	3,12 (líquido)	-7,2	58	0,293
Cádmio	Cd	48	112,40	8,65	321,03	765	0,226

Cálcio	Ca	20	40,08	1,55	838	1440	0,624
Califórnio	Cf	98	(251)	—	—	—	—
Carbono	c	6	12,01115	2,26	3727	4830	0,691
Cério	Ce	58	140,12	6,768	804	3470	0,188
Césio	Cs	55	132,905	1,873	28,40	690	0,243
Chumbo	Pb	82	207,19	11,35	327,45	1725	0,129
Cloro	Cl	17	35,453	$3,214 \times 10^{-3}$ (0°C)	-101	-34,7	0,486
Cobalto	Co	27	58,9332	8,85	1495	2900	0,423
Cobre	Cu	29	63,54	8,96	1083,40	2595	0,385
Copernício	Cn	112	(285)	—	—	—	—
Criptônio	Kr	36	83,80	$3,488 \times 10^{-3}$	-157,37	-152	0,247
Cromo	Cr	24	51,996	7,19	1857	2665	0,448
Cúrio	Cm	96	(247)	13,3	—	—	—
Darmstádio	Ds	110	(271)	—	—	—	—
Disprósio	Dy	66	162,50	8,55	1409	2330	0,172
Dúbnio	Db	105	262,114	—	—	—	—
Einstêinio	Es	99	(254)	—	—	—	—
Enxofre	S	16	32,064	2,07	119,0	444,6	0,707
Érbio	Er	68	167,26	9,15	1522	2630	0,167
Escândio	Sc	21	44,956	2,99	1539	2730	0,569
Estanho	Sn	50	118,69	7,2984	231,868	2270	0,226
Estrôncio	Sr	38	87,62	2,54	768	1380	0,737

Európio	Eu	63	151,96	5,243	817	1490	0,163
Férmio	Fm	100	(237)	—	—	—	—
Ferro	Fe	26	55,847	7,874	1536,5	3000	0,447
Fleróvio	F1	114	(289)	—	—	—	—
Flúor	F	9	18,9984	$1,696 \times 10^{-3}$ (0°C)	-219,6	-188,2	0,753
Fósforo	P	15	30,9738	1,83	44,25	280	0,741
Frâncio	Fr	87	(223)	—	(27)	—	—
Gadolínio	Gd	64	157,25	7,90	1312	2730	0,234
Gálio	Ga	31	69,72	5,907	29,75	2237	0,377
Germânio	Ge	32	72,59	5,323	937,25	2830	0,322
Háfnio	Hf	72	178,49	13,31	2227	5400	0,144
Hássio	Hs	108	(265)	—	—	—	—
Hélio	He	2	4,0026	$0,1664 \times 10^{-3}$	-269,7	-268,9	5,23
Hidrogênio	H	1	1,00797	$0,08375 \times 10^{-3}$	-259,19	-252,7	14,4
Hólmio	Ho	67	164,930	8,79	1470	2330	0,165
Índio	In	49	114,82	7,31	156,634	2000	0,233
Iodo	I	53	126,9044	4,93	113,7	183	0,218
Írídio	Ir	77	192,2	22,5	2447	(5300)	0,130
Ítérbio	Yb	70	173,04	6,965	824	1530	0,155
Ítrio	Y	39	88,905	4,469	1526	3030	0,297
Lantânio	La	57	138,91	6,189	920	3470	0,195

Laurêncio	Lr	103	(257)	—	—	—	—
Lítio	Li	3	6,939	0,534	180,55	1300	3,58
Livermório	Lv	116	(293)	—	—	—	—
Lutécio	Lu	71	174,97	9,849	1663	1930	0,155
Magnésio	Mg	12	24,312	1,738	650	1107	1,03
Manganês	Mn	25	54,9380	7,44	1244	2150	0,481
Meitnério	Mt	109	(266)	—	—	—	—
Mendelévio	Md	101	(256)	—	—	—	—
Mercúrio	Hg	80	200,59	13,55	−38,87	357	0,138
Molibdênio	Mo	42	95,94	10,22	2617	5560	0,251
Neodímio	Nd	60	144,24	7,007	1016	3180	0,188
Neônio	Ne	10	20,183	$0,8387 \times 10^{-3}$	−248,597	−246,0	1,03
Netúnio	Np	93	(237)	20,25	637	—	1,26
Níquel	Ni	28	58,71	8,902	1453	2730	0,444
Nióbio	Nb	41	92,906	8,57	2468	4927	0,264
Nitrogênio	N	7	14,0067	$1,1649 \times 10^{-3}$	−210	−195,8	1,03
Nobélio	No	102	(255)	—	—	—	—
Ósmio	Os	76	190,2	22,59	3027	5500	0,130
Ouro	Au	79	196,967	19,32	1064,43	2970	0,131
Oxigênio	O	8	15,9994	$1,3318 \times 10^{-3}$	−218,80	−183,0	0,913
Paládio	Pd	46	106,4	12,02	1552	3980	0,243
Platina	Pt	78	195,09	21,45	1769	4530	0,134

Plutônio	Pu	94	(244)	19,8	640	3235	0,130
Polônio	Po	84	(210)	9,32	254	—	—
Potássio	K	19	39,102	0,862	63,20	760	0,758
Praseodímio	Pr	59	140,907	6,773	931	3020	0,197
Prata	Ag	47	107,870	10,49	960,8	2210	0,234
Promécio	Pm	61	(145)	7,22	(1027)	—	—
Protactínio	Pa	91	(231)	15,37 (estimada)	(1230)	—	—
Rádio	Ra	88	(226)	5,0	700	—	—
Radônio	Rn	86	(222)	$9,96 \times 10^{-3}$ (0°C)	(-71)	-61,8	0,092
Rênio	Re	75	186,2	21,02	3180	5900	0,134
Ródio	Rh	45	102,905	12,41	1963	4500	0,243
Roentgênio	Rg	111	(280)	—	—	—	—
Rubídio	Rb	37	85,47	1,532	39,49	688	0,364
Rutênio	Ru	44	101,107	12,37	2250	4900	0,239
Rutherfordórdio	Rf	104	261,11	—	—	—	—
Samário	Sm	62	150,35	7,52	1072	1630	0,197
Seabórgio	Sg	106	263,118	—	—	—	—
Selênio	Se	34	78,96	4,79	221	685	0,318
Silício	Si	14	28,086	2,33	1412	2680	0,712
Sódio	Na	11	22,9898	0,9712	97,85	892	1,23
Tálio	Tl	81	204,37	11,85	304	1457	0,130

Tântalo	Ta	73	180,948	16,6	3014	5425	0,138
Tecnécio	Tc	43	(99)	11,46	2200	—	0,209
Telúrio	Te	52	127,60	6,24	449,5	990	0,201
Térbio	Tb	65	158,924	8,229	1357	2530	0,180
Titânio	Ti	22	47,90	4,54	1670	3260	0,523
Tório	Th	90	(232)	11,72	1755	(3850)	0,117
Túlio	Tm	69	168,934	9,32	1545	1720	0,159
Tungstênio	W	74	183,85	19,3	3380	5930	0,134
Ununóctio*	Uuo	118	(294)	—	—	—	—
Ununpêntio*	Uup	115	(288)	—	—	—	—
Ununséptio*	Uus	117	—	—	—	—	—
Ununtrio*	Uut	113	(284)	—	—	—	—
Urânio	U	92	(238)	18,95	1132	3818	0,117
Vanádio	V	23	50,942	6,11	1902	3400	0,490
Xenônio	Xe	54	131,30	$5,495 \times 10^{-3}$	-111,79	-108	0,159
Zinco	Zn	30	65,37	7,133	419,58	906	0,389
Zircônio	Zr	40	91,22	6,506	1852	3580	0,276

Os números entre parênteses na coluna das massas molares são os números de massa dos isótopos de vida mais longa dos elementos radioativos. Os pontos de fusão e pontos de ebulição entre parênteses são pouco confiáveis.

Os dados para os gases são válidos apenas quando eles estão no estado molecular mais comum, como H<sub>2</sub>, He, O<sub>2</sub>, Ne etc. Os calores específicos dos gases são os valores a pressão constante.

Fonte: Adaptada de J. Emsley, *The Elements*, 3a edição, 1998. Clarendon Press, Oxford. Veja também [www.webelements.com](http://www.webelements.com) para valores atualizados e, possivelmente, novos elementos.

\*Nome provisório.

# APÊNDICE G

## TABELA PERIÓDICA DOS ELEMENTOS

		Metais de transição										Metals					Metaloides	Não metais	Gases nobres 0		
												III A	IV A	V A	VIA	VII A	0				
PERÍODOS HORIZONTAIS	1	1 H																	2 He		
	2	3 Li		4 Be												5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
	3	11 Na		12 Mg												13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
	4	19 K		20 Ca												31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
	5	37 Rb		38 Sr												49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
	6	55 Cs		56 Ba												81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
	7	87 Fr		88 Ra												113 Uut	114 Fl	115 Uup	116 Lv	117 Uus	118 Uuo
		Metals de transição																			
		Série dos lantanídeos*																			
		Série dos actínídeos†																			

Veja [www.webelements.com](http://www.webelements.com) para informações atualizadas e possíveis novos elementos.

## RESPOSTAS

# dos Testes e das Perguntas e Problemas Ímpares

## Capítulo 1

**PR 1.** (a)  $4,00 \times 10^4$  km; (b)  $5,10 \times 10^8$  km<sup>2</sup>; (c)  $1,08 \times 10^{12}$  km<sup>3</sup> **3.** (a)  $10^9$   $\mu\text{m}$ ; (b)  $10^{-4}$ ; (c)  $9,1 \times 10^5$   $\mu\text{m}$   
**5.** (a) 160 varas; (b) 40 cadeias **7.**  $1,1 \times 10^3$  acres-pés **9.**  $1,9 \times 10^{22}$  cm<sup>3</sup> **11.** (a) 1,43; (b) 0,864 **13.** (a) 495 s; (b) 141 s; (c) 198 s; (d) -245 s **15.**  $1,21 \times 10^{12}$   $\mu\text{s}$  **17.** C, D, A, B, E; o critério importante é a constância dos resultados, independentemente do valor **19.**  $5,2 \times 10^6$  m **21.**  $9,0 \times 10^{49}$  átomos **23.** (a)  $1 \times 10^3$  kg; (b) 158 kg/s **25.**  $1,9 \times 10^5$  kg **27.** (a)  $1,18 \times 10^{-29}$  m<sup>3</sup>; (b) 0,282 nm **29.**  $1,75 \times 10^3$  kg **31.** 1,43 kg/min **33.** (a) 293 alqueires americanos; (b)  $3,81 \times 10^3$  alqueires americanos **35.** (a) 22 pecks; (b) 5,5 Imperial bushels; (c) 200 L **37.**  $8 \times 10^2$  km **39.** (a) 18,8 galões; (b) 22,5 galões **41.** 0,3 cord **43.** 3,8 mg/s **45.** (a) sim; (b) 8,6 segundos do universo **47.** 0,12 UA/min **49.** (a) 3,88; (b) 7,65; (c) 156 ken<sup>3</sup>; (d)  $1,19 \times 10^3$  m<sup>3</sup> **51.** (a) 3,9 m, 4,8 m; (b)  $3,9 \times 10^3$  mm,  $4,8 \times 10^3$  mm; (c) 2,2 m<sup>3</sup>, 4,2 m<sup>3</sup> **53.** (a)  $4,9 \times 10^{-6}$  parsecs; (b)  $1,6 \times 10^{-5}$  anos-luz **55.** (a) 3 nabucodonosores e 1 musalém; (b) 0,37 garrafa normal; (c) 0,26 L **57.** 10,7 pimentas habanero **59.** 700 a 1500 ostras

## Capítulo 2

**T 1.** b e c **2.** (verifique a derivada  $dx/dt$ ) (a) 1 e 4; (b) 2 e 3 **3.** (a) positivo; (b) negativo; (c) negativo; (d) positivo **4.** 1 e 4 ( $a = d^2 x/dt^2$  deve ser constante) **5.** (a) positivo (deslocamento para cima ao longo do eixo  $y$ ); (b) negativo (deslocamento para baixo ao longo do eixo  $y$ ); (c)  $a = -g = -9,8$  m/s<sup>2</sup>

**P 1.** (a) negativo; (b) positivo; (c) sim; (d) positiva; (e) constante **3.** (a) todas iguais; (b) 4, 1 e 2, 3 **5.** (a) positivo; (b) negativo; (c) 3 e 5; (d) 2 e 6, 3 e 5, 1 e 4 **7.** (a)  $D$ ; (b)  $E$  **9.** (a) 3, 2, 1; (b) 1, 2, 3; (c) todas iguais; (d) 1, 2, 3 **11.** 1 e 2, 3

**PR 1.** 13 m **3.** (a) +40 km/h; (b) 40 km/h **5.** (a) 0; (b) -2 m; (c) 0; (d) 12 m; (e) +12 m; (f) +7 m/s **7.** 60 km **9.** 1,4 m **11.** 128 km/h **13.** (a) 73 km/h; (b) 68 km/h; (c) 70 km/h; (d) 0 **15.** (a) -6 m/s; (b) no sentido negativo; (c) 6 m/s; (d) diminuindo; (e) 2 s; (f) não **17.** (a) 28,5 cm/s; (b) 18,0 cm/s; (c) 40,5 cm/s; (d) 28,1 cm/s; (e) 30,3 cm/s **19.** -20 m/s<sup>2</sup> **21.** (a) 1,10 m/s; (b) 6,11 mm/s<sup>2</sup>; (c) 1,47 m/s; (d) 6,11 mm/s<sup>2</sup> **23.**  $1,62 \times 10^{15}$  m/s<sup>2</sup> **25.** (a) 30 s; (b) 300 m **27.** (a) +1,6 m/s; (b) +18 m/s **29.** (a) 10,6 m; (b) 41,5 s **31.** (a)  $3,1 \times 10^6$  s; (b)  $4,6 \times 10^{13}$  m **33.** (a) 3,56 m/s<sup>2</sup>; (b) 8,43 m/s **35.** 0,90 m/s<sup>2</sup> **37.** (a) 4,0 m/s<sup>2</sup>; (b) positivo **39.** (a) -2,5 m/s<sup>2</sup>; (b) 1; (d) 0; (e) 2 **41.** 40 m **43.** 0,994 m/s<sup>2</sup> **45.** (a) 31 m/s; (b) 6,4 s **47.** (a) 29,4 m; (b) 2,45 s **49.** (a) 5,4 s; (b) 41 m/s **51.** (a) 20 m; (b) 59 m **53.** 4,0 m/s **55.** (a) 857 m/s<sup>2</sup>; (b) para cima **57.** (a)  $1,26 \times 10^3$  m/s<sup>2</sup>; (b) para cima **59.** (a) 89 cm; (b) 22 cm **61.** 20,4 m **63.** 2,34 m **65.** (a) 2,25 m/s; (b) 3,90 m/s **67.** 0,56 m/s **69.** 100 m **71.** (a) 2,00 s; (b) 12 cm; (c) -9,00 cm/s<sup>2</sup>; (d) para a direita; (e) para a esquerda; (f) 3,46 s **73.** (a) 82 m; (b) 19 m/s **75.** (a) 0,74 s; (b) 6,2 m/s<sup>2</sup> **77.** (a) 3,1 m/s<sup>2</sup>; (b) 45 m; (c) 13 s **79.** 17 m/s **81.** +47 m/s **83.** (a) 1,23 cm; (b) por 4; (c) por 9; (d) por 16; (e) por 25 **85.** 25 km/h **87.**  $1,2 \times$  **89.** 4H **91.** (a) 3,2 s; (b) 1,3 s **93.** (a) 8,85 m/s; (b) 1,00 m **95.** (a) 2,0 m/s<sup>2</sup>; (b) 12 m/s; (c) 45 m **97.** (a) 48,5 m/s; (b)

4,95 s; (c) 34,3 m/s; (d) 3,50 s **99.** 22,0 m/s **101.** (a)  $v = (v^2 + 2gh)^{0,5}$ ; (b)  $t = [(v^2 + 2gh)^{0,5} - v^0]/g$ ; (c) igual a (a); (d)  $t = [(v^2 + 2gh)^{0,5} + v^0]/g$ , maior que **103.** 414 ms **105.** 90 m **107.** 0,556 s **109.** (a) 0,28 m/s<sup>2</sup>; (b) 0,28 m/s<sup>2</sup> **111.** (a) 10,2 s; (b) 10,0 m **113.** (a) 5,44 s; (b) 53,3 m/s; (c) 5,80 m **115.** 2,3 cm/min **117.** 0,15 m/s **119.** (a) 1,0 cm/s; (b) 1,6 cm/s, 1,1 cm/s, 0; (c) -0,79 cm/s<sup>2</sup>; (d) 0, -0,87 cm/s<sup>2</sup>, -1,2 cm/s<sup>2</sup>

### Capítulo 3

**T 1.** (a) 7 m ( $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  no mesmo sentido); (b) 1 m ( $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  em sentidos opostos) **2.**  $c, d, f$  (a origem da segunda componente deve coincidir com a extremidade da primeira;  $a$  deve ligar a origem da primeira componente com a extremidade da segunda) **3.** (a) +, +; (b) +, -; (c) +, + (o vetor deve ser traçado da origem de  $d^1$  à extremidade de  $d^2$ ) **4.** (a) 90°; (b) 0° (os vetores são paralelos); (c) 180° (os vetores são antiparalelos) **5.** (a) 0° ou 180°; (b) 90°

**P 1.** sim, se os vetores forem paralelos **3.** A sequência  $\vec{d}_2, \vec{d}_1$  ou a sequência  $\vec{d}_2, \vec{d}_2, \vec{d}_3$  **5.** todos, menos (e) **7.** (a) sim; (b) sim; (c) não **9.** (a) +x para (1), +z para (2), +z para (3); (b) -x para (1), -z para (2), -z para (3) **11.**  $\vec{s}, \vec{p}, \vec{r}$  ou **13.** Corretas:  $c, d, f, h$ . Incorretas:  $a$  (não é possível calcular o produto escalar de um vetor por um escalar),  $b$  (não é possível calcular o produto vetorial de um vetor por um escalar),  $e, g, i, j$  (não é possível somar um escalar e um vetor).

**PR 1.** (a) -2,5 m; (b) -6,9 m **3.** (a) 47,2 m; (b) 122° **5.** (a) 156 km; (b) 39,8° a oeste do norte **7.** (a) paralelos; (b) antiparalelos; (c) perpendiculares **9.** (a)  $(3,0 \text{ m})\hat{i} - (2,0 \text{ m})\hat{j} + (5,0 \text{ m})\hat{k}$ ; (b)  $(5,0 \text{ m})\hat{i} - (4,0 \text{ m})\hat{j} - (3,0 \text{ m})\hat{k}$ ; (c)  $(-5,0 \text{ m})\hat{i} + (4,0 \text{ m})\hat{j} + (3,0 \text{ m})\hat{k}$  **11.** (a)  $(-9,0 \text{ m})\hat{i} + (10 \text{ m})\hat{j}$ ; (b) 13 m; (c) 132° **13.** 4,74 km **15.** (a) 1,59 m; (b) 12,1 m; (c) 12,2 m; (d) 82,5° **17.** (a) 38 m; (b) -37,5°; (c) 130 m; (d) 1,2°; (e) 62 m; (f) 130° **19.** (a) 5,39 m; (b) 21,8° à esquerda **21.** (a) -70,0 cm; (b) 80,0 cm; (c) 141 cm; (d) -172° **23.** 3,2 **25.** 2,6 km **27.** (a)  $8\hat{i} + 16\hat{j}$ ; (b)  $2\hat{i} + 4\hat{j}$  **29.** (a) 7,5 cm; (b) 90°; (c) 8,6 cm; (d) 48° **31.** (a) 9,51 m; (b) 14,1 m; (c) 13,4 m; (d) 10,5 m **33.** (a) 12; (b) +z; (c) 12; (d) -z; (e) 12; (f) +z **35.** (a) -18,8 unidades; (b) 26,9 unidades, na direção +z **37.** (a) -21; (b) -9; (c)  $5\hat{i} - 11\hat{j} - 9\hat{k}$  **39.** 70,5° **41.** 22° **43.** (a) 3,00 m; (b) 0; (c) 3,46 m; (d) 2,00 m; (e) -5,00 m; (f) 8,66 m; (g) -6,67; (h) 4,33 **45.** (a) -83,4; (b)  $(1,14 \times 10^3)\hat{k}$ ; (c)  $1,14 \times 10^3$ ,  $\theta$  não é definido,  $\phi = 0^\circ$ ; (d) 90,0°; (e)  $-5,14\hat{i} + 6,13\hat{j} + 3,00\hat{k}$ ; (f) 8,54,  $\theta = 130^\circ$ ,  $\phi = 69,4^\circ$  **47.** (a) 140°; (b) 90,0°; (c) 99,1° **49.** (a) 103 km; (b) 60,9° ao norte do oeste **51.** (a) 27,8 m; (b) 13,4 m **53.** (a) 30; (b) 52 **55.** (a) -2,83 m; (b) -2,83 m; (c) 5,00 m; (d) 0; (e) 3,00 m; (f) 5,20 m; (g) 5,17 m; (h) 2,37 m; (i) 5,69 m; (j) 25° ao norte do leste; (k) 5,69 m; (l) 25° ao sul do oeste **57.** 4,1 **59.** (a)  $(9,19 \text{ m})\hat{i} + (7,71 \text{ m})\hat{j}$ ; (b)  $(14,0 \text{ m})\hat{i} + (3,41 \text{ m})\hat{j}$  **61.** (a)  $11\hat{i} + 5,0\hat{j} - 7,0\hat{k}$ ; (b) 120°; (c) -4,9; (d) 7,3 **63.** (a) 3,0 m<sup>2</sup>; (b) 52 m<sup>3</sup>; (c)  $(11 \text{ m}^2)\hat{i} + (9,0 \text{ m}^2)\hat{j} + (3,0 \text{ m}^2)\hat{k}$ ; **65.** (a)  $(-40\hat{i} - 20\hat{j} + 25\hat{k})$  m; (b) 45 m **67.** (a) 0; (b) 0; (c) -1; (d) para oeste; (e) para cima; (f) para oeste **69.** (a) 168 cm; (b) 32,5° **71.** (a) 15 m; (b) sul; (c) 6,0 m; (d) norte **73.** (a) 2k; (b) 26; (c) 46; (d) 5,81 **75.** (a) para cima; (b) 0; (c) sul; (d) 1; (e) 0 **77.** (a)  $(1300 \text{ m})\hat{i} + (2200 \text{ m})\hat{j} - (410 \text{ m})\hat{k}$ ; (b)  $2,56 \times 10^3$  m **79.** 8,4

### Capítulo 4

**T 1.** (trace  $\vec{v}$  tangente à trajetória, com a origem na trajetória) (a) primeiro; (b) terceiro **2.** (calcule a derivada segunda em relação ao tempo) (1) e (3)  $a_x$  e  $a_y$  são constantes e, portanto,  $\vec{a}$  é constante; (2) e (4)  $a_y$  é constante mas  $a_x$  não é constante e, portanto,  $\vec{a}$  não é constante **3.** sim **4.** (a)  $v_x$  é constante; (b)  $v_y$  é inicialmente positiva, diminui até zero e depois se torna cada vez mais negativa; (c)  $a_x = 0$  sempre; (d)  $a_y$

=  $-g$  sempre 5. (a)  $-(4 \text{ m/s})\hat{i}$ ; (b)  $-(8 \text{ m/s}^2)\hat{j}$

**P 1.**  $a$  e  $b$  empatados,  $c$  3. diminui 5.  $a$ ,  $b$ ,  $c$  7. (a) 0; (b) 350 km/h; (c) 350 km/h; (d) igual (a componente vertical do movimento seria a mesma) 9. (a) todas iguais; (b) todas iguais; (c) 3, 2, 1; (d) 3, 2, 1 11. 2, depois 1 e 4 empatados, depois 3 13. (a) sim; (b) não; (c) sim 15. (a) diminui; (b) aumenta 17. no ponto em que a altura é máxima

**PR 1.** (a) 6,2 m 3.  $(-2,0 \text{ m})\hat{i} + (6,0 \text{ m})\hat{j} - (10 \text{ m})\hat{k}$  5. (a) 7,59 km/h; (b)  $22,5^\circ$  a leste do norte 7.  $(-0,70 \text{ m/s})\hat{i} + (1,4 \text{ m/s})\hat{j} - (0,40 \text{ m/s})\hat{k}$  9. (a) 0,83 cm/s; (b)  $0^\circ$ ; (c) 0,11 m/s; (d)  $-63^\circ$  11. (a)  $(6,00 \text{ m})\hat{i} - (106 \text{ m})\hat{j}$ ; (b)  $(19,0 \text{ m/s})\hat{i} - (224 \text{ m/s})\hat{j}$ ; (c)  $(24,0 \text{ m/s}^2)\hat{i} - (336 \text{ m/s}^2)\hat{j}$ ; (d)  $-85,2^\circ$  13. (a)  $(8 \text{ m/s}^2)t\hat{j} + (1 \text{ m/s})\hat{k}$ ; (b)  $(8 \text{ m/s}^2)\hat{j}$  15. (a)  $(-1,50 \text{ m/s})\hat{j}$ ; (b)  $(4,50 \text{ m})\hat{i} - (2,25 \text{ m})\hat{j}$  17.  $(32 \text{ m/s})\hat{i}$  19. (a)  $(72,0 \text{ m})\hat{i} + (90,7 \text{ m})\hat{j}$ ; (b)  $49,5^\circ$  21. (a) 18 cm; (b) 1,9 m 23. (a) 3,03 s; (b) 758 m; (c) 29,7 m/s 25. 43,1 m/s (155 km/h) 27. (a) 10,0 s; (b) 897 m 29.  $78,5^\circ$  31. 3,35 m 33. (a) 202 m/s; (b) 806 m; (c) 161 m/s; (d)  $-171 \text{ m/s}$  35. 4,84 cm 37. (a) 1,60 m; (b) 6,86 m; (c) 2,86 m 39. (a) 32,3 m; (b) 21,9 m/s; (c)  $-40,4^\circ$  41.  $55,5^\circ$  43. (a) 11 m; (b) 23 m; (c) 17 m/s; (d)  $63^\circ$  45. (a) na rampa; (b) 5,82 m; (c)  $31,0^\circ$  47. (a) sim; (b) 2,56 m 49. (a)  $31^\circ$ ; (b)  $63^\circ$  51. (a)  $2,3^\circ$ ; (b) 1,4 m; (c)  $18^\circ$  53. (a) 75,0 m; (b) 31,9 m/s; (c)  $66,9^\circ$ ; (d) 25,5 m 55. no terceiro 57. (a) 7,32 m; (b) para oeste; (c) para o norte 59. (a) 12 s; (b)  $4,1 \text{ m/s}^2$ ; (c) para baixo; (d)  $4,1 \text{ m/s}^2$ ; (e) para cima 61. (a)  $1,3 \times 10^5 \text{ m/s}$ ; (b)  $7,9 \times 10^5 \text{ m/s}^2$ ; (c) aumentam 63. 2,92 m 65.  $(3,00 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (6,00 \text{ m/s}^2)\hat{j}$  67.  $160 \text{ m/s}^2$  69. (a)  $13 \text{ m/s}^2$ ; (b) para leste; (c)  $13 \text{ m/s}^2$ ; (d) para leste 71. 1,67 73. (a)  $(80 \text{ km/h})\hat{i} - (60 \text{ km/h})\hat{j}$ ; (b)  $0^\circ$ ; (c) não 75. 32 m/s 77.  $60^\circ$  79. (a) 38 nós; (b)  $1,5^\circ$  a leste do norte; (c) 4,2 h; (d)  $1,5^\circ$  a oeste do sul 81. (a)  $(-32 \text{ km/h})\hat{i} - (46 \text{ km/h})\hat{j}$ ; (b)  $[(2,5 \text{ km}) - (32 \text{ km/h})t]\hat{i} + [(4,0 \text{ km}) - (46 \text{ km/h})t]\hat{j}$ ; (c) 0,084 h; (d)  $2 \times 10^2 \text{ m}$  83. (a)  $-30^\circ$ ; (b) 69 min; (c) 80 min; (d) 80 min; (e)  $0^\circ$ ; (f) 60 min 85. (a) 2,7 km; (b)  $76^\circ$  no sentido horário 87. (a) 44 m; (b) 13 m; (c) 8,9 m 89. (a) 45 m; (b) 22 m/s 91. (a)  $2,6 \times 10^2 \text{ m/s}$ ; (b) 45 s; (c) aumentaria 93. (a) 63 km; (b)  $18^\circ$  ao sul do leste; (c) 0,70 km/h; (d)  $18^\circ$  ao sul do leste; (e) 1,6 km/h; (f) 1,2 km/h; (g)  $33^\circ$  ao norte do leste 95. (a) 1,5; (b) (36 m, 54 m) 97. (a) 62 ms; (b)  $4,8 \times 10^2 \text{ m/s}$  99. 2,64 m 101. (a) 2,5 m; (b) 0,82 m; (c)  $9,8 \text{ m/s}^2$ ; (d)  $9,8 \text{ m/s}^2$  103. (a) 6,79 km/h; (b)  $6,96^\circ$  105. (a) 16 m/s; (b)  $23^\circ$ ; (c) acima; (d) 27 m/s; (e)  $57^\circ$ ; (f) abaixo 107. (a) 4,2 m,  $45^\circ$ ; (b) 5,5 m,  $68^\circ$ ; (c) 6,0 m,  $90^\circ$ ; (d) 4,2 m,  $135^\circ$ ; (e) 0,85 m/s,  $135^\circ$ ; (f) 0,94 m/s,  $90^\circ$ ; (g) 0,94 m/s,  $180^\circ$ ; (h)  $0,30 \text{ m/s}^2$ ,  $180^\circ$ ; (i)  $0,30 \text{ m/s}^2$ ,  $270^\circ$  109. (a)  $5,4 \times 10^{-13} \text{ m}$ ; (b) diminui 111. (a)  $0,034 \text{ m/s}^2$ ; (b) 84 min 113. (a) 8,43 m; (b)  $-129^\circ$  115. (a) 2,00 ns; (b) 2,00 mm; (c)  $1,00 \times 10^7 \text{ m/s}$ ; (d)  $2,00 \times 10^6 \text{ m/s}$  117. (a) 24 m/s; (b)  $65^\circ$  119.  $93^\circ$  em relação à direção do movimento do vagão 121. (a)  $4,6 \times 10^{12} \text{ m}$ ; (b)  $2,4 \times 10^5 \text{ s}$  123. (a)  $6,29^\circ$ ; (b)  $83,7^\circ$  125.  $3 \times 10^1 \text{ m}$  127. (a)  $(6,0\hat{i} + 4,2\hat{j}) \text{ m/s}$ ; (b)  $(18\hat{i} + 6,3\hat{j}) \text{ m}$  129. (a) 38 ft/s; (b) 32 ft/s; (c) 9,3 ft 131. (a) 11 m; (b) 45 m/s 133. (a) 5,8 m/s; (b) 17 m; (c)  $67^\circ$  135. (a) 32,4 m; (b)  $-37,7 \text{ m}$  137. 88,6 km/h

## Capítulo 5

**T 1.**  $c$ ,  $d$  e  $e$  2. (a) e (b) 2 N, para a esquerda (a aceleração é zero nas duas situações) 3. (a) igual; (b) maior (a aceleração é para cima e, portanto, a força resultante é para cima) 4. (a) igual; (b) maior; (c) menor 5. (a) aumentam; (b) sim; (c) permanecem os mesmos; (d) sim

**P 1.** (a) 2, 3, 4; (b) 1, 3, 4; (c) 1,  $+y$ ; 2,  $+x$ ; 3, quarto quadrante; 4, terceiro quadrante 3. aumentar 5. (a) 2 e 4; (b) 2 e 4 7. (a)  $M$ ; (b)  $M$ ; (c)  $M$ ; (d)  $2M$ ; (e)  $3M$  9. (a) 20 kg; (b) 18 kg; (c) 10 kg; (d) todas iguais; (e) 3, 2, 1 11. (a) aumenta a partir do valor inicial  $mg$ ; (b) diminui de  $mg$  até zero (e depois o bloco

perde o contato com o piso)

**PR 1.**  $2,9 \text{ m/s}^2$  **3.** (a)  $1,88 \text{ N}$ ; (b)  $0,684 \text{ N}$ ; (c)  $(1,88 \text{ N})\hat{i} + (0,684 \text{ N})\hat{j}$  **5.** (a)  $(0,86 \text{ m/s}^2)\hat{i} - (0,16 \text{ m/s}^2)\hat{j}$ ; (b)  $0,88 \text{ m/s}^2$ ; (c)  $-11^\circ$  **7.** (a)  $(-32,0 \text{ N})\hat{i} - (20,8 \text{ N})\hat{j}$ ; (b)  $38,2 \text{ N}$ ; (c)  $-147^\circ$  **9.** (a)  $8,37 \text{ N}$ ; (b)  $-133^\circ$ ; (c)  $-125^\circ$  **11.**  $9,0 \text{ m/s}^2$  **13.** (a)  $4,0 \text{ kg}$ ; (b)  $1,0 \text{ kg}$ ; (c)  $4,0 \text{ kg}$ ; (d)  $1,0 \text{ kg}$  **15.** (a)  $108 \text{ N}$ ; (b)  $108 \text{ N}$ ; (c)  $108 \text{ N}$  **17.** (a)  $42 \text{ N}$ ; (b)  $72 \text{ N}$ ; (c)  $4,9 \text{ m/s}^2$  **19.**  $1,2 \times 10^5 \text{ N}$  **21.** (a)  $11,7 \text{ N}$ ; (b)  $-59,0^\circ$  **23.** (a)  $(285 \text{ N})\hat{i} + (705 \text{ N})\hat{j}$ ; (b)  $(285 \text{ N})\hat{i} - (115 \text{ N})\hat{j}$ ; (c)  $307 \text{ N}$ ; (d)  $22,0^\circ$ ; (e)  $3,67 \text{ m/s}^2$  (f)  $22,0^\circ$  **25.** (a)  $0,022 \text{ m/s}^2$ ; (b)  $8,3 \times 10^4 \text{ km}$ ; (c)  $1,9 \times 10^3 \text{ m/s}$  **27.**  $1,5 \text{ mm}$  **29.** (a)  $494 \text{ N}$ ; (b) para cima; (c)  $494 \text{ N}$ ; (d) para baixo **31.** (a)  $1,18 \text{ m}$ ; (b)  $0,674 \text{ s}$ ; (c)  $3,50 \text{ m/s}$  **33.**  $1,8 \times 10^4 \text{ N}$  **35.** (a)  $46,7^\circ$ ; (b)  $28,0^\circ$  **37.** (a)  $0,62 \text{ m/s}^2$ ; (b)  $0,13 \text{ m/s}^2$ ; (c)  $2,6 \text{ m}$  **39.** (a)  $2,2 \times 10^{-3} \text{ N}$ ; (b)  $3,7 \times 10^{-3} \text{ N}$  **41.** (a)  $1,4 \text{ m/s}^2$ ; (b)  $4,1 \text{ m/s}$  **43.** (a)  $1,23 \text{ N}$ ; (b)  $2,46 \text{ N}$ ; (c)  $3,69 \text{ N}$ ; (d)  $4,92 \text{ N}$ ; (e)  $6,15 \text{ N}$ ; (f)  $0,250 \text{ N}$  **45.** (a)  $31,3 \text{ kN}$ ; (b)  $24,3 \text{ kN}$  **47.**  $6,4 \times 10^3 \text{ N}$  **49.** (a)  $2,18 \text{ m/s}^2$ ; (b)  $116 \text{ N}$ ; (c)  $21,0 \text{ m/s}^2$  **51.** (a)  $3,6 \text{ m/s}^2$ ; (b)  $17 \text{ N}$  **53.** (a)  $0,970 \text{ m/s}^2$ ; (b)  $11,6 \text{ N}$ ; (c)  $34,9 \text{ N}$  **55.** (a)  $1,1 \text{ N}$  **57.** (a)  $0,735 \text{ m/s}^2$ ; (b) para baixo; (c)  $20,8 \text{ N}$  **59.** (a)  $4,9 \text{ m/s}^2$ ; (b)  $2,0 \text{ m/s}^2$ ; (c) para cima; (d)  $120 \text{ N}$  **61.**  $2Ma/(a + g)$  **63.** (a)  $8,0 \text{ m/s}$ ; (b)  $+x$  **65.** (a)  $0,653 \text{ m/s}^3$ ; (b)  $0,896 \text{ m/s}^3$ ; (c)  $6,50 \text{ s}$  **67.**  $81,7 \text{ N}$  **69.**  $2,4 \text{ N}$  **71.**  $16 \text{ N}$  **73.** (a)  $2,6 \text{ N}$ ; (b)  $17^\circ$  **75.** (a)  $0$ ; (b)  $0,83 \text{ m/s}^2$ ; (c)  $0$  **77.** (a)  $0,74 \text{ m/s}^2$ ; (b)  $7,3 \text{ m/s}^2$  **79.** (a)  $11 \text{ N}$ ; (b)  $2,2 \text{ kg}$ ; (c)  $0$ ; (d)  $2,2 \text{ kg}$  **81.**  $195 \text{ N}$  **83.** (a)  $4,6 \text{ m/s}^2$ ; (b)  $2,6 \text{ m/s}^2$  **85.** (a) a corda arrebenta; (b)  $1,6 \text{ m/s}^2$  **87.** (a)  $65 \text{ N}$ ; (b)  $49 \text{ N}$  **89.** (a)  $4,6 \times 10^3 \text{ N}$ ; (b)  $5,8 \times 10^3 \text{ N}$  **91.** (a)  $1,8 \times 10^2 \text{ N}$ ; (b)  $6,4 \times 10^2 \text{ N}$  **93.** (a)  $44 \text{ N}$ ; (b)  $78 \text{ N}$ ; (c)  $54 \text{ N}$ ; (d)  $152 \text{ N}$  **95.** (a)  $4 \text{ kg}$ ; (b)  $6,5 \text{ m/s}^2$ ; (c)  $13 \text{ N}$  **97.** (a)  $(1,0\hat{i} - 2,0\hat{j}) \text{ N}$ ; (b)  $2,2 \text{ N}$ ; (c)  $-63^\circ$ ; (d)  $2,2 \text{ m/s}^2$ ; (e)  $-63^\circ$

## Capítulo 6

**T 1.** (a) zero (porque não há tentativa de deslizamento); (b)  $5 \text{ N}$ ; (c) não; (d) sim; (e)  $8 \text{ N}$  **2.** ( $\vec{a}$  sempre aponta para o centro da trajetória circular) (a)  $\vec{a}$  aponta para baixo,  $\vec{F}_N$  aponta para cima; (b)  $\vec{a}$  e  $\vec{F}_N$  apontam para cima; (c) igual; (d) maior

**P 1.** (a) diminui; (b) diminui; (c) aumenta; (d) aumenta; (e) aumenta **3.** (a) permanece o mesmo; (b) aumenta; (c) aumenta; (d) não **5.** (a) para cima; (b) horizontal, na sua direção; (c) não varia; (d) aumenta; (e) aumenta **7.** A princípio,  $\vec{f}_s$  aponta para cima ao longo da rampa, e o módulo aumenta a partir de  $mg \sin \theta$  até atingir  $f_{s,\text{máx}}$ . Daí em diante, a força se torna a força de atrito cinético, que aponta para cima ao longo da rampa e cujo módulo é  $f_k$  (um valor constante menor que  $f_{s,\text{máx}}$ ). **9.** Primeiro 4, depois 3 e depois 1, 2 e 5 empatadas **11.** (a) todas iguais; (b) todas iguais; (c) 2, 3, 1 **13.** (a) aumenta; (b) aumenta; (c) diminui; (d) diminui; (e) diminui

**PR 1.**  $36 \text{ m}$  **3.** (a)  $2,0 \times 10^2 \text{ N}$ ; (b)  $1,2 \times 10^2 \text{ N}$  **5.** (a)  $6,0 \text{ N}$ ; (b)  $3,6 \text{ N}$ ; (c)  $3,1 \text{ N}$  **7.** (a)  $1,9 \times 10^2 \text{ N}$ ; (b)  $0,56 \text{ m/s}^2$  **9.** (a)  $11 \text{ N}$ ; (b)  $0,14 \text{ m/s}^2$  **11.** (a)  $3,0 \times 10^2 \text{ N}$ ; (b)  $1,3 \text{ m/s}^2$  **13.** (a)  $1,3 \times 10^2 \text{ N}$ ; (b) não; (c)  $1,1 \times 10^2 \text{ N}$ ; (d)  $46 \text{ N}$ ; (e)  $17 \text{ N}$  **15.**  $2^\circ$  **17.** (a)  $(17 \text{ N})\hat{i}$ ; (b)  $(20 \text{ N})\hat{j}$ ; (c)  $(15 \text{ N})\hat{i}$  **19.** (a) não; (b)  $(-12 \text{ N})\hat{i} + (5,0 \text{ N})\hat{j}$  **21.** (a)  $19^\circ$ ; (b)  $3,3 \text{ kN}$  **23.**  $0,37$  **25.**  $1,0 \times 10^2 \text{ N}$  **27.** (a)  $0$ ; (b)  $(-3,9 \text{ m/s}^2)\hat{i}$ ; (c)  $(-1,0 \text{ m/s}^2)\hat{i}$  **29.** (a)  $66 \text{ N}$ ; (b)  $2,3 \text{ m/s}^2$  **31.** (a)  $3,5 \text{ m/s}^2$ ; (b)  $0,21 \text{ N}$  **33.**  $9,9 \text{ s}$  **35.**  $4,9v10^2 \text{ N}$  **37.** (a)  $3,2 \times 10^2 \text{ km/h}$ ; (b)  $6,5 \times 10^2 \text{ km/h}$ ; (c) não **39.**  $2,3$  **41.**  $0,60$  **43.**  $21 \text{ m}$  **45.** (a) mais leve; (b)  $778 \text{ N}$ ; (c)  $223 \text{ N}$ ; (d)  $1,11 \text{ kN}$  **47.** (a)  $10 \text{ s}$ ; (b)  $4,9 \times 10^2 \text{ N}$ ; (c)  $1,1 \times 10^3 \text{ N}$  **49.**  $1,37 \times 10^3 \text{ N}$  **51.**  $2,2 \text{ km}$  **53.**  $12^\circ$  **55.**  $2,6 \times 10^3 \text{ N}$  **57.**  $1,81 \text{ m/s}$  **59.** (a)  $8,74 \text{ N}$ ; (b)  $37,9 \text{ N}$ ; (c)  $6,45 \text{ m/s}$ ; (d) na direção da haste **61.** (a)  $27 \text{ N}$ ; (b)  $3,0 \text{ m/s}^2$  **63.** (b)  $240 \text{ N}$ ; (c)  $0,60$  **65.** (a)  $69 \text{ km/h}$ ; (b)  $139 \text{ km/h}$ ; (c) sim **67.**  $g(\sin \theta - 2^{0,5} \mu^k \cos \theta)$  **69.**  $3,4 \text{ m/s}^2$  **71.** (a)  $35,3 \text{ N}$ ; (b)

39,7 N; (c) 320 N **73.** (a) 7,5 m/s<sup>2</sup>; (b) para baixo; (c) 9,5 m/s<sup>2</sup>; (d) para baixo **75.** (a)  $3,0 \times 10^5$  N; (b) 1,2° **77.** 147 m/s **79.** (a) 13 N; (b) 1,6 m/s<sup>2</sup> **81.** (a) 275 N; (b) 877 N **83.** (a) 84,2 N; (b) 52,8 N; (c) 1,87 m/s<sup>2</sup> **85.** 3,4% **87.** (a)  $3,21 \times 10^3$  N; (b) sim **89.** (a) 222 N; (b) 334 N; (c) 311 N; (d) 311 N; (e) c, d **91.** (a)  $v^2 \rho / (4g \sin \theta)$ ; (b) não **93.** (a) 0,34; (b) 0,24 **95.** (a)  $\mu^k mg / (\sin \theta - \mu^k \cos \theta)$ ; (b)  $\theta^0 = \tan^{-1} \mu^s$  **97.** 0,18 **99.** (a) 56 N; (b) 59 N; (c)  $1,1 \times 10^3$  N **101.** 0,76 **103.** (a) no ponto mais baixo; (b) 9,5 m/s **105.** 0,56

## Capítulo 7

**T 1.** (a) diminui; (b) permanece a mesma; (c) negativo, nulo **2.** (a) positivo; (b) negativo; (c) nulo **3.** nula  
**P 1.** são todas iguais **3.** (a) positivo; (b) negativo; (c) negativo **5.** *b* (trabalho positivo), *a* (trabalho nulo), *c* (trabalho negativo), *d* (trabalho mais negativo) **7.** são todos iguais **9.** (a) *A*; (b) *B* **11.** 2, 3, 1  
**PR 1.** (a)  $2,9 \times 10^7$  m/s; (b)  $2,1 \times 10^{-13}$  J **3.** (a)  $5 \times 10^{14}$  J; (b) 0,1 megaton de TNT; (c) 8 bombas **5.** (a) 2,4 m/s; (b) 4,8 m/s **7.** 0,96 J **9.** 20 J **11.** (a) 62,3°; (b) 118° **13.** (a)  $1,7 \times 10^2$  N; (b)  $3,4 \times 10^2$  m; (c)  $-5,8 \times 10^4$  J; (d)  $3,4 \times 10^2$  N; (e)  $1,7 \times 10^2$  m; (f)  $-5,8 \times 10^4$  J **15.** (a) 1,50 J; (b) aumenta **17.** (a) 12 kJ; (b) -11 kJ; (c) 1,1 kJ; (d) 5,4 m/s **19.** 25 J **21.** (a)  $-3Mgd/4$ ; (b)  $Mgd$ ; (c)  $Mgd/4$ ; (d)  $(gd/2)^{0,5}$  **23.** 4,41 J **25.** (a) 25,9 kJ; (b) 2,45 N **27.** (a) 7,2 J; (b) 7,2 J; (c) 0; (d) -25 J **29.** (a) 0,90 J; (b) 2,1 J; (c) 0 **31.** (a) 6,6 m/s; (b) 4,7 m **33.** (a) 0,12 m; (b) 0,36 J; (c) -0,36 J; (d) 0,060 m; (e) 0,090 J **35.** (a) 0; (b) 0 **37.** (a) 42 J; (b) 30 J; (c) 12 J; (d) 6,5 m/s, eixo +x; (e) 5,5 m/s, eixo +x; (f) 3,5 m/s, eixo +x **39.** 4,00 N/m **41.**  $5,3 \times 10^2$  J **43.** (a) 0,83 J; (b) 2,5 J; (c) 4,2 J; (d) 5,0 W **45.**  $4,9 \times 10^2$  W **47.** (a)  $1,0 \times 10^2$  J; (b) 8,4 W **49.**  $7,4 \times 10^2$  W **51.** (a) 32,0 J; (b) 8,00 W; (c) 78,2° **53.** (a) 1,20 J; (b) 1,10 m/s **55.** (a)  $1,8 \times 10^5$  ft·lb; (b) 0,55 hp **57.** (a) 797 N; (b) 0; (c) -1,55 kJ; (d) 0; (e) 1,55 kJ; (f) *F* varia durante o deslocamento **59.** (a) 11 J; (b) -21 J **61.** -6 J **63.** (a) 314 J; (b) -155 J; (c) 0; (d) 158 J **65.** (a) 98 N; (b) 4,0 cm; (c) 3,9 J; (d) -3,9 J **67.** (a) 23 mm; (b) 45 N **69.** 165 kW **71.** -37 J **73.** (a) 13 J; (b) 13 J **75.** 235 kW **77.** (a) 6 J; (b) 6,0 J **79.** (a) 0,6 J; (b) 0; (c) -0,6 J **81.** (a) 3,35 m/s; (b) 22,5 J; (c) 0; (d) 0; (e) 0,212 m **83.** (a)  $-5,20 \times 10^{-2}$  J; (b) -0,160 J **85.** 6,63 m/s

## Capítulo 8

**T 1.** não (em duas trajetórias de *a* a *b*, o trabalho é -60 J; na terceira, é 60 J) **2.** 3, 1, 2 (veja a Eq. 8-6) **3.** (a) todas iguais; (b) todas iguais **4.** (a) *CD*, *AB*, *BC* (com base nas inclinações); (b) o sentido positivo de *x* **5.** são todas iguais  
**P 1.** (a) 3, 2, 1; (b) 1, 2, 3 **3.** (a) 12 J; (b) -2 J **5.** (a) aumenta; (b) diminui; (c) diminui; (d) permanece constante em *AB* e *BC* e diminui em *CD* **7.** +30 J **9.** 2, 1, 3 **11.** -40 J  
**PR 1.** 89 N/cm **3.** (a) 167 J; (b) -167 J; (c) 196 J; (d) 29 J; (e) 167 J; (f) -167 J; (g) 296 J; (h) 129 J **5.** (a) 4,31 mJ; (b) -4,31 mJ; (c) 4,31 mJ; (d) -4,31 mJ; (e) todos aumentariam **7.** (a) 13,1 J; (b) -13,1 J; (c) 13,1 J; (d) todos aumentam **9.** (a) 17,0 m/s; (b) 26,5 m/s; (c) 33,4 m/s; (d) 56,7 m; (e) continuariam as mesmas **11.** (a) 2,08 m/s; (b) 2,08 m/s; (c) aumentaria **13.** (a) 0,98 J; (b) -0,98 J; (c) 3,1 N/cm **15.** (a)  $2,6 \times 10^2$  m; (b) permanece o mesmo; (c) diminui **17.** (a) 2,5 N; (b) 0,31 N; (c) 30 cm **19.** (a) 784 N/m; (b) 62,7 J; (c) 62,7 J; (d) 80,0 cm **21.** (a) 8,35 m/s; (b) 4,33 m/s; (c) 7,45 m/s; (d) diminuem **23.** (a) 4,85 m/s; (b) 2,42 m/s **25.**  $-3,2 \times 10^2$  J **27.** (a) não; (b)  $9,3 \times 10^2$  N **29.** (a) 35 cm; (b) 1,7 m/s **31.** (a) 39,2 J; (b) 39,2 J; (c) 4,00 m **33.** (a) 2,40 m/s; (b) 4,19 m/s **35.** (a) 39,6 cm; (b) 3,64 cm **37.** -18 mJ **39.** (a) 2,1 m/s; (b) 10 N; (c) +x; (d) 5,7 m; (e) 30 N; (f) -x **41.** (a) -3,7 J; (c) 1,3 m; (d) 9,1 m; (e) 2,2 J; (f) 4,0 m; (g) (4

$-x)e^{-x/4}$ ; (h) 4,0 m **43.** (a) 5,6 J; (b) 3,5 J **45.** (a) 30,1 J; (b) 30,1 J; (c) 0,225 **47.** 0,53 J **49.** (a) -2,9 kJ; (b)  $3,9 \times 10^2$  J; (c)  $2,1 \times 10^2$  N **51.** (a) 1,5 MJ; (b) 0,51 MJ; (c) 1,0 MJ; (d) 63 m/s **53.** (a) 67 J; (b) 67 J; (c) 46 cm **55.** (a) -0,90 J; (b) 0,46 J; (c) 1,0 m/s **57.** 1,2 m **59.** (a) 19,4 m; (b) 19,0 m/s **61.** (a)  $1,5 \times 10^{-2}$  N; (b)  $(3,8 \times 10^2)g$  **63.** (a) 7,4 m/s; (b) 90 cm; (c) 2,8 m; (d) 15 m **65.** 20 **67.** (a) 7,0 J; (b) 22 J **69.** 3,7 J **71.** 4,33 m/s **73.** 25 J **75.** (a) 4,9 m/s; (b) 4,5 N; (c)  $71^\circ$ ; (d) permanece a mesma **77.** (a) 4,8 N; (b) +x; (c) 1,5 m; (d) 13,5 m; (e) 3,5 m/s **79.** (a) 24 kJ; (b)  $4,7 \times 10^2$  N **81.** (a) 5,00 J; (b) 9,00 J; (c) 11,0 J; (d) 3,00 J; (e) 12,0 J; (f) 2,00 J; (g) 13,0 J; (h) 1,00 J; (i) 13,0 J; (j) 1,00 J; (l) 11,0 J; (m) 10,8 m; (n) volta para  $x = 0$  e para. **83.** (a) 6,0 kJ; (b)  $6,0 \times 10^2$  W; (c)  $3,0 \times 10^2$  W; (d)  $9,0 \times 10^2$  W **85.** 880 MW **87.** (a)  $v^0 = (2gL)^{0,5}$ ; (b)  $5mg$ ; (c)  $-mgL$ ; (d)  $-2mgL$  **89.** (a) 109 J; (b) 60,3 J; (c) 68,2 J; (d) 41,0 J **91.** (a) 2,7 J; (b) 1,8 J; (c) 0,39 m **93.** (a) 10 m; (b) 49 N; (c) 4,1 m; (d)  $1,2 \times 10^2$  N **95.** (a) 5,5 m/s; (b) 5,4 m; (c) permanecem as mesmas **97.** 80 mJ **99.** 24 W **101.** -12 J **103.** (a) 8,8 m/s; (b) 2,6 kJ; (c) 1,6 kW **105.** (a)  $7,4 \times 10^2$  J; (b)  $2,4 \times 10^2$  J **107.** 15 J **109.** (a)  $2,35 \times 10^3$  J; (b) 352 J **111.** 738 m **113.** (a) -3,8 kJ; (b) 31 kN **115.** (a) 300 J; (b) 93,8 J; (c) 6,38 m **117.** (a) 5,6 J; (b) 12 J; (c) 13 J **119.** (a) 1,2 J; (b) 11 m/s; (c) não; (d) não **121.** (a)  $2,1 \times 10^6$  kg; (b)  $(100 + 1,5t)^{0,5}$  m/s; (c)  $(1,5 \times 10^6)/(100 + 1,5t)^{0,5}$  N; (d) 6,7 km **123.** 54% **125.** (a)  $2,7 \times 10^9$  J; (b)  $2,7 \times 10^9$  W; (c)  $2,4 \times 10^8$  dólares **127.** 5,4 kJ **129.**  $3,1 \times 10^{11}$  W **131.** porque a força que você exerce sobre o repolho (ao baixá-lo) realiza trabalho. **135.** (a) 8,6 kJ; (b)  $8,6 \times 10^2$  W; (c)  $4,3 \times 10^2$  W; (d) 1,3 kW

## Capítulo 9

**T 1.** (a) na origem; (b) no quarto quadrante; (c) no eixo y, abaixo da origem; (d) na origem; (e) no terceiro quadrante; (f) na origem **2.** (a)-(c) no centro de massa, que continua na origem (as forças são internas ao sistema e não podem deslocar o centro de massa) **3.** (Considere as inclinações e a Eq. 9-23.) (a) 1,3 e depois 2 e 4 empatadas (força nula); (b) 3 **4.** (a) mantém inalterado; (b) mantém inalterado (veja a Eq. 9-32); (c) diminui (Eq. 9-35) **5.** (a) nula; (b) positiva (inicial para baixo, final para cima); (c) +y **6.** (Não há força externa;  $\vec{r}$  é conservado.) (a) 0; (b) não; (c) -x **7.** (a)  $10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ; (b)  $14 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ; (c)  $6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  **8.** (a)  $4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ; (b)  $8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ; (c) 3 J **9.** (a)  $2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  (conservação da componente x do momento); (b)  $3 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  (conservação da componente y do momento)

**P 1.** (a) 2 N, para a direita; (b) 2 N, para a direita; (c) maior que 2 N, para a direita **3.** b, c, a **5.** (a) x sim, y não; (b) x sim, y não; (c) x não, y sim **7.** (a) c, a energia cinética não pode ser negativa; d, a energia cinética total não pode aumentar; (b) a; (c) b **9.** (a) um dos corpos estava em repouso; (b) 2; (c) 5; (d) igual (como o choque de duas bolas de sinuca) **11.** (a) C; (b) B; (c) 3

**PR 1.** (a) -1,50 m; (b) -1,43 m **3.** (a) -6,5 cm; (b) 8,3 cm; (c) 1,4 cm **5.** (a) -0,45 cm; (b) -2,0 cm **7.** (a) 0; (b)  $3,13 \times 10^{-11}$  m **9.** (a) 28 cm; (b) 2,3 m/s **11.**  $(-4,0 \text{ m})\hat{i} + (4,0 \text{ m})\hat{j}$  **13.** 53 m **15.** (a)  $(2,35\hat{i} - 1,57\hat{j}) \text{ m/s}^2$ ; (b)  $(2,35\hat{i} - 1,57\hat{j})t \text{ m/s}$ , com t em segundos; (d) retilínea, fazendo um ângulo de  $34^\circ$  para baixo **17.** 4,2 m **19.** (a)  $7,5 \times 10^4$  J; (b)  $3,8 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ; (c)  $39^\circ$  ao sul do leste **21.** (a)  $5,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ; (b)  $10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  **23.**  $1,0 \times 10^3$  a  $1,2 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  **25.** (a)  $42 \text{ N} \cdot \text{s}$ ; (b) 2,1 kN **27.** (a) 67 m/s; (b) -x; (c) 1,2 kN; (d) -x **29.** 5 N **31.** (a)  $2,39 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s}$ ; (b)  $4,78 \times 10^5 \text{ N}$ ; (c)  $1,76 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s}$ ; (d)  $3,52 \times 10^5 \text{ N}$  **33.** (a)  $5,86 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ; (b)  $59,8^\circ$ ; (c) 2,93 kN; (d)  $59,8^\circ$  **35.**  $9,9 \times 10^2 \text{ N}$  **37.** (a)  $9,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ; (b) 3,0 kN; (c) 4,5 kN; (d) 20 m/s **39.** 3,0 mm/s **41.** (a)  $-(0,15 \text{ m/s})\hat{j}$ ; (b) 0,18 m **43.** 55 cm **45.** (a)  $(1,00\hat{i} - 0,167\hat{j}) \text{ km/s}$ ; (b) 3,23 MJ

47. (a) 14 m/s; (b)  $-45^\circ$  49.  $3,1 \times 10^2$  m/s 51. (a) 721 m/s; (b) 937 m/s 53. (a) 33%; (b) 23%; (c) diminuir  
 55. (a) +2,0 m/s; (b) -1,3 J; (c) +40 J; (d) o sistema recebeu energia de alguma fonte, como, uma pequena  
 explosão 57. (a) 4,4 m/s; (b) 0,80 59. 25 cm 61. (a) 99 g; (b) 1,9 m/s; (c) 0,93 m/s 63. (a) 3,00 m/s; (b)  
 6,00 m/s 65. (a) 1,2 kg; (b) 2,5 m/s 67. -28 cm 69. (a) 0,21 kg; (b) 7,2 m 71. (a)  $4,15 \times 10^5$  m/s; (b)  $4,84$   
 $\times 10^5$  m/s 73.  $120^\circ$  75. (a) 433 m/s; (b) 250 m/s 77. (a) 46 N; (b) nenhuma 79. (a)  $1,57 \times 10^6$  N; (b)  $1,35$   
 $\times 10^5$  kg; (c) 2,08 km/s 81. (a) 7290 m/s; (b) 8200 m/s; (c)  $1,271 \times 10^{10}$  J; (d)  $1,275 \times 10^{10}$  J 83. (a) 1,92  
 m; (b) 0,640 m 85. (a) 1,78 m/s; (b) menor; (c) menor; (d) maior 87. (a) 3,7 m/s; (b)  $1,3 \text{ N} \cdot \text{s}$ ; (c)  $1,8 \times$   
 $10^2$  N 89. (a)  $(7,4 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s})\hat{i} - (7,4 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s})\hat{j}$ ; (b)  $(-7,4 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s})\hat{i}$ ; (c)  $2,3 \times 10^3$  N; (d)  $2,1 \times 10^4$   
 N; (e)  $-45^\circ$  91. +4,4 m/s 93.  $1,18 \times 10^4$  kg 95. (a) 1,9 m/s; (b)  $-30^\circ$ ; (c) elástica 97. (a) 6,9 m/s; (b)  $30^\circ$ ;  
 (c) 6,9 m/s; (d)  $-30^\circ$ ; (e) 2,0 m/s; (f)  $-180^\circ$  99. (a) 25 mm; (b) 26 mm; (c) para baixo; (d)  $1,6 \times 10^{-2}$  m/s<sup>2</sup>  
 101. 29 J 103. 2,2 kg 105. 5,0 kg 107. (a) 50 kg/s; (b)  $1,6 \times 10^2$  kg/s 109. (a)  $4,6 \times 10^3$  km; (b) 73% 111.  
 190 m/s 113. 28,8 N 115. (a) 0,745 mm; (b)  $153^\circ$ ; (c) 1,67 mJ 117. (a)  $(2,67 \text{ m/s})\hat{i} + (-3,00 \text{ m/s})\hat{j}$ ; (b)  
 4,01 m/s; (c)  $48,4^\circ$  119. (a) -0,50 m; (b) -1,8 cm; (c) 0,50 m 121. 0,22% 123. 36,5 km/s 125. (a)  $(-1,00$   
 $\times 10^{-19} \hat{i} + 0,67 \times 10^{-19} \hat{j})$  kg · m/s; (b)  $1,19 \times 10^{-12}$  J 127.  $2,2 \times 10^{-3}$

## Capítulo 10

T 1. b e c 2. (a) e (d) ( $\alpha = d^2 \theta / dt^2$  deve ser constante) 3. (a) sim; (b) não; (c) sim; (d) sim 4. são todos  
 iguais 5. 1, 2, 4, 3 (veja a Eq. 10-36) 6. (veja a Eq. 10-40) 1 e 3, 4, 2 e 5 (zero) 7. (a) para baixo na  
 figura ( $\tau_{\text{res}} = 0$ ); (b) menor (considere os braços de alavanca)

P 1. (a) c, a e depois b e d empatados; (b) b, depois a e c empatados, depois d 3. todas iguais 5. (a)  
 diminuir; (b) horário; (c) anti-horário 7. aumentar 9. c, a, b 11. menor

PR 1. 14 rev 3. (a) 4,0 rad/s; (b) 11,9 rad/s 5. 11 rad/s 7. (a) 4,0 m/s; (b) não 9. (a) 3,00 s; (b) 18,9 rad  
 11. (a) 30 s; (b)  $1,8 \times 10^3$  rad 13. (a)  $3,4 \times 10^2$  s; (b)  $-4,5 \times 10^{-3}$  rad/s<sup>2</sup>; (c) 98 s 15. 8,0 s 17. (a) 44 rad;  
 (b) 5,5 s; (c) 32 s; (d) -2,1s; (e) 40 s 19. (a)  $2,50 \times 10^{-3}$  rad/s; (b) 20,2 m/s<sup>2</sup>; (c) 0 21.  $6,9 \times 10^{-13}$  rad/s  
 23. (a) 20,9 rad/s; (b) 12,5 m/s; (c) 800 rev/min<sup>2</sup>; (d) 600 rev 25. (a)  $7,3 \times 10^{-5}$  rad/s; (b)  $3,5 \times 10^2$  m/s;  
 (c)  $7,3 \times 10^{-5}$  rad/s; (d)  $4,6 \times 10^2$  m/s 27. (a) 73 cm/s<sup>2</sup>; (b) 0,075; (c) 0,11 29. (a)  $3,8 \times 10^3$  rad/s; (b)  $1,9$   
 $\times 10^2$  m/s 31. (a) 40 s; (b) 2,0 rad/s<sup>2</sup> 33. 12,3 kg · m<sup>2</sup> 35. (a) 1,1 kJ; (b) 9,7 kJ 37. 0,097 kg · m<sup>2</sup> 39. (a) 49  
 MJ; (b)  $1,0 \times 10^2$  min 41. (a) 0,023 kg · m<sup>2</sup>; (b) 1,1 mJ 43.  $4,7 \times 10^{-4}$  kg · m<sup>2</sup> 45. -3,85 N · m 47. 4,6 N ·  
 m 49. (a) 28,2 rad/s<sup>2</sup>; (b) 338 N · m 51. (a) 6,00 cm/s<sup>2</sup>; (b) 4,87 N; (c) 4,54 N; (d) 1,20 rad/s<sup>2</sup>; (e) 0,0138  
 kg · m<sup>2</sup> 53. 0,140 N 55.  $2,51 \times 10^{-4}$  kg · m<sup>2</sup> 57. (a)  $4,2 \times 10^2$  rad/s<sup>2</sup>; (b)  $5,0 \times 10^2$  rad/s 59. 396 N · m 61.  
 (a) -19,8 kJ; (b) 1,32 kW 63. 5,42 m/s 65. (a) 5,32 m/s<sup>2</sup>; (b) 8,43 m/s<sup>2</sup>; (c)  $41,8^\circ$  67. 9,82 rad/s 69.  $6,16 \times$   
 $10^{-5}$  kg · m<sup>2</sup> 71. (a) 31,4 rad/s<sup>2</sup>; (b) 0,754 m/s<sup>2</sup>; (c) 56,1 N; (d) 55,1 N 73. (a)  $4,81 \times 10^5$  N; (b)  $1,12 \times 10^4$   
 N · m; (c)  $1,25 \times 10^6$  J 75. (a) 2,3 rad/s<sup>2</sup>; (b) 1,4 rad/s<sup>2</sup> 77. (a) -67 rev/min<sup>2</sup>; (b) 8,3 rev 81. 3,1 rad/s 83.  
 (a) 1,57 m/s<sup>2</sup>; (b) 4,55 N; (c) 4,94 N 85. 30 rev 87. 0,054 kg · m<sup>2</sup> 89.  $1,4 \times 10^2$  N · m 91. (a) 10 J; (b)  
 0,27 m 93. 4,6 rad/s<sup>2</sup> 95. 2,6 J 97. (a)  $5,92 \times 10^4$  m/s<sup>2</sup>; (b)  $4,39 \times 10^4$  s<sup>-2</sup> 99. (a) 0,791 kg · m<sup>2</sup>; (b)  $1,79 \times$   
 $10^{-2}$  N · m 101. (a)  $1,5 \times 10^2$  cm/s; (b) 15 rad/s; (c) 15 rad/s; (d) 75 cm/s; (e) 3,0 rad/s 103. (a) 7,0 kg ·  
 m<sup>2</sup>; (b) 7,2 m/s; (c)  $71^\circ$  105. (a) 0,32 rad/s; (b)  $1,0 \times 10^2$  km/h 107. (a)  $1,4 \times 10^2$  rad; (b) 14 s.

## Capítulo 11

T 1. (a) igual; (b) menor 2. menor (considere a transferência de energia de energia cinética de rotação

para energia potencial gravitacional) **3.** (desenhe os vetores e use a regra da mão direita) (a)  $\pm z$ ; (b)  $+y$ ; (c)  $-x$  **4.** (veja a Eq. 11-21) (a) 1 e 3; 2 e 4,5 (zero); (b) 2 e 3 **5.** (veja as Eqs. 11-23 e 11-16) (a) 3,1; 2 e 4 (zero); (b) 3 **6.** (a) todos iguais (mesmo  $\tau$ , mesmo  $t$  e, portanto, mesmo  $\Delta L$ ); (b) esfera, disco, anel (ordem inversa de  $I$ ) **7.** (a) diminui; (b) permanece o mesmo ( $\tau^{\text{res}} = 0$  e, portanto,  $L$  é conservado); (c) aumenta **P 1.**  $a$ , depois  $b$  e  $c$  empatados, depois  $e$ , depois  $d$  (zero) **3.** (a) fica girando no mesmo lugar; (b) rola na sua direção; (c) rola para longe de você **5.** (a) 1, 2, 3 (zero); (b) 1 e 2 empatados, depois 3; (c) 1 e 3 empatados, depois 2 **7.** (a) permanece o mesmo; (b) aumenta; (c) diminui; (d) permanece o mesmo, diminui, aumenta **9.**  $D$ ,  $B$  e depois  $A$  e  $C$  empatados **11.** (a) ao mesmo tempo; (b) igual

**PR 1.** (a) 0; (b)  $(22 \text{ m/s})\hat{i}$ ; (c)  $(-22 \text{ m/s})\hat{i}$ ; (d) 0; (e)  $1,5 \times 10^3 \text{ m/s}^2$ ; (f)  $1,5 \times 10^3 \text{ m/s}^2$ ; (g)  $(22 \text{ m/s})\hat{i}$ ; (h)  $(44 \text{ m/s})\hat{i}$ ; (i) 0; (j) 0; (k)  $1,5 \times 10^3 \text{ m/s}^2$ ; (l)  $1,5 \times 10^3 \text{ m/s}^2$  **3.**  $-3,15 \text{ J}$  **5.**  $0,020$  **7.** (a)  $63 \text{ rad/s}$ ; (b)  $4,0 \text{ m}$  **9.**  $4,8 \text{ m}$  **11.** (a)  $(-4,0\text{N})\hat{i}$ ; (b)  $0,60 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  **13.**  $0,50$  **15.** (a)  $-(0,11 \text{ m})\omega$ ; (b)  $-2,1 \text{ m/s}^2$ ; (c)  $-47 \text{ rad/s}^2$ ; (d)  $1,2 \text{ s}$ ; (e)  $8,6 \text{ m}$ ; (f)  $6,1 \text{ m/s}$  **17.** (a)  $13 \text{ cm/s}^2$ ; (b)  $4,4 \text{ s}$ ; (c)  $55 \text{ cm/s}$ ; (d)  $18 \text{ mJ}$ ; (e)  $1,4 \text{ J}$ ; (f)  $27 \text{ rev/s}$  **19.**  $(-2,0 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{i}$  **21.** (a)  $(6,0 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{j} + (8,0 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{k}$ ; (b)  $(-22 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{i}$  **23.** (a)  $(-1,5 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{i} - (4,0 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{j} - (1,0 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{k}$ ; (b)  $(-1,5 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{i} - (4,0 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{j} - (1,0 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{k}$  **25.** (a)  $(50 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{k}$ ; (b)  $90^\circ$  **27.** (a) 0; (b)  $(8,0 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{i} + (8,0 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{k}$  **29.** (a)  $9,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ; (b)  $+z$  **31.** (a) 0; (b)  $-22,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ; (c)  $-7,84 \text{ N} \cdot \text{m}$ ; (d)  $-7,84 \text{ N} \cdot \text{m}$  **33.** (a)  $(-1,7 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})\hat{k}$ ; (b)  $(+56 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{k}$ ; (c)  $(+56 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2)\hat{k}$  **35.** (a)  $48 \text{ t}\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$ ; (b) aumentando **37.** (a)  $4,6 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ; (b)  $1,1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ; (c)  $3,9 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$  **39.** (a)  $1,47 \text{ N} \cdot \text{m}$ ; (b)  $20,4 \text{ rad}$ ; (c)  $-29,9 \text{ J}$ ; (d)  $19,9 \text{ W}$  **41.** (a)  $1,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ; (b)  $4,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$  **43.** (a)  $1,5 \text{ m}$ ; (b)  $0,93 \text{ rad/s}$ ; (c)  $98 \text{ J}$ ; (d)  $8,4 \text{ rad/s}$ ; (e)  $8,8 \times 10^2 \text{ J}$ ; (f) da energia interna das patinadoras **45.** (a)  $3,6 \text{ rev/s}$ ; (b)  $3,0$ ; (c) a força que o homem exerce sobre os tijolos converte energia interna do homem em energia cinética **47.**  $0,17 \text{ rad/s}$  **49.** (a)  $750 \text{ rev/min}$ ; (b)  $450 \text{ rev/min}$ ; (c) horário **51.** (a)  $267 \text{ rev/min}$ ; (b)  $0,667$  **53.**  $1,3 \times 10^3 \text{ m/s}$  **55.**  $3,4 \text{ rad/s}$  **57.** (a)  $18 \text{ rad/s}$ ; (b)  $0,92$  **59.**  $11,0 \text{ m/s}$  **61.**  $1,5 \text{ rad/s}$  **63.**  $0,070 \text{ rad/s}$  **65.** (a)  $0,148 \text{ rad/s}$ ; (b)  $0,0123$ ; (c)  $181^\circ$  **67.** (a)  $0,180 \text{ m}$ ; (b) horário **69.**  $0,041 \text{ rad/s}$  **71.** (a)  $1,6 \text{ m/s}^2$ ; (b)  $16 \text{ rad/s}^2$ ; (c)  $(4,0 \text{ N})\hat{i}$  **73.** (a) 0; (b) 0; (c)  $-30t^3 \hat{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ; (d)  $-90t^2 \hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$ ; (e)  $30t^3 \hat{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ; (f)  $90t^2 \hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$  **75.** (a)  $149 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ; (b)  $158 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ; (c)  $0,744 \text{ rad/s}$  **77.** (a)  $6,65 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ; (b) não; (c) 0; (d) sim **79.** (a)  $0,333$ ; (b)  $0,111$  **81.** (a)  $58,8 \text{ J}$ ; (b)  $39,2 \text{ J}$  **83.** (a)  $61,7 \text{ J}$ ; (b)  $3,43 \text{ m}$ ; (c) não **85.** (a)  $mvR/(I + MR^2)$ ; (b)  $mvR^2/(I + MR^2)$

## FÓRMULAS MATEMÁTICAS\*

### Equação do Segundo Grau

$$\text{Se } ax^2 + bx + c = 0, \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Teorema Binomial

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots \quad (x^2 < 1)$$

## Produtos de Vetores

Seja  $\theta$  o menor dos dois ângulos entre  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Nesse caso,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \theta$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - b_y a_z) \hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \hat{k} \\ |\vec{a} \times \vec{b}| &= ab \sin \theta\end{aligned}$$

## Identidades Trigonômicas

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

## Derivadas e Integrais

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \qquad \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \qquad \int e^x \, dx = e^x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$\int \frac{x \, dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

## Regra de Cramer

Um sistema de duas equações com duas incógnitas  $x$  e  $y$ ,

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \quad \text{e} \quad a_2 x + b_2 y = c_2,$$

tem como soluções

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

\*Uma lista mais completa está no Apêndice E.

## PREFIXOS DO SI

Fator	Prefixo	Símbolo	Fator	Prefixo	Símbolo
$10^{24}$	yotta	Y	$10^{-1}$	deci	d
$10^{21}$	zetta	Z	$10^{-2}$	centi	c
$10^{18}$	exa	E	$10^{-3}$	mili	m
$10^{15}$	peta	P	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{12}$	tera	T	$10^{-9}$	nano	n
$10^9$	giga	G	$10^{-12}$	pico	p
$10^6$	mega	M	$10^{-15}$	femto	f
$10^3$	quilo	k	$10^{-18}$	atto	a
$10^2$	hecto	h	$10^{-21}$	zepto	z
$10^1$	deca	da	$10^{-24}$	yocto	y

## ALGUMAS CONSTANTES FÍSICAS\*

Velocidade da luz

$c$

$2,998 \times 10^8$  m/s

Constante gravitacional	$G$	$6,673 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$
Constante de Avogadro	$N_A$	$6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante universal dos gases	$R$	$8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$
Relação entre massa e energia	$c^2$	$8,988 \times 10^{16} \text{ J/kg}$ $931,49 \text{ MeV/u}$
Constante de permissividade	$\epsilon_0$	$8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
Constante de permeabilidade	$\mu_0$	$1,257 \times 10^{-6} \text{ H/m}$
Constante de Planck	$h$	$6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ $4,136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$
Constante de Boltzmann	$k$	$1,381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ $8,617 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$
Carga elementar	$e$	$1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Massa do elétron	$m_e$	$9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Massa do próton	$m_p$	$1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Massa do nêutron	$m_n$	$1,675 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Massa do dêuteron	$m_d$	$3,344 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Raio de Bohr	$a$	$5,292 \times 10^{-11} \text{ m}$
Magnéton de Bohr	$\mu_B$	$9,274 \times 10^{-24} \text{ J/T}$ $5,788 \times 10^{-5} \text{ eV/T}$
Constante de Rydberg	$R$	$1,097\,373 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

\*Uma lista mais completa, que mostra também os melhores valores experimentais, está no Apêndice B.

## ALFABETO GREGO

Alfa	A	$\alpha$	Iota	I	$\iota$	Rô	P	$\rho$
Beta	B	$\beta$	Capa	K	$\kappa$	Sigma	$\Sigma$	$\sigma$
Gama	$\Gamma$	$\gamma$	Lambda	$\Lambda$	$\lambda$	Tau	T	$\tau$
Delta	$\Delta$	$\delta$	Mi	M	$\mu$	Ípsilon	Y	$\upsilon$
Epsílon	E	$\varepsilon$	Ni	N	$\nu$	Fi	$\Phi$	$\phi, \varphi$
Zeta	Z	$\zeta$	Csi	$\Xi$	$\xi$	Qui	X	$\chi$
Eta	H	$\eta$	Ômicron	O	$o$	Psi	$\Psi$	$\psi$
Teta	$\theta$	$\theta$	Pi	$\Pi$	$\pi$	Ômega	$\Omega$	$\omega$

## ALGUNS FATORES DE CONVERSÃO\*

### *Massa e Massa Específica*

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} = 6,02 \times 10^{26} \text{ u}$$

$$1 \text{ slug} = 14,59 \text{ kg}$$

$$1 \text{ u} = 1,661 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$1 \text{ kg/m}^3 = 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

### *Comprimento e Volume*

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 39,4 \text{ in} = 3,28 \text{ ft}$$

$$1 \text{ mi} = 1,61 \text{ km} = 5280 \text{ ft}$$

$$1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm}$$

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} = 10 \text{ \AA}$$

$$1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m} = 1000 \text{ fm}$$

$$1 \text{ ano-luz} = 9,461 \times 10^{15} \text{ m}$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L} = 35,3 \text{ ft}^3 = 264 \text{ gal}$$

### ***Tempo***

$$1 \text{ d} = 86\,400 \text{ s}$$

$$1 \text{ ano} = 365 \text{ d} = 3,16 \times 10^7 \text{ s}$$

### ***Ângulos***

$$1 \text{ rad} = 57,3^\circ = 0,159 \text{ rev}$$

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ = \frac{1}{2} \text{ rev}$$

### ***Velocidade***

$$1 \text{ m/s} = 3,28 \text{ ft/s} = 2,24 \text{ mi/h}$$

$$1 \text{ km/h} = 0,621 \text{ mi/h} = 0,278 \text{ m/s}$$

### ***Força e Pressão***

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dina} = 0,225 \text{ lb}$$

$$1 \text{ lb} = 4,45 \text{ N} \quad 1 \text{ t} = 2000 \text{ lb}$$

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 10 \text{ dina/cm}^2 = 1,45 \times 10^{-4} \text{ lb/in}^2$$

$$1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa} = 14,7 \text{ lb/in}^2 = 76,0 \text{ cm Hg}$$

### ***Energia e Potência***

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg} = 0,2389 \text{ cal} = 0,738 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

$$1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$$

$$1 \text{ cal} = 4,1868 \text{ J}$$

$$1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ hp}^{**} = 746 \text{ W} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$$

### ***Magnetismo***

$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 = 10^4 \text{ gauss}$$

---

\*Uma lista mais completa está no Apêndice D.

\*\*A unidade de potência hp é uma abreviatura do inglês *horsepower*, que não corresponde exatamente ao cavalo-vapor (cv), que é igual a 735,5 W. (N.T.)