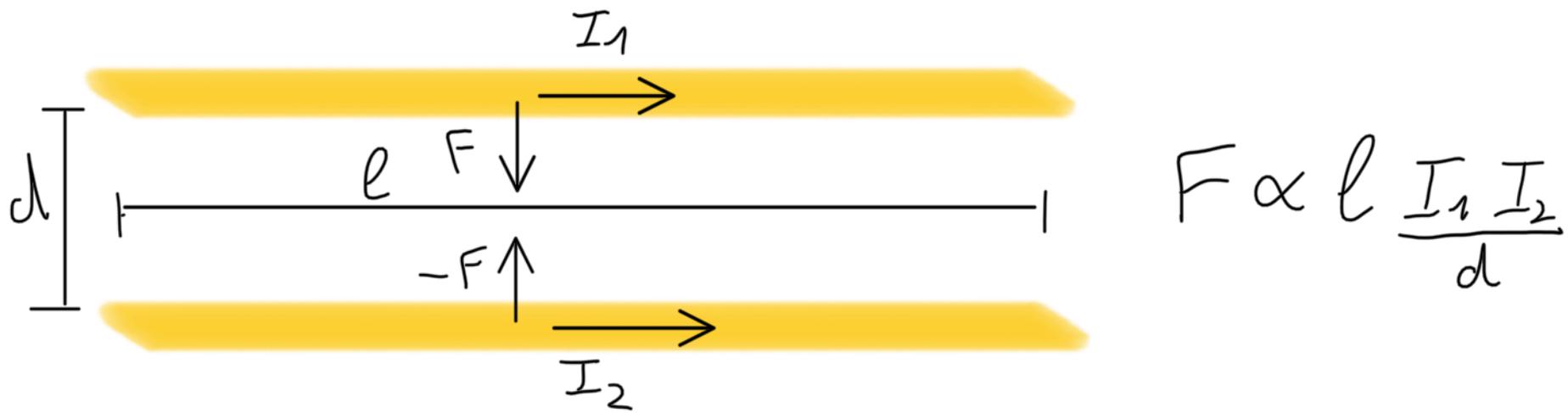


# Eletromagnetismo

## Forças e Magnetismo

- Vimos como o campo magnético é gerado por correntes.
- Podemos observar o campo pelo alinhamento de dipolos.
- Medidas podem ser referenciadas ao campo magnético terrestre.
- Deduzimos a corrente como fonte de campo.
- Corrente  $\rightarrow$  cargas em movimento
- Cargas estáticas: Campo elétrico. Forças elétricas (par ação / reação).
- Como observamos as forças magnéticas, para além dos torques?

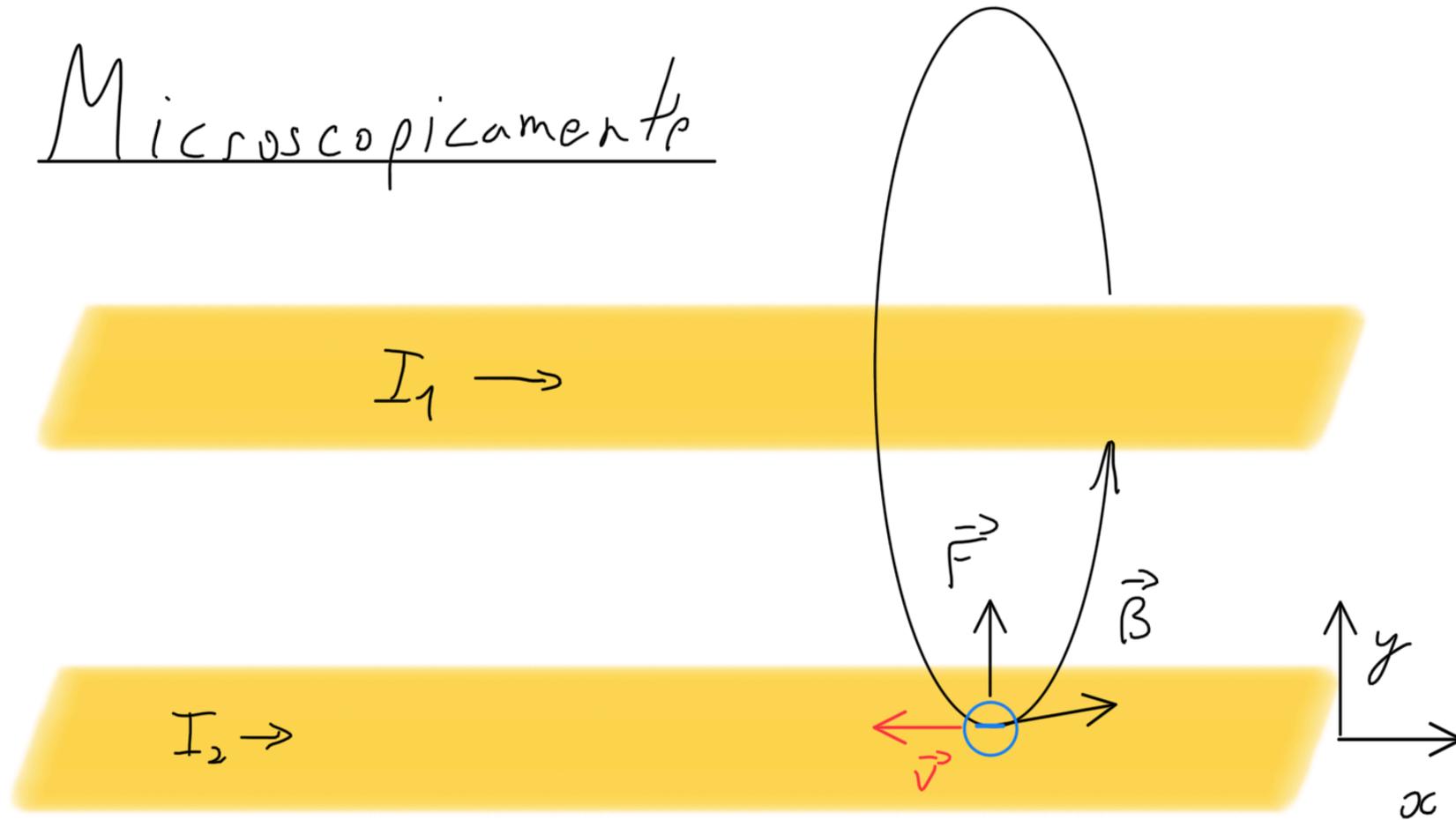
- André- Marie Ampère (1775-1836) – École Polytechnique
- Explora a força entre dois fios condutores, logo após saber dos resultados de Oersted (1820)



$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} l \frac{I_1 I_2}{d} \quad ; \quad \mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

- Repulsão e atração (como no campo elétrico).
- Proporcional ao campo magnético (como no campo elétrico).
- Podemos associar então forças a cargas, como no campo elétrico?

# Microscopicamente

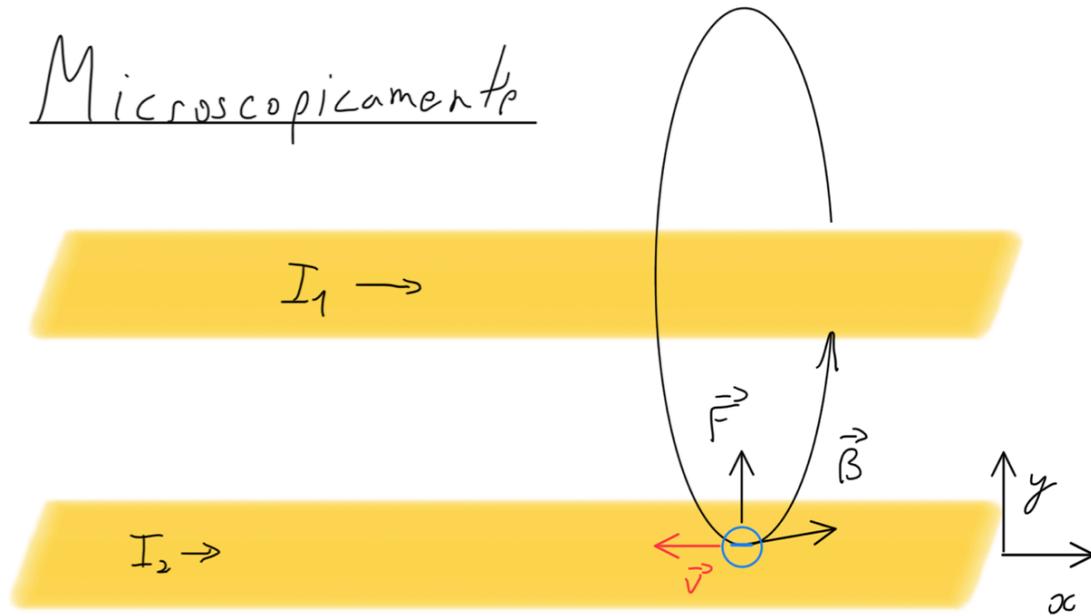


$$\text{Charge} = -e$$

$$\vec{v} = -v \cdot \hat{i}$$

$$\vec{B} = -B \cdot \hat{k}$$

# Microscopicamente

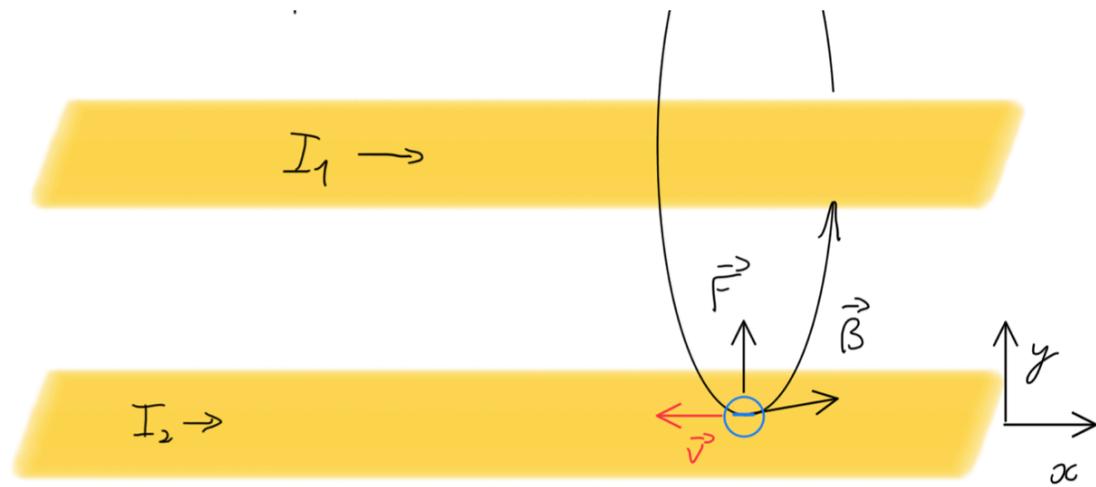


$$\text{Carga: } -e \quad \vec{v} = -v \cdot \hat{i}$$
$$\vec{B} = -B \cdot \hat{k}$$

Aula anterior:  $B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$

$$\vec{F}_q = q (\vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{F}_e = -e \cdot (-v \cdot \hat{i} \times -B \cdot \hat{k})$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \Rightarrow \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} = -e v B (\hat{i} \times \hat{k}) \\ = -e v \cdot B \cdot -\hat{j} = e v B \cdot \hat{j} \end{array} \right|$$



Corrente  $I_2$ :  $I_2 = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{n \cdot e}{\Delta t}$

Sobre  $n$  elétrons:

$$\vec{F} = n \cdot \vec{F}_e = (ne) \cdot v B \cdot \hat{j} = I_2 \cdot \Delta t \cdot v \cdot B \hat{j}$$

Comprimento  $l$  de fio:  $l = \Delta t \cdot v$

$$\Rightarrow \vec{F} = I_2 \cdot l B \hat{j} = \frac{\mu_0 l}{2\pi d} I_1 I_2 \hat{j}$$

Visão microscópica x Macroscópica

Hendrik Lorentz (1853-1928) - U. Leiden - 1895

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Força magnética  $\Rightarrow$  cargas em movimento

$$\text{Trabalho: } dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$\downarrow$   
deslocamento

Força magnética  $\Rightarrow$  cargas em movimento

$$\text{Trabalho: } dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$\downarrow$   
deslocamento

$$\begin{aligned} dW &= q \cdot (\vec{E} \cdot d\vec{l}) + q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= q \cdot (-dV) + q \underbrace{(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}}_{=0} \cdot dt \end{aligned}$$

Campo magnético não realiza trabalho!

Mas ainda assim, temos motores, e fios com correntes  
se atraem ou repelem!

---

## Campo sobre cargas: equações de movimento

$$\underline{\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$$

$$\text{tal que } |\vec{v}_{\parallel}| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{B}|}{|\vec{B}|}; \quad \vec{v}_{\parallel} \times \vec{B} = 0$$

$$|\vec{v}_{\perp}| = \frac{|\vec{v} \times \vec{B}|}{|\vec{B}|}; \quad \vec{v}_{\perp} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F} = q(\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}); \quad |F| = q v_{\perp} B$$

$$\text{aceleração: } a = \frac{|F|}{m} = \frac{q}{m} v_{\perp} B$$

$$\Rightarrow \vec{F} = q(\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}); \quad |F| = q v_{\perp} B$$

aceleração :  $a = \frac{|F|}{m} = \frac{q}{m} v_{\perp} B$

- perpendicular ao campo magnético
- proporcional à velocidade
- muda apenas a direção, sem alterar o módulo da velocidade

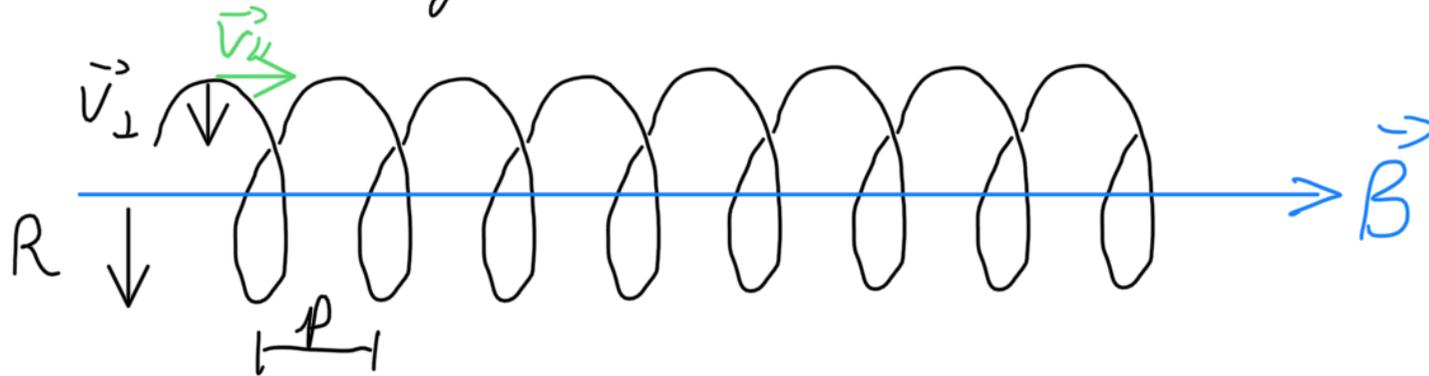
$\Rightarrow$  aceleração centrípeta:  $a_{cp} = \frac{v_{\perp}^2}{R}$

$\Rightarrow$  aceleração centrípeta:  $a_{cp} = \frac{v_{\perp}^2}{R}$

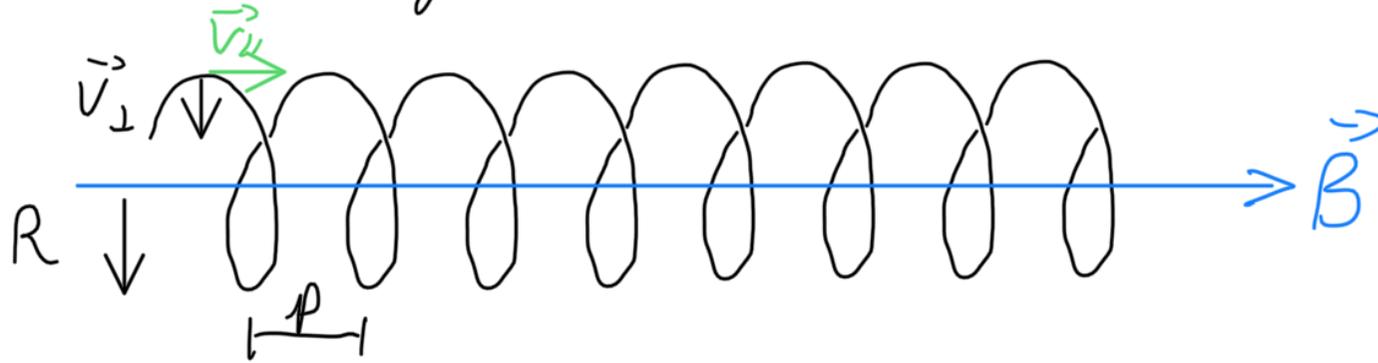
$\Rightarrow$  trajetória circular de raio  $R = \frac{v_{\perp}^2}{a_{cp}} = \frac{v_{\perp}^2 m}{q v_{\perp} B}$

$$R = \frac{m v_{\perp}}{q \cdot B}$$

Compo nente longitudinal se mantém  $\rightarrow$  Movimento helicoidal



Componente longitudinal se mantém  $\rightarrow$  Movimento helicoidal



$$\text{Período: } T = \frac{2\pi r}{v_\perp} = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{q \cdot B}$$

Período ciclotron: depende somente de carga, massa e  $B$

$$\text{Passo } p = v_\parallel \cdot T$$

Ponto importante  $v \ll c$  (veremos que ao

acelerar uma carga, temos irradiação

= perda de energia)

---

## Compos não uniformes

Mais complicado, porém como  $dW=0$ ,  $v^2 = \text{cte}$ .

Força centrípeta:  $F_{cp} = m \cdot a_{cp} = m \frac{v_{\perp}^2}{R} = m \omega^2 R$

$$F_{cp} = q v_{\perp} B \Rightarrow v_{\perp} = \frac{q B R}{m} \quad \rightarrow \text{maior } B, \text{ menor } R$$
$$= \omega R \quad \rightarrow \text{maior } B, \text{ maior } \omega$$

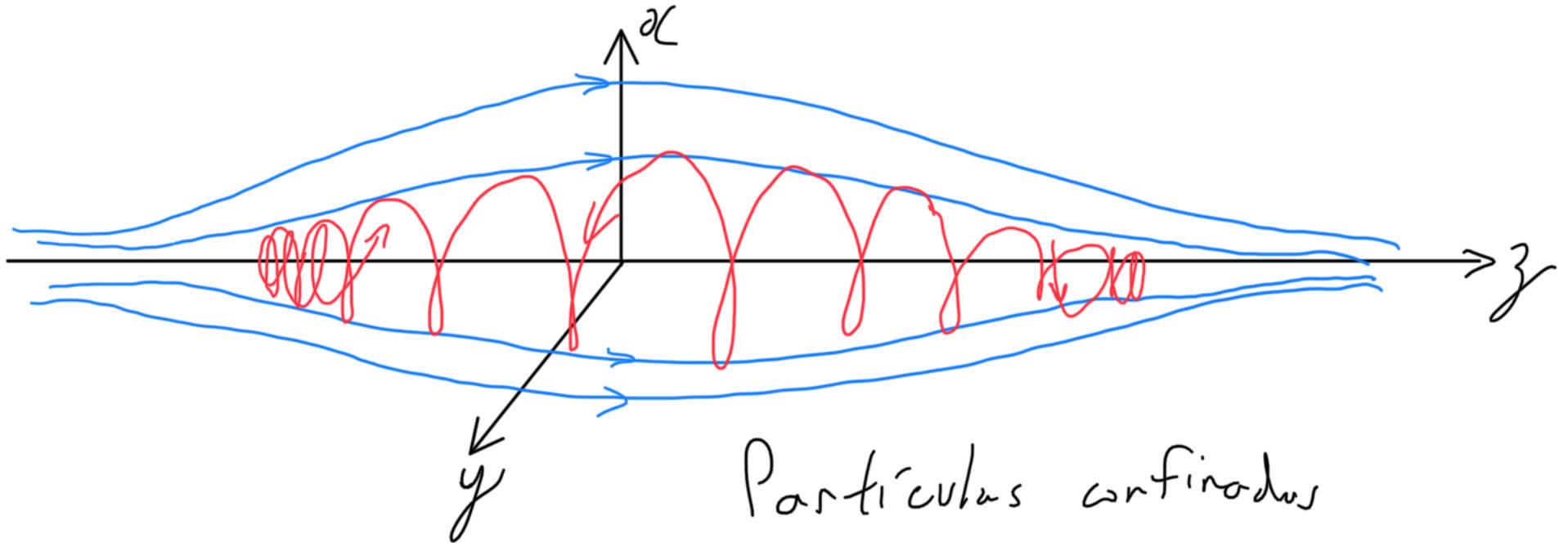
Energia cinética constante:  $\frac{m v_{\perp}^2}{2} + \frac{m v_{\parallel}^2}{2} = K$

$$v_{\parallel} = \pm \sqrt{\frac{2K}{m} - v_{\perp}^2} = \pm \sqrt{\frac{2K}{m} - \frac{q^2 B^2 R^2}{m^2}}$$

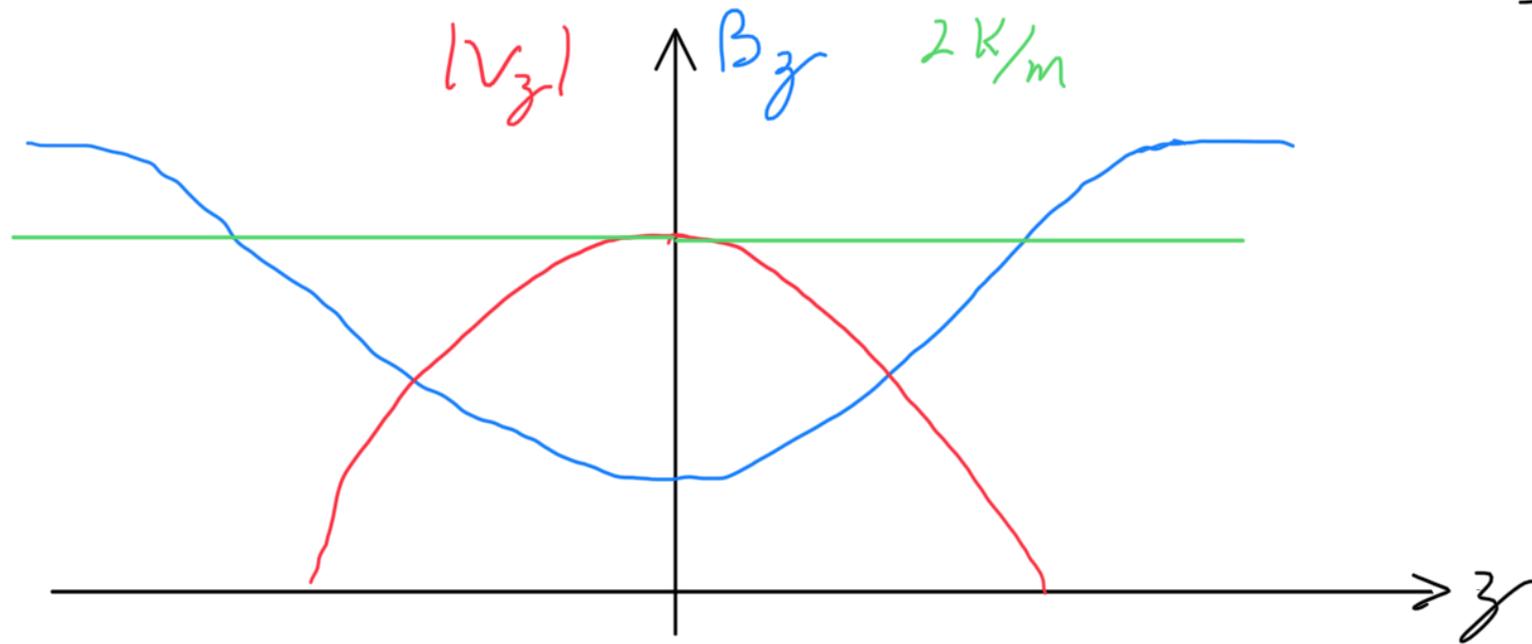
Energia cinética constante:  $\frac{m v_{\perp}^2}{2} + \frac{m v_{\parallel}^2}{2} = K$

$$v_{\parallel} = \pm \sqrt{\frac{2K}{m} - v_{\perp}^2} = \pm \sqrt{\frac{2K}{m} - \frac{q^2 B^2 R^2}{m^2}}$$

Modulando o campo,  $v_{\parallel}$  pode chegar a zero!



Por exemplo: plasma (núcleos de hidrogênio,  
deutério e trítio)



Confinamento e temperaturas altas o suficiente  
para permitir fusão (por exemplo, em um Tokamak)

Neste caso, em um campo toroidal.

---

# Consequência: Cinturões de Van Allen

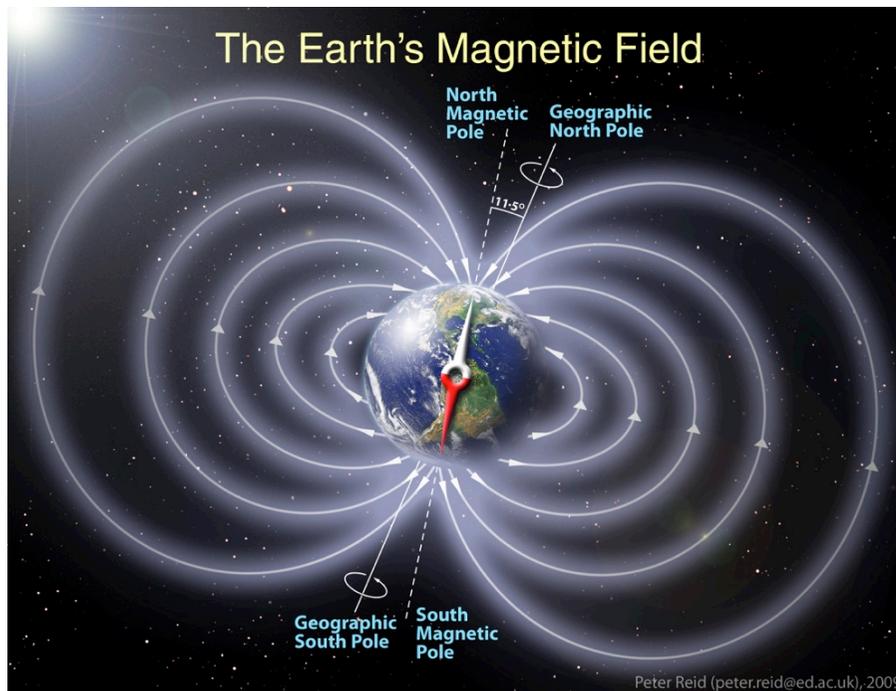
Confinamento de  
partículas pelo  
dipolo magnético  
terrestre

Interno:  $1,2 \rightarrow 3 R_e$   
( $10^3 \rightarrow 12 \cdot 10^3 \text{ km alt}$ )

$e \rightarrow \sim 100 \text{ keV}$   
 $p \rightarrow \sim 100 \text{ MeV}$

Externo:  $4 \rightarrow 11 R_e$   
( $13 \cdot 10^3 \rightarrow 60 \cdot 10^3 \text{ km alt}$ )

$e \sim 0,1 - 10 \text{ MeV}$



[https://www.nasa.gov/mission\\_pages/sunearth/news/gallery/Earths-magneticfieldlines-dipole.html](https://www.nasa.gov/mission_pages/sunearth/news/gallery/Earths-magneticfieldlines-dipole.html)

# Consequência: Cinturões de Van Allen

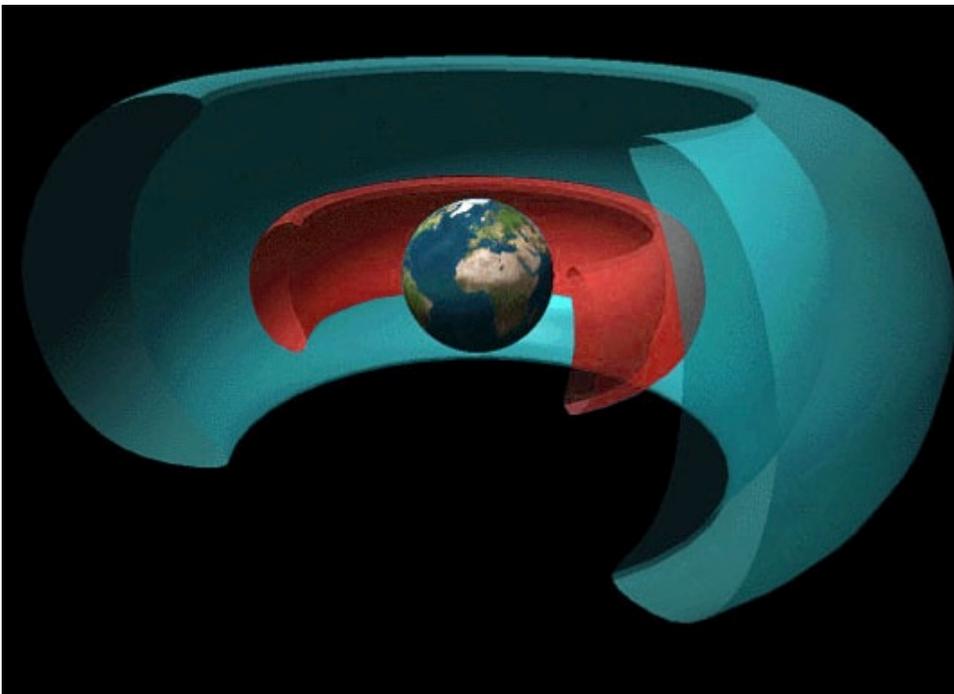
Confinamento de  
partículas pelo  
dipolo magnético  
terrestre

Interno:  $1,2 \rightarrow 3 R_E$   
( $10^3 \rightarrow 12 \cdot 10^3 \text{ km alt}$ )

$e \rightarrow \sim 100 \text{ keV}$   
 $p \rightarrow \sim 100 \text{ MeV}$

Externo:  $4 \rightarrow 11 R_E$   
( $13 \cdot 10^3 \rightarrow 60 \cdot 10^3 \text{ km alt}$ )

$e \sim 0,1 - 10 \text{ MeV}$

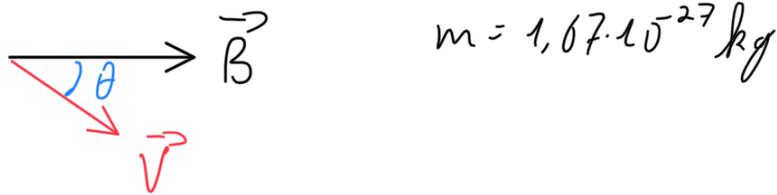


<http://www.nasa.gov/content/goddard/van-allen-probes-reveal-zebra-stripes-in-space>

Colocando números:

Próton em campo uniforme:

$$q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad B = 1 \text{ T}; \quad v = 5 \cdot 10^5 \text{ m/s}; \quad \theta = 30^\circ$$



$$\Rightarrow v_{\perp} = v \cos \theta = 5 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{2} = 2,5 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Frequência angular cíclotron: } \omega = \frac{q \cdot B}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ T}}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}$$

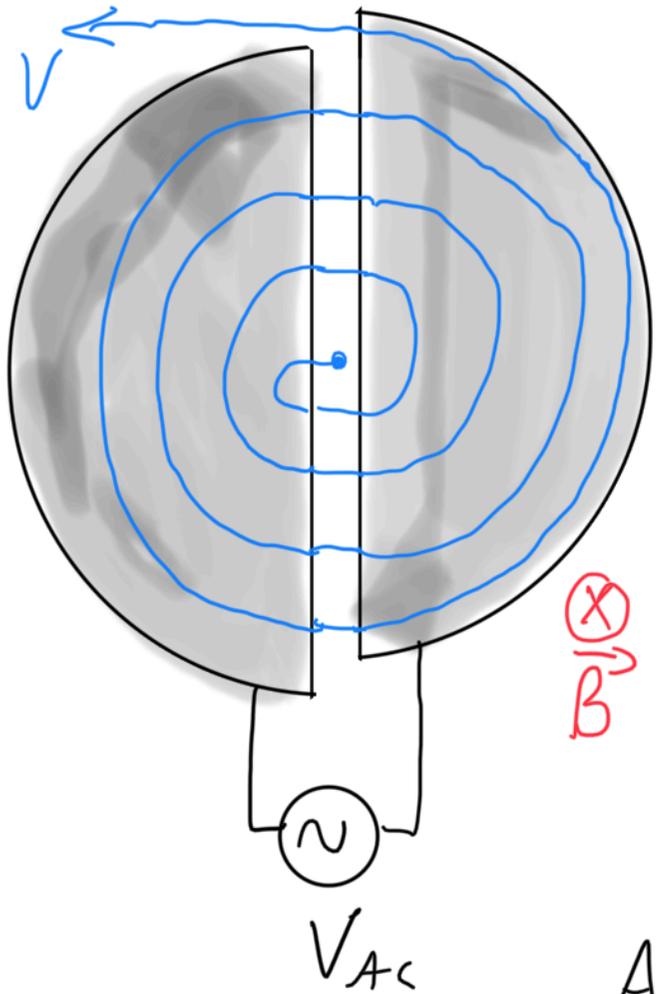
$$\omega \approx 10^8 \text{ rad/s}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 6 \cdot 10^{-8} \text{ s} = 60 \text{ ns}$$

$$\text{Raio: } R = \frac{mv}{qB} = \frac{v}{\omega} = \frac{2,5 \cdot 10^5 \text{ m/s}}{10^8 \text{ rad/s}} = 2,5 \text{ mm}$$

$$\text{Passo da hélice: } p = v_{\parallel} \cdot T = v \sin \theta \cdot T = 5 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 60 \text{ ns}$$

$$p = 2,6 \cdot 10^2 \cdot 10^5 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 2,6 \text{ cm}$$

# Acelerador cíclotron: 1932



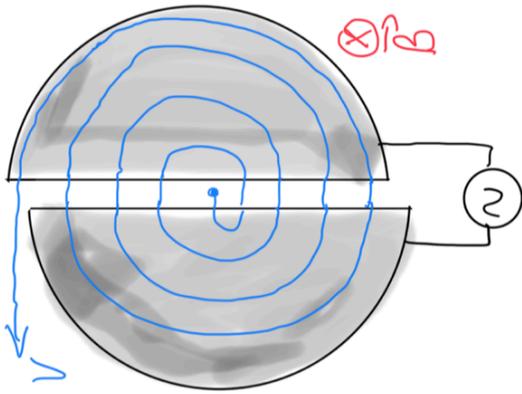
Aceleração no vácuo: ganho de energia:  $\Delta K = q \cdot V$

Tempo de voo dentro de cada seção  $D$ :  $T_v = \frac{1}{2} \frac{2\pi R}{v} = \frac{\pi R}{q \cdot B} m$

Frequência do oscilador  $f = \frac{1}{2T_v} = \frac{q \cdot B}{2\pi R m}$

A cada volta a partícula ganha energia.

$v_{\perp}$  aumenta  $\rightarrow R$  aumenta



A cada volta a partícula ganha energia.

$v \perp$  aumenta  $\rightarrow$   $R$  aumenta

Limite  $R = \frac{mv}{qB} \Rightarrow v = \frac{q}{m} BR$

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{q^2 B^2 R^2}{m}$$

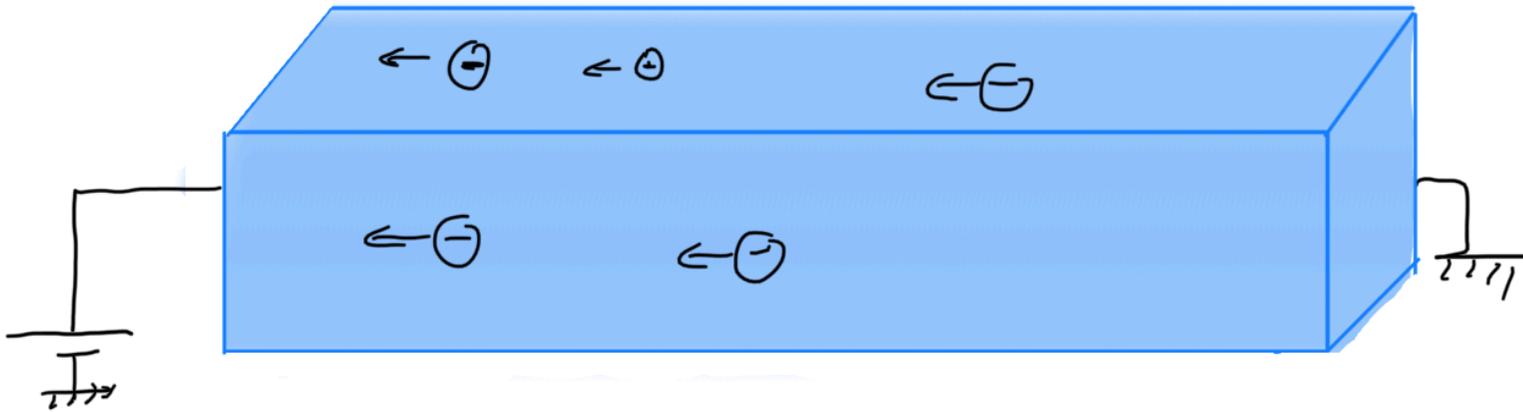
Limitação: velocidades relativísticas:  $m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

$m = m(v) \Rightarrow m_c$  varia com o raio

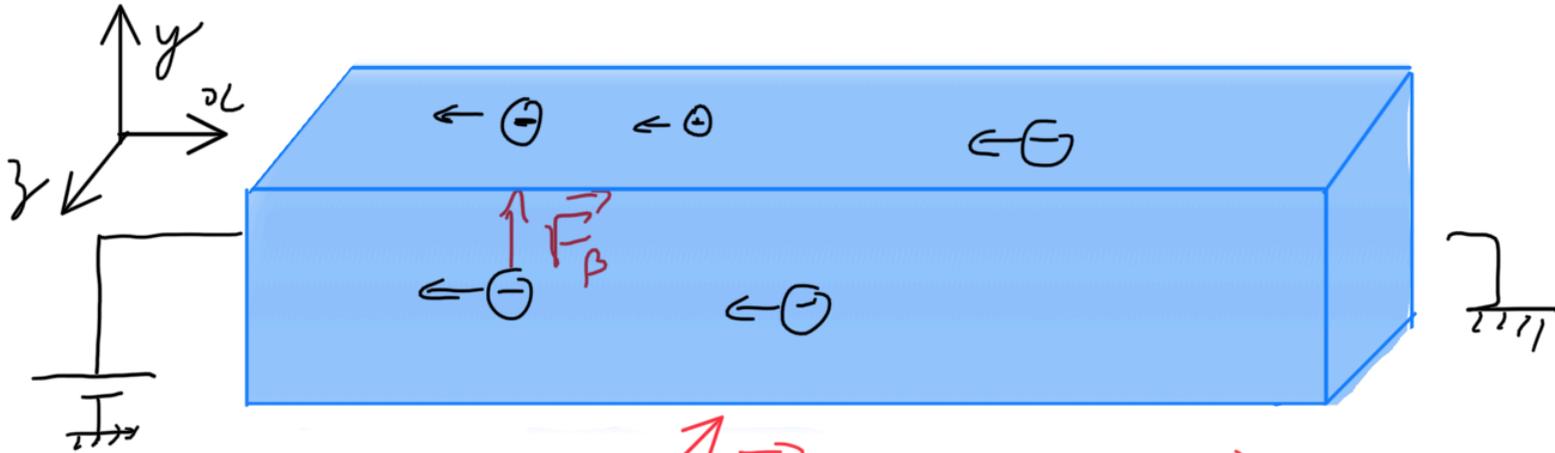
Valores típicos  $\sim 100 \text{ MeV}$

---

# Efeito Hall



# Efeito Hall



$$\vec{B}$$

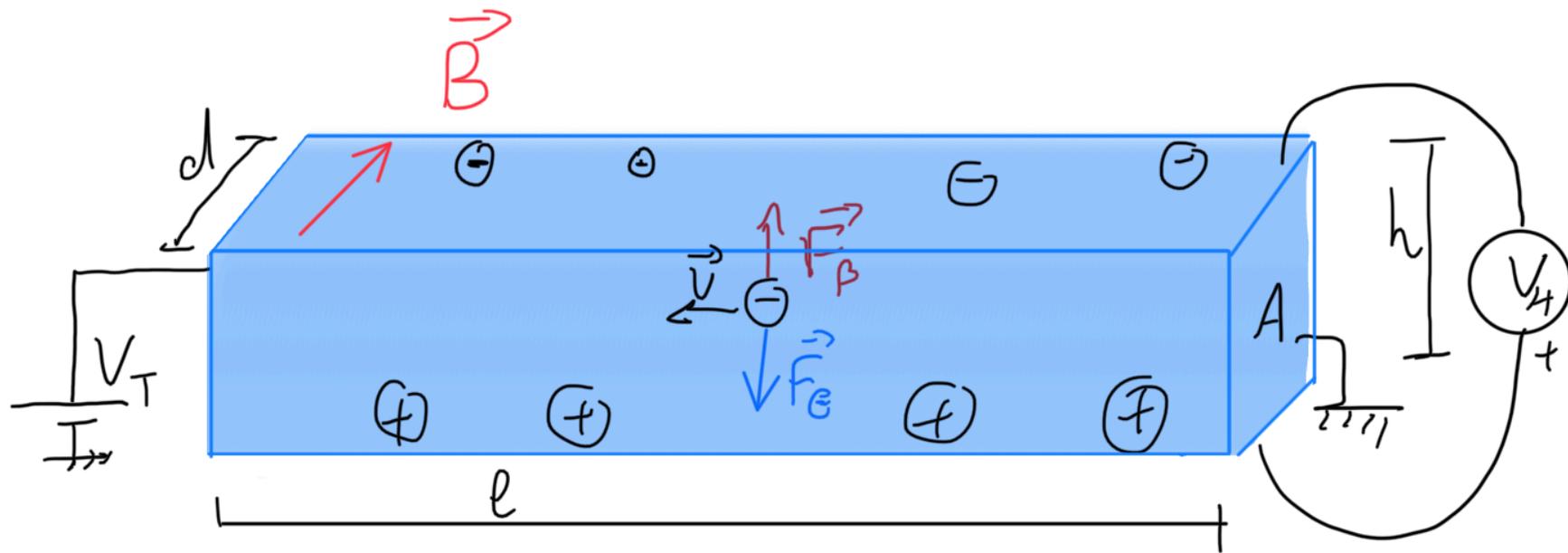
$$\begin{aligned} \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k} \\ \Rightarrow \hat{k} \times \hat{i} &= \hat{j} \end{aligned}$$

$$\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$= -e(-v\hat{i} \times (-B)\hat{k})$$

$$\vec{F}_B = evB\hat{j}$$

# Efeito Hall



$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E} = -e \vec{E}$$

$$\text{Equilíbrio : } e v B = e \cdot E \Rightarrow E = v \cdot B$$

Equilíbrio :  $e v B = e \cdot E \Rightarrow E = v \cdot B$

Campo elétrico: Densidade superficial de cargas

e Tensão Hall :  $V_H = E \cdot h = v \cdot h \cdot B$

Medidor de campo magnético!

Depende da velocidade dos portadores

Resistência  $R = \frac{\rho \cdot l}{A}$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{V_T}{R} \quad ; \quad \Delta t = \frac{l}{v}$$

$$\therefore \Delta Q = \frac{V_T \cdot \Delta t}{R} = \frac{V_T}{\rho \cdot l} \cdot A \cdot \frac{l}{v} = \frac{V_T \cdot A}{\rho v} = n \cdot A \cdot l \cdot e$$

↓  
dens. de  
portadores

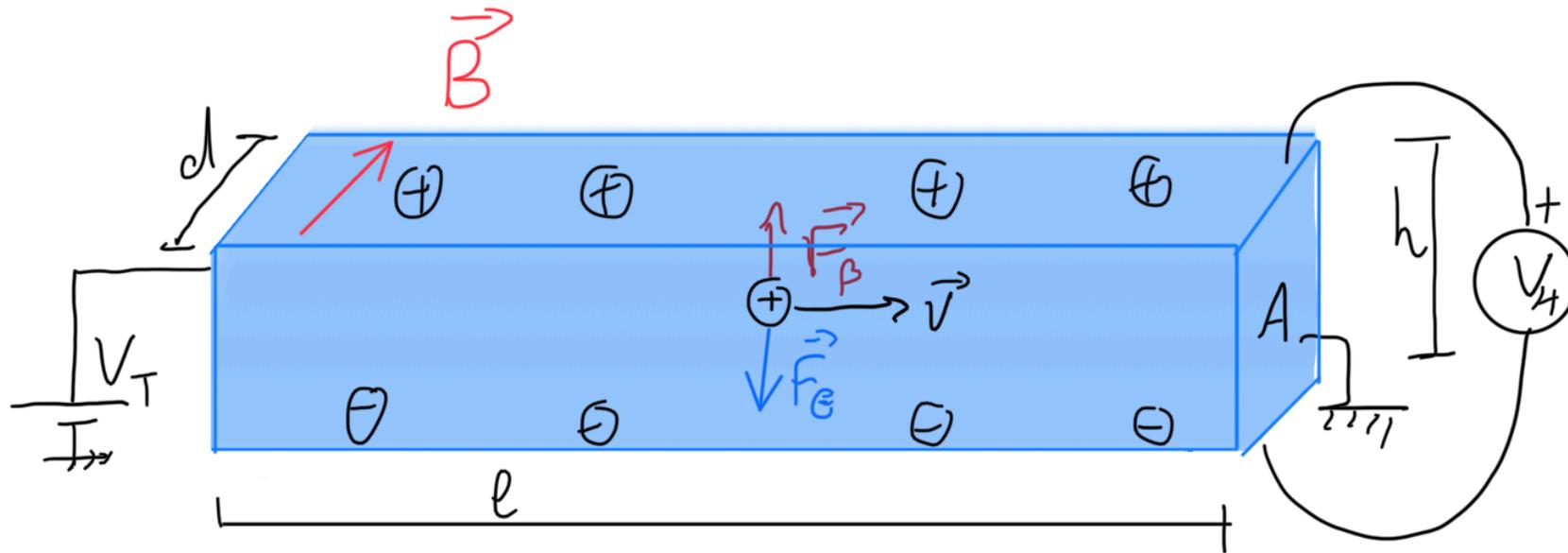
$$v = \frac{V_T}{n \cdot e \cdot \rho l} \Rightarrow V_H = \frac{V_T}{n e} \cdot \frac{h}{\rho l} \cdot B$$

$$\text{mas: } \rho \cdot l = R \cdot A = R \cdot d \cdot h$$

$$V_H = \frac{V_T}{n \cdot e \cdot R \cdot d} \cdot B = \frac{I}{n e d} \cdot B$$

E se os portadores de carga fossem positivos?

E se os portadores de carga fossem positivos?



$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$$

$$\vec{F}_B = q (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$= q (v \hat{i} \times (-B) \hat{k}) = q \cdot v \cdot B \cdot \hat{j}$$

$$V_H = \frac{-I}{n q d} B \rightarrow \text{inverte o sinal}$$