Q1: _____

Q2: _____

Q3: _____

Nota: _____

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME3210 – Mecânica dos Sólidos I – P3 – 14/07/2022

Duração: 120 minutos

É permitido apenas o uso de calculadoras simples (quatro operações + raiz quadrada)

Não é permitido o uso de calculadoras científicas, celulares, relógios ou outros equipamentos eletrônicos)

Nome: _____ N.USP: _____ Assinatura: _____

1ª Questão (3,0 pontos)

A viga biapoiada da *Figura A* tem comprimento *L*, peso desprezível e está submetida ao carregamento indicado. Essa viga é formada por três barras coladas, conforme a seção transversal esquematizada na *Figura B*. Pedem-se:

a) o diagrama de forças cortantes;

b) o diagrama de momentos fletores;

c) o fator de segurança, sabendo que o limite de resistência ao cisalhamento da cola é τ_b.

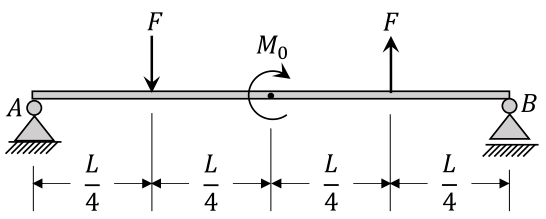


Figura A

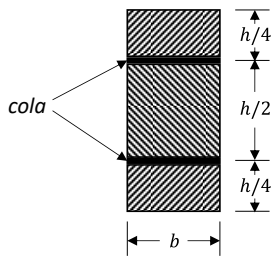


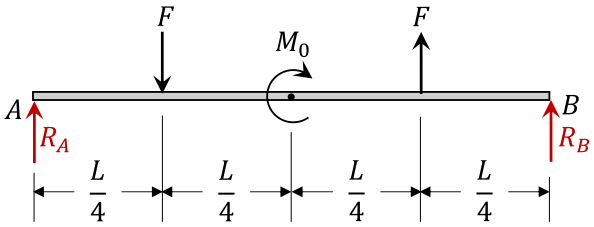
Figura B

Dados:

$L = 2{,}0\ m \qquad F = 40\ kN \qquad M_0 = 10\ kNm \qquad b = 100\ mm \qquad h = 200mm \qquad \tau_b = 2{,}0MPa$

Resolução:

DCL:



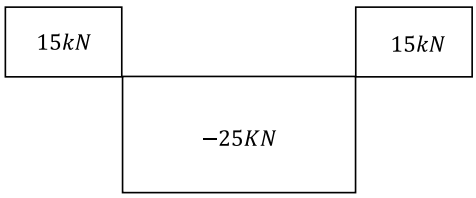
Reações:

$R_A = 15\ kN$

$R_B = -15\ kN$

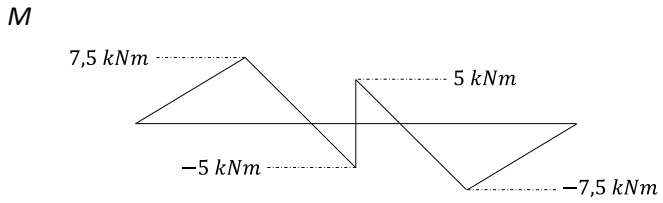
a)

V



(1,0 pto)

b)



(1,0 pto)

c) A tensão de cisalhamento máxima na cola ocorre na seção correspondente ao máximo módulo da força cortante, ou seja, quando

$$|V|_{máx} = 25kN$$

e o valor máximo dessa tensão é:

$$\tau_{máx} = \frac{|V|_{máx}}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - \left(\frac{h}{4}\right)^2\right) = \frac{|V|_{máx}}{2}\frac{12}{bh^3}\frac{3h^2}{16} = \frac{9|V|_{máx}}{8bh}$$

$$\Rightarrow \tau_{máx} = 1{,}406\ MPa$$

Então, o fator de segurança é:

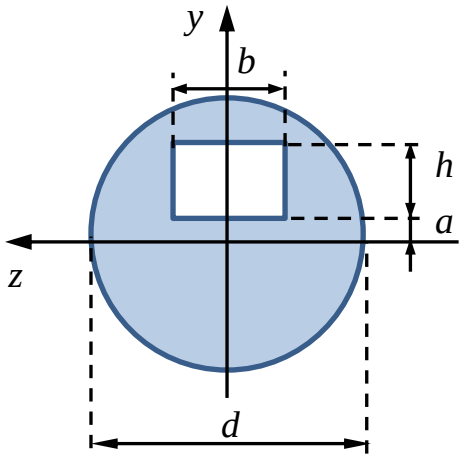
$$FS = \frac{\tau_b}{\tau_{máx}} = 1{,}42$$

(1,0 pto)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

Nome: _____ N.USP: _____ Assinatura: _____

2ª Questão (3,0 pontos)
A figura abaixo mostra a seção transversal de uma viga prismática que está submetida à flexão uniforme (flexão ocorre em torno do eixo horizontal). Considerando que o momento fletor na seção seja positivo (pela convenção adotada no curso) e de magnitude 30 kN.m, determine a máxima tensão de tração e a máxima tensão de compressão atuantes na seção. Dados: *d* = 20 cm, *b* = 12 cm, *h* = 4 cm, *a* = 1 cm.



Resolução:
Utilizando os eixos indicados, determinamos primeiramente a posição do centroide (por onde passa a linha neutra):

$$\bar{y} = \frac{\frac{\pi d^2}{4}(0) - (bh)(a + \frac{h}{2})}{\frac{\pi d^2}{4} - bh} = -\frac{(48)(1+2)}{\frac{\pi 20^2}{4} - 48} \cong -0{,}541\ cm$$

(1,0 pto)

Calculando a inércia da seção transversal em relação ao eixo que passa pelo centroide, teremos:

$$I_{zc} = \frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4}(\bar{y})^2 - \left[\frac{bh^3}{12} + (bh)\left(\frac{h}{2} + a + |\bar{y}|\right)^2\right]$$

$$I_{zc} = \frac{\pi(20)^4}{64} + \frac{\pi(20)^2}{4}(0{,}541)^2 - \left[\frac{12(4)^3}{12} + (48)(2 + 1 + 0{,}541)^2\right]$$

$$I_{zc} = 7853{,}982 + 91{,}948 - [64 + 601{,}857]$$

$$I_{zc} = 7280{,}07\ cm^4 \cong 7{,}28 \times 10^7 mm^4$$

(1,0 pto)

A maior tensão de tração ocorrerá na base da seção e vale:

$$\sigma_{máx,tr} = \frac{M}{I_{zc}}\left(\frac{d}{2} - |\bar{y}|\right) = \frac{30 \times 10^6 Nmm}{7{,}28 \times 10^7 mm^4}(100 - 5{,}41)mm \cong 38{,}98\ MPa$$

(0,5 pto)

A maior tensão de compressão ocorrerá no topo da seção e vale (em valor absoluto):

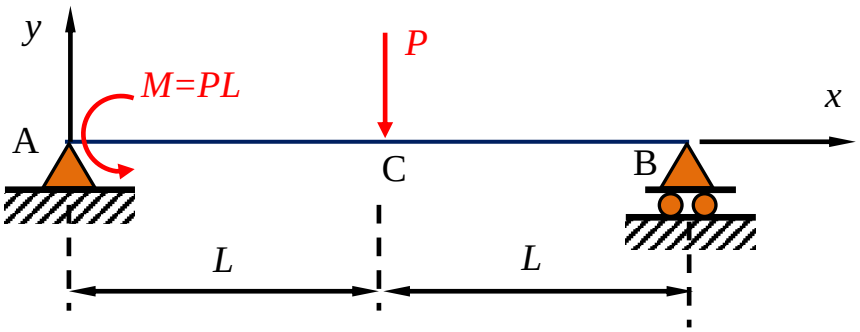
$$\sigma_{máx,c} = \frac{M}{I_{zc}}\left(\frac{d}{2} + |\bar{y}|\right) = \frac{30 \times 10^6 Nmm}{7{,}28 \times 10^7 mm^4}(100 + 5{,}41)mm \cong 43{,}44\ MPa$$

(0,5 pto)

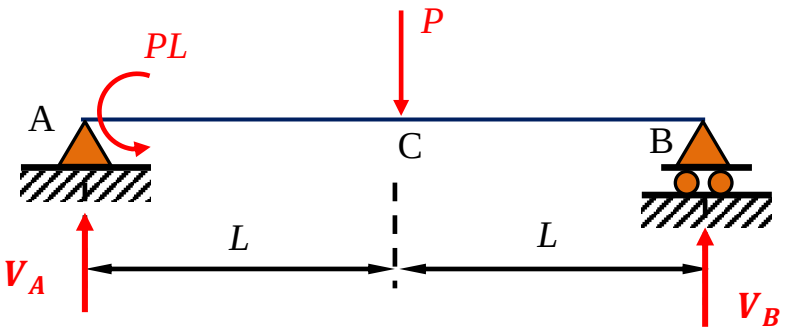
Nome: _____ N.USP: _____ Assinatura: _____

3ª Questão (4,0 pontos)
A viga biapoiada de comprimento total 2*L* e rigidez flexional *EI* (constante) indicada na figura está submetida a um binário de intensidade $M = PL$ aplicado na extremidade A e a uma força concentrada de intensidade P aplicada no ponto central C. Utilizando o sistema de coordenadas indicado na figura, determine:

a) o máximo deslocamento transversal e a posição em que ocorre;
b) as rotações nos apoios A e B;
c) apresente um esboço final da viga na configuração deformada, indicando os sentidos corretos dos deslocamentos e rotações, calculados nos itens anteriores.



Resolução:
D.C.L. e reações de apoio:



$$V_A(2L) = PL + PL \quad \Leftrightarrow \quad V_A = P$$

$$V_B(2L) + PL = PL \quad \Leftrightarrow \quad V_B = 0$$

(0,5 pto)

Expressões dos momentos fletores em cada segmento:
Segmento AC:

$$M_1(x) = V_A x - PL = P(x - L), \quad 0 \le x \le L$$

Segmento CB:

$$M_2(x) = 0, \quad L \le x \le 2L$$

Equações da linha elástica em cada segmento:
Segmento AC:

$$EIv_1''(x) = M_1(x) = P(x - L)$$

$$EIv_1'(x) = P\left(\frac{x^2}{2} - Lx\right) + C_1$$

$$EIv_1(x) = P\left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2}\right) + C_1x + C_2$$

Segmento CB:

$$EIv_2''(x) = M_2(x) = 0$$

$$EIv_2'(x) = C_3$$

$$EIv_2(x) = C_3x + C_4$$

(0,5 pto)

Condições de contorno:

$$v_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$v_2(2L) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2C_3L + C_4 = 0$$

Condições de compatibilidade:

$$v_1(L) = v_2(L) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{PL^3}{3} + C_1L = C_3L + C_4$$

$$v_1'(L) = v_2'(L) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{PL^2}{2} + C_1 = C_3$$

(0,5 pto)

Resolvendo o sistema, resultam:

$$C_1 = \frac{5PL^2}{12}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{PL^2}{12}, \quad C_4 = \frac{PL^3}{6}$$

Logo, para o segmento AC:

$$v_1(x) = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2}\right) + \frac{5PL^2}{12EI}x$$

$$v_1'(x) = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - Lx\right) + \frac{5PL^2}{12EI}$$

E para o segmento CB:

$$v_2(x) = -\frac{PL^2(x - 2L)}{12EI}$$

$$v_2'(x) = -\frac{PL^2}{12EI}$$

(0,5 pto)

Como a linha elástica do segmento CB é dada pela equação de uma reta, e como $v_2(2L) = 0$, concluímos que o máximo deslocamento transversal da viga ocorrerá ou no ponto C ou em algum ponto intermediário do segmento AC. Analisando os pontos críticos da função $v_1(x)$, teremos:

$$v_1'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2 - 12Lx + 5L^2 = 0$$

$$x = \frac{12L}{12} \pm \frac{\sqrt{144L^2 - 120L^2}}{12}$$

$$x = L \pm 0{,}40825L$$

Como o domínio do segmento AB está restrito a $0 \leq x \leq L$, o único ponto crítico existente é:

$$x_{cr} = L - 0{,}40825 \cong 0{,}591752L$$

(0,5 pto)

Assim:

$$v_1(x_{cr}) = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2}\right) + \frac{5PL^2}{12EI}x$$

$$v_1(x_{cr}) \cong 0{,}106\frac{PL^3}{EI}$$

Comparando com o valor do deslocamento transversal em C, teremos:

$$v_1(x_{cr}) > v_1(L) = v_2(L) = \frac{PL^3}{12EI} \cong 0{,}083\frac{PL^3}{EI}$$

Logo, o deslocamento transversal máximo ocorre em $x_{cr} \cong 0{,}591752L$ e vale:

$$\delta = v_1(x_{cr}) \cong 0{,}106\frac{PL^3}{EI}$$

(0,5 pto)

b) As rotações em A e em B serão:

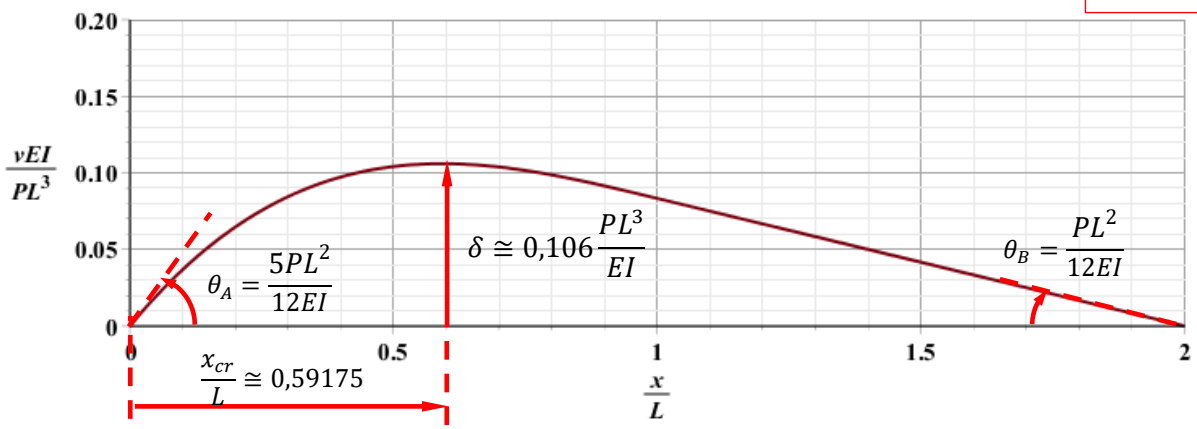
$\theta_A = v_1'(0) = 5PL^2/12EI$ (rotação no sentido anti-horário)

$\theta_B = -v_2'(L) = PL^2/12EI$ (rotação no sentido horário)

(0,5 pto)

c) Esquematicamente:

(0,5 pto)



Nome: _____ N.USP: _____ Assinatura: _____