Eletromagnetismo

Correntes e Torques

- Vamos esmiuçar a relação de trabalho no campo magnético.
- Acoplar e entender a relação entre o micro e o macro.
- Quais as forças, afinal, sobre um fio com corrente?
- E os torques sofridos no circuito?

Aula 13: O que é corrente?

Como vimos até aqui

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} \qquad \nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad (\vec{D} = \varepsilon \vec{E})$$

Força de Lorentz: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

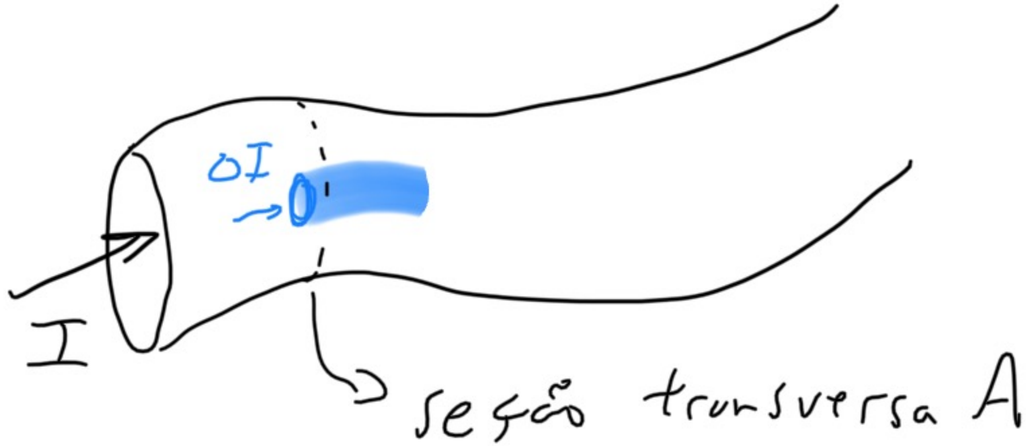
Cargas são quantizados

mas, em grande quantidade, parecem um fluido

Como se relaciona sua densidade e deslocamento?

Partindo da corrente em um meio

$$I = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)$$



$$I = \sum \Delta I$$

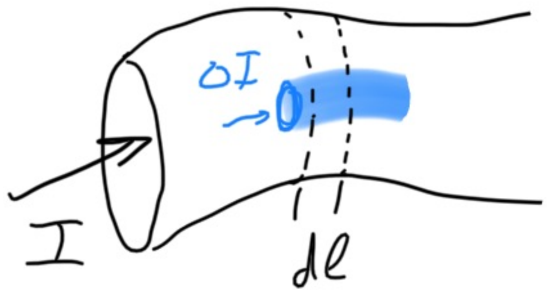
$$\Delta I = \vec{J}\cdot\Delta\vec{a}$$

$$I = \sum \vec{J}\cdot\Delta\vec{a} = \int_A \vec{J}\cdot d\vec{a}$$

Densidade de corrente $\vec{J} \Rightarrow \frac{A}{m^2} = \frac{C}{m^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{C}{m^3}\left(\frac{m}{s}\right)$

$$\Delta Q = \int_V \rho \cdot dv = \int_V \rho \cdot dl \cdot da = \int_l^{l+\Delta l}\iint_A \rho \cdot d\vec{l} \cdot d\vec{a}$$

$$I = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right) = \int_A \rho \cdot \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{1}{\Delta t}\int_l^{l+\Delta l} d\vec{l}\right) \cdot d\vec{a}$$

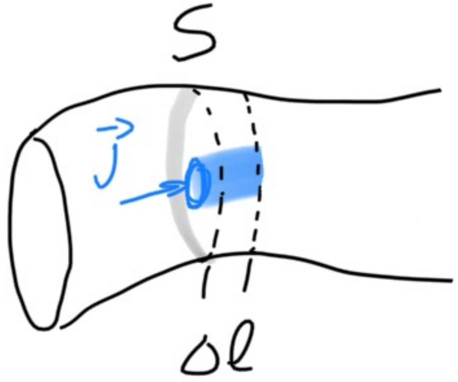


$$= \int_A \rho \left(\frac{d\vec{l}}{dt}\right) d\vec{a} = \int_A \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{a}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$$

Na superfície S, fechada

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{a} = \int_V (\nabla\cdot\vec{J})\,dv$$



Mas $$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{a} = \int_A \vec{J}\cdot d\vec{a}\Big|_{l+\Delta l} - \int_A \vec{J}\cdot d\vec{a}\Big|_{l}$$

$$= I(l+\Delta l) - I(l) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta Q(l+\Delta l) - \Delta Q(l)}{\Delta t}\right)$$

$\Delta Q(l+\Delta l) \to$ carga saindo do volume

$\Delta Q(l) \to$ carga entrando no volume

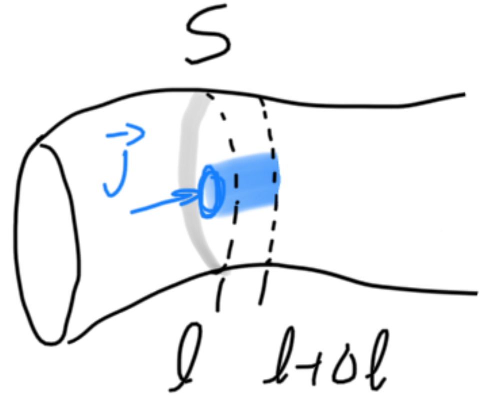
Variação de carga no volume $V \Rightarrow \Delta Q = \Delta Q(l) - \Delta Q(l+\Delta l)$

Variação de carga no volume $V \Rightarrow \Delta' Q = \Delta Q(l) - \Delta Q(l+\Delta l)$

Podemos relacionar a variação de carga no volume, no tempo, com a corrente entrando e saindo do volume.

$$\Delta Q(l+\Delta l) \rightarrow Q(t)$$

$$\Delta Q(l) \rightarrow Q(t+\Delta t)$$



$$\Rightarrow \Delta' Q = -\left[Q(t+\Delta t) - Q(t)\right]$$

$$= \left[\int \rho(t+\Delta t)\,dv - \int \rho(t)\,dv\right]$$

$$= \int \left(\rho(t+\Delta t) - \rho(t)\right) dv$$

$$\Rightarrow I(\ell+\Delta\ell) - I(\ell) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\delta Q}{\Delta t}\right) = -\lim_{\Delta t \to 0} \int \frac{[\rho(t+\Delta t) - \rho(t)]}{\Delta t} dv$$

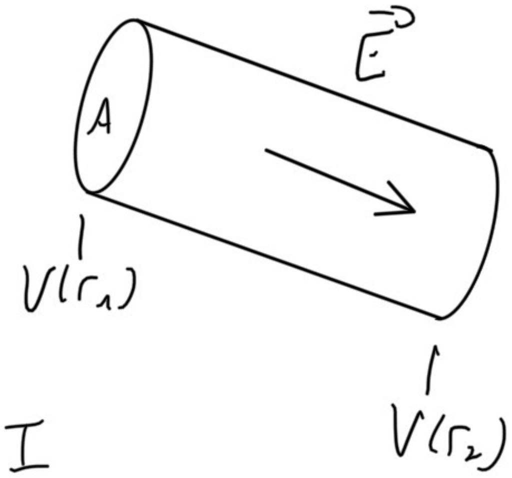
$$= -\int \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\rho(t+\Delta t) - \rho(t)]}{\Delta t} dv = \int_V -\frac{\partial}{\partial t}\rho(t)\, dv$$

Se $\displaystyle \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{a} = \int_V (\nabla\cdot\vec{J})\, dv = \int_V -\frac{\partial}{\partial t}\rho(t)\, dv$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t}\rho}$$ Relação de continuidade

Corrente e campo elétrico

Campo $\vec{E} \Rightarrow$



$$\int_{r_2}^{r_1} \vec{E}\cdot d\vec{l} = V(r_1) - V(r_2)$$

Lei de Ohm: $V(r_1) - V(r_2) = R\cdot I$

$$= R\cdot \int \vec{J}\cdot d\vec{a}$$

$$\Rightarrow (\vec{E}\cdot\hat{n})\Delta l = R\cdot\int_A \vec{J}\cdot d\vec{a} = R\cdot\int_A \vec{J}\cdot\hat{n}\, da$$

$$A \to \Delta A \Rightarrow \vec{E} = \frac{R}{\Delta l}\cdot \vec{J}\cdot\int da = \vec{J}\cdot\frac{R\cdot\Delta A}{\Delta l} = \rho\cdot\vec{J}$$

$\rho \Rightarrow$ resistividade : $R = \rho\cdot\frac{l}{A}$

$\vec{J} = \sigma\cdot\vec{E}$ $\quad$ $\sigma \Rightarrow$ condutância $\quad \sigma = 1/\rho$

Aula 13: Forças e Torques

Como vimos até aqui

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} \qquad \nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad (\vec{D} = \varepsilon \vec{E})$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t}\rho$$

Força em uma partícula (Força de Lorentz)

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Força em uma partícula (Força de Lorentz)

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Força em um <u>trecho</u> $d\vec{l}$ de um condutor

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B} = \int_A (\vec{J} \cdot d\vec{a})\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

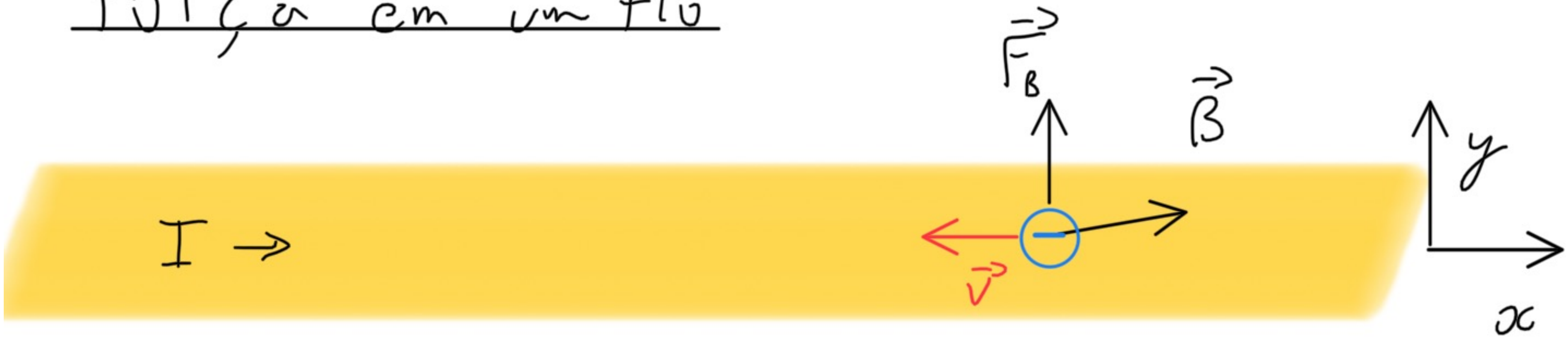
Força em um <u>volume</u> dv

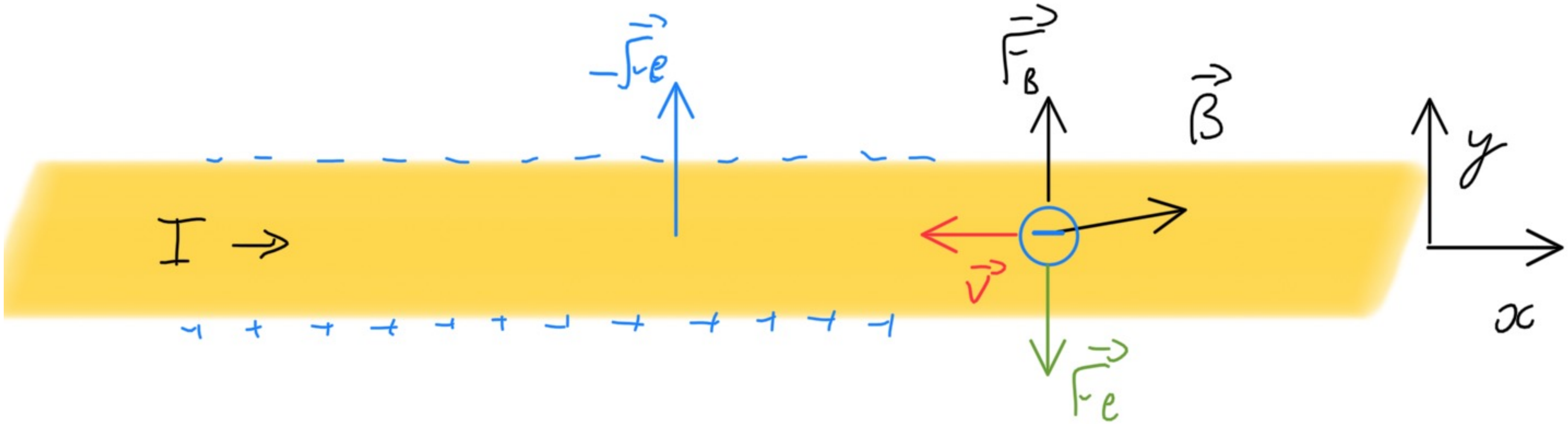
$$d\vec{F} = (\vec{J} \times \vec{B})\, dv$$

onde usamos: $(\vec{J} \cdot d\vec{a})\, d\vec{l} = \vec{J} \cdot da \cdot dl$

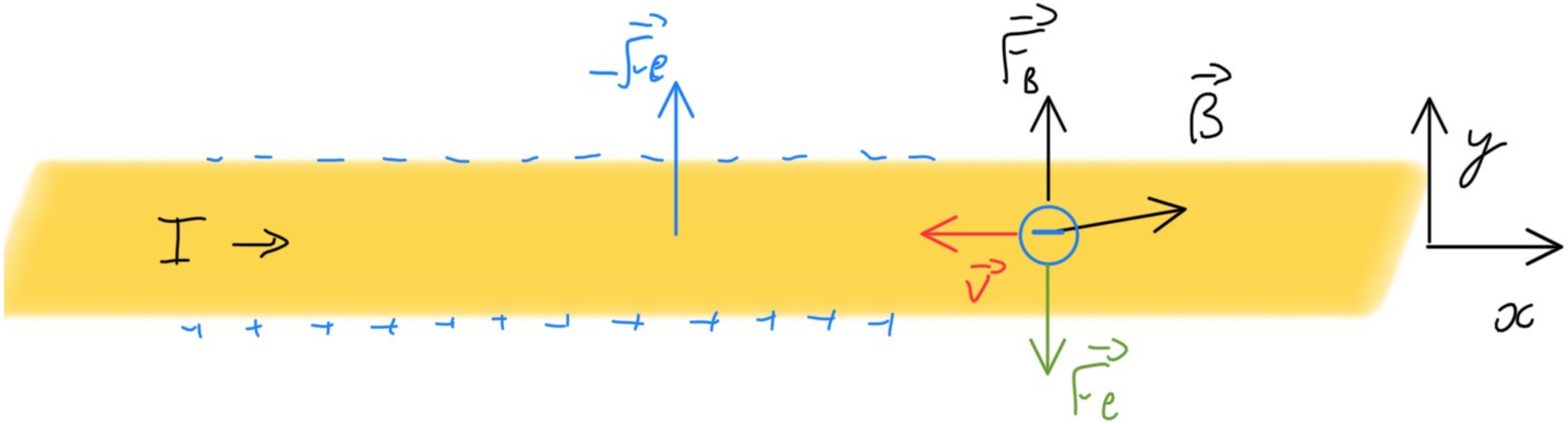
ou ainda $\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$, $q = \rho\, dv$

Força em um fio





$$\vec{F}_B = I \cdot \ell (\hat{x} \times \vec{B})$$



$$\vec{F}_B = I \cdot l(\hat{x} \times \vec{B})$$

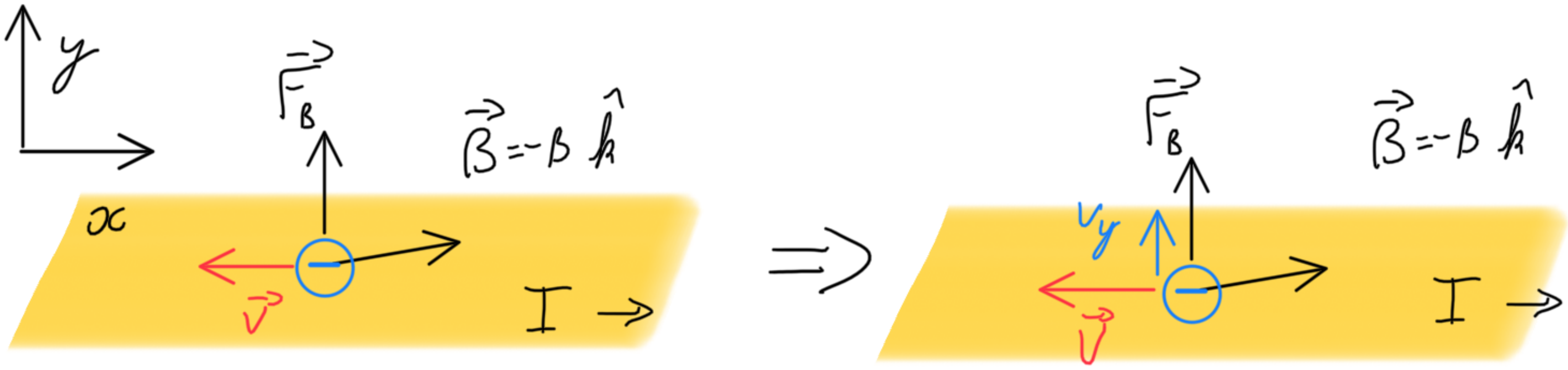
Se microscopicamente $W_B = 0$

Macroscopicamente $\vec{F}_B$ (partícula) é indistinto de $-\vec{F}_e$ (no condutor)

Podemos usar $\vec{F}_B$ para <u>calcular</u> trabalho.

E torque!

Trabalho → fio em deslocamento → $v_y \neq 0$



$$V' = \sqrt{V^2 + V_y^2} > V$$

Por quê a velocidade aumentou?

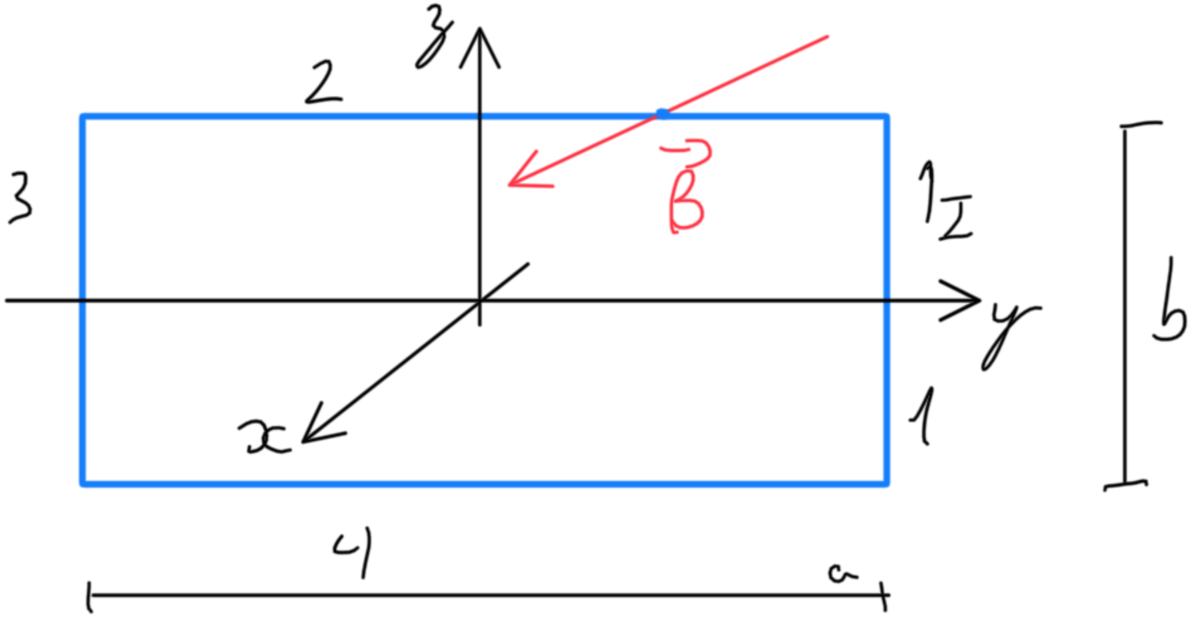
→ $\vec{B}$ só reorienta $\vec{v}$ → não aumenta a en. cinética

→ Se I é constante, a fonte de alimentação (bateri

compensa o desvio mantendo $V_x \propto I$

→ A bateria realiza o trabalho!

Torque em espira

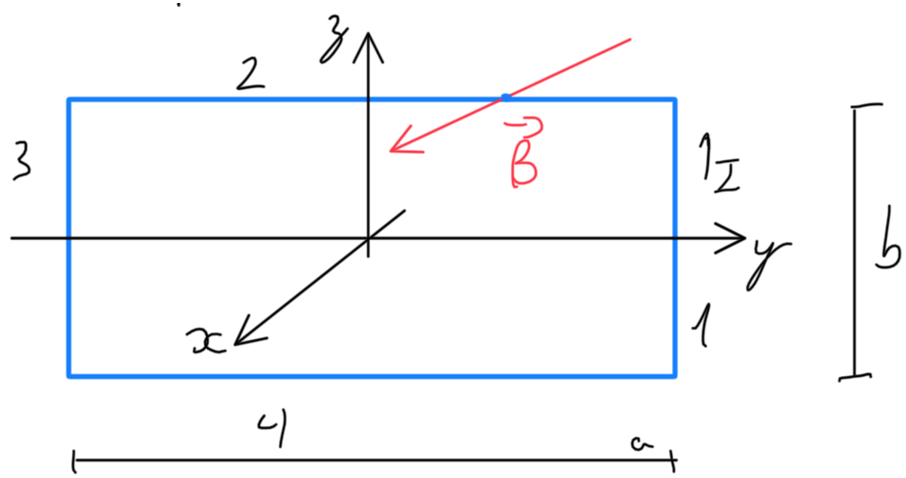


1 → $d\vec{l} = dz\,\hat{k}$ 3 → $d\vec{l} = -dz\,\hat{k}$

2 → $d\vec{l} = -dy\,\hat{j}$ 4 → $d\vec{l} = dy\,\hat{j}$

$$\vec{F}_1 = \int I \cdot d\vec{l} \times \vec{B} = \int I \cdot dz \cdot \hat{k} \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}; \quad \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}; \quad \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$$



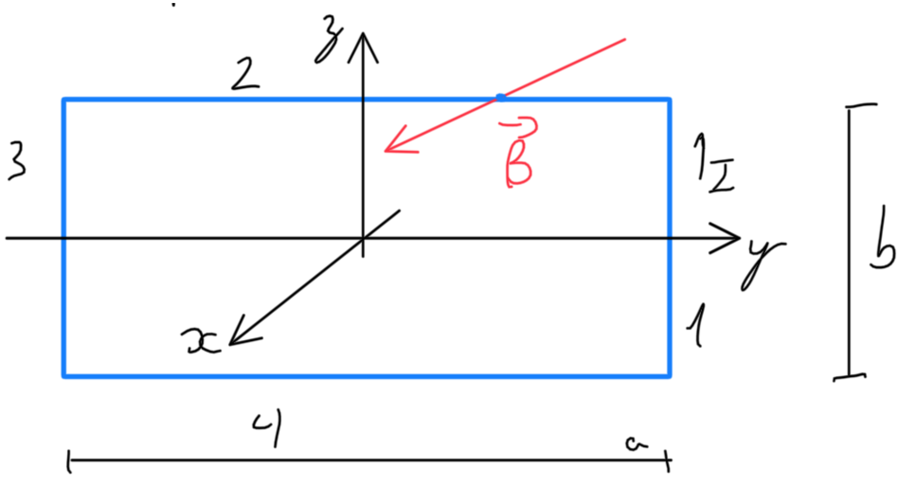
$$\vec{F}_1 = I \cdot b \left(B_x \hat{j} - B_y \hat{i} \right)$$

$$\vec{F}_2 = \int -I \, dy \; \hat{j} \times \left(B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \right)$$

$$= I \cdot a \left(B_x \hat{k} - B_z \hat{i} \right)$$

$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_1 \quad ; \quad \vec{F}_4 = -\vec{F}_2$$

Força resultante $\rightarrow \vec{F} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i = 0$

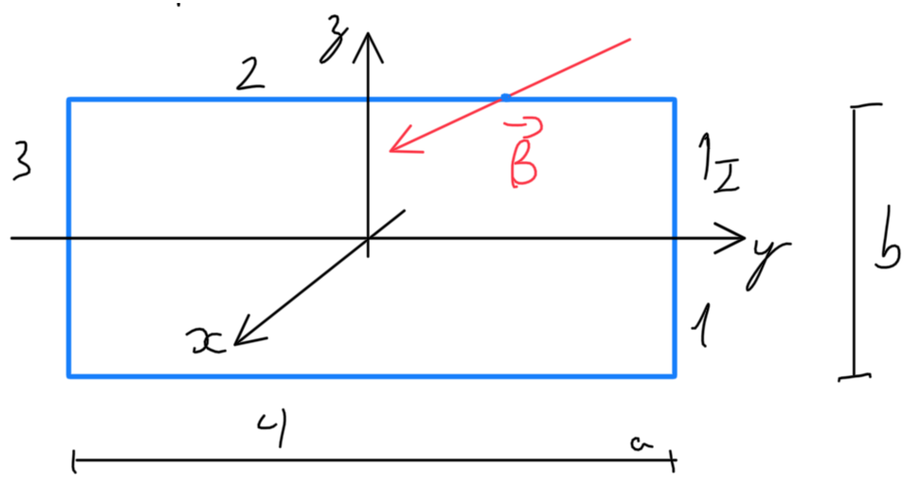


Torque $\vec{T} := \int \vec{r}_i \times d\vec{F}_i$

$$\vec{T}_1 = \frac{1}{b}\int (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1)\, dz = \frac{1}{b}\int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{a}{2}\hat{j} + z\cdot\hat{k}\right) \times Ib(B_x\hat{j} - B_y\hat{i})\,dz$$

$$= \frac{a}{2} I \underbrace{\underbrace{\hat{j}\times(B_x\hat{j}}_{=0} - B_y\hat{i})}_{=-k} \underbrace{\int_{-b/2}^{b/2} dz}_{=b} + \frac{1}{2} I\, \hat{k}\times(B_x\hat{j}-B_y\hat{i}) \underbrace{\int_{-b/2}^{b/2} z\,dz}_{=0}$$

$$\vec{T}_1 = \frac{ab}{2} I B_y \hat{k}$$



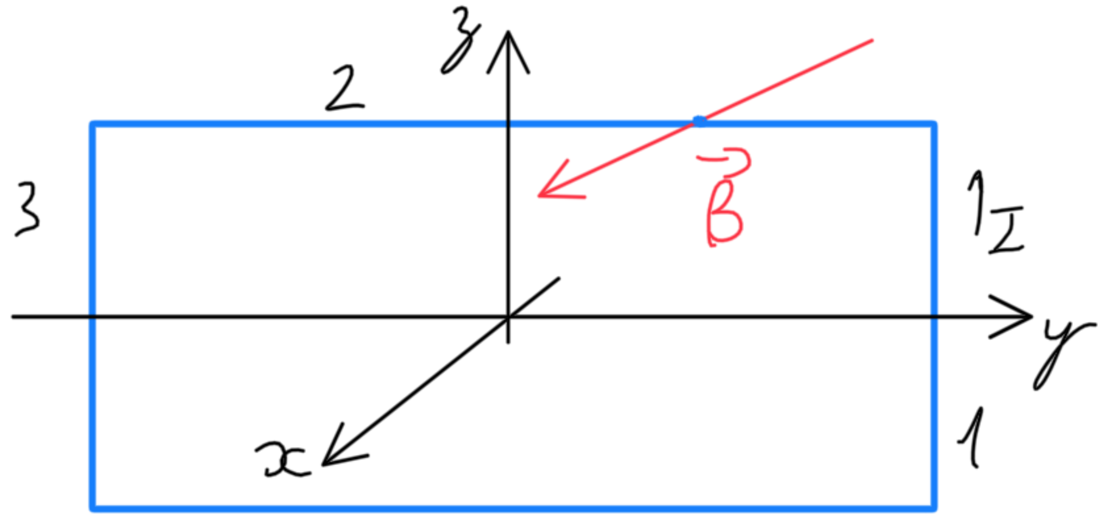
$$\vec{T}_2 = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2)\, dy = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} \left(y\hat{j} + \frac{b}{2}\hat{k}\right) \times I\cdot a\,(B_x \hat{k} - B_z \hat{i})\, dy$$

$$= -\frac{ab}{2} I \cdot B_z \hat{j}$$

$\vec{T}_3 = \vec{T}_1$; $\vec{T}_4 = \vec{T}_2$; $A = a \cdot b$

$$\vec{T} = I \cdot A\,(-B_z \hat{j} + B_y \hat{k})$$

$$\vec{T} = I\cdot A\,(-B_z\,\hat{j} + B_y\,\hat{k})$$



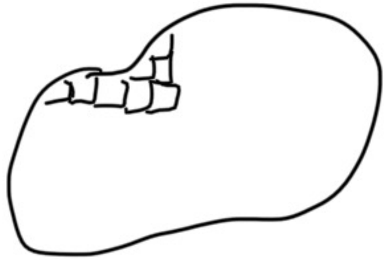
Definindo $\vec{m} = I\cdot A\cdot\hat{i}$ → <u>momento de dipolo magnético</u>

$$\vec{m}\times\vec{B} = I\cdot A\cdot\hat{i}\,(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

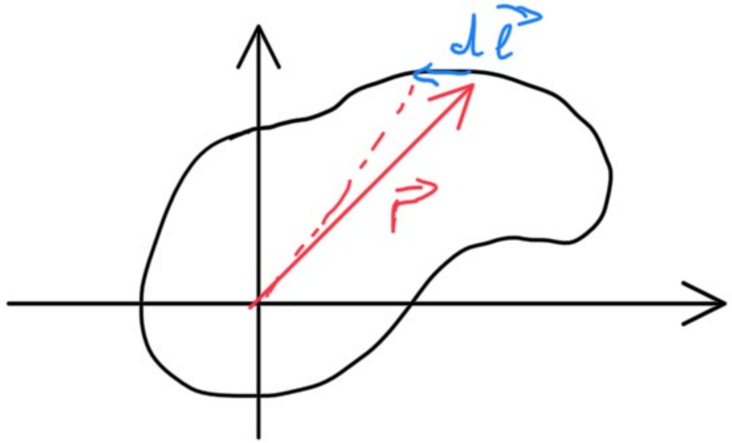
$$= I\cdot A\left[B_x(\hat{i}\times\hat{i}) + B_y\underbrace{(\hat{i}\times\hat{j})}_{\hat{k}} + B_y\underbrace{(\hat{i}\times\hat{k})}_{-\hat{j}}\right]$$

$$\boxed{\vec{T} = \vec{m}\times\vec{B}}$$

Extensível a qualquer geometria → somando áreas e cancelando adjacências



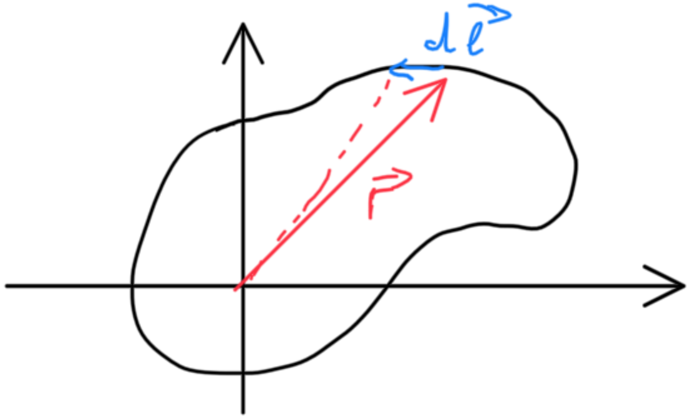
$\vec{m}$ pode ser construído das contribuições $d\vec{l}$



$$d\vec{A} = \frac{\vec{r} \times d\vec{l}}{2}$$

$$\vec{m} = \int_S I \cdot d\vec{A} = \int_S \frac{\vec{r} \times I\, d\vec{l}}{2} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{J}\, dv = \int d\vec{m}$$

$\vec{m}$ pode ser construído das contribuições $d\vec{l}$



$$d\vec{A} = \frac{\vec{r}\times d\vec{l}}{2}$$

$$\vec{m} = \int_S I\cdot d\vec{A} = \int_S \frac{\vec{r}\times I\,d\vec{l}}{2} = \frac{1}{2}\int_V \vec{r}\times\vec{J}\,dv = \int d\vec{m}$$

$$d\vec{m} = \frac{\vec{r}\times\vec{J}}{2}\,dv$$

Torque total: $d\vec{F} = (\vec{J}\times\vec{B})\,dv$

$$\boxed{\vec{T} = \int_V \vec{r}\times(\vec{J}\times\vec{B})\,dv}$$

Campo não uniforme

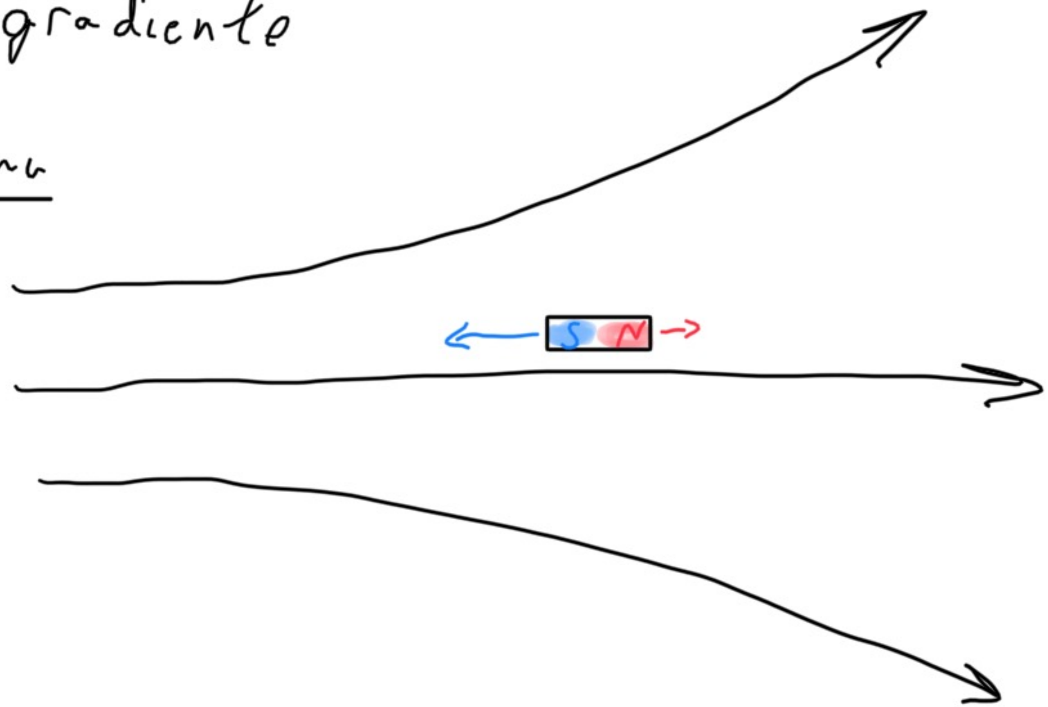
Como no caso do campo elétrico

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m}\cdot\vec{B})$$

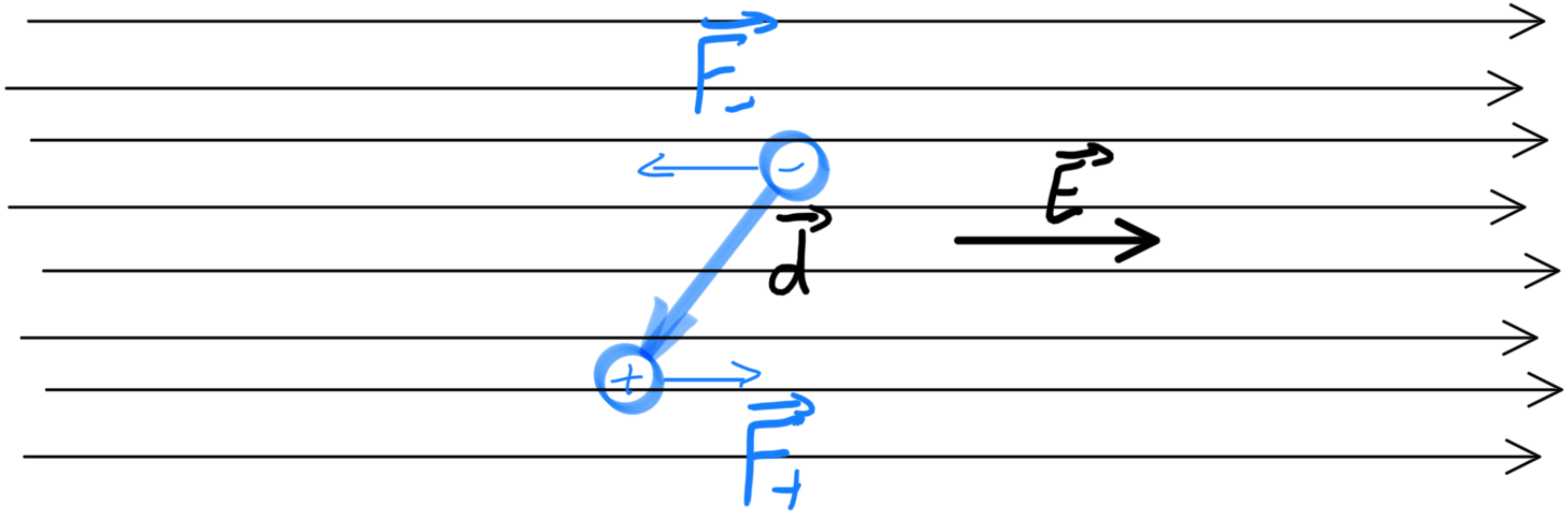
$$= \vec{m}\times\underbrace{(\nabla\times\vec{B})}_{=0} + (m\cdot\nabla)\vec{B} = (\vec{m}\cdot\nabla)\vec{B}$$

→ Sensível ao gradiente

→ Buscando a <u>máxima intensidade</u> de campo



Torque sobre o dipolo



Campo homogêneo : $\vec{F}_+ = -\vec{F}_- = Q \cdot \vec{E}$

$$\vec{T} = Q\vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$\vec{p} \rightarrow$ momento de dipolo

Campo inomogêneo : $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = Q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-)$

$$\vec{F} = Q\left[\vec{E}(\vec{r}_0 + \vec{d}/2) - \vec{E}(\vec{r}_0 - \vec{d}/2)\right]$$

$$\vec{E} = E_x\,\hat{i} + E_y\,\hat{j} + E_z\,\hat{k}$$

considerando $|E_x| >> |E_y|, |E_z|$

$$\vec{E}(\vec{r}) \simeq E_x(\vec{r})\,\hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{F} \simeq Q \cdot \underbrace{\left[E_x(\vec{r}_0 + \vec{d}/2) - E_x(\vec{r}_0 - \vec{d}/2)\right]}_{\Delta E \simeq \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot (\vec{d} \cdot \hat{i})}\,\hat{i}$$

$$\vec{F} = Q\,(\vec{d} \cdot \hat{i})\,\frac{\partial}{\partial x}E_x\,\hat{i}$$

depende do alinhamento ao campo

sensível à variação do campo

↳ alinhado ao campo


30 20 10 0 10 20 30
÷ +