# Lista de Exercícios para Avaliação III

① Considere um modelo cosmológico homogêneo e isotrópico que contém apenas uma componente energética, com equação de estado $p/\rho = w = \text{constante}$. Sejam $\rho_0$ e $a_0$ os valores da densidade de energia $\rho(t)$ e do fator de escala $a(t)$ no instante $t = t_0$ ($t$ sendo o tempo próprio dos observadores que vêem isotropia).

(a) Mostre que $\rho(t) = \rho_0\,[a_0/a(t)]^{3(1+w)}$;

(b) Se $H_0 > 0$ é a "constante de Hubble" no instante $t = t_0$ (ou seja, $H_0 = [\dot{a}(t)/a(t)]|_{t=t_0}$), determine a condição, envolvendo $\rho_0$, $a_0$ e $H_0$, que determina qual a geometria da seção espacial desse modelo;

(c) Supondo que a seção espacial seja plana, determine a função $a(t)$ para $w = 0$ (matéria não-relativística; "poeira"), para $w = 1/3$ (matéria relativística; "radiação") e para $w = -1$ (constante cosmológica; "energia escura" ou "energia do vácuo"). Em cada um desses casos, determine a idade do universo em termos de $H_0$, contada desde o momento em que $a = 0$;

(d) Calcule o parâmetro de desaceleração $q := -a\ddot{a}/\dot{a}^2 = -(\ddot{a}/a)/H^2$ para cada um dos casos analisados no item anterior, deixando claro em qual(is) caso(s) há aceleração e em qual(is) há desaceleração da expansão.

② Introduzindo a chamada *densidade crítica* $\rho_c := 3H^2/(8\pi G)$, define-se o *parâmetro de densidade* como sendo a fração $\Omega := \rho/\rho_c$.

(a) Mostre que a equação de Friedmann para o parâmetro de Hubble $H$ é rescrita como

$$\Omega + \Omega_k = 1,$$

onde $\Omega_k := -k/(a^2H^2)$;

(b) Mostre que a equação de Friedmann para a aceleração $\ddot{a}$ é rescrita como

$$q = \frac{(1-\Omega_k)}{2}(1+3w),$$

onde $q$ é o parâmetro de desaceleração e $w := p/\rho$

(c) Num universo com várias componentes energéticas $\rho_j$, cada uma com equação de estado $w_j$ constante, mostre que a equação de Friedmann para o parâmetro de Hubble $H$, escrita em termos dos parâmetros atuais (ou seja, medidos em $t = t_0$), assume a forma

$$H(t)^2 = H_0^2 \left[ \sum_j \Omega_{j0} \left( \frac{a_0}{a(t)} \right)^{3(1+w_j)} + \Omega_{k0} \left( \frac{a_0}{a(t)} \right)^2 \right],$$

onde os subscritos "0" indicam o valor do parâmetro em $t = t_0$;

(d) Com base na equação anterior, explique qual componente energética (com equação de estado $w_j$ maior ou menor) deve dominar a dinâmica do universo nos regimes em que $a(t)/a_0 \ll 1$ e $a(t)/a_0 \gg 1$ (supondo que esses regimes sejam atingidos).

③ Num espaço-tempo com a métrica de FLRW, considere uma linha-de-mundo cujo vetor tangente $p^a$ satisfaz $p^b \nabla_b p^a = 0$. Seja $p_{\|}(t)$ a norma da projeção de $p^a$ sobre as superfícies $\Sigma_t$ de homogeneidade e isotropia: $p_{\|}(t) = \sqrt{h_{ab} p^a p^b}$, onde $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$, com $u^a$ sendo a 4-velocidade dos observadores que vêem isotrópia ("observadores isotrópicos", por simplicidade).

(a) Mostre que $p_{\|}(t) a(t) =$ constante ao longo da linha-de-mundo;

(b) O que o resultado acima implica para o 3-momentum de uma partícula livre evoluindo nesse espaço-tempo, assim como medido pelos "observadores isotrópicos"?

(c) Com base nos resultados anteriores, mostre que um fóton emitido num instante $t < t_0$ com frequência $f_e$ (medida pelos "observadores isotrópicos") é observado hoje com frequência $f_0$ (medida pelos "observadores isotrópicos") dada por

$$f_0 = f_e \, \frac{a(t)}{a_0}.$$

Com isso, mostre que o fator de "redshift" cosmológico $z := (\lambda_0 - \lambda_e)/\lambda_e$ é independente de frequência e satisfaz $1 + z = a_0/a(t)$;

(d) Expresse o parâmetro de Hubble como função do "redshift" cosmológico, $H(z)$, e, em seguida, expanda $H(z)$, em torno de $z = 0$, até primeira ordem em $z$;

④ Considere o modelo de FLRW nas coordenadas $\{(t, \chi, \theta, \varphi)\}$ nas quais

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left\{d\chi^2 + f(\chi)^2[d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\varphi^2]\right\},$$

com $f(\chi) = \sinh\chi, \chi, \sin\chi$ para $k = -1, 0, 1$, respectivamente. Pede-se:

(a) Obtenha uma expressão, em forma integral, para $\chi(z)$ que determina o cone-de-luz passado de um observador em $t = t_0$ e $\chi = 0$, em função do "redshift" cosmológico $z$;

(b) Supondo seção espacial plana e que há apenas uma única componente energética, com equação de estado $w =$ constante, determine o raio do *horizonte de partículas* no instante $t = t_0$;

(c) Sob as mesmas hipóteses do item anterior, qual o maior raio físico que o cone-de-luz passado do observador em $t = t_0$ atinge e em que instante isso acontece?

⑤ As definições de distância luminosa $d_L$ e de distância angular $d_A$ levam às seguintes expressões para essas quantidades, em função do "redshift" cosmológico $z$:

$$d_L(z) = (1 + z)a_0 f(\chi(z)),$$

$$d_A(z) = \frac{a_0}{(1 + z)} f(\chi(z)),$$

onde $f(\chi) = \sinh\chi, \chi, \sin\chi$ para $k = -1, 0, 1$, respectivamente, e $\chi(z) = a_0^{-1} \int_0^z d\bar{z}/H(\bar{z})$ (vide item (a) do exercício anterior).

(a) Expanda ambas as expressões, em torno de $z = 0$, até primeira ordem em $z$, e mostre que a relação da Lei de Hubble observacional, $z = H_0\, d$, é igualmente válida para ambas as definições de distância;

(b) No caso de seção espacial plana e apenas uma componente energética (com equação de estado $w =$ constante), calcule o primeiro desvio da Lei de Hubble observacional,

$$z = H_0\, d + C d^2 + \mathcal{O}(d^3),$$

obtendo a constante $C$ explicitamente (tanto para $d \equiv d_L$, quanto para $d \equiv d_A$) e mostrando que ela fornece informação sobre o parâmetro de desaceleração atual $q_0$ (que neste caso é constante; vide item (b) do exercício ②).