Física 3 IQ 2022 Prova de recuperação, Prof. José R. B. Oliveira (IFUSP)

Nome Legível/Assinatura/Número USP:

Gabarito

---

1) *[2,0]* As equações de Maxwell em forma diferencial estão listadas abaixo:

$$\text{I)} \quad \oint_C \vec{E}.d\vec{l} = -\int_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\hat{n}\,dS$$

$$\text{II)} \quad \oint_S \vec{E}.\vec{n}\,dS = \int_{V(S)} \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

$$\text{III)} \quad \oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \int_{S(C)} \vec{J}.\hat{n}\,dS + \mu_0 \varepsilon_0 \int_{S(C)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\hat{n}\,dS$$

$$\text{IV)} \quad \oint_S \vec{B}.\vec{n}\,dS = 0$$

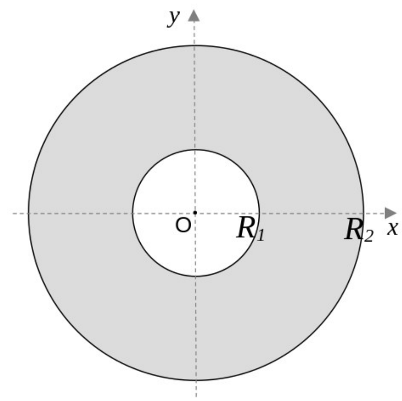
a) [0.5] Identifique o nome (Lei de Gauss Elétrica ou Magnética, Lei de Faraday, e Lei de Ampére-Maxwell) correspondente a cada equação e descreva sucintamente o seu significado físico.
I) Lei de Faraday: Campos magnéticos variáveis no tempo induzem campos elétricos.
II) Lei de Gauss: Cargas elétricas geram campos elétricos.
III) Lei de Ampére-Maxwell: Correntes elétricas e campos elétricos variáveis no tempo criam campos magnéticos.

b) [0.5] Que representam $d\vec{l}$, $\hat{n}\,dS$, e dV nestas equações?
$d\vec{l}$: deslocamento infinitesimal ao longo de uma trajetória no espaço
$\hat{n}\,dS$: elemento de área orientada ($\hat{n}$ representa a direção normal à superfície)
dV : elemento de volume

c) [0.5] Que representam S(C) e V(S) nestas equações? Ilustre com desenhos e explique.
S(C) representa uma superfície limitada por uma curva fechada C, por exemplo, um círculo limitado pela circunferência.
V(S) representa um volume limitado por uma superfície fechada S, por exemplo, uma esfera limitada por uma superfície esférica.

d) [0.5] A partir do teorema de Stokes: $\oint_C \vec{F}.d\vec{l} = \int_{S(C)} \vec{\nabla}\times\vec{F}.\hat{n}\,dS$ obtenha a forma diferencial da lei de Ampére.
A integral de linha do campo magnético em um caminho fechado C qualquer, de acordo com o teorema de Stokes, é: $\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \int_{S(C)} (\vec{\nabla}\times\vec{B}).\hat{n}\,dS$, enquanto que de acordo com a Lei de Ampére é: $\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \int_{S(C)} \vec{J}.\hat{n}\,dS$. Como C é uma curva fechada arbitrária, devemos ter:
$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ sempre (Lei de Ampére na forma diferencial).

2) *[8,0]* A figura ao lado ilustra um disco dielétrico circular de raio R_2 com um furo interno de raio R_1, no plano *xy*. O disco tem uma espessura *h* muito menor do que R_1. O disco está carregado com uma carga elétrica total *Q* uniformemente distribuída em seu volume.

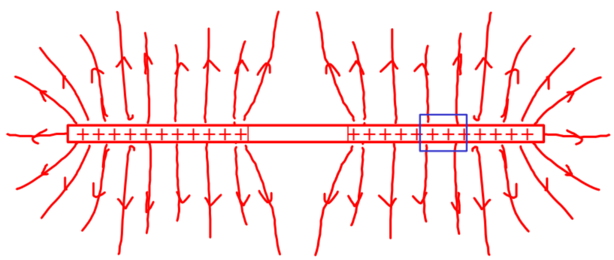


a) [1,0] Determine a densidade *volumétrica* de carga elétrica (ρ) do disco.

$$\rho=\frac{Q}{V}=\frac{Q}{\pi(R_2^2-R_1^2)h}$$

b) [1,0] Estime o campo elétrico no ponto de raio médio $r_m=\frac{R_1+R_2}{2}$ muito próximo da superfície do disco $\left(z\approx\frac{h}{2}\right)$. Para isso escolha uma superfície de Gauss apropriada e explique seu raciocínio.

As linhas de campo elétrico nas proximidades desse ponto devem ser aproximadamente perpendiculares à superfície (vide figura abaixo do disco, em corte, supondo uma carga Q positiva). Uma superfície de Gauss pequena, com a forma de um cilindro de tampas planas paralelas às superfícies do disco, simetricamente disposta (em azul na figura), terá fluxo positivo e igual nas duas superfícies planas, enquanto que o fluxo será nulo através da superfície cilíndrica, tangencial às linhas de campo. Sendo a magnitude do campo elétrico constante, o fluxo através dessa superfície de Gauss será: $2E_z a=\frac{\rho a h}{\varepsilon_0}$, onde a é a área de uma tampa do cilindro, e ah é o volume do disco contido no interior da superfície de Gauss. Portanto: $E_z=\frac{\rho h}{2\varepsilon_0}$, e



$\vec{E}=\frac{\rho h}{2\varepsilon_0}\hat{k}$, já que nessa região o campo tem a direção do eixo *z* (cf. figura). Obs.: A densidade de carga ρ foi calculada no item a).

c) [1,0] O disco é posto a girar com velocidade angular ω em torno do eixo perpendicular ao plano do disco, passando pelo seu centro (eixo *z*, com sentido anti-horário, na figura). Qual é a expressão para o vetor densidade de corrente elétrica em todo o espaço, em coordenadas cilíndricas?

Cada ponto do disco terá velocidade $\vec{v}=\omega r\,\hat{\theta}$, portanto a densidade de corrente será $\vec{J}=\rho\vec{v}=\rho\omega r\,\hat{\theta}$ no interior do disco $\left(R_1<r<R_2,-\frac{h}{2}<z<\frac{h}{2}\right)$ e nula fora dessa região.

d) [1.0] Para determinar o campo magnético gerado na origem O (centro do disco) $(\vec{B}(O))$ devido a essa corrente, qual lei seria mais adequada como ponto de partida, a Lei de Biot-Savart: $d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}_{rel}}{|\vec{r}_{rel}|^3}$ ou a Lei de Ampére? No contexto do problema, o que deveria ser usado como I nessa fórmula? E $d\vec{l}$? Seria necessário integrar em uma ou duas dimensões? Explique.

A Lei de Biot-Savart deve ser usada já que a geometria do problema não permite presumir que a magnitude do campo magnético seja constante ao longo de algum trecho finito de trajetória.
A Lei de Biot-Savart, como apresentada no enunciado, se aplica a um elemento de corrente infinitesimal linear $I d\vec{l}$, como em um fio fino. Como a corrente devida ao movimento do disco está distribuída em um volume (não em uma linha), é necessário definir elementos infinitesimais de corrente usando a densidade de corrente multiplicada escalarmente pelo elemento de área infinitesimal (cuja normal é $\hat{\theta}$): $\vec{J}.\hat{n}\,dS=\vec{J}.(h\,dr\,\hat{\theta})$ (que deve ser usada no lugar da corrente *I*), enquanto que $r\,d\theta\hat{\theta}$ faria o papel de $d\vec{l}$. Além disso, no lugar de r_{rel} devemos colocar $-r\hat{r}$ que é a posição relativa da origem com relação ao elemento de corrente infinitesimal. Será necessário integrar, portanto, em duas dimensões (na angular e na radial).

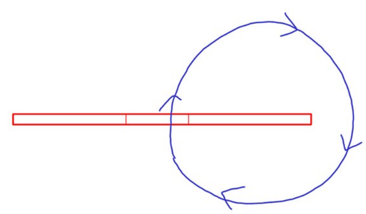
e) [1,0] Determine $(\vec{B}(O))$ segundo o procedimento do item anterior.

$d\vec{B}=\dfrac{\mu_0\vec{J}.(h\,dr\,\hat{\theta})}{4\pi}\dfrac{(r\,d\theta\hat{\theta})\times\vec{r}_{rel}}{|\vec{r}_{rel}|^3}=\dfrac{\mu_0\rho\,\omega r\,h\,dr}{4\pi}r\dfrac{d\theta}{r^2}\hat{k}$ simplificando e separando as constantes para fora das integrais:

$$\vec{B}(O)=\left(\frac{\mu_0\rho\omega h}{4\pi}\int_{R_1}^{R_2}dr\int_0^{2\pi}d\theta\right)\hat{k}=\frac{\mu_0\rho\omega h}{2}(R_2-R_1)\hat{k}$$

f) [1,0] Faça um desenho qualitativo de uma linha de campo magnético no plano *xz* da figura abaixo, partindo do ponto $\left(z=0, r=\dfrac{R_1}{2}, \theta=0\right)$. Qual das leis de Maxwell determina que essa linha se fecha sobre si mesma, necessariamente? Explique.

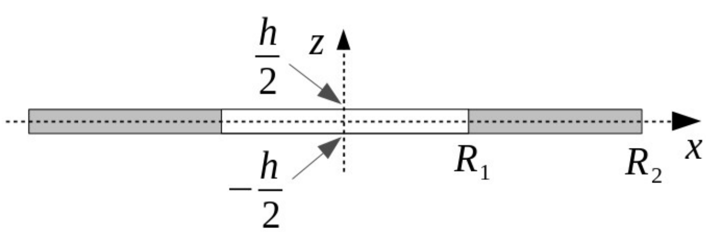
Como a lei de Gauss magnética indica que não existem cargas magnéticas (de onde se originariam as linhas de campo magnético com divergência não nula), as linhas de campo magnético sempre se fecham sobre si mesmas, conforme desenhada na figura ao lado, em azul.



g) [1,0] Qual seria o valor da integral de linha do campo magnético $\oint\vec{B}.d\vec{l}$ ao longo dessa linha de campo?

Pela lei de Ampére: $\oint\vec{B}.d\vec{l}=\mu_0\int\vec{J}.\hat{n}\,dS=\mu_0\int_{R_1}^{R_2}\rho r\,\omega h\,dr=\mu_0\rho\,\omega h(R_2^2-R_1^2)$

h) [1,0] Suponhamos agora que a velocidade angular cresça no tempo com aceleração angular α. Estime o campo elétrico na região central do disco tal que $r\ll R_1$. Desenhe uma linha de campo elétrico dessa região (na vista da figura acima). Esse campo varia no tempo? O que acontecerá com o campo magnético em consequência disso?



Pela lei de Faraday: $\oint_C\vec{E}.d\vec{l}=-\int_{S(C)}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}.\hat{n}\,dS$. Sendo uma região pequena no entorno da origem, podemos assumir que o campo magnético seja aproximadamente igual ao da origem.

Como nesse caso $\omega=\omega_0+\alpha t$, portanto $\frac{d\omega}{dt}=\alpha$, a derivada temporal do campo magnético na origem é: $\frac{\partial\vec{B}(O)}{\partial t}=\frac{\mu_0\rho\alpha h}{2}(R_2-R_1)\hat{k}$. Por simetria, as linhas de campo elétrico são circulares com centro no eixo *z* (vide figura abaixo). Assim, a integral de linha do campo elétrico será: $\oint_C \vec{E}.d\vec{l}=2\pi r E_\theta$, enquanto que o outro membro da Lei de Faraday será aproximadamente: $-\int_{S(C)}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.\hat{n}\,dS=-\frac{\mu_0\rho\alpha h}{2}(R_2-R_1)\pi r^2$

Assim, o campo elétrico será $E_\theta=-\frac{\mu_0\rho\alpha h}{4\pi}(R_2-R_1)\pi r$. O sentido da linha de campo (em vermelho na figura) é horário (contrário a $\hat{\theta}$), porque o fluxo de campo magnético cresce na direção $\hat{k}$ (a derivada temporal é positiva), supondo ser α positivo. Sendo α constante, não há variação desse campo elétrico, e não há efeito adicional sobre o campo magnético.