2020-1, "STATPHYS", AULA 22

OBJETIVOS: APRESENTAR A EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES COMO UMA APLICAÇÃO DO MOVIMENTO BROWNIANO EM ECONOFÍSICA

ONDE ESTAMOS: 2. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS, 2.5 PROCESSOS DE DIFUSÃO

- P. WILMOTT, S. HOWISON & J. DEWYNNE, "THE MATHEMATICS OF FINANCIAL DERIVATIVES - A STUDENT INTRODUCTION", CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1995.
- D. LUENBERGER, "INVESTMENT SCIENCE", OXFORD UNIVERSITY PRESS, 1998.
- K. JACOBS, "STOCHASTIC PROCESSES FOR PHYSICISTS", CUP, 2010.
- W. PAUL & J. BASCHNAGEL, "STOCHASTIC PROCESSES - FROM PHYSICS TO FINANCE", SPRINGER, 2ND, 2013.

* MOVIMENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO E A DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL

→ UM ATIVO ("ASSET") É UM "INSTRUMENTO FINANCEIRO" QUE PODE SER NEGOCIADO (COMPRADO OU VENDIDO) EM UM MERCADO (CONJUNTO DE AGENTES).

→ O RETORNO (TOTAL) DE UM ATIVO ADQUIRIDO PELO PREÇO X_0 E POSTERIORMENTE VENDIDO POR X_1 É $\boxed{R \equiv X_1/X_0}$.

MAS É USUAL CHAMAR "RETORNO" A TAXA DE RETORNO $\boxed{r \equiv (X_1 - X_0)/X_0} = R - 1$.

→ SEQUENCIALMENTE NO TEMPO,

$$\boxed{X_{t+1} = R_t \cdot X_t}$$

E

$$\boxed{r_t = \frac{X_{t+1} - X_t}{X_t} = R_t - 1}.$$

→ "NA PRÁTICA", R_t DEVE SER UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA E PODE SER CONVENIENTE UM TEMPO CONTÍNUO.

→ CONSIDERAÇÕES EMPÍRICAS E ANALÍTICAS "SUGEREM" QUE OS LOGARITMOS DOS RETORNOS SEJAM GAUSSIANOS:

(i) OS RETORNOS RELATIVOS (TAXAS) PODEM SER APROXIMADAMENTE GAUSSIANOS.

$$R_t = 1 + r_t \Rightarrow \log R_t = \log(1 + r_t) \approx r_t$$

SE $|r_t| << 1$ COMO EM UM TEMPO CONTÍNUO, $r_t = \frac{X_{t+1} - X_t}{X_t} \longrightarrow \frac{dX}{X}$.

(ii) $X_t = R_{t-1} \cdot X_{t-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log X_t = \log X_{t-1} + \log R_{t-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log X_t = \log X_0 + \boxed{\sum_{i=0}^{t-1} \log R_i}$$

$d(\log X) =$ NORMAL

$$d(\log S) = \nu dt + \sigma . dW$$

→ ORA, QUEM É A V.A. Y CUJO LOGARITMO É UMA NORMAL? É A EXPONENCIAL DE UMA NORMAL!

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(\mu, \sigma^2) \\ Y = e^X \end{array}\right\} \Rightarrow Y \text{ É } \underline{\text{LOGNORMAL}}$$

$$\rho_Y(y) = \int dx\, \rho_X(x) \cdot \delta(y - e^x)$$

$$= \frac{[\rho_X(x)]\,\big|_{x=\log y}}{\left|[(e^x)']_{x=\log y}\right|}$$

$$= \boxed{\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\log y - \mu]^2}}$$

$$= \frac{1}{y}\, \rho_X(\log y)$$

EXERCÍCIO: LEMBRANDO QUE $\rho_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$ E NOTANDO QUE $\langle Y \rangle_{\rho_Y} = \langle e^X \rangle_{\rho_X}$ E $\langle Y^2 \rangle_{\rho_Y} = \langle e^{2X} \rangle_{\rho_X}$,

"COMPLETE QUADRADOS" NOS ARGUMENTOS DE EXPONENCIAIS PARA MOSTRAR QUE

$$\boxed{\langle Y \rangle = e^{\mu + \sigma^2/2}}$$

E

$$\boxed{\mathbb{V}(Y) = e^{2\mu + \sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2} - 1)}.$$

→ ISSO "EXPLICA" A ANÁLISE DO FIM DA AULA 21. VIMOS QUE $d(\log S) \neq \frac{dS}{S}$. EXPLICITAMENTE, SE

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW,$$

A FÓRMULA DE ITÔ MOSTROU QUE

$$(*) \quad d(\log S) = \nu dt + \sigma dW,$$

COM $\nu = \mu - \sigma^2/2$. DE FATO, POR (*),

$$\log S(t) - \log S(0) = \nu t + \sigma . W(t),$$

$$\boxed{\log S(t) \sim N(\log S(0) + \nu t, \sigma^2 t)}$$

E $S(t)$ É LOGNORMAL, DE MÉDIA

$$\boxed{\langle S(t)\rangle = \exp\{[\log S(0) + \nu t] + \sigma^2 t/2\} = S(0).\, e^{\nu t + \sigma^2 t/2}}$$

E DESVIO PADRÃO

$$\boxed{\sqrt{\mathbb{V}(S(t))} = S(0)\, e^{\nu t + \sigma^2 t/2}\sqrt{e^{\sigma^2 t} - 1}}\,.$$

* FINANÇAS: OFERTA E DEMANDA, MERCADO EFICIENTE, RISCO E "PORTFÓLIOS".

→ OS PREÇOS DE PRODUTOS "RAPIDAMENTE" ALCANÇAM VALORES DE EQUILÍBRIO PELA AÇÃO DE "AGENTES RACIONAIS" QUE NUNCA PERDERIAM OPORTUNIDADES DE OBTER O LUCRO LIVRE DE RISCO POSSÍVEL NA PRESENÇA DE DESEQUILÍBRIOS.

→ DOIS PREÇOS P/ O MESMO PRODUTO? COMPRE-O "BARATO", VENDA-O "CARO" → LUCRO!

→ OFERTA E DEMANDA: MUITA PROCURA PELO PRODUTO BARATO? SEU PREÇO SOBE. POUCA PROCURA PELO CARO? SEU PREÇO DESCE!

→ HIPÓTESE DO MERCADO EFICIENTE: EQUILÍBRIOS INSTANTÂNEOS.

→ "AMBIENTES ECONÔMICOS" ESTÁVEIS OFERECEM UMA "TAXA BÁSICA DE JUROS" LIVRE DE RISCO. DINHEIRO NÃO "FICA NO COLCHÃO", GOVERNOS E GRANDES BANCOS SERIAM CONFIÁVEIS: MESMA TAXA OFERECIDA.

→ QUER LUCRO? DEVE CORRER RISCO. MAS AGENTES RACIONAIS QUEREM O MENOR RISCO POSSÍVEL. ESTRATÉGIA BÁSICA: DIVERSIFICAR O RISCO CONSTITUINDO UMA CARTEIRA DE INVESTIMENTOS (PORTFOLIO).

→ NO SENTIDO MAIS SIMPLES, RISCO É A VARIABILIDADE DO RETORNO DO SEU INVESTIMENTO. DADAS OPÇÕES DE MESMO RISCO, AGENTES RACIONAIS SEMPRE ESCOLHEM AQUELAS COM OS MAIORES RETORNOS MÉDIOS.

* DERIVATIVOS FINANCEIROS

→ UM DERIVATIVO DE UM ATIVO FINANCEIRO É UM PORTFOLIO DAQUELE ATIVO E SEU PREÇO É UMA FUNÇÃO DO PREÇO DAQUELE ATIVO BÁSICO SUBJACENTE.

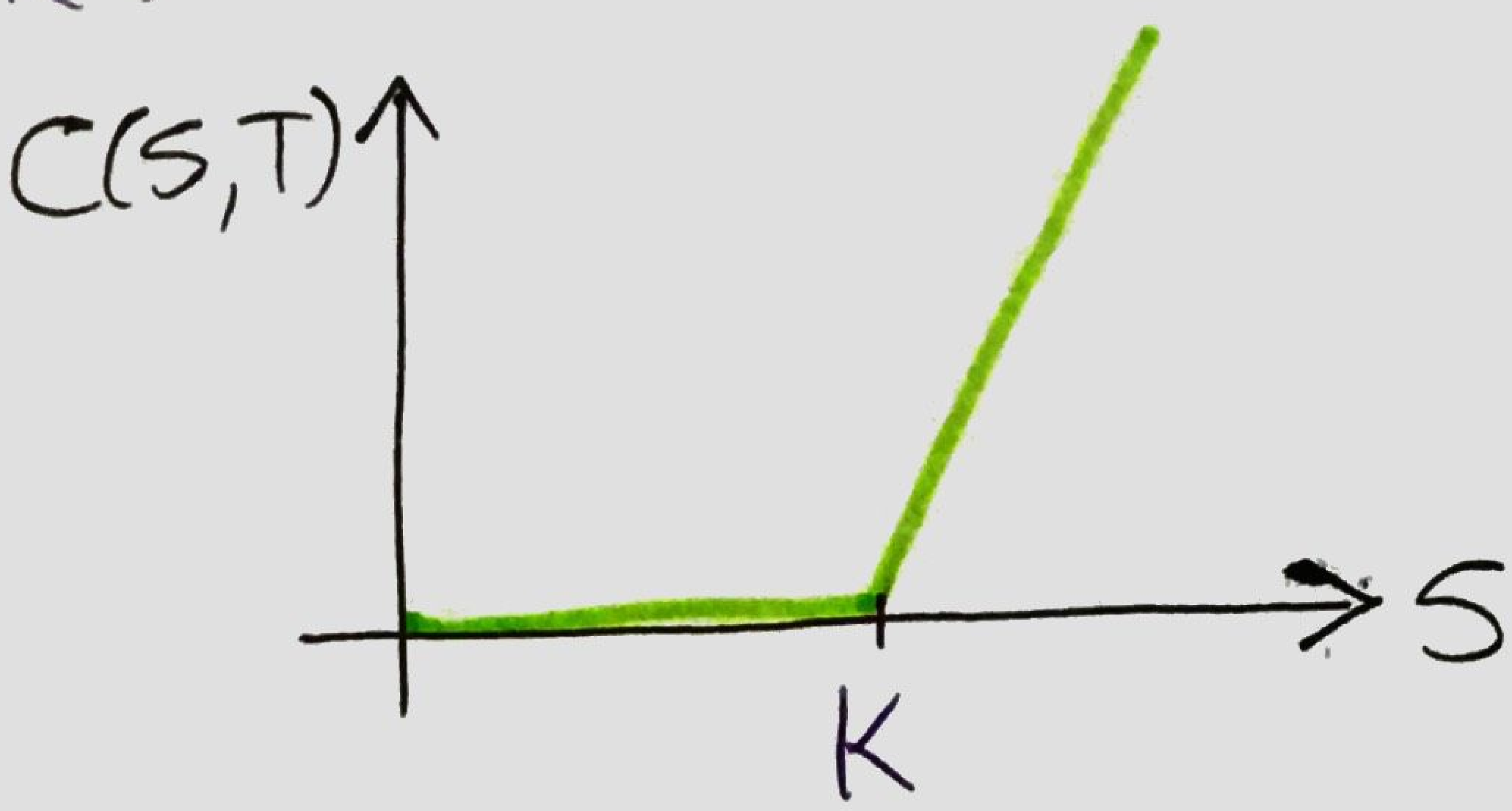
→ EXEMPLO DE TRABALHO: OPÇÃO EUROPEIA DE COMPRA

(i) É UM CONTRATO FIRMADO ENTRE UM AUTOR/PROPONENTE E UM COMPRADOR, ESTABELECENDO DIREITOS E OBRIGAÇÕES. TEM VALOR/PREÇO! PODE SER NEGOCIADO.

(ii) O CONTRATANTE PAGA UM VALOR $C(S,T)$ PELO DIREITO DE ADQUIRIR UM "PACOTE" DO ATIVO BÁSICO DE PREÇO S PELO PREÇO DE EXERCÍCIO (STRIKE PRICE) K EM UMA CERTA DATA, DE EXPIRAÇÃO OU DE MATURIDADE, T UNIDADES DE TEMPO APÓS A CONTRATAÇÃO. O AUTOR É OBRIGADO A VENDER PELO PREÇO COMBINADO.

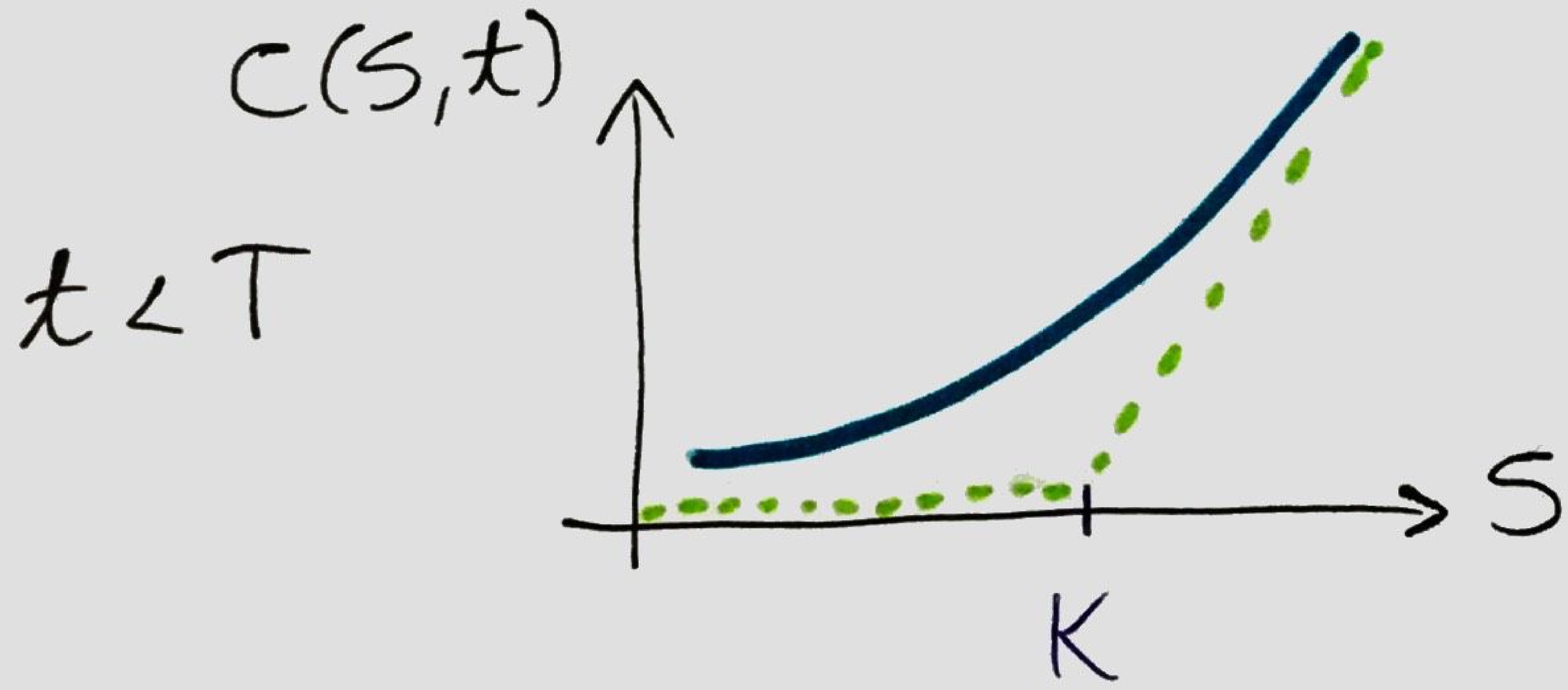
(iii) O CONTRATANTE "APOSTA" QUE, NA MATURIDADE, $S > K$. ELE COMPRARIA UM ATIVO VALIOSO POR UM PREÇO BAIXO, K, E O REVENDERIA IMEDIATAMENTE NO MERCADO, POR S, LUCRANDO $S-K$. PORÉM, SE $S \leq K$ NA MATURIDADE, O CONTRATANTE NÃO EXERCERÁ SUA OPÇÃO DE COMPRA E NÃO TERÁ RETORNO: POR QUE PAGAR CARO, K, EM ALGO DISPONÍVEL

POR $S < K$?



$$C(S,T) = MAX(S-K, 0)$$

$$C(0,t) = 0$$



→ À MEDIDA QUE $S(t)$ "FLUTUA ESTOCASTICAMENTE NO TEMPO", O MESMO OCORRE COM $C(S,t)$.

→ SE $f(S,t)$ FOR O PREÇO DE UM DERIVATIVO QUALQUER ($C(S,t) \to f(S,t)$, "C" VEM DE "CALL OPTION", OPÇÃO DE COMPRA), CONDIÇÕES DE CON-

TORNO COMO AQUELAS ACIMA DEVEM SER IMPOSTAS À EDP DE BLACK-SCHOLES,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} r.S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = r.f} \, ,$$

SE O ATIVO SEGUE UM MOVIMENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO,

$$dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dW \, ,$$

E O "MERCADO" OFERECE UMA TAXA DE JUROS r LIVRE DE RISCO,

$$dB = rB\, dt \, .$$