ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

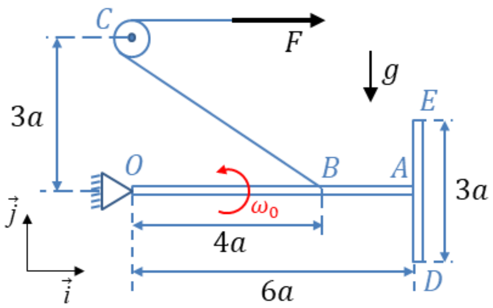
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I (Reoferecimento) – Prova 3 – 12 de Julho de 2022

Duração da Prova: 110 minutos (Início: 18:00 – Término: 19:50)
Não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos.

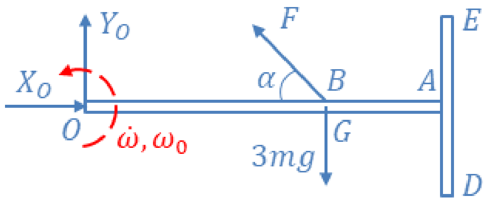
Questão 1 (3,5 pontos). A peça $OADE$ em forma de "**T**" é composta por duas barras delgadas OA e DE, soldadas uma à outra. A barra OA tem comprimento $6a$ e massa $2m$, e a barra DE tem comprimento $3a$ e massa m. A peça está articulada em O e é puxada por uma força F de tração aplicada a um cabo ideal que se prende ao ponto B da peça e passa pela polia C, de massa desprezível. No instante ilustrado na figura, a velocidade angular da peça é ω_0. Para esse instante, determinar:



- **a)** O diagrama de corpo livre da peça $OADE$.
- **b)** O momento de inércia da peça $OADE$ em relação ao eixo Oz (J_{Oz}).
- **c)** A aceleração angular da peça $OADE$.
- **d)** As reações em O.

RESOLUÇÃO

a) O diagrama de corpo livre da peça $OADE$. Veja figura abaixo:



(1,0 ponto)

b) O momento de inércia da peça $OADE$ em relação ao eixo Oz (J_{Oz}).

$$J_{Oz} = J_{Oz}^{OA} + J_{Oz}^{DE} = \left[2m\frac{(6a)^2}{12} + 2m(3a)^2\right] + \left[m\frac{(3a)^2}{12} + m(6a)^2\right] = \frac{243ma^2}{4}$$

O centro de massa da peça é dado por: **(0,5 ponto)**

$$y_G = 0 \quad \text{(simetria)}, \qquad x_G = \frac{2m.3a + m.6a}{3m} = 4a$$

c) A aceleração angular da peça $OADE$.

No instante ilustrado na figura, a aceleração do centro de massa da barra é:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)] = \dot{\omega}\vec{\mathbf{k}} \wedge 4a\vec{\mathbf{i}} + \omega_0\vec{\mathbf{k}} \wedge \left(\omega_0\vec{\mathbf{k}} \wedge 4a\vec{\mathbf{i}}\right) = 4a\left(\dot{\omega}\vec{\mathbf{j}} - \omega_0^2\vec{\mathbf{i}}\right)$$ **(0,5 ponto)**

Do Teorema da Resultante, tem-se:

$$X_O - F\frac{4}{5} = 3ma_{Gx} = -12ma\omega_0^2 \qquad (1)$$

(0,5 ponto)

$$Y_O + F\frac{3}{5} - 3mg = 3ma_{Gy} = 12ma\dot{\omega} \qquad (2)$$

Do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, tem-se:

$$-3mg4a + F\frac{3}{5}4a = J_{Oz}\dot{\omega} = \frac{243ma^2}{4}\dot{\omega} \qquad (3)$$ **(0,5 ponto)**

Resolvendo-se o sistema de equações 1-3, obtêm-se:

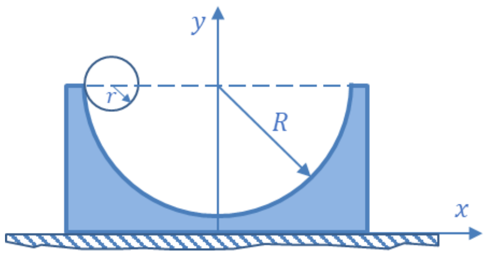
$$\dot{\omega} = \frac{48F - 240mg}{1215ma}, \quad X_O = \frac{4F - 60ma\omega_0^2}{5}, \quad Y_O = \frac{765mg - 153F}{1215}$$ **(0,5 ponto)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 2 (3,0 pontos). Um cilindro de raio r e massa m rola sem escorregar sobre a superfície cilíndrica de raio R de um bloco de massa M, o qual se apoia no plano horizontal, sem atrito. Admitindo que o disco parta do repouso na posição ilustrada na figura, e que o bloco também esteja inicialmente em repouso, pede-se:



a) O diagrama de corpo livre do conjunto bloco + cilindro.

b) O máximo valor do deslocamento Δx do bloco.

RESOLUÇÃO

Aplicando-se o Teorema da Resultante ao sistema constituído pelo cilindro e pelo bloco, tem-se:

$$(M+m)\vec{\boldsymbol{a}}_G = \vec{\boldsymbol{R}}^{ext}$$

Notando que, ao longo da horizontal, a resultante das forças externas é nula, tem-se:

$$(M+m)a_{Gx} = (M+m)\ddot{x}_G = 0$$ **(0,5 ponto)**

Da equação diferencial acima, conclui-se que

$$\ddot{x}_G = \text{const}$$

E como o sistema estava inicialmente em repouso, resulta que

$$\dot{x}_G = 0$$

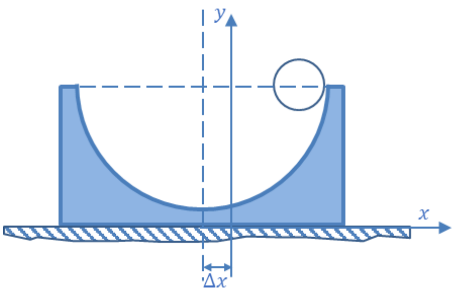
Ou seja, **(0,5 ponto)**

$$x_G = 0$$

No instante da partida, a abcissa do centro de massa do sistema material é dada por

$$(M+m)x_G = M \cdot 0 - m(R-r) \quad \Rightarrow \quad x_G = -\frac{m(R-r)}{M+m}$$ **(0,5 ponto)**

O máximo deslocamento do bloco ocorrerá quando o cilindro se encontrar na posição simétrica à de partida (vide figura abaixo).



(0,5 ponto)

Nessa configuração, a posição horizontal de G é dada por:

$$(M+m)x_G = -M\Delta x + m(R-r-\Delta x)$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{-M\Delta x + m(R-r-\Delta x)}{(M+m)}$$

Como a posição horizontal de G é invariante, podemos escrever **(1,0 ponto)**

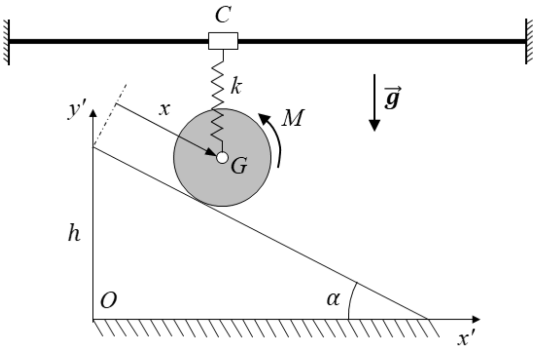
$$\frac{-M\Delta x + m(R-r-\Delta x)}{(M+m)} = -\frac{m(R-r)}{M+m} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{2m(R-r)}{M+m}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

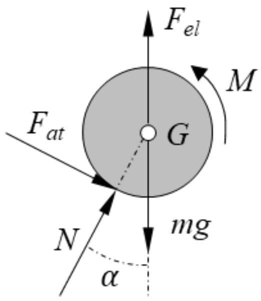
Questão 3 (3,5 pontos). A figura mostra um disco homogêneo, de massa m e raio R, que, partindo do repouso, começa a descer o plano inclinado rolando sem escorregar, devido a ação da gravidade, sendo submetido a um binário M (constante). O disco, por sua vez, está conectado a uma guia horizontal C por uma mola ideal de constante elástica k, que se mantém na direção vertical durante o movimento por meio de um dispositivo não indicado na figura. Considerando que no instante inicial o disco se encontra na posição $x = 0$ e a mola não está deformada, pede-se, para uma posição genérica x:



a) O diagrama de corpo livre do disco;
b) A energia cinética do disco em função da velocidade do seu centro de massa $\dot{x}$;
c) O trabalho realizado pelos esforços aplicados ao disco em função de x;
d) A velocidade angular ω do disco em função de x;
e) A aceleração angular $\dot{\omega}$ do disco, em função de x.

RESOLUÇÃO

a) Veja o diagrama de corpo livre do disco na figura ao lado. **(0,5 ponto)**



b) A energia cinética do disco em função da velocidade do seu centro de massa $\dot{x}$:

$$T = \frac{1}{2}m\vec{\boldsymbol{v}}_G \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_G + \frac{1}{2}J_{Gz}\omega^2, \quad |\vec{\boldsymbol{v}}_G| = \omega R = \dot{x}$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_{Gz}\omega^2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{3m\dot{x}^2}{4}$$ **(0,5 ponto)**

c) O trabalho realizado pelos esforços aplicados ao disco em função de x:

$$W^{1\to2} = W_c^{1\to2} + W_{nc}^{1\to2} = -\Delta V + W_{nc}^{1\to2} = V_1 - V_2 + W_{nc}^{1\to2}$$

$$V_1 = V_1^{gr} + V_1^{el} = mg(h_0 + R)$$

$$V_2 = V_2^{gr} + V_2^{el} = mg(h_0 + R - \delta) + \frac{k}{2}\delta^2 = mg(h_0 + R - x\mathrm{sen}\alpha) + \frac{k\mathrm{sen}^2\alpha}{2}x^2$$

$$W_{nc}^{1\to2} = M(-\Delta\theta) = -M\theta = -M\frac{x}{R}$$

Portanto, o trabalho total realizado pelos esforços aplicados ao disco é:

$$W^{1\to2} = \left(mg\mathrm{sen}\alpha - \frac{M}{R}\right)x - \frac{k\mathrm{sen}^2\alpha}{2}x^2$$ **(1,0 ponto)**

d) Aplicando o TEC ao disco e considerando que o disco parte do repouso, tem-se:

$$T_2 - T_1 = W^{1\to2} \quad \to \quad \frac{3m\dot{x}^2}{4} = \left(mg\mathrm{sen}\alpha - \frac{M}{R}\right)x - \frac{k\mathrm{sen}^2\alpha}{2}x^2$$

Sendo $\dot{x} = \omega R$, então:

$$\omega(x) = \sqrt{\frac{4}{3mR^2}\left[\left(mg\mathrm{sen}\alpha - \frac{M}{R}\right)x - \frac{k\mathrm{sen}^2\alpha}{2}x^2\right]}$$ **(0,5 ponto)**

e) A aceleração angular $\dot{\omega}$ do disco, em função de x. Derivando, em relação ao tempo, a expressão de ω obtida no item d), tem-se:

$$\dot{\omega}(x) = \frac{2}{3mR}\left[\left(mg\mathrm{sen}\alpha - \frac{M}{R}\right) - (k\mathrm{sen}^2\alpha)x\right]$$ **(1,0 ponto)**