*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*
*Departamento de Engenharia Mecânica*

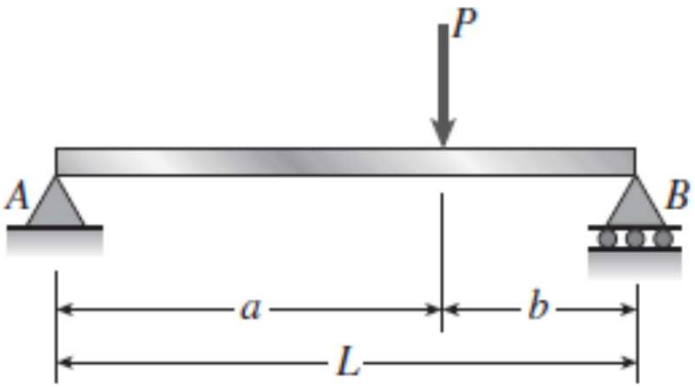
# *PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I*

## *Aula #24*

*Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.*

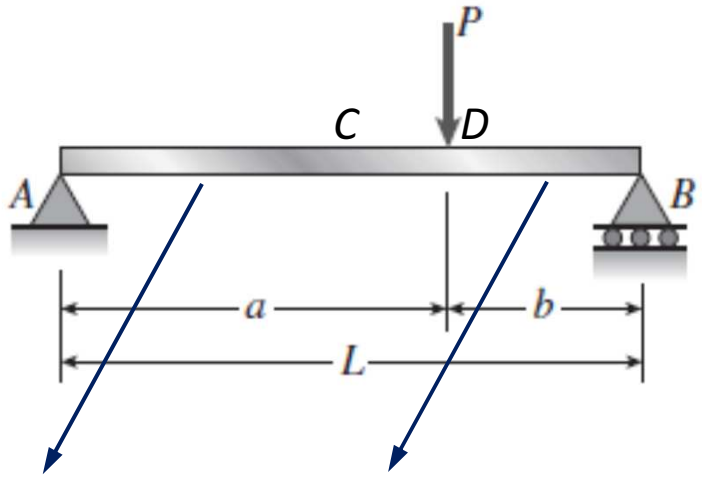
*08/07/2022*

Ex. Res. 9.3: A viga AB simplesmente apoiada suporta um carregamento concentrado $P$ atuando a distâncias $a$ e $b$ dos suportes esquerdo e direito, respectivamente. Determine as equações da curva de deflexão, os ângulos de rotação em A e em B, a deflexão máxima $\delta_{máx}$ e a deflexão $\delta_C$ no ponto médio C da viga.
Nota: a viga tem comprimento total $L = a + b$ e rigidez flexional $EI$ constante.



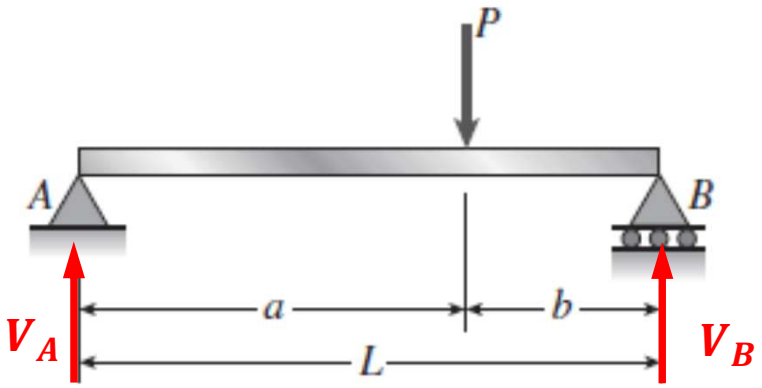
Solução:

Por conta da introdução da carga concentrada *P*, os momentos fletores são expressos por duas equações distintas, uma para cada parte da viga. Temos assim duas curvas de deflexão: uma para o segmento ACD e outra para o segmento DB (considerando que $a > b$).




*Segmento ACD: 1* *Segmento DB: 2*

D.C.L. e reações de apoio:




$$V_A L = Pb \quad \Leftrightarrow \quad V_A = \frac{Pb}{L}$$

$$V_B L = Pa \quad \Leftrightarrow \quad V_B = \frac{Pa}{L}$$

$$M_1(x) = V_A x = \frac{Pbx}{L} \qquad (0 \le x \le a)$$

$$M_2(x) = V_A x - P(x-a) = \frac{Pbx}{L} - P(x-a) \qquad (a \le x \le L)$$

Eqs. Diferenciais de 2ª ordem para obtenção das curvas de deflexão:

Para o segmento 1:

$$EIv_1''(x) = M_1(x) = \frac{Pbx}{L}$$

$$EIv_1'(x) = \frac{Pbx^2}{2L} + C_1$$

$$EIv_1(x) = \frac{Pbx^3}{6L} + C_1x + C_2$$

Para o segmento 2:

$$EIv_2'' = M_2(x) = \frac{Pbx}{L} - P(x-a)$$

$$EIv_2'(x) = \frac{Pbx^2}{2L} - \frac{P(x-a)^2}{2} + A_1$$

$$EIv_2(x) = \frac{Pbx^3}{6L} - \frac{P(x-a)^3}{6} + A_1x + A_2$$

Condições de contorno:

$$v_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$v_2(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{PbL^2}{6} - \frac{Pb^3}{6} + A_1 L + A_2 = 0$$

Condições de compatibilidade:

$$\left.\begin{array}{l} v_1(a) = v_2(a) \quad \Rightarrow \quad C_1 a + C_2 = A_1 a + A_2 \\ v_1'(a) = v_2'(a) \quad \Rightarrow \quad C_1 = A_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad C_2 = A_2 = 0$$

Logo: $A_1 = C_1 = -\frac{Pb}{6L}(L^2 - b^2)$

Resultam:

$$EIv_1(x) = \frac{Pb}{6L}(x^3 - x(L^2 - b^2))$$

$$EIv_2(x) = \frac{Pb}{6L}\left(x^3 - x(L^2 - b^2) - \frac{L(x-a)^3}{b}\right)$$

Ângulos de rotação em A e em B:

$$EIv_1'(x) = \frac{Pb}{6L}(3x^2 - L^2 + b^2)$$

$$EIv_2'(x) = \frac{Pb}{6L}\left(3x^2 - L^2 + b^2 - \frac{3L(x-a)^2}{b}\right)$$

Resultam:

$$\theta_A = -v_1'(0) = \frac{Pb}{6EIL}(L^2 - b^2)$$

$$\theta_B = v_2'(L) = \frac{Pb}{6EIL}(2L^2 + b^2 - 3Lb)$$

Deflexão $\delta_C$ no ponto médio C da viga:

$$\delta_C = -v_1(L/2) = \frac{Pb}{48EI}(3L^2 - 4b^2)$$

Deflexão máxima $\delta_{máx}$:

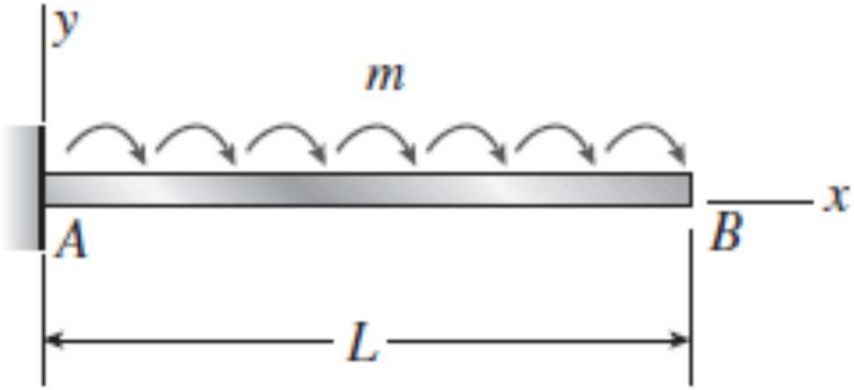
Como estamos considerando que $a > b$, a deflexão máxima irá ocorrer no segmento 1 da viga. Assim, analisando os pontos críticos da função $v_1(x)$:

$$v_1'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_{cr} = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$$

$$\delta_{máx} = -v_1(x_{cr}) = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIL}$$

**Problem 9.3-11** A cantilever beam $AB$ is acted upon by a uniformly distributed moment (bending moment, not torque) of intensity $m$ per unit distance along the axis of the beam (see figure).

Derive the equation of the deflection curve and then obtain formulas for the deflection $\delta_B$ and angle of rotation $\theta_B$ at the free end. (*Note*: Use the second-order differential equation of the deflection curve.)



Solução:

$$EIv'' = M = -m(L - x)$$

$$EIv' = -m\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1$$

B.C. $v'(0) = 0 \qquad \therefore C_1 = 0$

$$EIv = -m\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_2$$

B.C. $v(0) = 0 \qquad \therefore C_2 = 0$

$$v = -\frac{mx^2}{6\,EI}(3L - x)$$

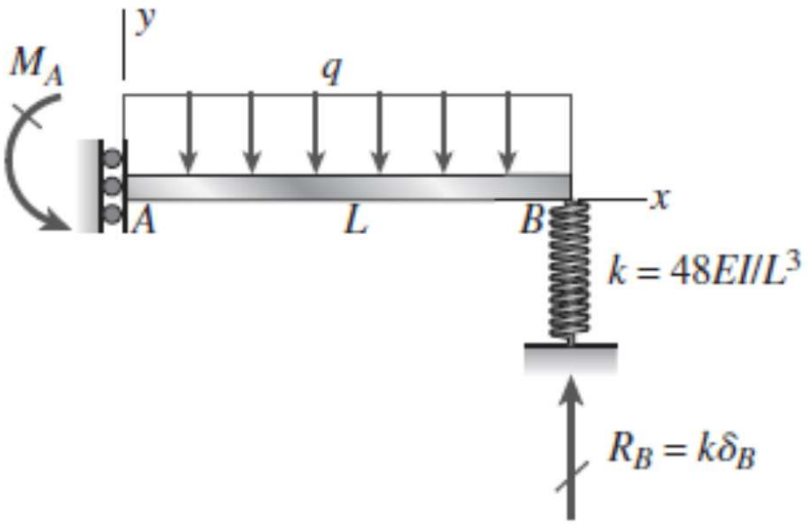
$$v' = -\frac{mx}{2EI}(2L - x)$$

$$\delta_B = -v(L) = \frac{mL^3}{3\,EI}$$

$$\theta_B = -v'(L) = \frac{mL^2}{2EI}$$

**Problem 9.3-12** The beam shown in the figure has a guided support at $A$ and a spring support at $B$. The guided support permits vertical movement but no rotation.

Derive the equation of the deflection curve and determine the deflection $\delta_B$ at end $B$ due to the uniform load of intensity $q$. (*Note*: Use the second-order differential equation of the deflection curve.)



Solução:

$$EIv''(x) = M(x) = \frac{qL^2}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

$$EIv'(x) = \frac{qL^2x}{2} - \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$EIv(x) = \frac{qL^2x^2}{4} - \frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2$$

Cond. Contorno:

$$v'(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = 0$$

$$v(L) = \frac{1}{EI}\left(\frac{5qL^4}{24} + C_2\right) = -\frac{qL}{k}$$

$$\frac{5qL^4}{24EI} + \frac{C_2}{EI} = -\frac{qL^4}{48EI} \quad \Longleftrightarrow \quad C_2 = -\frac{11qL^4}{48}$$

Resulta:

$$v(x) = \frac{q}{48EI}(12L^2x^2 - 2x^4 - 11L^4)$$

$$v'(x) = \frac{qx}{6EI}(3L^2 - x^2)$$

Pontos críticos de $v(x)$:

$$v'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x(3L^2 - x^2) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = L\sqrt{3} \quad \textit{(fora do domínio)}$$

Logo:

$$\delta = |v_{máx}| = |v(0)| = \frac{11qL^4}{48EI}$$

Referências:

[1] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.9 (seções 9.1 a 9.5).