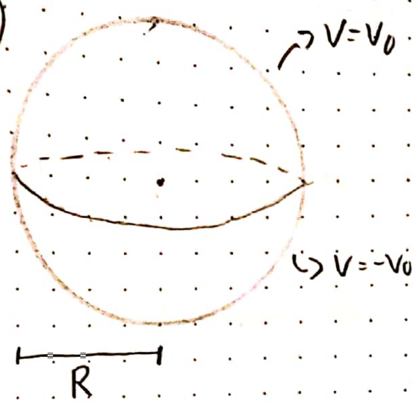
(10)



NÓS JÁ SABEMOS QUE, PARA UM PROBLEMA COM SIMETRIA ESFÉRICA E INDEPENDENTE DO ÂNGULO AZIMUTAL φ, QUE É O NOSSO CASO SABEMOS QUE O POTÊNCIAL É DA FORMA.

$$V(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

ONDE P_l É O POLINOMIO DE LEGANDRE DE GRAU l, A_l e B_l SÃO CONSTANTES QUE DEPENDEM DAS CONDIÇÕES INICIAIS DO PROBLEMA.

PARA O NOSSO CASO TEMOS QUE $\underbrace{V(R,\theta)=V_0,\ \forall\theta\in[0,\tfrac{\pi}{2})}_{\mathrm{I}}$ e $\underbrace{V(R,\theta)=-V_0\ \forall\theta\in(\tfrac{\pi}{2},\pi]}_{\mathrm{II}}$ $\underbrace{\lim_{r\to\infty}V(r,\theta)=0}_{\mathrm{III}}$

*APLICANDO A CONDIÇÃO III TEMOS QUE

$$\lim_{r\to\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)=0,$$

OS TERMOS $\frac{B_l}{r^{l+1}}$ VÃO PARA ZERO, ENTRETANTO OS TERMOS r^l VÃO PARA INFINITO, PORTANTO, PARA OBEDECER A CONDIÇÃO TEMOS QUE $A_l=0$.

* PARA OBTER OS TERMOS B_l PODEMOS USAR DO FATO DE QUE OS P_l FORMAM UMA BASE DO ESPAÇO ENTÃO ASSIM FAZEMOS O PRODUTO INTERNO COM UM DOS ELEMENTOS DA BASE PARA OBTER OS COEFICIENTES.

COMO $\langle P_l,P_{l'}\rangle=\int_{-1}^{1}P_l(x)\,P_{l'}(x)\,dx=\frac{2\,\delta_{ll'}}{2l+1}$ TEMOS PARA O NOSSO CASO

$$\int_0^{\pi}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)\right]P_{l'}(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta=\sum_{l=0}^{\infty}\int_0^{\pi}V(r,\theta)\,P_l(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta$$

CONTINUA →

APLICANDO AS CONDIÇÕES (I) e (II) TEMOS

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} \underbrace{\left(\int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)\, P_{l'}(\cos\theta)\, \text{sen}\theta\, d\theta \right)}_{\frac{2\delta_{ll'}}{2l'+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\int_0^{\pi/2} V_0 P_{l'}(\cos\theta)\, \text{sen}\theta\, d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} -V_0 P_{l'}(\cos\theta)\, \text{sen}\theta\, d\theta \right]$$

TROCANDO O "DUMMY INDEX" DE l' PARA l E A INTEGRAL DE θ PARA x COM $x = \cos\theta \Rightarrow dx = -\text{sen}\theta\, d\theta$ TEMOS:

$$\frac{B_l}{R^{l+1}} \cdot \frac{2}{2l+1} = \int_1^0 V_0 P_l(x)(-1)\,dx + \int_0^{-1} -V_0 P_l(x)(-1)\,dx \Rightarrow$$

$$B_l = \frac{R^{l+1}(2l+1)}{2} V_0 \left[\left(\int_0^1 P_l(x)\, dx \right) + \left(\int_0^{-1} P_l(x)\, dx \right) \right]$$

VAMOS AGORA VER QUAIS SÃO OS 2 PRIMEIROS TERMOS DIFERENTES DE ZERO

$\underline{l=0}$

$$B_0 = \frac{RV_0}{2} \left[\int_0^1 dx + \int_0^{-1} dx \right] = \frac{RV_0}{2} \left[\overbrace{x\Big|_0^1 + x\Big|_0^{-1}}^{0} \right] = 0 \quad \times$$

$\underline{l=1}$

$$B_1 = \frac{3R^2}{2} V_0 \left[\int_0^1 x\, dx + \int_0^{-1} x\, dx \right] = \frac{3R^2 V_0}{2} \left[\overbrace{\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^{-1}}^{1} \right] = \frac{3R^2 V_0}{2} \quad \checkmark$$

$l=2$

$$B_2 = \frac{5}{2} R^3 V_0 \left[\int_0^1 \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}\, dx + \int_0^{-1} \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}\, dx \right] = \frac{5R^3 V_0}{2} \left[\underbrace{\frac{x^3}{2} - \frac{x}{2}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x}{2}\Big|_0^{-1}} \right]$$

$= 0 \quad \times$

$\underline{l=3}$

$$B_3 = \frac{R^4 7V_0}{2}\left[\int_0^1 \frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}\,dx + \int_0^{-1} \frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}\,dx\right]$$

$$= \frac{R^4 7V_0}{2}\left[\frac{5x^4}{8} - \frac{3x^2}{4}\Big|_0^1 + \frac{5x^4}{8} - \frac{3x^2}{4}\Big|_0^{-1}\right] = -\frac{7}{8}R^4 V_0$$

SENDO ASSIM B_1 e B_3 SÃO OS 2 PRIMEIROS COEFICIENTES NÃO NULOS