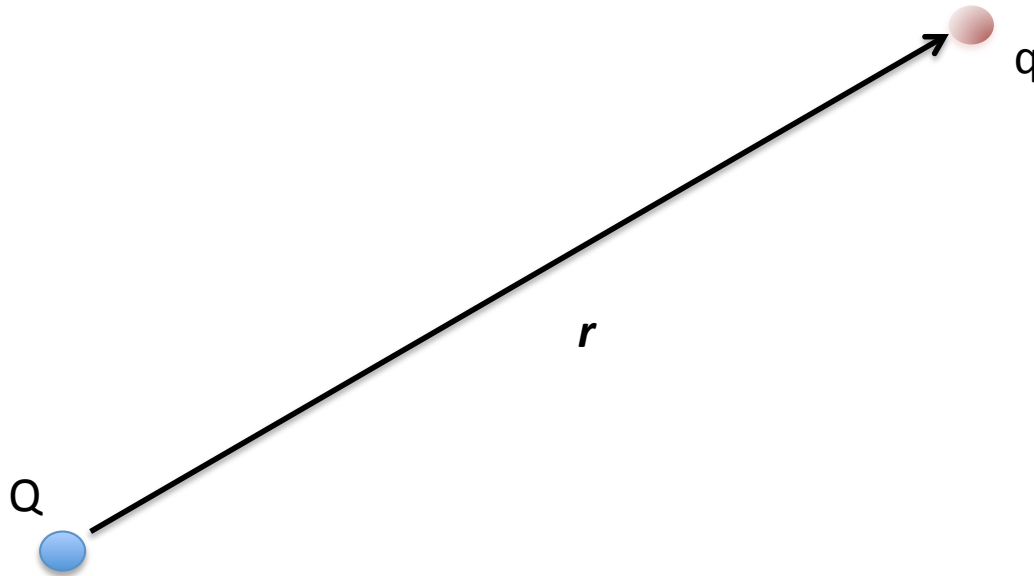


Eletromagnetismo

Força coulombiana: envolve pares de cargas

Koan: qual a força sobre uma carga nula ?

Quando coloco a carga q em r , a carga Q sabe qual é a força aplicada?

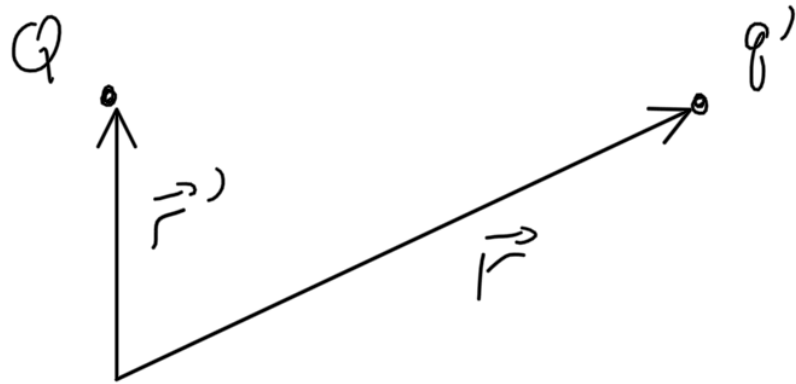


O conceito de Campo

Michael Faraday (1791-1867)

- Uma entidade intrínseca, dependente da distribuição de cargas e de suas velocidades.
- Incorpora as contribuições elétricas e magnéticas.
- Uma ferramenta extremamente útil para a resolução de problemas.
- Pelo momento, vamos tratar de um campo gerado por cargas estáticas.
- Temos assim, um **Campo Elétrico!**

Temos:
$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



Definindo: $\vec{E}(\vec{r})$, tal que $\vec{F}(\vec{r}) = q \cdot \vec{E}(\vec{r})$

Temos
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Claro que a superposição da força coulombiana nos leva à superposição dos campos. Para N cargas

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q \cdot q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} =$$

$$\sum_{i=1}^N q \cdot \vec{E}_i(\vec{r}) = q \cdot \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}) = q \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}_i)$$

$$\text{com } \vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Mas o mundo é mais suave que uma distribuição de cargas pontuais...

Passando ao limite contínuo:

Carga $q_i \rightarrow$ Infinitésimo $dq = \rho(\vec{r}') dV$

Onde $\rho(\vec{r}') = \frac{dq}{dV}$ é a densidade volumétrica de carga

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

Carga pontual : Tomando a origem na carga

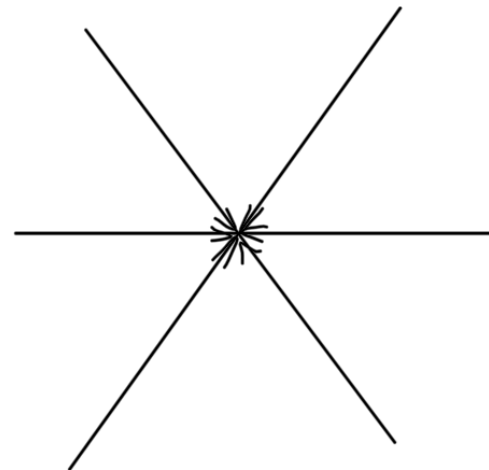
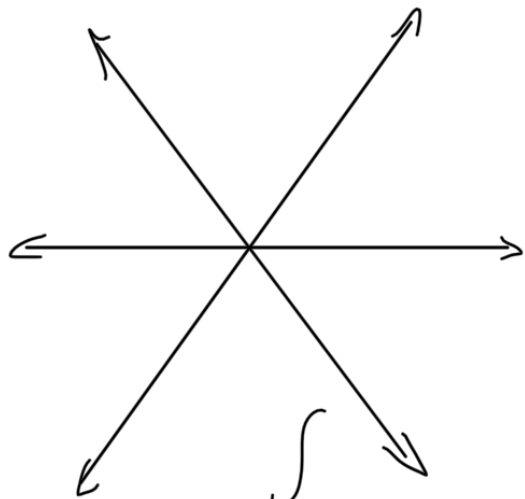
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \hat{r} \rightarrow \text{esfericamente simétrico}$$

\rightarrow cai com $\frac{1}{r^2}$

\rightarrow orientado radialmente

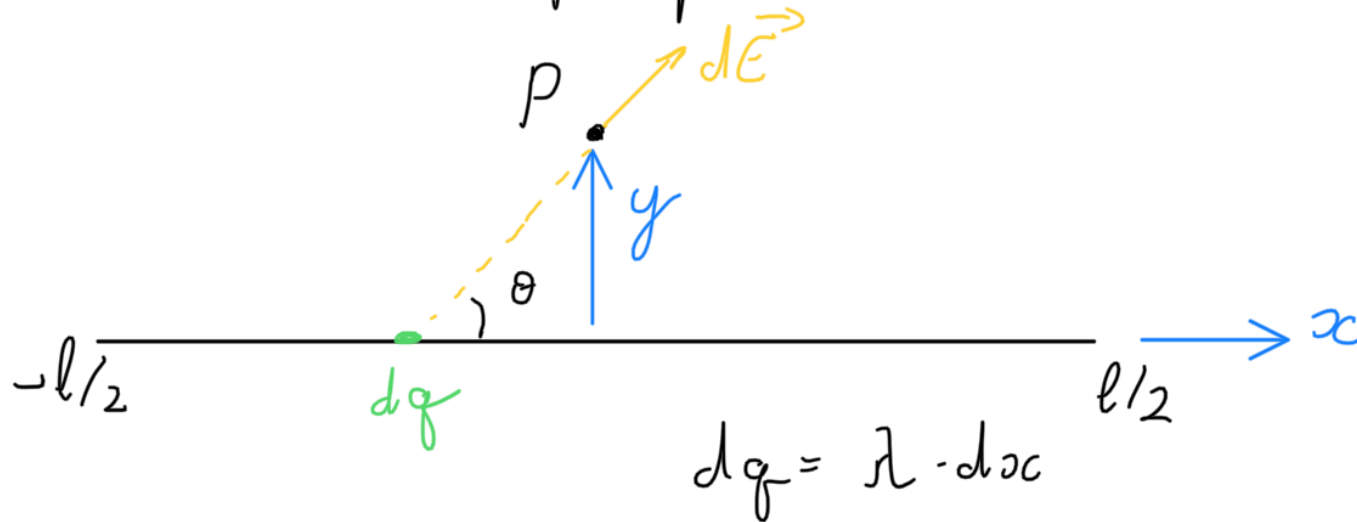
$Q > 0 \rightarrow$ para fora

$Q < 0$ para dentro



Linhas de
Campo \rightarrow mais densas,
maior o módulo

Problema: Campo próximo a uma haste longa



$$\vec{E}(P) = \int d\vec{E} \quad ; \quad d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}}{r^2}$$

$$\text{como } \cos\theta = \frac{-x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

$$\vec{E}(P) = \int d\vec{E} \quad ; \quad d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}}{r^2}$$

$$\text{Como } \cos\theta = \frac{-x}{(x^2+y^2)^{1/2}} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$\vec{E}(P) = E_x(P) \hat{i} + E_y(P) \hat{j}$$

$$E_x(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}} dx = 0$$

$$E_y(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} dx =$$

$$= \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y \cdot \sqrt{4y^2+l^2}} \quad ; \quad \text{cf. Aula 1}$$

$$E_y(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx =$$

$$= \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y \cdot \sqrt{4y^2 + l^2}} \quad ; \text{ cf. Aula 1}$$

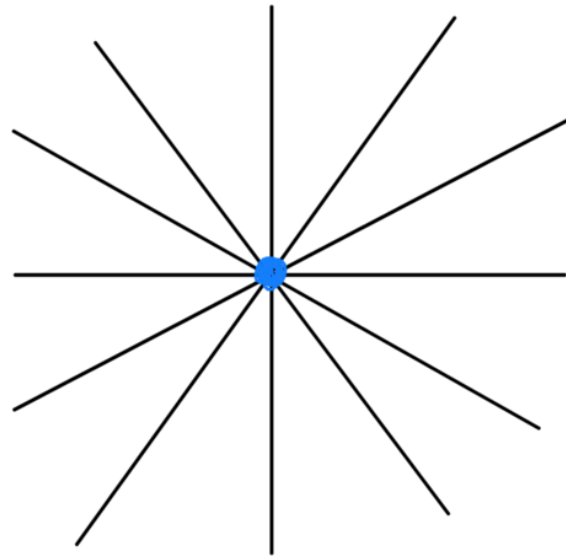
No limite de um fio muito longo; $l \gg |y|$

$$\sqrt{4y^2 + l^2} \rightarrow \sqrt{l^2} = l$$

$$\vec{E}(P) = E_y(P) \hat{j} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \hat{j}$$

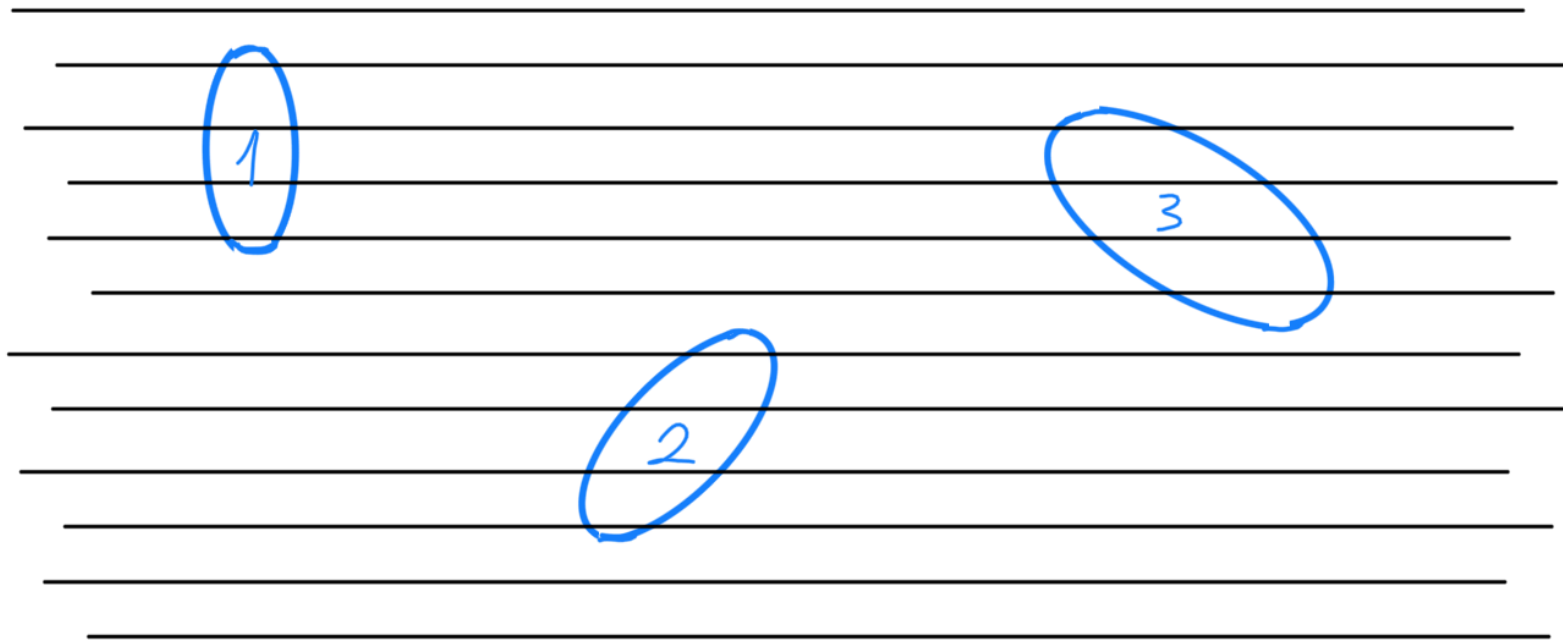
⊙ campo e^- todo radial!

Um campo que varia com $1/d^2$, onde d é a distância à fonte, traz uma característica importante



Vamos calcular o fluxo do campo por uma superfície:

Vamos calcular o fluxo do campo
por uma superfície:

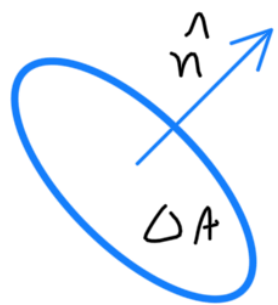


Quantas linhas passam por cada elipse?

Qual elipse tem área maior?

Quantas linhas passam por cada elipse?

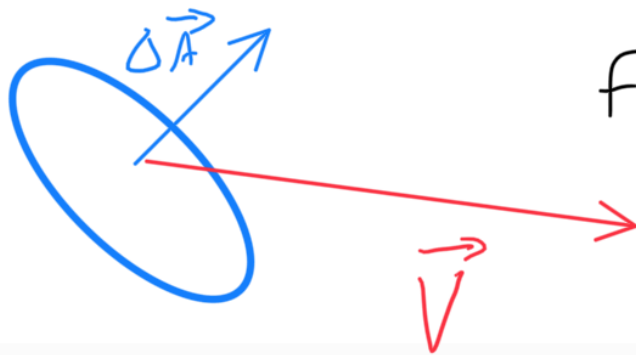
Qual elipse tem área maior?



Definimos um versor normal para uma pequena superfície de área ΔA

$$\Delta \vec{A} = \hat{n} \cdot \Delta A$$

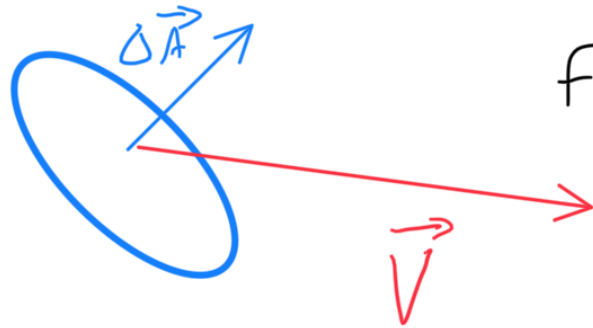
A projeção entre o vetor \vec{V} e o vetor $\Delta \vec{A}$



Fornece o fluxo $\Delta \phi$ em ΔA

$$\Delta \phi = \vec{V} \cdot \Delta \vec{A} = \vec{V} \cdot \hat{n} \cdot \Delta A$$

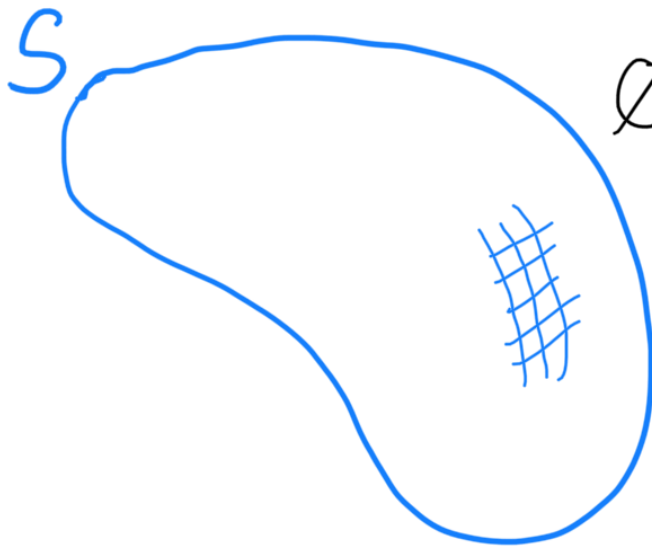
A projeção entre o vetor \vec{V} e o vetor $\Delta\vec{A}$



Fornece o fluxo $\Delta\phi$ em ΔA

$$\Delta\phi = \vec{V} \cdot \Delta\vec{A} = \vec{V} \cdot \hat{n} \cdot \Delta A$$

Para uma superfície qualquer, basta somar cada pedaço



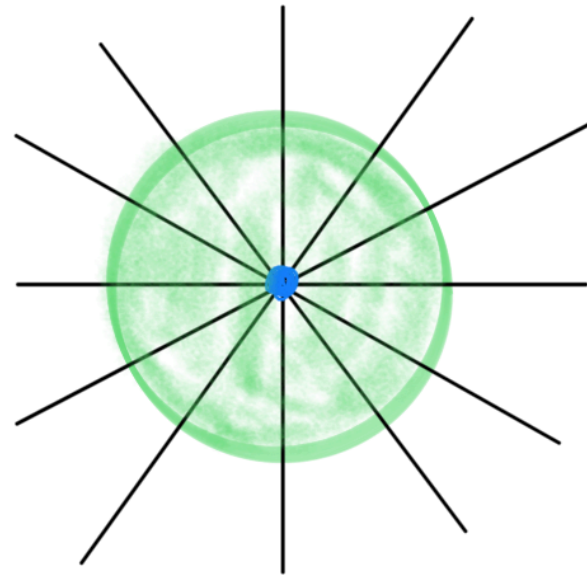
$$\phi_S = \sum_{i=1}^N \Delta\phi_i = \sum_{i=1}^N \vec{V}_i \cdot \Delta\vec{A}_i = \sum_{i=1}^N V_i \hat{n}_i \Delta A$$

$$N \rightarrow \infty, \Delta A_i \rightarrow dA$$

$$\phi_S = \int_S \vec{V} \cdot \hat{n} dA = \int_S \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

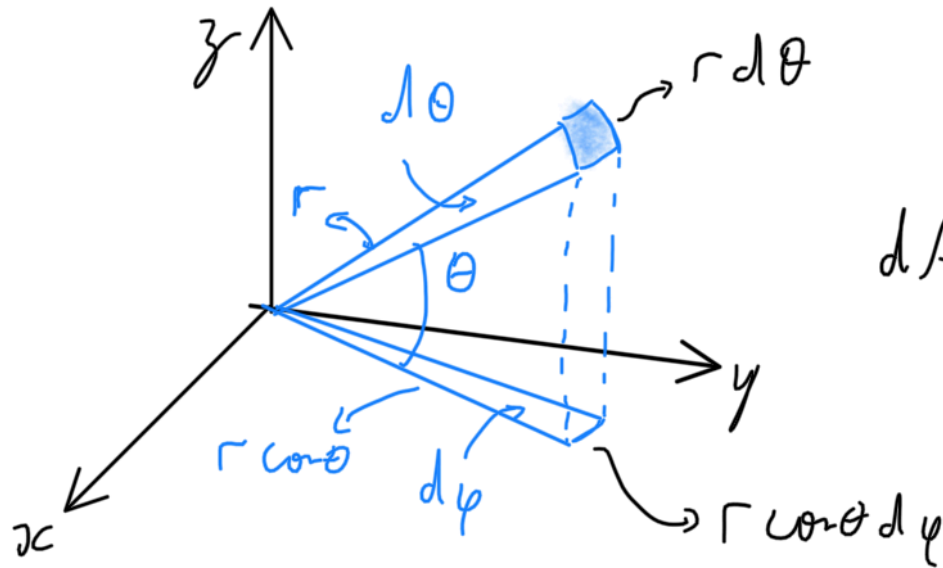
Vamos aplicar no cálculo do fluxo por uma esfera que envolva a fonte Q de um campo elétrico \vec{E}

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}$$



$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{E} \cdot \hat{r} \cdot dA = \int_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} (\hat{r} \cdot \hat{r}) r^2 \cos\theta d\theta d\varphi$$

Coord. esféricas



$$dA = r^2 \cos\theta d\theta d\varphi$$

$$\Phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\sin\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\varphi \right]_0^{2\pi}$$

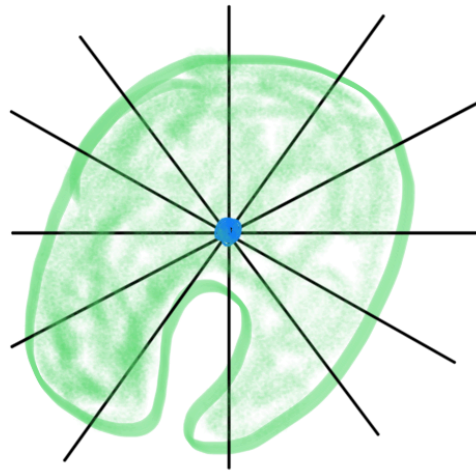
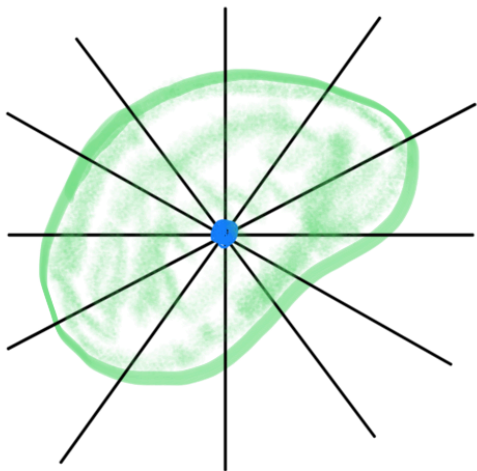
$$\phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\sin\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\varphi \right]_0^{2\pi}$$

$$\phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{!} \quad \rightarrow \text{independe de } r$$

$$\rightarrow \text{adota-se } \vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \hat{r}; \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

para simplificar 4π

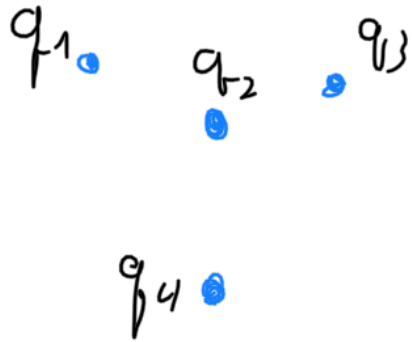
\Rightarrow independente da forma! Basta envolver Q !



E se tivermos múltiplos cargas?



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$



$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$= \sum_{i=1}^N E_i d\vec{A} = \sum_{i=1}^N d\phi_i$$

Superposição \Rightarrow Soma dos fluxos de N cargas

$$\phi = \sum_{i=1}^N \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{A}$$

$$\text{Como } \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{A} = q_i / \epsilon_0$$

Superposição \Rightarrow Soma dos fluxos de N cargas

$$\phi = \sum_{i=1}^N \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{A} \quad \text{Como } \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{A} = q_i / \epsilon_0$$

$$\phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$

Para uma distribuição contínua

$$\sum_{i=1}^N q_i \rightarrow \int_V \rho(\vec{r}') dV$$

Resultado: Lei de Gauss

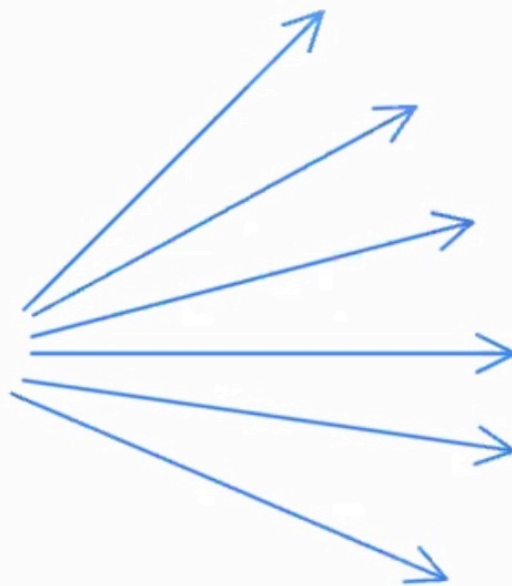
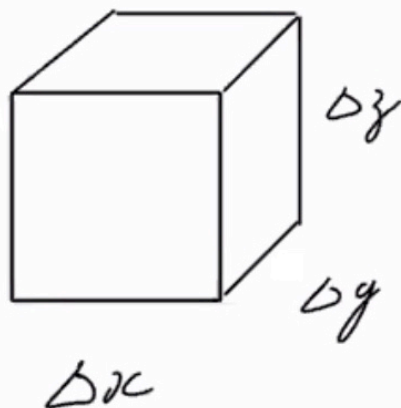
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') dV$$

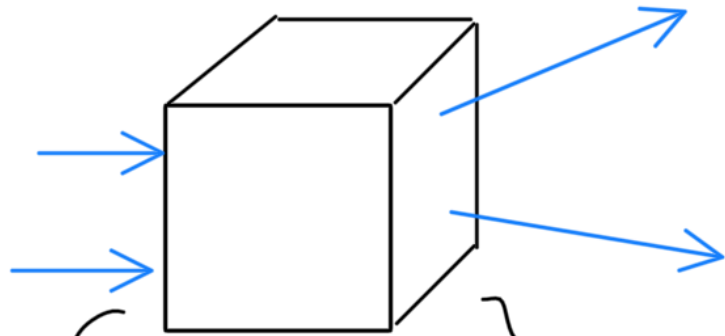
Teorema do Divergente

$$\nabla \cdot = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z$$





Fluxo

$$\phi_1 = \vec{E}(x) \cdot \hat{n}_1 \cdot dA$$

$$\phi_2 = \vec{E}(x+\Delta x) \cdot \hat{n}_2 \cdot dA$$

$$\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$$

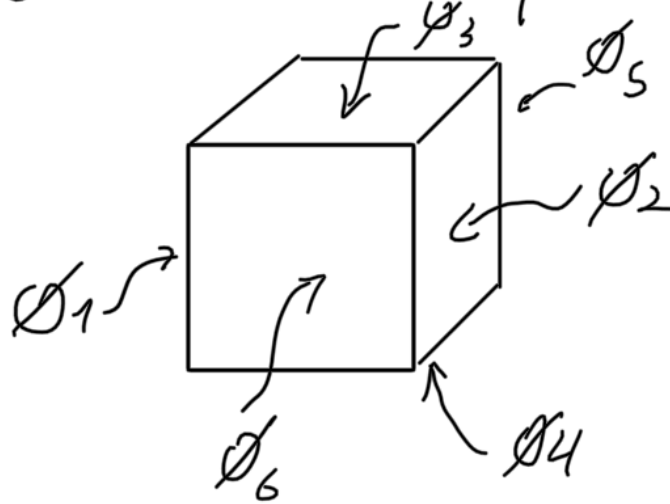
\Rightarrow

$$\phi_1 + \phi_2 = [\vec{E}(x+\Delta x) - \vec{E}(x)] \cdot \hat{n}_2 \cdot dA$$

$$= [E_x(x+\Delta x) - E_x(x)] dA$$

$$= \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot dA_2$$

Somando em cada par de faces



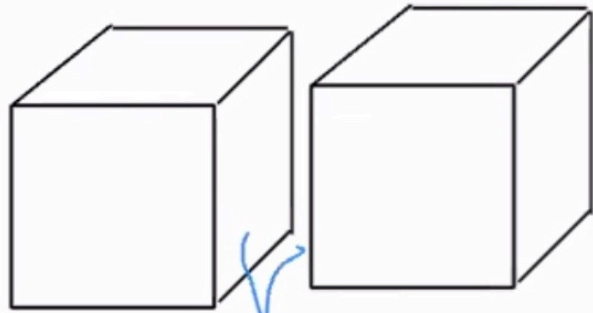
$$\phi_3 + \phi_4 = \frac{\partial}{\partial z} E_z \Delta z \cdot dA_3$$

$$\phi_5 + \phi_6 = \frac{\partial}{\partial y} E_y \Delta y \cdot dA$$

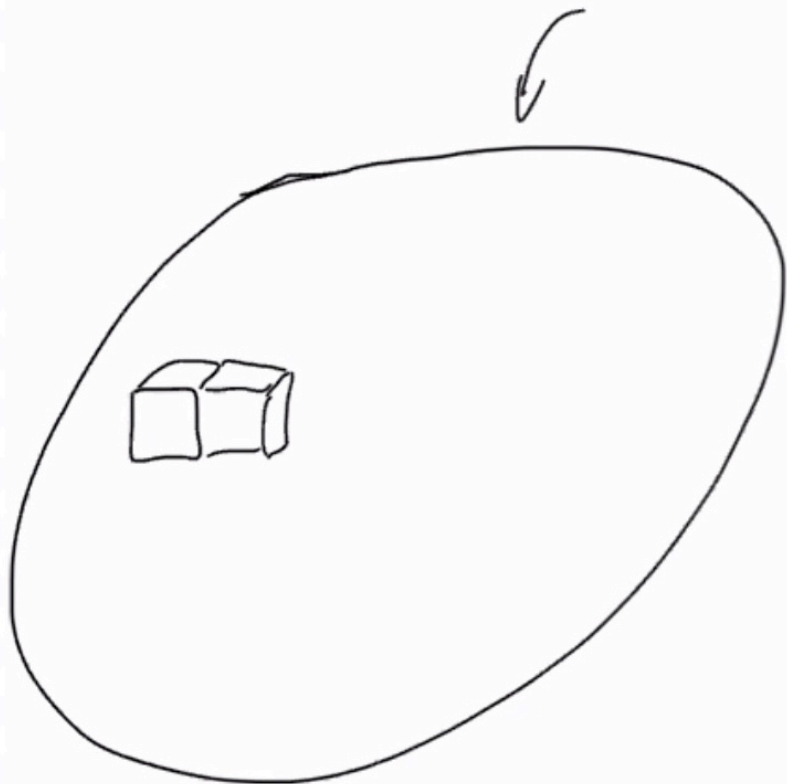
$$\Delta x \cdot dA_2 = \Delta V$$

$$\Delta\phi = \sum \phi_i = \left(\frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z \right) \Delta V = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \Delta V$$

Somando cada cubo no volume:



fluxos adjacentes se cancelam

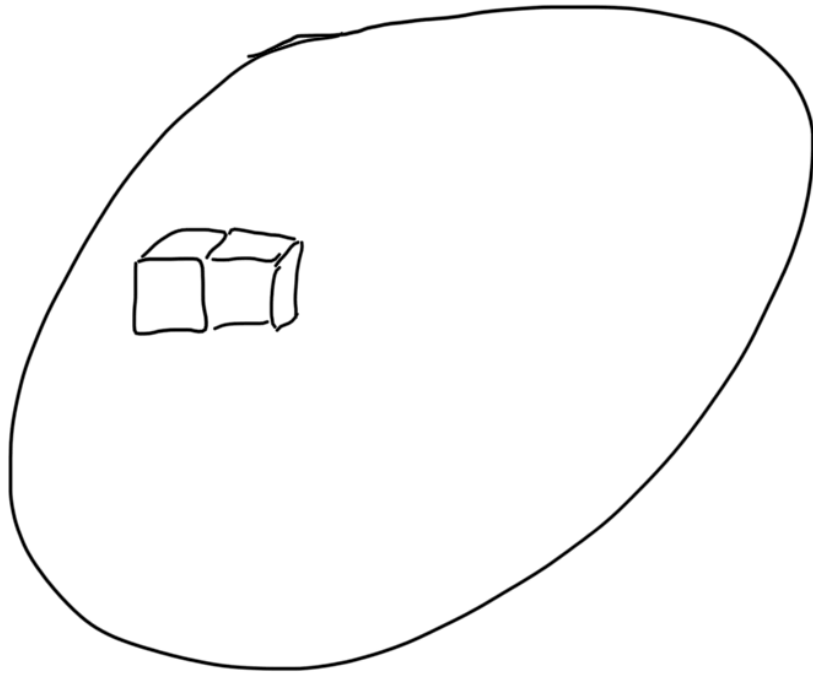


N volumes

$$\sum_{i=1}^N \Delta\phi_i = \sum (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \Delta V$$

$$\Delta V \rightarrow dV$$

$$\phi = \oint_S d\phi = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$



$$\sum_{i=1}^N \Delta\phi_i = \sum (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \Delta V$$

$$\Delta V \rightarrow 0$$

$$\phi = \oint_S d\phi = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

$$\therefore \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

Teorema do divergente, Teorema de Gauss

Lei de Gauss: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') dV$

$$\Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV - \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') dV = 0$$

$$\int_V \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \right] dV = 0$$

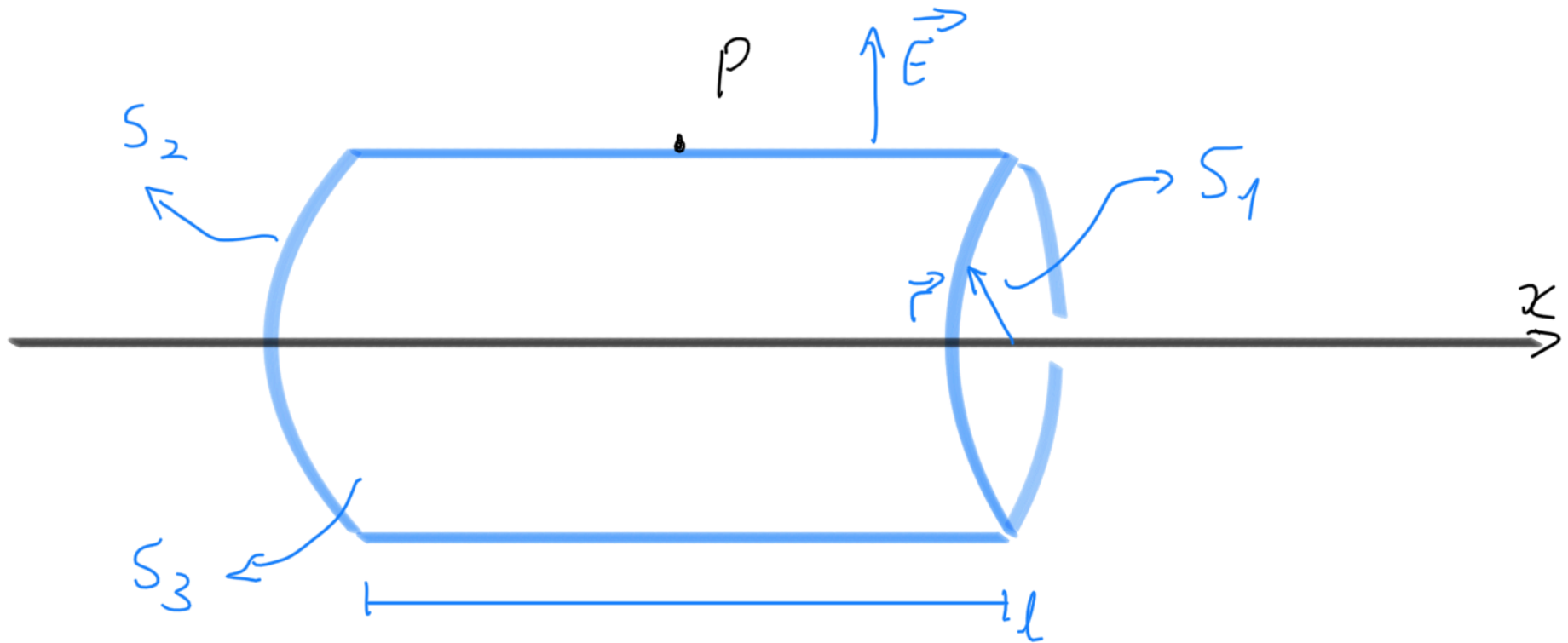
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Forma diferencial da

Lei de Gauss

Micro \rightarrow Macro

Retomando o Fio (carregado)



Campo em $P \rightarrow$ envelope. cilindrico, raio r , compr. l

Qual o fluxo do campo na superfície do cilindro?

Qual o fluxo do campo na superfície do cilindro?

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$= 0, \text{ pois}$$

$$\vec{E} \cdot \hat{n}_1 = 0$$

$$= 0$$

pois

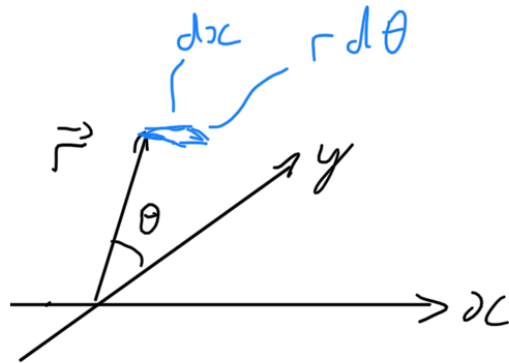
$$\vec{E} \cdot \hat{n}_2 = 0$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E \cdot \hat{r} \cdot d\vec{A} = \int E \cdot \hat{r} \cdot \underbrace{\hat{r} \cdot \vec{r}}_1 \cdot r d\theta dx$$

$$= E \cdot r \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-l/2}^{l/2} dx = 2\pi l \cdot E \cdot r$$

Qual a carga total dentro do cilindro?

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}') dV = \int \rho(\vec{r}') r' dr' d\theta dx$$



$$dA = r' d\theta dx$$

$$dV = dr' dA =$$

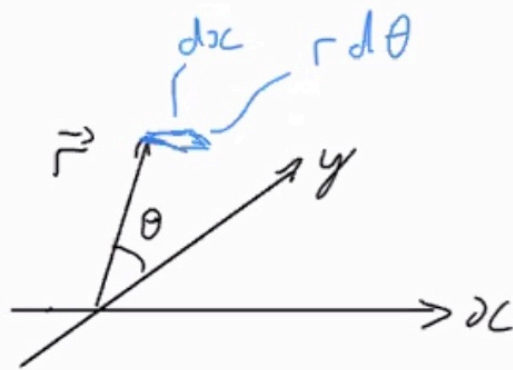
$$= r' dr' d\theta dx$$

$$Q = \int_{-l/2}^{l/2} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^r \rho(\vec{r}') r' dr' d\theta \right] dx$$

$\vec{r} \rightarrow$ não nos interessa a
estrutura no fio ∇

Qual a carga total dentro do cilindro?

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}') dV = \int \rho(\vec{r}') r' dr' d\theta dx$$



$$dA = r' d\theta dx$$

$$dV = dr' dA =$$

$$= r' dr' d\theta dx$$

$$Q = \int_{-l/2}^{l/2} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^R \rho(\vec{r}') r' dr' d\theta \right] dx$$

$\mathcal{A} \rightarrow$ não nos interessa a estrutura no fio \emptyset

$\rho(\vec{r}') = \rho(r')$
independe de θ, x

$$\therefore Q = \int_{-l/2}^{l/2} \lambda \cdot dx = \lambda \cdot l$$

Concluindo:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') dV$$

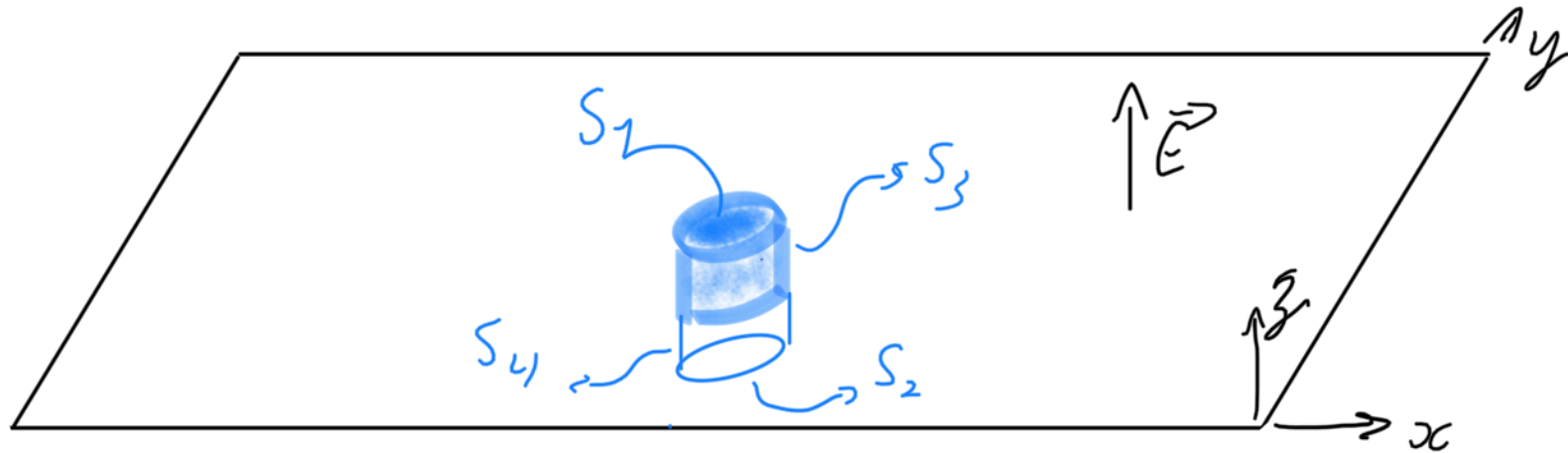
$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 2\pi E r \cdot l & = & \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \end{array}$$

C. Q. D.

Jogo rápido: "Placa infinita"

Ou muito grande: carga Q em área $A' \rightarrow$

\Rightarrow densidade superficial $\sigma = Q/A'$



$S_1, S_3 \rightarrow$ acima da placa

$S_2, S_4 \rightarrow$ abaixo da placa

Fluxo:

$$\int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{S_4} \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad \text{pois } \vec{E} \cdot \hat{n} = 0$$

$$\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad \text{por simetria}$$

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} &= 2 \cdot \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2 \int_{S_1} E \cdot \underbrace{\hat{k} \cdot \hat{k}}_{=1} \cdot dA = 2E \int_{S_1} dA \\ &= \underline{\underline{2E \Delta A}} \end{aligned}$$

Carga: $q = \int_V \rho(\vec{r}') dV = \int \int_{-t/2}^{t/2} \rho(\vec{r}') dz dA$

$t \rightarrow$ espessura da
placa

Não nos interessa dentro da placa: $\int_{-t/2}^{t/2} \rho dz = \sigma = \text{cte}$

$$\therefore q = \int \sigma \cdot dA = \sigma \int dA = \Delta A \cdot \sigma$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') dV$$

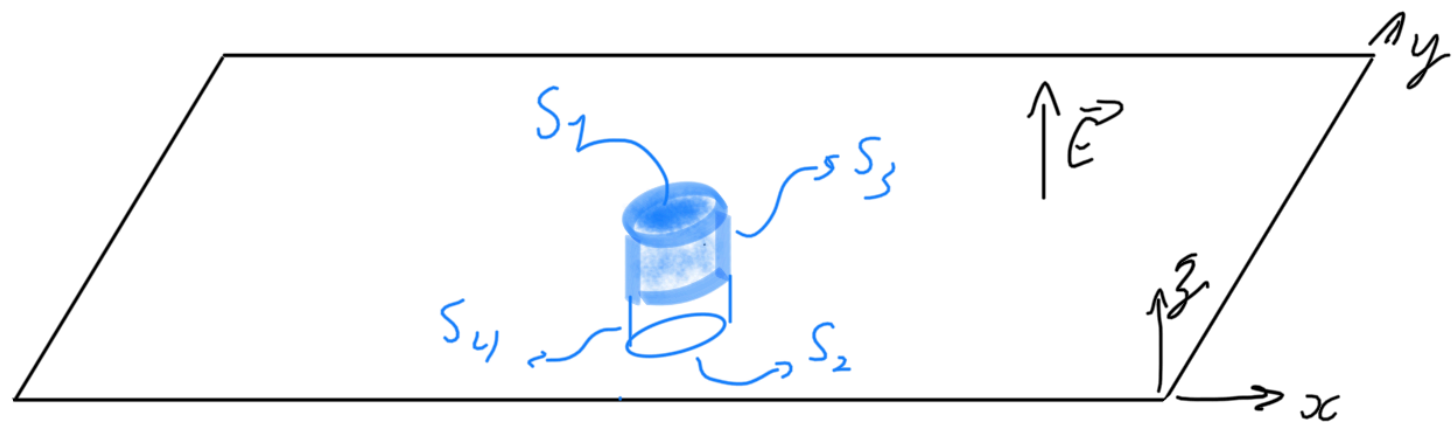
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') dV$$

$$\downarrow$$

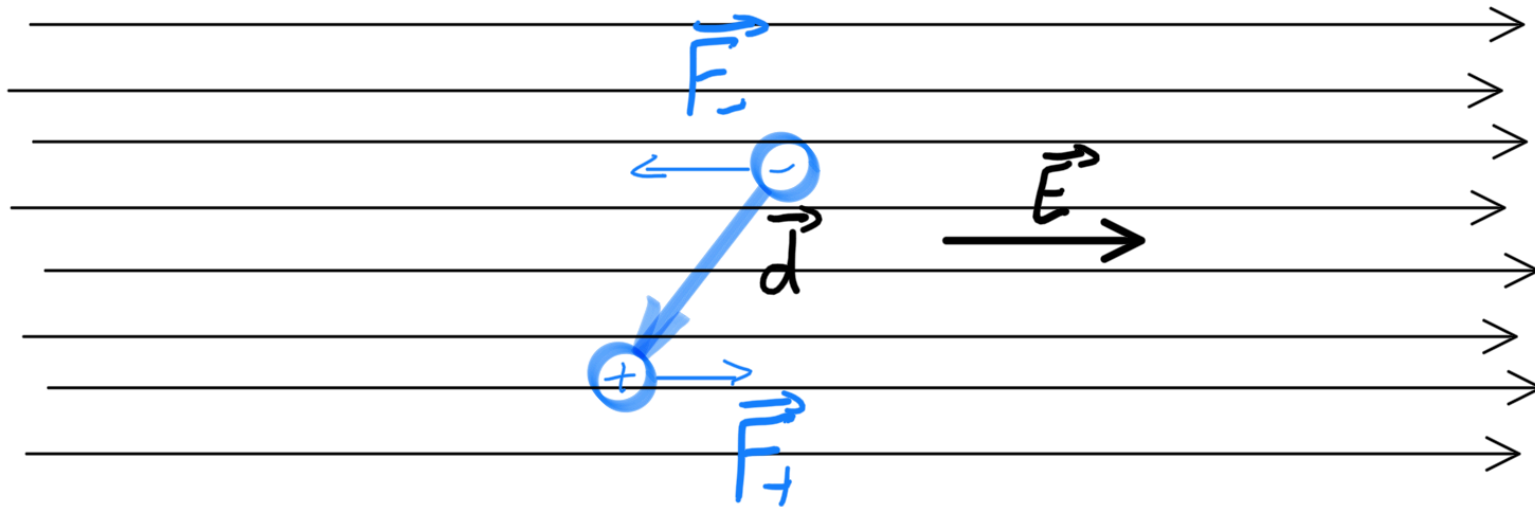
$$2E \Delta A = \frac{\sigma \cdot \Delta A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} \quad z > 0$$

$$-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} \quad z < 0$$



Torque sobre o dipolo



$$\text{Torque: } \vec{T}_+ = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ ; \quad \vec{T}_- = \vec{r}_- \times \vec{F}_-$$

$$\vec{T} = \vec{T}_+ + \vec{T}_-$$

$$\vec{r}_+ = \vec{r}_0 + \vec{d}/2$$

$$\vec{r}_- = \vec{r}_0 - \vec{d}/2$$

$$\vec{T} = \vec{r}_0 \times (\vec{F}_+ + \vec{F}_-)$$

$$+ \frac{d}{2} \times (\vec{F}_+ - \vec{F}_-)$$

Torque: $\vec{T}_+ = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+$; $\vec{T}_- = \vec{r}_- \times \vec{F}_-$

$$\vec{T} = \vec{T}_+ + \vec{T}_-$$

$$\vec{T} = \vec{r}_0 \times (\vec{F}_+ + \vec{F}_-) + \frac{d}{2} \times (\vec{F}_+ - \vec{F}_-)$$

Subst. de
variáveis

$$\begin{cases} \vec{r}_+ = \vec{r}_0 + d/2 \\ \vec{r}_- = \vec{r}_0 - d/2 \end{cases}$$

$$+ \vec{r}_+ + \vec{r}_- = 2\vec{r}_0 \Rightarrow \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}_+ + \vec{r}_-}{2}$$

$$- \vec{r}_+ - \vec{r}_- = d$$

Campo homogêneo : $\vec{F}_+ = -\vec{F}_- = Q \cdot \vec{E}$

$$\vec{T} = Qd \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$\vec{p} \rightarrow$ momento de dipolo

Campo inhomogêneo: $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = Q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-)$

$$\vec{F} = Q \left[\vec{E}(\vec{r}_0 + \vec{d}/2) - \vec{E}(\vec{r}_0 - \vec{d}/2) \right]$$

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}$$

considerando $|E_x| \gg |E_y|, |E_z|$

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx E_x(\vec{r}) \hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = Q \cdot \underbrace{\left[E_x(\vec{r}_0 + \vec{d}/2) - E_x(\vec{r}_0 - \vec{d}/2) \right]}_{\Delta E \approx \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot (\vec{J} \cdot \hat{i})} \hat{i}$$

$$\vec{F} = Q (\vec{J} \cdot \hat{i}) \frac{\partial E_x}{\partial x} \hat{i}$$

depende do
alinhamento
ao campo

sensível à
variação do campo

↳ alinhado ao campo





