PROVA 2: ESPAÇOS DE HILBERT E EDPS

Exercício 1. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto.

(1,75 ponto) i. Sejam $u, v \in H^1(\Omega)$. Suponha que exista $U \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u(x) = U(x)$ para todo $x \in \Omega$. Mostre que $uv \in H^1(\Omega)$ e

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(uv) = u\frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_j}v, \quad \forall j \in \{1, ..., n\}. \tag{0.1}$$

(1,75 ponto) ii. Sejam $u, v \in H^1(\Omega)$. Suponha que existam $c_1, c_2 > 0$ tais que $|v(x)| \le c_1$ e $|\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)| \le c_2$ para todo $x \in \Omega$ e $j \in \{1, ..., n\}$. Mostre que $uv \in H^1(\Omega)$ e que (0.1) vale.

Exercício 2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado de classe C^1. Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

(1,0 ponto) i. Mostre que se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ for uma solução clássica, então u é uma solução fraca, ou seja, u pertence a $H_0^1(\Omega)$ e u satisfaz $a(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, em que $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ são dados por

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy, \\ F(v) &= \int_\Omega fv dxdy. \end{aligned}$$

(1,5 ponto) ii. Mostre que existe uma única solução fraca da equação. (Dica: use $ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$)

(1,0 ponto) iii. Mostre que se $u \in H_0^1(\Omega)$ for uma solução fraca que pertence a $C^2(\overline{\Omega})$, então u é uma solução clássica.

Exercício 3. Sejam H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ uma base de Hilbert de H, $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ crescente tal que $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty$ e $A : \mathcal{D}(A) \to H$ um operador não limitado definido por

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in H : \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^2 (u, e_j)^2 < \infty\}, \quad Au = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j (u, e_j) e_j.$$

(1,75 pontos) i. Consideremos seguinte problema abstrato

$$\begin{aligned} u'(t) + Au(t) = 0, \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{aligned} \tag{0.2}$$

em que $u_0 \in H$. Existe uma única função $u \in C^1(]0,\infty[; H) \cap C([0,\infty[; H)$ tal que $u(t) = \sum_{j=1}^\infty a_j(t) e_j \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t > 0$ e u satisfaz (0.2). Suponha que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_j > 0$ para todo $j \ge 3$. Mostre que $(Au, v) = (u, Av)$, para todo $u, v \in \mathcal{D}(A)$, determine as funções a_j para todo $j \in \mathbb{N}$ em termos de u_0, e_j e λ_j e compare o comportamento das soluções para $t \to \infty$ quando $u_0 = e_1$, $u_0 = e_2$ e $u_0 = e_3$.

(1,75 pontos) ii. Pode-se mostrar que existe uma única solução $v \in C^\infty(]0,\infty[\times [0,1])$ do problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) + 4\pi^2 v(t,x), \quad t > 0, x \in [0,1] \\ v(t,0) &= v(t,1) = 0, \quad t > 0, \\ \lim_{t\to 0} &\int_0^1 |v(t,x) - u_0(x)|^2 dx = 0, \end{aligned}$$

em que $u_0 \in L^2(0,1)$. Esta solução é tal que $u : [0,\infty[\to L^2(0,1)$ definido como $(u(t))(x) = v(t,x)$ é a solução do problema abstrato (0.2) com $H = L^2(0,1)$, $\mathcal{D}(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$, $Au = -\frac{d^2u}{dx^2} - 4\pi^2 u$ e $\mathcal{B} = \{e_j(x) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(j\pi x) : j \ge 1\}$. Calcule $Ae_j = \lambda_j e_j$ para encontrar os λ_j e diga o que u_0 deve satisfazer (condição necessária e suficiente) para que a solução v satisfaça $\sup_{t\in[0,\infty)} \int_0^1 |v(t,x)|^2 dt < \infty$. Repita o mesmo para a condição $\lim_{t\to\infty} \int_0^1 |v(t,x)|^2 dt = 0$.