

Processos Estocásticos

1- Variável Estocástica X : definição

Consiste em especificar :

1. Conjunto de valores possíveis $\{x\}$ (= "espaço de fases")
2. A distribuição de probabilidades (= probabilidade para cada ponto do espaço de fases) $P_X(x)$

Exemplo : Variável estocástica discreta B , que satisfaz a distribuição de Bernoulli :

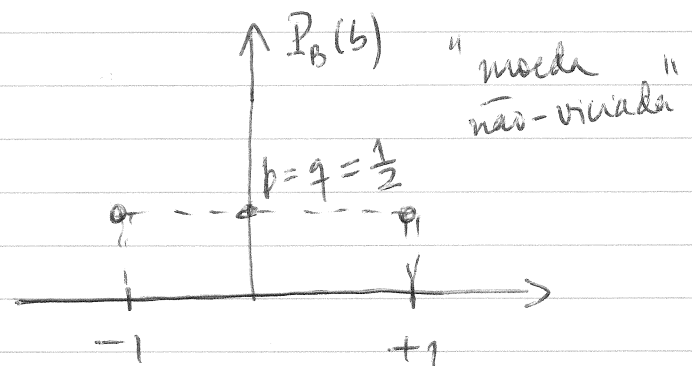
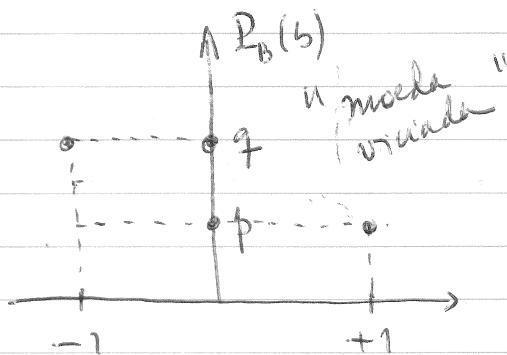
- variável estocástica : B
- espaço de fases $b = b_1/b_2$ ou $+1/-1$ ou $[= \text{"eventos possíveis"}]$ cara/coroa
- distribuição de probabilidades

$$P_B(b=+1) = p > 0$$

$$P_B(b=-1) = q = 1-p > 0$$

Normalização :

$$\sum_{b=\pm 1} P_B(b) = 1$$



Como obter p, q ?

Duas maneiras ... "teórica" e "experimental"

(1) Experimental: jogando moedas

Duas maneiras: (a) 1 moeda, M vezes

(b) M moedas, 1 vez

Sistema ergódico: (a) e (b) levam aos mesmos resultados

De qualquer uma destas maneiras, contamos ao final, quantas moedas ~~sejam~~ resultaram "cara":
 n_{ca} = nº de eventos com "cara" ... e daí

$n_{co} = M - n_{ca}$ = nº de eventos "coroa"

As frações: $\frac{n_{ca}(M)}{M}$, $\frac{n_{co}(M)}{M}$

representam as FREQUÊNCIAS de moedas "cara" e "coroa", respectivamente

No limite $M \rightarrow \infty$

$$\frac{n_{ca}(M)}{M} \rightarrow p$$

= probabilidades no sentido de Poisson.

$$\frac{n_{co}(M)}{M} \rightarrow 1 - p = q$$

→

(2) "Teórico"

$$\cancel{p+q} \quad p+q = 1 \quad (*)$$

hipótese: evento cara possui a mesma probabilidade do evento coroa [moedas "não-viciadas"]
 $\Rightarrow p = q$

$$\text{De } (*) \Rightarrow 2p = 1 \rightarrow p = 1/2$$

2 - Processo Estocástico

= sequência de variáveis aleatórias

→ noção temporal

Exemplo: Distribuição Binomial: deriva de uma sequência de tentativas de Bernoulli.

Considera K tentativas de Bernoulli. Uma REALIZAÇÃO do "processo A_K " é uma sequência de K eventos ca/co

... ca ca co co ca co ca ca co ...
K eventos

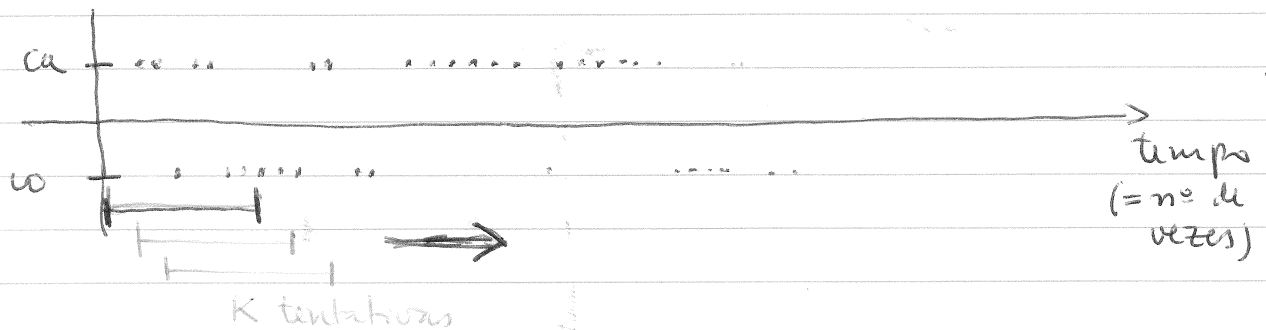
Neste exemplo, a probabilidade associada a uma certa realização (ou sequência) depende somente do número de caras/costas desta realização.

Pergunta: Qual é a probabilidade de obter n "caras" em K tentativas de Bernoulli? ($n \leq K$)

1 - Experimental ... jogando moedas

... de duas maneiras ...

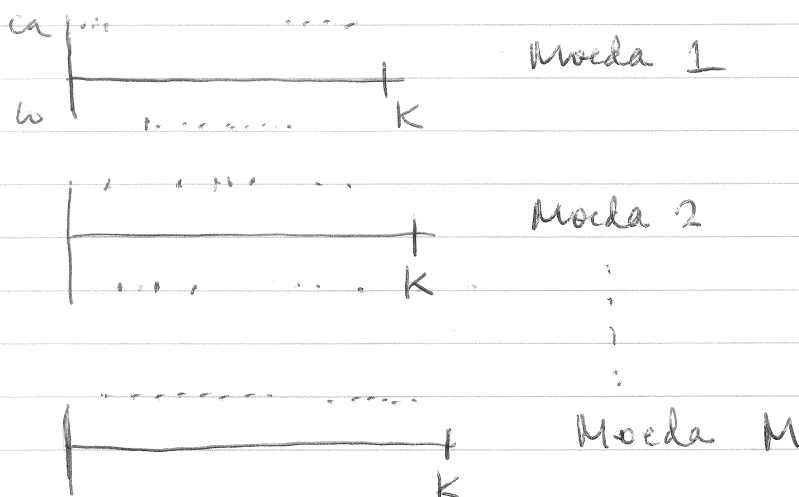
(a) 1 moeda , M vezes ...



= diferentes realizações do processo ao longo do tempo.

[Se o sistema é ergódico, este procedimento é equivalente a:

(b) M moedas , K vezes cada , M de uma só vez



= diferentes realizações do processo que formam um ENSEMBLE de sequências

2 - Teórico

→ Probabilidade de obter uma particular sequência com n caras :

$$p^n q^{K-n} \quad (\text{so depende de } n)$$

= frequência ^{esperada} desta particular sequência no limite $M \rightarrow \infty$

NOTE : para $p = q = 1/2$ $p^n q^{K-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{K-n} = \frac{1}{2^K}$

número de sequências diferentes com n caras em K tentativas

$$\binom{K}{n} = \frac{K!}{n! (K-n)!} \quad \begin{array}{l} n \text{ caras} \\ K-n \text{ coroas} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Probabilidade de obter uma sequência qualquer com n caras:

$$\left[P_{AK}(n) = \binom{K}{n} p^n q^{K-n} \right] \quad n=0, 1, 2, \dots, K$$

O que define a distribuição Binomial

$P_{AK}(n)$ é normalizada

$$\sum_{n=0}^K P_{AK}(n) = (p+q)^K = 1 \quad \leftarrow$$

3- Processo Aleatório [de uma PARTÍCULA]

= forma de variáveis aleatórias : Processo $X_k \rightarrow$ (Wiener)

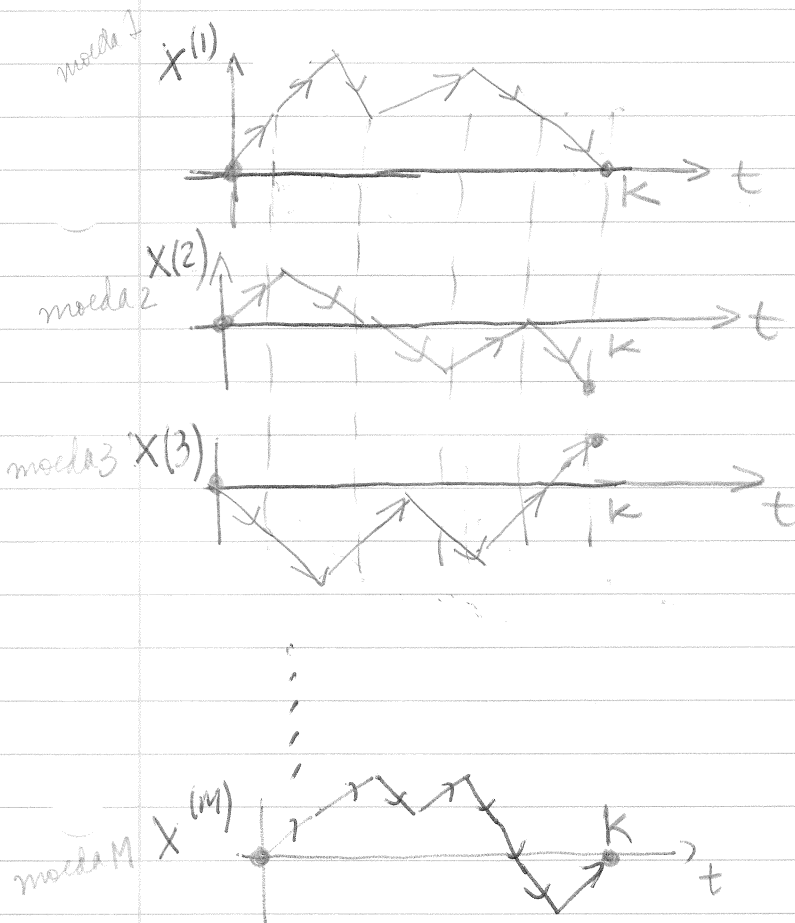
mapeamento $\left\{ \begin{array}{ll} \text{cara} \equiv 1 & (\text{passo para a direita}) \\ \text{coroa} \equiv -1 & (\text{passo para a esquerda}) \end{array} \right.$

A cada passo (ou "tentativa") do processo Binomial, o incremento é adicionado à posição anterior:

$$\Delta m = \pm 1$$

Construção do ensemble de trajetórias (coleção de caminhadas aleatórias) cada uma das quais "controlada ou definida por uma sequência de tentativas de Bernoulli".

Hipóteses: as moedas e os sorteios (e as partículas) são independentes!



É um processo Markoviano

→ a posição da partícula num certo instante depende apenas da posição num instante anterior.

Ou ... a prob. de encontrar a partícula em uma posição, num certo instante depende apenas da sua posição no instante anterior.

- $n_D = n^{\circ}$ passos à direita $(\Delta m = +1)$
- $n_E = n^{\circ}$ passos à esquerda $(\Delta m = -1)$
- passos para a direita ou para a esquerda são independentes
- $n_D + n_E = K = n^{\circ}$ total de passos em cada "trial" $X^{(n)}$

• Notação: processo $\equiv X_K$ (posição após K passos)

$\text{prob}(X_K = m) \equiv P_{X_K}(m)$

- A posição m atingida pela partícula após $\text{qualquer } m$ uma realização do processo depende apenas da diferença:

$$\left. \begin{aligned} m &= (n_D - n_E) \\ K &= (n_D + n_E) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n_D &= \frac{K+m}{2} \\ n_E &= K - n_D = \frac{K-m}{2} \end{aligned}$$

... supondo que K e m possuem a mesma paridade.

Assim, a probabilidade de atingir a posição m após K tentativas é:

$$P_{X_K}(m) = \frac{K!}{\left(\frac{K+m}{2}\right)! \left(\frac{K-m}{2}\right)!} \cdot \frac{1}{2^K}$$

$\uparrow$
 $p = q = 1/2$

Exercício:

Usando a fórmula de Stirling

$$\ln[N!] \sim N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln 2\pi N$$

mostre que no lim $K \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$

$$\left[P_{x_K}(m) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi K}} e^{-\frac{1}{2}(m^2/K)} \right]$$

Limite do Contínuo: escalas de tempo e posição

$\Delta t \equiv$ tempo para o passo

$\bar{t} =$ tempo total (para K passos)

$$\left. \begin{array}{l} \Delta t \equiv \text{tempo para o passo} \\ \bar{t} = \text{tempo total (para } K \text{ passos)} \end{array} \right\} \boxed{K \cdot \Delta t = \bar{t}}$$

$\Delta x =$ tamanho do passo

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \\ m, K \rightarrow \infty \end{array} \right\} \text{ de modo que } \begin{array}{l} \Delta x \cdot m \rightarrow x \\ \Delta t \cdot K \rightarrow \bar{t} \end{array}$$

$$P_{x_K}(m) \approx \frac{2 \cdot \Delta x}{\sqrt{2\pi \frac{\bar{t}}{\Delta t} \cdot \Delta x^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} m^2 \Delta x^2 / \bar{t} \Delta x^2 / \Delta t}$$

Coefficiente de difusão: $\boxed{D \equiv \Delta x^2 / \Delta t}$

$$P_{x_K}(m) \longrightarrow \left[f(x, \bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D \bar{t}}} e^{-\frac{x^2}{2D\bar{t}}} \right]$$

= densidade de probabilidade:
processo Gaussiano (contínuo)

de forma que

$f(x, t) dx$ fornece a probabilidade de encontrar a "partícula" entre x e $x+dx$ após um tempo t , partindo da origem $x=0$ em $t_0=0$.

$f(x, t)$ pode ser entendida como a PROBABILIDADE CONDICIONAL

$$p(x, t \mid 0, t_0=0)$$

