PROVA SUB 1: ESPAÇOS DE HILBERT E EDPS

Exercício 1. (1,75 ponto) a) Sejam $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que

$$\{\varphi \in L^2(0,1) : \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx = 0\} = \{\varphi \in L^2(0,1) : \int_0^1 g(x)\varphi(x)dx = 0\},$$

se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \neq 0$ e $f(x) = \lambda g(x)$, para todo $x \in [0,1]$.

(1,5 ponto) b) Sejam $(H, (.,.)_H)$ um espaço de Hilbert e $(V, (.,.)_V)$ um espaço vetorial com produto interno. Suponha que exista uma transformação linear $T : H \to V$ sobrejetora e contínua e uma constante $C > 0$ tal que $\|Tu\|_V \geq C\|u\|_H$ para todo $u \in H$. Mostre que $(V, (.,.)_V)$ também é um espaço de Hilbert.

Exercício 2. (1,5 ponto) Sejam H um espaço de Hilbert e $U : H \to H$ um operador unitário. Mostre que $T : H \to H$ é uma projeção ortogonal se, e somente se, $U^{-1}TU : H \to H$ é uma projeção ortogonal. Mostre que $T : H \to H$ é um operador unitário se, e somente se, $U^{-1}TU : H \to H$ é um operador unitário.

Exercício 3. (1,75 ponto) Considere uma sequência limitada $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de números reais e o operador $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ dado por

$$Tf(x) = 2\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \left(\int_0^1 \operatorname{sen}(j\pi y)f(y)dy\right) \operatorname{sen}(j\pi x).$$

Dê uma condição necessária e suficiente sobre os valores de λ_j para que T seja uma projeção ortogonal e uma condição necessária e suficiente sobre os valores de λ_j para que T seja um operador unitário. (Dica: Lembre-se que $\mathcal{B} = \left\{e_j(x) = \sqrt{2}\operatorname{sen}(j\pi x) : j \geq 1\right\}$ é uma base de Hilbert de $L^2(0,1)$. Logo $Tf = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (e_j, f)e_j$).

Exercício 4. Seja $q : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $|q(x)| \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$. Considere o seguinte problema para $f \in L^2(0,1)$.

$$\begin{aligned} -u''(x) + q(x)u'(x) + u(x) &= f(x),\ x \in]0,1[, \\ u(0) = u'(1) &= 0. \end{aligned} \tag{0.1}$$

(0,5 ponto) a) Mostre que $H = \left\{u \in H^1(0,1) : u(0) = 0\right\}$ é um espaço de Hilbert com o produto interno de $H^1(0,1)$.

Dizemos que $u \in H^2(0,1)$ é uma *solução forte* se satisfizer (0.1).

Uma *solução fraca* de (0.1) é uma função $u \in H$, em que H foi definido no item a), que satisfaz

$$a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in H,$$

em que $a : H \times H \to \mathbb{R}$ e $F : H \to \mathbb{R}$ são dados por

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 qu'vdx + \int_0^1 uvdx, \quad F(v) = \int_0^1 vfdx.$$

(1 ponto) b) Mostre que se $u \in H^2(0,1)$ for uma solução forte, então u é uma solução fraca do problema.

(1 ponto) c) Mostre que existe uma única solução fraca do problema. Conclua que se existir uma solução forte, ela é única. (Dica: $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$).

(1 ponto) d) Mostre que a solução fraca é uma solução forte. (Para isto, deve-se provar que $u \in H^2(0,1)$ e u satisfaz as condições de contorno do problema).