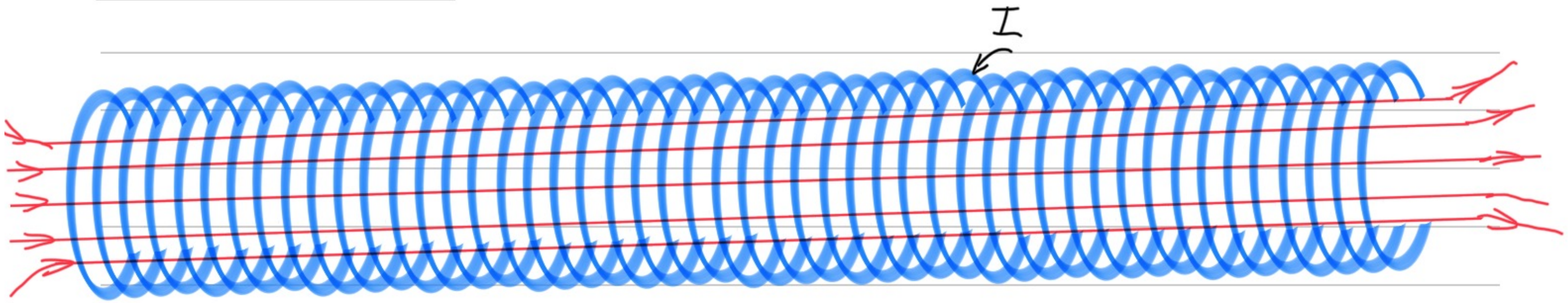
Solenoide



$$\vec{B} = \mu_0 \frac{NI}{\ell} \hat{z}$$

$V = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(B \cdot A)$ → em uma espira $B = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$

$$V_{espira} = \left(\frac{d}{dt} B\right) \cdot \pi r^2$$

N espiras: $V = N \cdot V_{espira} = N \frac{d}{dt} \mu_0 \frac{NI}{\ell} \cdot \pi \rho^2$

$$= \mu_0 \frac{N^2 \pi \rho^2}{\ell} \cdot \frac{dI}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

Fluxo: $\phi = L \cdot I$; $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi \rho^2$; $V_L = \frac{d\phi}{dt} = L \frac{dI}{dt} = cte$

$$I = \frac{V_L}{L} \cdot t = \frac{\ell}{\mu_0 N^2 \cdot A} \cdot V \cdot t \Rightarrow \vec{B} = \frac{V}{N \cdot A} \cdot t \, \hat{z}$$

Tomando agora a Lei de Lenz-Faraday

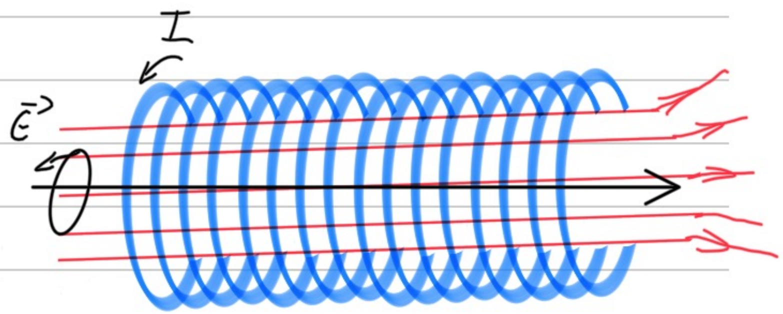
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \Rightarrow \int_S (\nabla \times \vec{E}) \, d\vec{a} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

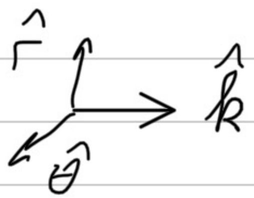
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} B \cdot A$$

$\vec{E} = E \cdot \hat{\theta}$ $d\vec{\ell} = r \cdot d\theta \, \hat{\theta}$

$$\Rightarrow E \cdot 2\pi r = -\frac{V}{N} \frac{\pi r^2}{A}$$

$$\vec{E} = -\frac{V}{2AN} \cdot r \, \vec{\theta}$$





$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{k}$

$$U = U_E + U_M = \int \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV$$

$$\int \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 V^2 r^2}{4 A^2 N^2} dz\, r\, dr\, d\theta + \int \frac{1}{2\mu_0} \frac{V^2 t^2}{N^2 A^2} \cdot dz\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{\epsilon_0 V^2 2\pi l}{8 A^2 N^2} \int_0^\rho r^3\, dr + \frac{V^2 t^2}{2\mu_0 N^2 \cdot A^2} \cdot l \cdot A$$

$$= \frac{\epsilon_0 V^2 l \pi}{4 A^2 N^2} \frac{\rho^4}{4} + \frac{V^2 l}{2\mu_0 N^2 A} t^2$$

$$= \frac{\epsilon_0}{8} \frac{V^2 l}{2 N^2 A} \cdot \rho^2 + \frac{V^2 l}{2 N^2 A} \frac{t^2}{\mu_0} = \frac{V^2 l}{2 N^2 \pi \mu_0} \left[\frac{1}{8c^2} + \left(\frac{t}{\rho} \right)^2 \right]$$

Capacitor, $I = cte$

$$U = \frac{I^2 d}{2 \epsilon_0 \pi} \left[\left(\frac{t}{r} \right)^2 + \frac{1}{8c^2} \right]$$

Indutor, $V = cte$

$$U = \frac{V^2 l}{2 \mu_0 \pi N^2} \left[\left(\frac{t}{\rho} \right)^2 + \frac{1}{8c^2} \right]$$

Ondas eletromagnéticas

- As equações de Maxwell levam a uma equação de onda.
- A velocidade de propagação é a mesma da luz!
- Ondas eletromagnéticas e luminosas são a mesma entidade.
- Transferência e energia.
- Transferência de momento.
- TEORIA Eletromagnética justifica as LEIS da Ótica.
- Lei de Malus, lei de Snell Descartes, lei de Brewster, todas contidas e derivadas a partir das equações de Maxwell...

Das equações de Maxwell

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{D} = 0 & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t} \vec{B} & \nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial}{\partial t} \vec{D} \end{array}}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{H} = \mu \vec{B}$$

Para as equações de onda

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \qquad \nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}}$$

$$v^2 = \frac{1}{\mu \epsilon}$$

→ São semelhantes às equações de onda 3D para o som: $\nabla^2 p = \dfrac{1}{v_s^2} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} p$, onde p é a variação de pressão.

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} \qquad \nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B}} \qquad v^2 = \frac{1}{\mu\epsilon}$$

- São semelhantes às equações de onda 3D para o som: $\nabla^2 p = \frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}p$, onde p é a variação de pressão.

- Mas não são idênticas! Caráter transverso da onda

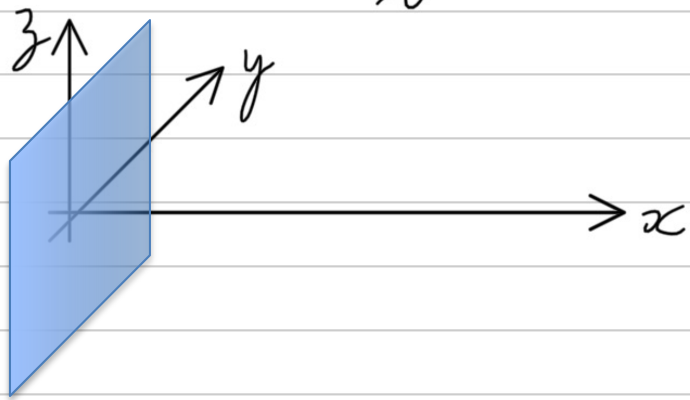
$\Rightarrow$ Propriedades: Polarização

Limitação de soluções

Solução básica: Onda plana

→ Para uma direção, temos o vetor de onda $\vec{k}$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad , \text{ por enquanto } \vec{k} = k \cdot \hat{x}$$



(usando $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ em lugar de $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$)

– Onda transversa: como no caso da corda, temos um plano transverso

↳ descrição por 2 componentes

$$\vec{E} = E_y \, \hat{y} + E_z \, \hat{z} \quad , \text{ com } E_y = E_y(x,t)$$

$$E_z = E_z(x,t)$$

Solução harmônica: $E_y(x,t) = E_{0y} \cos(kx - \omega t + \varphi_y)$

$$E_z(x,t) = E_{0z} \cos(kx - \omega t + \varphi_z)$$

Onda plana: Cada componente satisfaz as eqs. de onda

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = \left(\nabla^2 E_y - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_y\right)\hat{y} + \left(\nabla^2 E_z - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_z\right)\hat{z} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 E_y(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}E_y(x,t) = -k^2 E_y \\ &\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_y(x,t) = -\omega^2 E_y \end{aligned}\right\} -\left(k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right)E_y = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{\omega}{v} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{1}{v}$$

$$\underline{v = \lambda / T}$$

Dado $\vec{E} \Rightarrow \vec{B}$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \cancel{\partial/\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$\rightarrow \vec{E} = E_y(x,t)\,\hat{y} + E_z(x,t)\,\hat{z}$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\hat{y}\,\frac{\partial}{\partial x}E_z + \hat{z}\,\frac{\partial}{\partial x}E_y$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\hat{y}\cdot(-k)\,E_{0z}\,\mathrm{sen}(kx-\omega t+\varphi_z)$$
$$+\hat{z}\,(-k)\,E_{0y}\,\mathrm{sen}(kx-\omega t+\varphi_z)$$

Se $\vec{B}$ é transverso: $\vec{B} = B_y(x,t)\,\hat{y} + B_z(x,t)\,\hat{z}$

$$B_y = B_{0y}\cos(kx - \omega t + \theta_y)$$

$$B_z = B_{0z}\cos(kx - \omega t + \theta_z)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \omega B_{0y}(\operatorname{sen} kx - \omega t + \theta_y)\;\hat{y}$$

$$+\omega B_{0z}(\operatorname{sen} kx - \omega t + \theta_z)\;\hat{z}$$

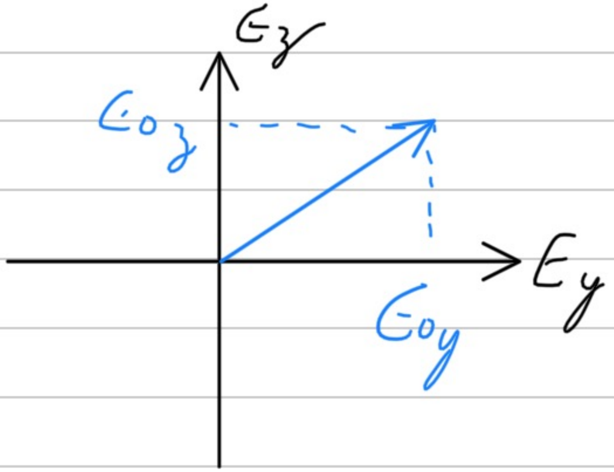
$$\Rightarrow \quad kE_{0z} = -\omega B_{0y} \Rightarrow B_{0y} = -\frac{E_{0z}}{v} \qquad \theta_y = \varphi_z$$

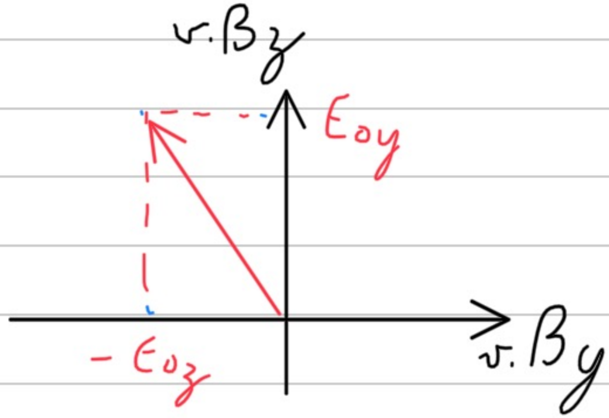
$$-kE_{0y} = -\omega B_{0z} \Rightarrow B_{0z} = \frac{E_{0y}}{v} \qquad \theta_z = \varphi_y$$

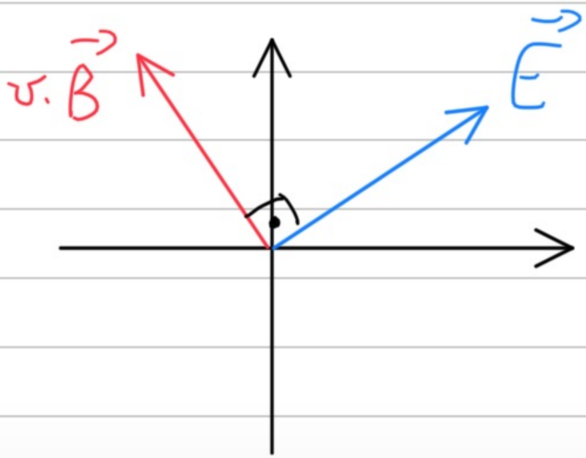
$$\Rightarrow \quad k E_{0z} = -\omega B_{0y} \Rightarrow B_{0y} = -\frac{E_{0z}}{v} \qquad \theta_y = \varphi_z$$

$$-k E_{0y} = -\omega B_{0z} \Rightarrow B_{0z} = \frac{E_{0y}}{v} \qquad \theta_z = \varphi_y$$

Plano transverso → visto do eixo x







Solução harmônica: $E_y(x,t) = E_{0y} \cos(kx - \omega t + \varphi_y)$

$$E_z(x,t) = E_{0z} \cos(kx - \omega t + \varphi_z)$$

Notação complexa: facilita as contas!

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \; ; \; \text{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \; ; \; e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta}$$

$$E_y(x,t) = \text{Re}\left[E_{0y}\, e^{i(kx-\omega t)} \cdot e^{i\varphi_y}\right] = \text{Re}\left[\tilde{E}_{0y}\, e^{i(kx-\omega t)}\right]$$

$$\tilde{E}_{0y} = E_{0y}\, e^{i\varphi_y}$$

O poder da notação complexa

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \tilde{E}_x & \tilde{E}_y & \tilde{E}_z \end{vmatrix} \rightarrow \vec{\mathcal{E}} = \tilde{E}_y(x,t)\,\hat{y} + \tilde{E}_z(x,t)\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\hat{y}\,\frac{\partial}{\partial x}\tilde{E}_z + \hat{z}\,\frac{\partial}{\partial x}\tilde{E}_y$$

$$\tilde{E}_y = \tilde{E}_{0y}\, e^{i(kx-\omega t)} \quad ; \quad \tilde{E}_z = \tilde{E}_{0z}\, e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\hat{y}\cdot(ik)\tilde{E}_z + \hat{z}\,(ik)\,\tilde{E}_y$$

$$= i\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}$$

$$= i\,k\,\hat{x} \times (\tilde{E}_y\,\hat{y} + \tilde{E}_z\,\hat{z}) =$$

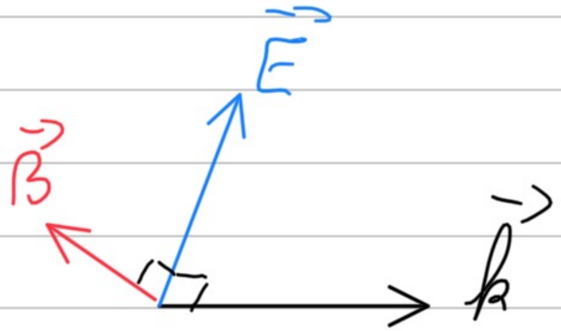
$$= i\,k\,\tilde{E}_y\,\underbrace{(\hat{x}\times\hat{y})}_{\hookrightarrow\,\hat{z}} + i\,k\,\tilde{E}_z\,\underbrace{(\hat{x}\times\hat{z})}_{\hookrightarrow\,-y}$$

$$\vec{B} = \tilde{B}_{0y}\, e^{i(kx-\omega t)}\, \hat{y} + \tilde{B}_{0z}\, e^{i(kx-\omega t)}\, \hat{z}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = -i\omega \vec{B}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \Rightarrow i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

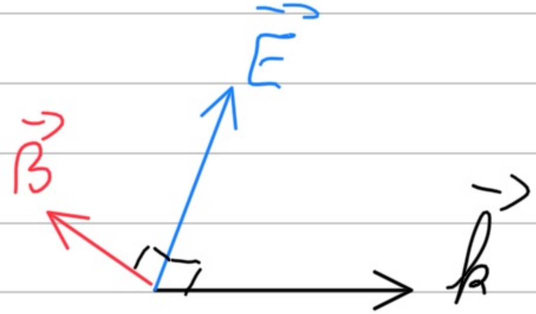
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$



$\vec{E}, \vec{B}$ em fase

perpendiculares

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$



$\vec{E}, \vec{B}$ em <u>fase</u>

<u>perpendiculares</u>

Podemos girar os eixos livremente $\rightarrow$

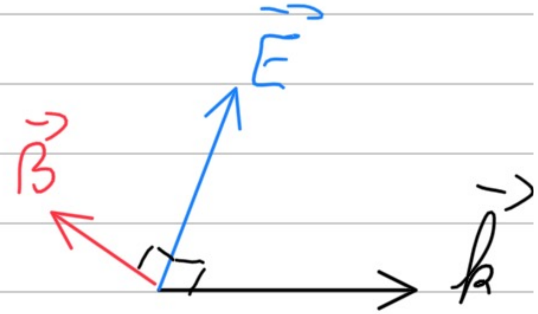
a propagação não se afeta, sendo definida por $\vec{k}$

Forma geral: $\vec{E}(\vec{r},t) = \tilde{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \hat{n}$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}$$

Com o versor de polarização $\hat{n}$, $\hat{n} \cdot \vec{k} = 0$

Forma geral: $\vec{E}(\vec{r},t) = \tilde{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\,\hat{n}$

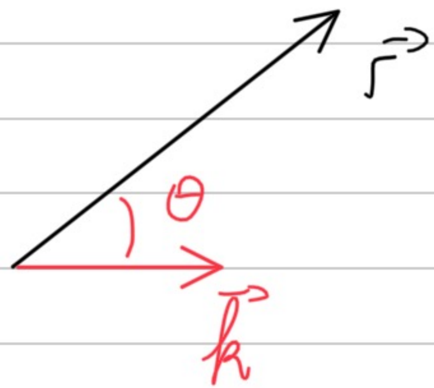


$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}$$

Com o versor de polarização $\hat{n}$, $\hat{n}\cdot\vec{k}=0$

O vetor $\vec{k}$ define o plano perpendicular: frente de onda

E $\vec{k}\cdot\vec{r} = k\cdot\underbrace{r\cdot\cos\theta}_{\text{distância ao longo da propagação}}$



O Operador ∇ e a notação complexa em ondulatória

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\mathcal{E}_x \hat{x} + \mathcal{E}_y \hat{y} + \mathcal{E}_z \hat{z}\right)$$

Na onda plana: $\mathcal{E}_x = 0$, $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_y(x,t)$, $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_z(x,t)$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \iff i\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$$

Aula 21 - Energia e momento de Ondas EM

Densidade de Energia:

$U = \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H})$ → era o custo para montar o campo

→ é a energia presente no campo

Para a onda eletromagnética: a Fonte está longe, mas o campo sustenta-se enquanto propaga!

$U = U_E + U_M$ → caso quase estático: desbalanceio

U_M → solenóide

U_E → capacitor

Para a onda: $\vec{B} = \dfrac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} = \dfrac{1}{v}\, \hat{k} \times \vec{E}$

$$U_E = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} = \frac{\epsilon |E|^2}{2}$$

$$U_M = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} = \frac{|B|^2}{2\mu}$$

Como $|B| = \dfrac{|E|}{v}$

$$U_M = \frac{|E|^2}{2\mu v^2}$$

mas $v^2 = \dfrac{1}{\mu \epsilon}$

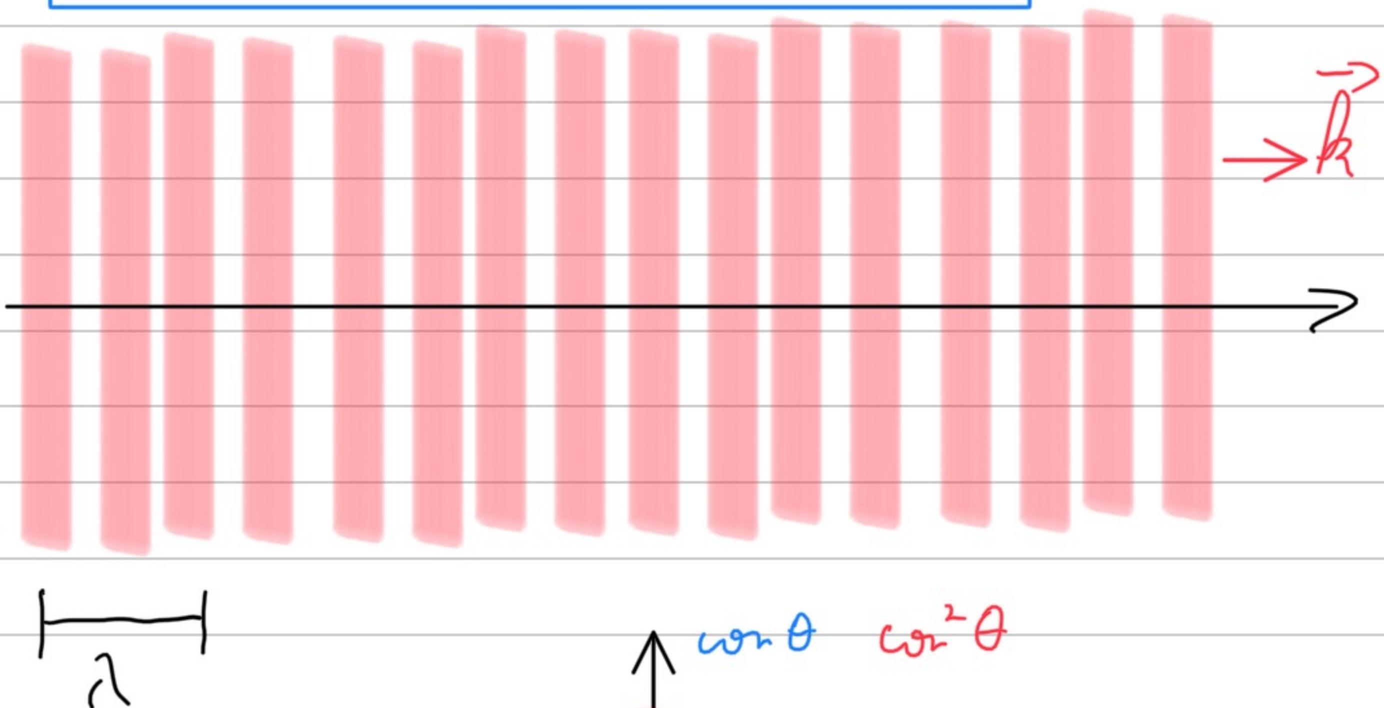
$$\Rightarrow U_M = \frac{\epsilon |E|^2}{2} = U_E$$

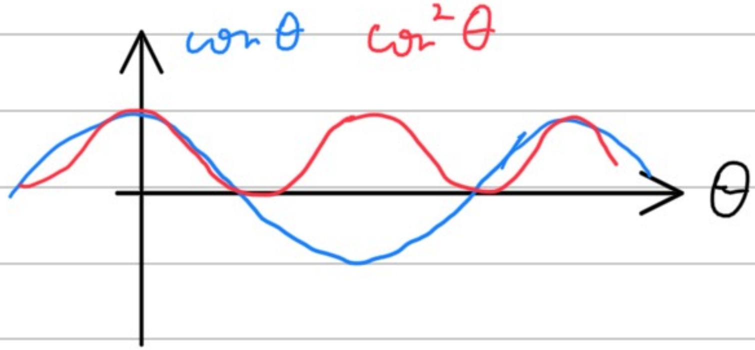
!

$$\Rightarrow \quad U_M = \frac{\epsilon |E|^2}{2} = U_E \quad !$$

$$\vec{E} = E_0 \, \hat{n} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{U = \epsilon E_0^2 \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi)}$$





Fluxo de energia: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times (\hat{k} \times \vec{E})}{\mu v} = \frac{E^2}{\mu v} \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{S} = v \cdot \epsilon E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)\, \hat{k}}$$

$$\vec{S} = v \cdot U \hat{k}$$

Note que $\nabla \cdot \vec{S} = \frac{\partial}{\partial z} v \epsilon E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \varphi)$

$$= -2 k v \epsilon E_0^2 \cos(kz - \omega t + \varphi) \operatorname{sen}(kz - \omega t + \varphi)$$

(escolhendo $\vec{k} \cdot \vec{r} = k \cdot z$)

$$\frac{\partial}{\partial t} U = 2\omega \epsilon E_0^2 \cos(kz - \omega t + \varphi) \operatorname{sen}(kz - \omega t + \varphi)$$

Como $kv = \omega \Rightarrow \nabla \cdot \vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} U$

Como vimos, a densidade de momento é dada por

$$\vec{p} = \mu\epsilon\vec{S} = \frac{\vec{S}}{v^2} = \frac{U}{v}\cdot\hat{k}$$

$$U = v\cdot p \rightarrow \text{no vácuo} \quad \boxed{U = c\cdot p}$$

Grandezas "pulsantes" → em R.F. temos a oscilação

Luz → média

$$\langle U\rangle = \epsilon E_0^2 \langle \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi)\rangle = \frac{\epsilon E_0^2}{2}$$

$$\langle S\rangle = \frac{v\epsilon E_0^2}{2} = I \rightarrow \text{intensidade} \left(\frac{W}{m^2}\right)$$

Equações gerais: valem no vácuo, valem na matéria