y	x_2	x_3	$\hat{y}_t$	$\hat{e}_t$
–4	0	3	–3,5	–0,5
5	1	1	4,5	+0,5
4	2	2	3,5	0,5
11	3	0	11,5	–0,5

$$y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + e_t$$

$$y = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{b = (X'X)^{-1} X'y}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 6 & 14 & 5 \\ 6 & 5 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \Sigma x_2 & \Sigma x_3 \\ \Sigma x_2 & \Sigma x_2^2 & \Sigma x_2 x_3 \\ \Sigma x_3 & \Sigma x_3 x_2 & \Sigma x_3^2 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 171 & -54 & -54 \\ -54 & 20 & +16 \\ -54 & +16 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 171/36 & -54/36 & -54/36 \\ -54/36 & 20/36 & 16/36 \\ -54/36 & 16/36 & 20/36 \end{bmatrix}$$

$$X'y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 46 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma x_2 y \\ \Sigma x_3 y \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} X'y = \begin{bmatrix} 5{,}5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y}_t = 5{,}5 + 2x_{2t} - 3x_{3t}$$

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{e}_t^2}{T - K}$$

$$\hat{e}_t = y_t - b_1 - b_2 x_{2t} - b_3 x_{3t}$$

$$\sum \hat{e}_t^2 = (-0{,}5)^2 + (0{,}5)^2 + (0{,}5)^2 + (-0{,}5)^2 = 1$$

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{4-3} = 1$$

$$(X'X)^{-1}s^2 = \begin{bmatrix} 171/36 & -54/36 & -54/36 \\ -54/36 & 20/36 & 16/36 \\ -54/36 & 16/36 & 20/36 \end{bmatrix} \times 1 = \begin{bmatrix} \text{var}(b_1) & \text{cov}(b_1 b_2) & \text{cov}(b_1 b_3) \\ \text{cov}(b_1 b_2) & \text{var}(b_2) & \text{cov}(b_2 b_3) \\ \text{cov}(b_1 b_3) & \text{cov}(b_2 b_3) & \text{var}(b_3) \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \beta_2 = 0$$

$$H_A : \beta_2 \neq 0$$

$$t = \frac{b_2 - \beta_2}{\sqrt{\text{var}(b_2)}} = \frac{2-0}{\sqrt{20/36}} \qquad t = \frac{2}{0{,}745} = 2{,}68$$

Intervalo de Confiança

$$b_2 - t_c\sqrt{Var(b_2)} \leq \beta_2 \leq b_2 + t_c\sqrt{Var(b_2)}$$

Testar H_0: $\beta_2 = \beta_3 \;\; \Rightarrow \beta_2 - \beta_3 = 0$

$$H_0 : r'\beta = q$$

H_A: $\beta_2 > \beta_3 \;\; \Rightarrow \beta_2 - \beta_3 > 0$ a 5% de significância.

$$t = \frac{r'b - r'\beta}{\sqrt{r'(X'X)^{-1} r\, s^2}} = \frac{5-0}{\sqrt{8/36}} = 10{,}61$$

$$r'b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5{,}5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 5$$

$$r'(X'X)^{-1} r\, s^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 171/36 & -54/36 & -54/36 \\ -54/36 & 20/36 & 16/36 \\ -54/36 & 16/36 & 20/36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{8}{36}$$

t da tabela a 5% com 1 g.l. = 6,31

	GL	SQ	QM	F
Regressão	$K-1$	$b'X'y - T\bar{y}^2$	SQReg/K–1	QM Reg/ QMRes
Resíduo	$T-K$	$e'e$	SQRes/$T-K$	
Total	$T-1$	$y'y - T\bar{y}^2$		

$$b'X'y = \begin{bmatrix} 5{,}5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 46 \\ 1 \end{bmatrix} = 177$$

SQRegr = 177 – 4 . 4^2 = 177 – 64 = 113

$$\text{SQtotal} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 4 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} = 178 - 64 = 114$$

SQRes = 1

	GL	SQ	QM	F
Regressão	2	113	56,5	56,5
Resíduo	1	1	1	
Total	3	114		

$$R^2 = 1 - \frac{\text{SQRes}}{\text{SQtotal}} = \frac{\text{SQRegr}}{\text{SQtotal}} = \frac{113}{114} = 0{,}991$$

99,1% na variação de y é explicada pela variação em x_2 e pela variação em x_3. Em nossa amostra, apenas 0,9% da variação em y permanece não explicada e deve-se à variação no termo estocástico.

O R^2 aumenta sempre que o número de variáveis aumenta, mesmo que essas não tenham qualquer justificativa econômica. Uma medida alternativa é o R^2 ajustado para graus de liberdade.

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\text{SQRes}/T - K}{\text{SQtotal}/T - 1} = \frac{1/1}{114/3} = 0{,}9736$$

Teste F: Testa a seguinte hipótese

$$H_0: \beta_2 = \beta_3 = 0 \text{ ou } \beta_2 = 0, \beta_3 = 0$$

$$H_A: \text{pelo menos 1 parâmetro é diferente de 0}$$

$$F = \frac{\text{SQRegr}/(K-1)}{\text{SQRes}/(T-K)} = \frac{\text{SQTotal} - \text{SQRes}/(K-1)}{\text{SQRes}/(T-K)} = \frac{\text{QMRegr}}{\text{QMRes}}$$

Considere J restrições lineares na forma:

$$H_0 : R_{(J\times K)}\beta = q$$

$$F_{(J,n-K)} = \frac{(Rb-q)'\left[s^2 R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(Rb-q)}{J}$$

Testar H_0: $\beta_2 = \beta_3 = 0$ a 5% de significância.

$$F_{(J,n-K)} = \frac{(Rb-q)'\left[s^2 R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(Rb-q)}{J}$$

$$Rb = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5,5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$R(X'X)^{-1}R's^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 171/36 & -54/36 & -54/36 \\ -54/36 & 20/36 & 16/36 \\ -54/36 & 16/36 & 20/36 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20/36 & 16/36 \\ 16/36 & 20/36 \end{bmatrix}$$

$$\left[R(X'X)^{-1}R's^2\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 113$$

$F = \dfrac{113}{2} = 56{,}5$ F da tabela a 5% com 2 e 1 g.l. = 200

Portanto, não se rejeita H_{0}.

Testar H_0: $\beta_2 = -2$ e $\beta_3 = 4$ a 5% de significância.

$$Rb = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5{,}5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad q = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad Rb - q = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} = 549$$

$$F = \frac{549}{2} = 274{,}5$$

F da tabela a 5% com 2 e 1 g.l. = 200

Portanto, rejeita H_0.