



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #23

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

05/07/2022



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

Capítulo 9: Deflexões de Vigas

1. Introdução
2. Equações necessárias para obter a curva de deflexão
3. Condições de contorno
4. Princípio da superposição
5. Exemplos de aplicação



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1. Introdução

Quando uma viga é carregada transversalmente, os pontos de seu eixo central assumem novas posições formando uma curva de deflexão (ou linha elástica). Nesta aula determinaremos equações que nos permitirão determinar a linha elástica de vigas nas seguintes condições:

- O eixo central da viga na configuração de referência é reto;
- O material da viga possui comportamento elástico-linear;
- A viga é carregada em um único plano (xy), sendo esse um plano de simetria das seções transversais;
- As forças normais nas seções transversais são nulas ou de magnitude desprezível, de modo que os momentos fletores causados por elas possam ser desprezados na análise;
- As condições de linearidade geométrica são preenchidas (pequenos deslocamentos, pequenas rotações e pequenas deformações);
- Casos onde forças de contato podem alterar a magnitude ou a direção das mesmas estão fora do escopo.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observações:

- A determinação dos deslocamentos máximos é uma etapa fundamental na análise de vigas, onde limites máximos são previstos em normas de projeto;
- As deflexões são também muito importantes nas análises dinâmicas de estruturas (pontes, aeronaves, veículos, edifícios, etc.);
- A determinação da linha elástica também leva à determinação dos esforços solicitantes em vigas hiperestáticas;
- No projeto de máquinas, em particular, as especificações podem limitar as deflexões máximas a fim de evitar vibrações indesejáveis que podem até mesmo prejudicar o funcionamento do equipamento;
- No caso de equipamentos da área médica (como os utilizados em exames de densitometria óssea e ressonância magnética), vibrações excessivas devem ser evitadas de modo a não comprometer o diagnóstico.



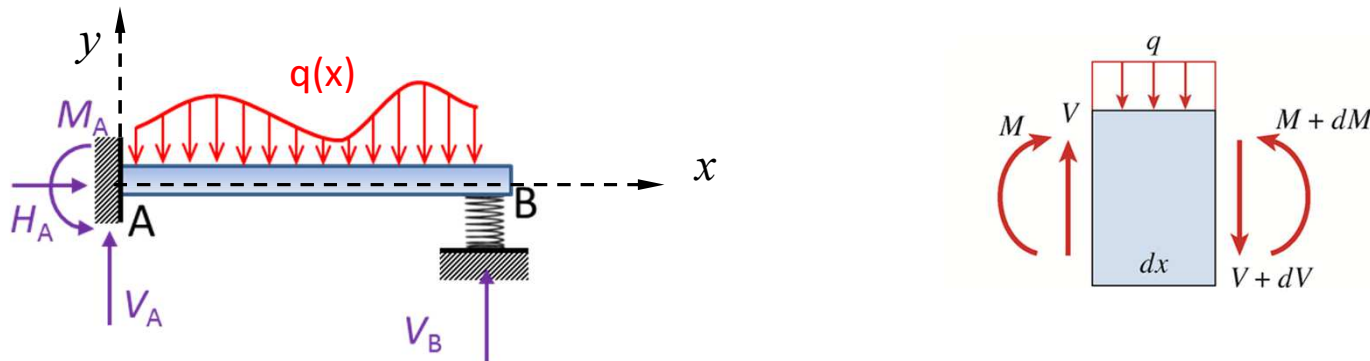
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2. Equações necessárias para obter a curva de deflexão

As equações necessárias para a solução do problema se dividem em:

- Equações diferenciais de equilíbrio;
- Equações constitutivas;
- Relações entre deslocamentos e deformações.

2.1. Equações diferenciais de equilíbrio (ver Aula #18):





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Do equilíbrio de forças na direção vertical, temos: $\frac{dV(x)}{dx} = -q(x)$ Eq.(1)

Do equilíbrio de momentos, temos: $\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$ Eq.(2)

Derivando Eq.(2) em relação a x e utilizando Eq.(1), também encontramos:

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \frac{dV(x)}{dx} = -q(x) \quad \text{Eq.(3)}$$

2.2. Equações constitutivas (ver Aula #19):

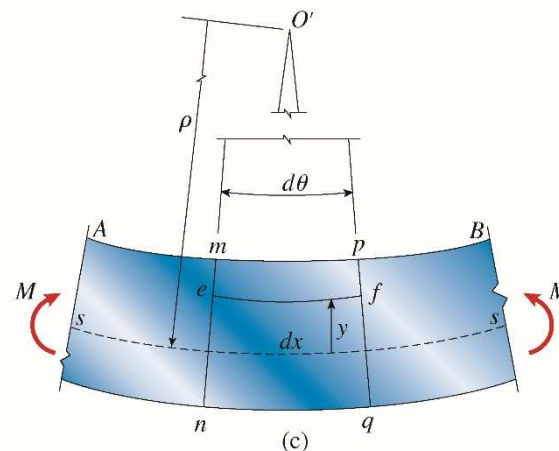
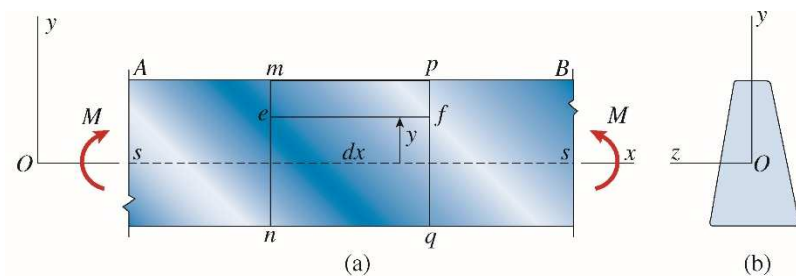
Considerando que o material seja homogêneo, isótropo, com comportamento elástico-linear e que o estado de tensões seja basicamente uniaxial, teremos:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad \text{Eq.(4)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2.3. Relações entre deformações e deslocamentos (ver Aula #19):



$$\varepsilon_x = -\kappa y \quad \text{Eq.(5)}$$

Combinando Eq.(4) e Eq.(5):

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -E \kappa y \quad \text{Eq.(6)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

E, como vimos na Aula #19:

$$M = - \iint_A \sigma_x y dA = - \iint_A (-E\kappa y) y dA = E\kappa \iint_A y^2 dA = 0 \Leftrightarrow M = EI_z \kappa$$

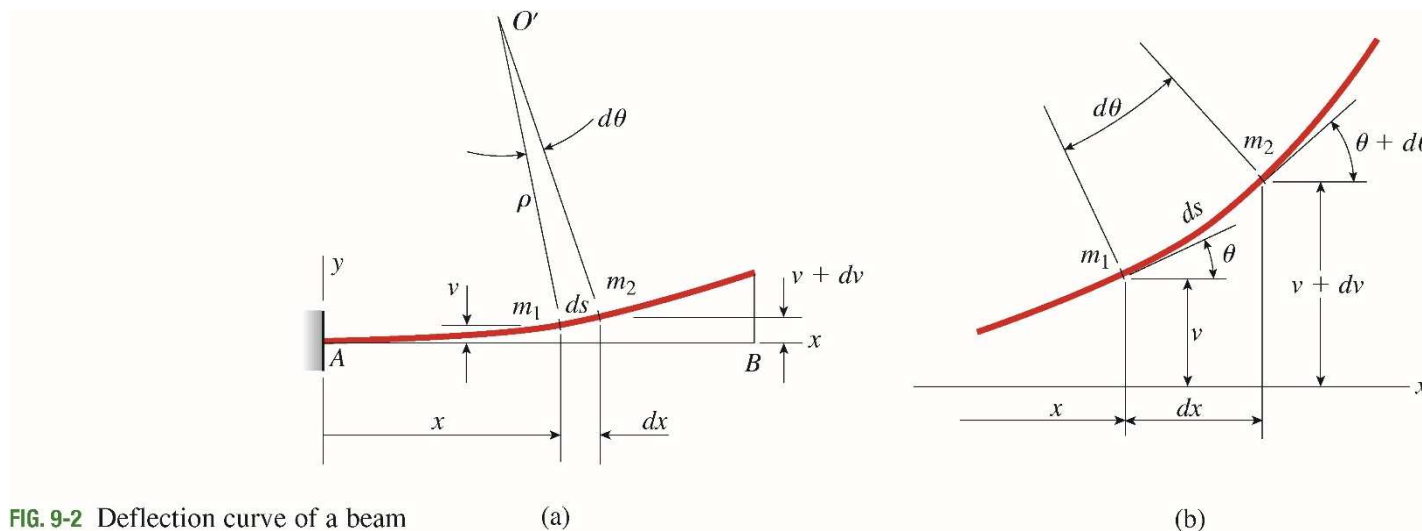
Generalizando a relação acima para casos em que o momento de inércia e a curvatura do eixo central possam variar ao longo do comprimento da viga, encontramos (para carregamentos quase-estáticos):

$$M(x) = EI_z(x)\kappa(x) \quad \text{Eq.(7)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Outras relações geométricas importantes
 (ver Aula #19):



$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{v''(x)}{[1 + (v'(x))^2]^{3/2}} \\ \tan(\theta) = \frac{dv}{dx} = v'(x) \end{array} \right.$$

(L.G.)

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa = \frac{1}{\rho} \cong v''(x) \quad \text{Eq.(8)} \\ \theta \cong \frac{dv}{dx} = v'(x) \quad \text{Eq.(9)} \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Assim, de Eq.(3), Eq.(7) e Eq.(8) resulta que, nas condições apresentadas no slide 3, temos:

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI_z(x)v''(x)) = \frac{dV(x)}{dx} = -q(x) \quad \text{Eq.(10)}$$

Nos casos em que $EI_z(x) = EI_z = cte$, a equação Eq.(10) fica simplificada na forma:

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = -\frac{q(x)}{EI_z} \quad \text{Eq.(11)}$$

Desta forma, uma vez conhecida a distribuição do carregamento ao longo da viga, bem como as condições de contorno, a determinação da linha elástica pode ser feita pelas integrações sucessivas da Eq.(11) ou da combinação entre a Eq.(7) e a Eq.(8) que, no caso de termos $EI_z(x) = EI_z = cte$, fornece:

$$M(x) = EI_z v''(x) \quad \text{Eq.(12)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observações:

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = -\frac{q(x)}{EI_z} \quad \text{Eq.(11)} \quad \longrightarrow \quad \text{E.D.O., 4ª ordem, linear, não-homogênea, com coeficientes constantes.}$$

$$M(x) = EI_z v''(x) \quad \text{Eq.(12)} \quad \longrightarrow \quad \text{E.D.O., 2ª ordem, linear, não-homogênea, com coeficientes constantes.}$$

O uso da Eq.(11) ou da Eq.(12) para a solução do problema deve levar, naturalmente, ao mesmo resultado. Apesar de a Eq.(11) requerer mais integrações, e aparecerem quatro constantes de integração, ela é indicada para casos em que o carregamento distribuído é mais complexo (o que dificulta a determinação de $M(x)$ por imposição do equilíbrio).

Já a Eq.(12), mais simples por requerer apenas duas integrações (com duas constantes de integração apenas), é indicada para casos em que o carregamento distribuído é simples (ex: $q(x) = 0$, ou $q(x) = q_0 = cte$).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3. Condições de contorno

Ao integrarmos Eq.(11) (ou Eq.(12)) surgirão no processo de integração quatro (ou duas) constantes de integração levando a um sistema linear com quatro (ou duas) incógnitas a serem determinadas.

As condições de contorno da viga é que determinam as equações necessárias para a obtenção deste sistema linear.

As condições de contorno são classificadas de acordo com a ordem da derivada da função $v(x)$ (linha elástica) podendo ser:

- **C.C. essenciais**: são as condições que envolvem a própria função $v(x)$ (ou seja, a derivada de ordem zero) ou sua derivada primeira $v'(x)$.
- **C.C. naturais**: são as condições que envolvem a derivada segunda da função $v(x)$ (ou seja, $v''(x)$), que está relacionada diretamente com a curvatura e, consequentemente, com o momento fletor na seção) ou sua derivada terceira (ou seja, $v'''(x)$), que está relacionada diretamente com a força cortante na seção):

$$M(x) = EI_z v''(x) \qquad V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = EI_z v'''(x)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observações:

Como o próprio nome diz, as **condições de contorno** são aplicadas no(s) **contorno(s)** da estrutura o que, no caso de vigas, significa observar o que ocorre na(s) sua(s) **extremidade(s)** (contorno(s)).

No caso em que a integração é feita utilizando-se a Eq.(12) (a E.D.O. de 2ª ordem), apenas as condições de contorno essenciais são utilizadas.

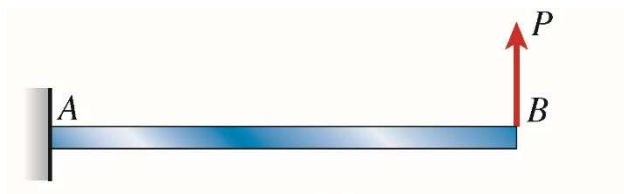
No caso em que a integração é feita utilizando-se a Eq.(11) (a E.D.O. de 4ª ordem) tanto as condições de contorno essenciais quanto as naturais podem ser utilizadas, observando-se as condições de contorno nas duas extremidades da viga (duas condições em cada extremidade).

Não se deve confundir as condições de contorno com as condições iniciais (a serem estudadas na disciplina PME-3400 - Vibrações). Enquanto as condições de contorno dizem respeito ao que ocorre nos contornos e, geralmente, não se alteram ao longo do intervalo de tempo em que a análise dinâmica é feita, as condições iniciais dizem respeito às condições ao longo de toda a viga no instante inicial (deslocamentos, $v(x, t = 0)$, e velocidades iniciais, $\dot{v}(x, t = 0)$, dos pontos do eixo central da viga).

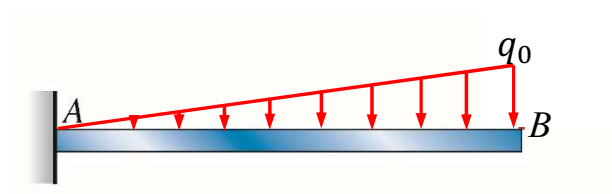


4. Princípio da Superposição

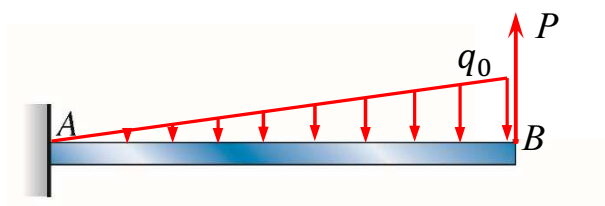
Para estruturas com comportamento linear, é válido o Princípio da Superposição:



$$M_1(x) = EI_z v_1''(x) \quad \Rightarrow \quad v_1(x)$$



$$M_2(x) = EI_z v_2''(x) \quad \Rightarrow \quad v_2(x)$$



$$M_3(x) = EI_z v_3''(x)$$

$$M_3(x) = M_1(x) + M_2(x) = EI_z (v_1''(x) + v_2''(x))$$

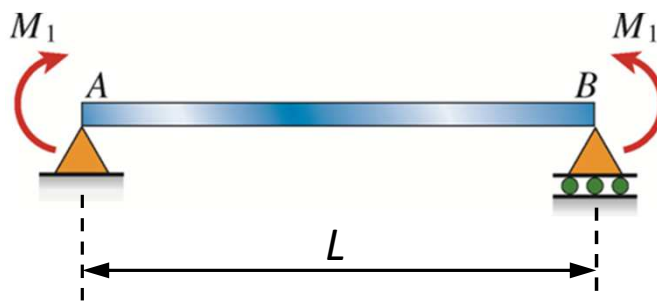
$$v_3''(x) = v_1''(x) + v_2''(x) \quad \Rightarrow \quad v_3(x) = v_1(x) + v_2(x)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplos de Aplicação

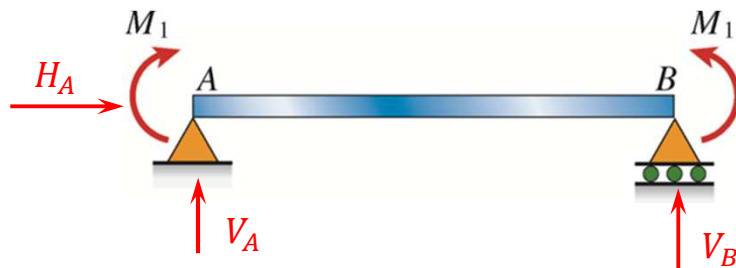
Ex.1):



Dados: M_1, L, EI

Obter: $v(x), |v|_{\max}, |\theta|_{\max}$

Solução: **Passo 1:** fazer o D.C.L. e determinar as reações de apoio (obrigatório se for utilizada a E.D.O. de 2ª ordem)



$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow V_B L + M_1 = M_1 \Leftrightarrow V_B = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V_A + V_B = 0, \quad \therefore V_A = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Passo 2: determinar a expressão de $M(x)$ e seu domínio de validade.

No caso: $M(x) = M_1 = cte, \quad 0 \leq x \leq L$

Passo 3: escrever a E.D.O. e proceder às integrações. Neste caso, optamos pela E.D.O. de 2ª ordem...

$$M(x) = EIv''(x) = M_1$$

Note que, neste caso, a curvatura (e portanto o raio de curvatura) do eixo central é constante e dado por:

$$v''(x) = \frac{M_1}{EI}$$

1ª integração: $v'(x) = \frac{M_1}{EI}x + C_1$ 2ª integração: $v(x) = \frac{M_1}{EI}\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Passo 4: aplicar as condições de contorno para determinar as constantes de integração. Neste caso, como optamos pela E.D.O. de 2ª ordem, apenas as condições de contorno essenciais são necessárias. Como temos uma viga bi-apoiada, as C.C. serão:



$$v(x) = \frac{M_1}{EI} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$v(0) = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0$$

$$v(L) = 0 \Leftrightarrow \frac{M_1}{EI} \frac{L^2}{2} + C_1 L = 0$$

Logo: $C_1 = -\frac{M_1 L}{2EI}$

Resultando: $v(x) = \frac{M_1}{2EI} (x^2 - Lx)$ (linha elástica)

Rotações: $v'(x) = \frac{M_1}{2EI} (2x - L)$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Passo 5: Análise dos máximos: para obter o deslocamento máximo em valor absoluto, verificamos inicialmente se há pontos críticos da função $v(x)$, analisando os zeros da função $v'(x)$:

$$v'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{M_1}{2EI}(2x - L) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{L}{2}$$

Assim, $x = L/2$ é um ponto crítico da função, e como $v''(x) = M_1/EI > 0$, concluímos que $v(L/2)$ é um ponto de mínimo local, o que é coerente com a convenção de sinais utilizada, pois $v(x) > 0$ indica que o deslocamento ocorre no mesmo sentido do eixo y (ou seja, para cima), enquanto $v(x) < 0$ indica que deslocamento ocorre no sentido oposto ao eixo y (ou seja, para baixo). Assim:

$$v(L/2) = \frac{M_1}{2EI} \left(\frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{2} \right) \Leftrightarrow v(L/2) = -\frac{M_1 L^2}{8EI}$$

$$\therefore |v|_{\text{máx}} = \frac{M_1 L^2}{8EI} \quad (\text{em } x = L/2, \text{ para baixo})$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para obter a rotação máxima em valor absoluto, procedemos de forma análoga, verificando se há pontos críticos da função $v'(x)$, no intervalo considerado, através da análise dos zeros de sua derivada (ou seja, da função $v''(x)$). Porém, como:

$$v''(x) = \frac{M_1}{EI} > 0,$$

concluimos que não existem pontos críticos da função $v'(x)$ no domínio, o que nos faz avaliar os valores da função nas extremidades. Assim:

$$v'(0) = -\frac{M_1 L}{2EI} \quad (\text{rotação ocorre no sentido horário, dado que o sinal é negativo})$$

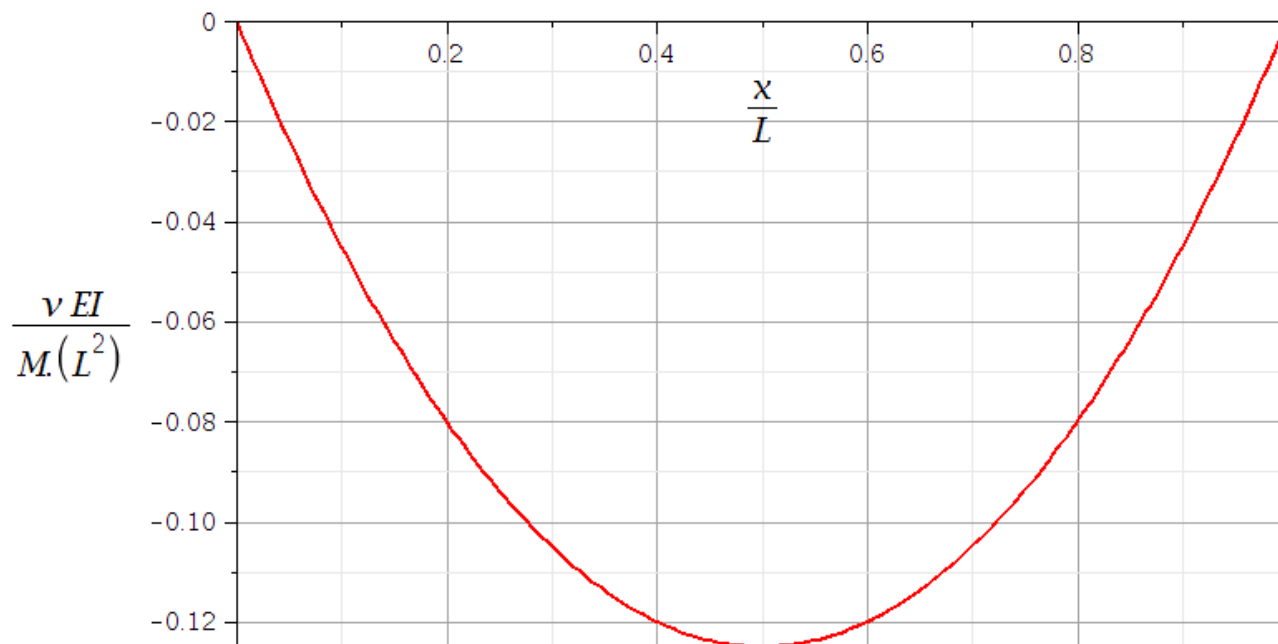
$$v'(L) = +\frac{M_1 L}{2EI} \quad (\text{rotação ocorre no sentido anti-horário dado que o sinal é positivo})$$

$$\therefore |\theta|_{\max} = \frac{M_1 L}{2EI} \quad (\text{nas extremidades A e B da viga})$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Linha elástica:



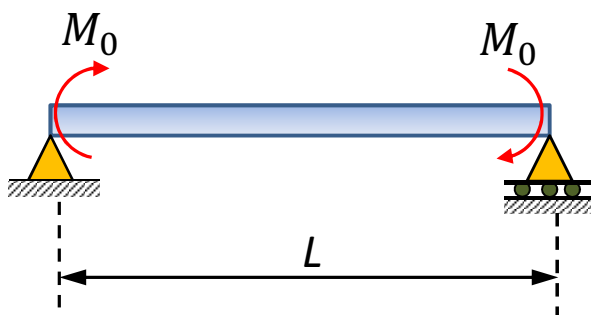
Note que em uma estrutura simétrica, sob a ação de carregamentos simétricos, a deformada deve ser simétrica em relação ao eixo de simetria!



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplos de Aplicação

Ex.2):

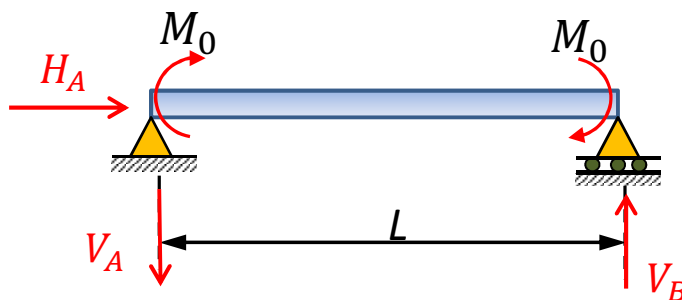


Dados: M_0, L, EI

Obter: $v(x), |v_{m\acute{a}x}|, |\theta_{m\acute{a}x}|$

Solução:

Passo 1:



$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow V_B L = 2M_0 \Leftrightarrow V_B = \frac{2M_0}{L}$$

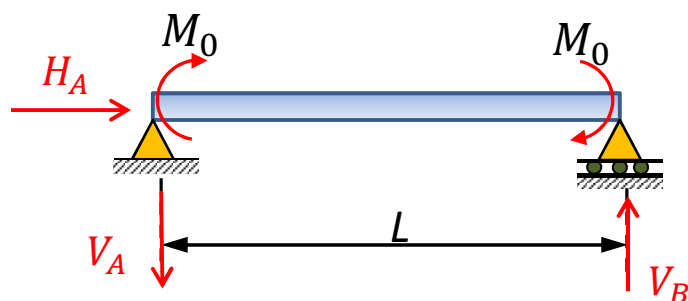
$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V_A = V_B, \quad \therefore V_A = \frac{2M_0}{L}$$

(Note que, neste caso, temos flexão não-uniforme)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Passo 2: determinar a expressão de $M(x)$ e seu domínio de validade:



$$M(x) = M_0 - V_A x = M_0 \left(1 - \frac{2x}{L} \right), \quad 0 \leq x \leq L$$

Passo 3: escrever a E.D.O. e proceder às integrações. Neste caso, optamos pela E.D.O. de 2ª ordem...

$$M(x) = EI v''(x) = M_0 \left(1 - \frac{2x}{L} \right)$$

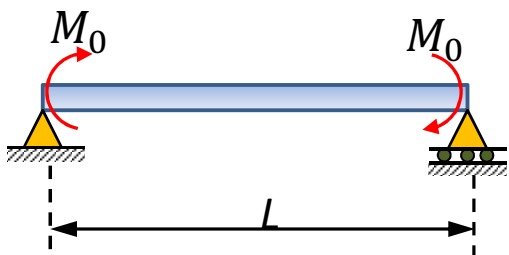
1ª integração: $EI v'(x) = M_0 \left(x - \frac{x^2}{L} \right) + C_1$

2ª integração: $EI v(x) = M_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3L} \right) + C_1 x + C_2$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Passo 4: aplicar as condições de contorno para determinar as constantes de integração. Neste caso, como optamos pela E.D.O. de 2ª ordem, apenas as condições de contorno essenciais são necessárias. Como temos uma viga bi-apoiada, as C.C. serão:



$$v(0) = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0$$

$$v(L) = 0 \Leftrightarrow \frac{M_0}{EI} \frac{L^2}{6} + C_1 L = 0$$

$$EIv(x) = M_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3L} \right) + C_1 x + C_2$$

Logo: $C_1 = -\frac{M_0 L}{6EI}$

Resultando: $v(x) = \frac{M_0}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3L} - \frac{Lx}{6} \right)$

Rotações: $v'(x) = \frac{M_0}{EI} \left(x - \frac{x^2}{L} - \frac{L}{6} \right)$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Passo 5: Análise dos máximos: para obter o deslocamento máximo em valor absoluto, verificamos inicialmente se há pontos críticos da função $v(x)$, analisando os zeros da função $v'(x)$:

$$v'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{M_0 L}{EI} \left(\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{1}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{L} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Assim, para os valores críticos dados acima, encontramos:

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \cong 0,211325 \quad \longrightarrow \quad v = -\frac{\sqrt{3}}{108} \frac{M_0 L^2}{EI} \cong -0,01604 \frac{M_0 L^2}{EI}$$

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cong 0,788675 \quad \longrightarrow \quad v = +\frac{\sqrt{3}}{108} \frac{M_0 L^2}{EI} \cong 0,01604 \frac{M_0 L^2}{EI}$$

$$\therefore |v|_{\text{máx}} = \frac{\sqrt{3}}{108} \frac{M_0 L^2}{EI}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para obter a rotação máxima em valor absoluto, procedemos de forma análoga, verificando se há pontos críticos da função $v'(x)$, no intervalo considerado, através da análise dos zeros de sua derivada (ou seja, da função $v''(x)$). Assim:

$$v''(x) = \frac{M_0}{EI} \left(1 - \frac{2x}{L} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{L}{2}$$

E sendo:
$$v'(x) = \frac{M_0}{EI} \left(x - \frac{x^2}{L} - \frac{L}{6} \right)$$

Teremos:

$$v'(0) = -\frac{M_0 L}{6EI} \quad (\text{rotação no sentido horário})$$

$$v'(L/2) = \frac{M_0 L}{12EI} \quad (\text{rotação no sentido anti-horário})$$

$$v'(L) = -\frac{M_0 L}{6EI} \quad (\text{rotação no sentido horário})$$

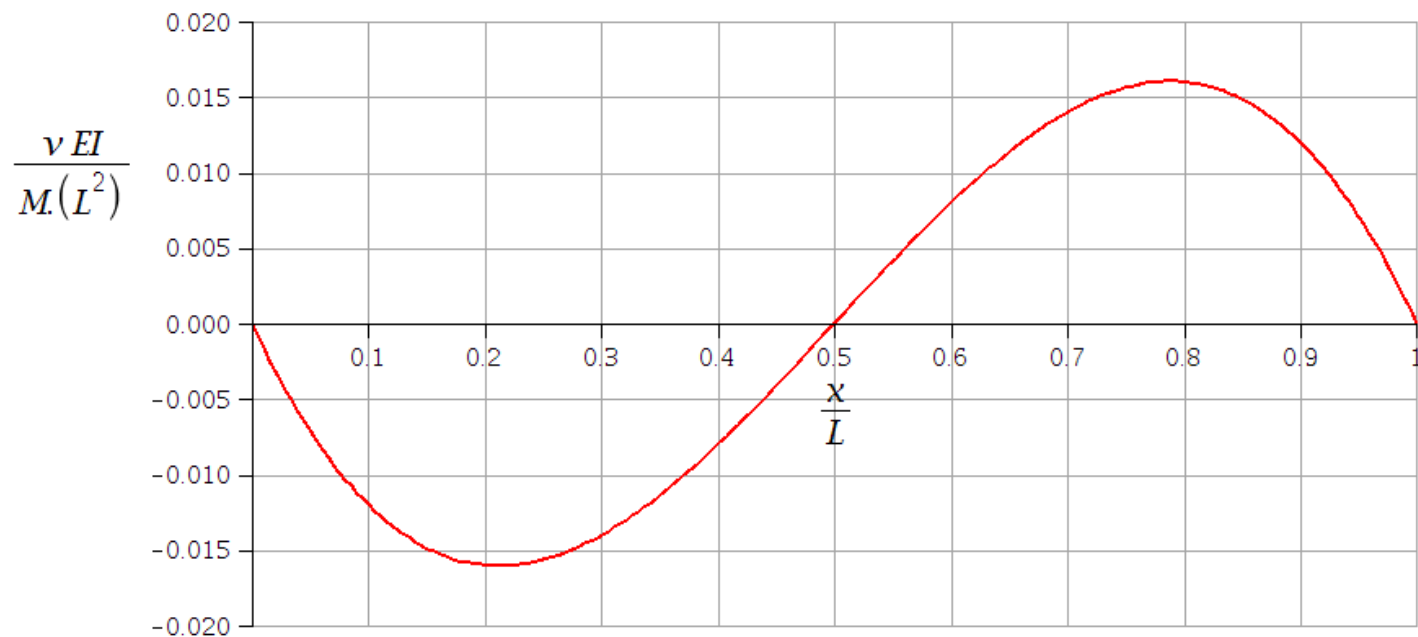
$$\therefore |\theta|_{\text{máx}} = \frac{M_0 L}{6EI}$$

(nas extremidades
A e B da viga)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Linha elástica:



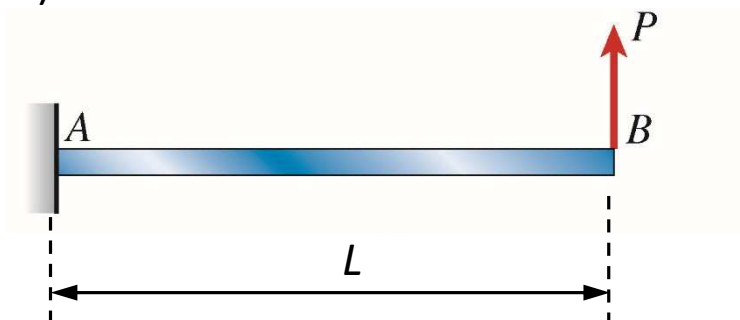
Note que em uma estrutura simétrica, sob a ação de carregamentos anti-simétricos, a deformada deve ser anti-simétrica em relação ao eixo de simetria!



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplos de Aplicação

Ex.3):

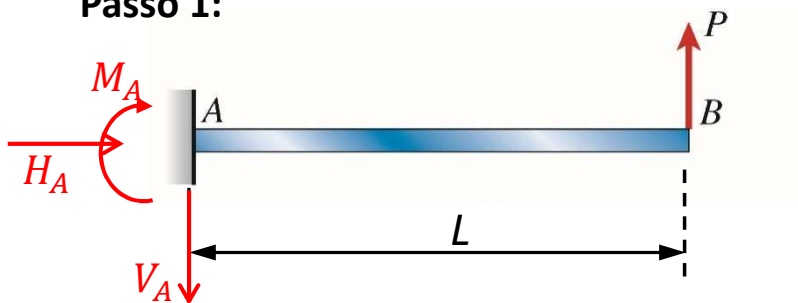


Dados: P, L, EI

Obter: $v(x), |v_{máx}|, |\theta_{máx}|$

Solução:

Passo 1:



$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow H_A = 0$$

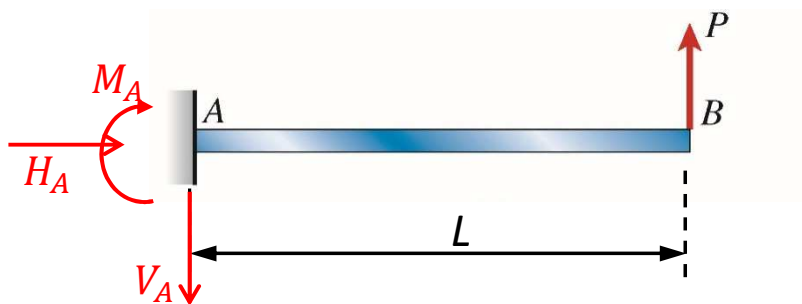
$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V_A = P$$

$$\sum M_{\text{pólo } A} = 0 \Leftrightarrow M_A = PL$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Passo 2: determinar a expressão de $M(x)$ e seu domínio de validade:



$$M(x) = M_A - V_A x = P(L - x), \quad 0 \leq x \leq L$$

Passo 3: escrever a E.D.O. e proceder às integrações. Neste caso, optamos pela E.D.O. de 2ª ordem...

$$M(x) = EI v''(x) = P(L - x)$$

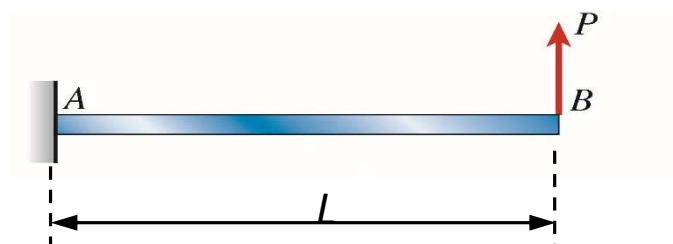
1ª integração:
$$EI v'(x) = P \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

2ª integração:
$$EI v(x) = P \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 x + C_2$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Passo 4: aplicar as condições de contorno para determinar as constantes de integração. Neste caso, como optamos pela E.D.O. de 2ª ordem, apenas as condições de contorno essenciais são necessárias. Como temos uma viga engastada-livre, as C.C. essenciais encontram-se apenas no lado engastado:



$$EIv(x) = P \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1x + C_2$$

$$EIv'(x) = P \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

$$v(0) = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0$$

$$v'(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$$

Resultando:
$$v(x) = \frac{P}{EI} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

Rotações:
$$v'(x) = \frac{P}{EI} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Passo 5: Análise dos máximos: para obter o deslocamento máximo em valor absoluto, verificamos inicialmente se há pontos críticos da função $v(x)$, analisando os zeros da função $v'(x)$:

$$v'(x) = 0 \Leftrightarrow x \left(L - \frac{x}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \cancel{x = 2L}$$

Como $v(0) = 0$, o máximo deslocamento só pode ocorrer na extremidade em que $x = L$:

$$v(L) = |v|_{\text{máx}} = \frac{PL^3}{3EI}$$

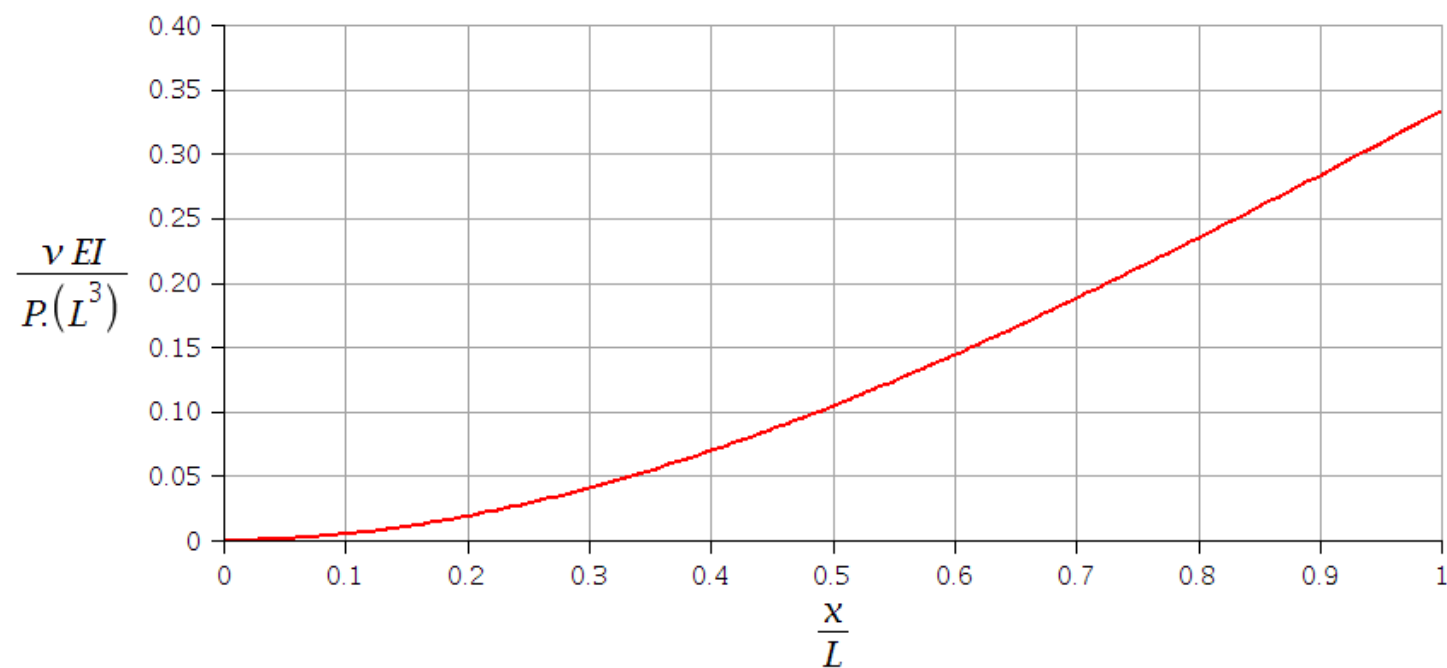
Para obter a rotação máxima em valor absoluto, procedemos de forma análoga, verificando se há pontos críticos da função $v'(x)$, no intervalo considerado, através da análise dos zeros de sua derivada (ou seja, da função $v''(x)$). Assim:

$$v''(x) = 0 \Leftrightarrow x = L \quad \therefore |\theta|_{\text{máx}} = v'(L) = \frac{PL^2}{2EI}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Linha elástica:

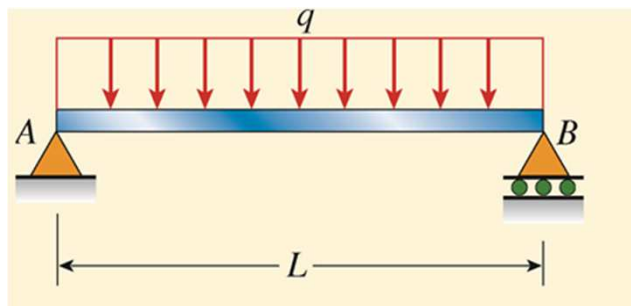




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplos de Aplicação

Ex.4):



Dados: q, L, EI

Obter: $v(x), |v_{máx}|, |\theta_{máx}|$

Embora a solução deste problema também possa ser feita facilmente pelo uso da E.D.O. de 2ª ordem (relação Momento $\times$ Curvatura), vamos resolvê-lo pela aplicação da E.D.O de 4ª ordem para mostrar as diferenças.

Este tipo de abordagem dispensa o uso do D.C.L. e das equações de equilíbrio para determinar as reações de apoio. Veremos que a aplicação das condições de contorno naturais recuperam naturalmente as equações de equilíbrio (ou seja, são equivalentes a elas).

Importante: esse problema não pode ser resolvido considerando uma “possível equivalência” com o caso de uma viga biapoiada sob a ação de uma carga concentrada $P = qL$ aplicada em $x = L/2$.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Neste caso, temos: $q(x) = q > 0$, levando diretamente a:

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = -q$$

1ª integração: $V(x) = EI v'''(x) = -qx + C_1$

2ª integração: $M(x) = EI v''(x) = -\frac{qx^2}{2} + C_1 x + C_2$

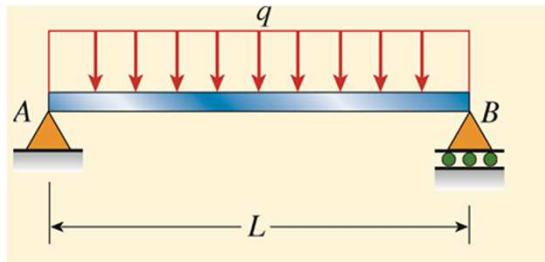
3ª integração: $EI v'(x) = -\frac{qx^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$

4ª integração: $EI v(x) = -\frac{qx^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Deve-se observar que as formas indicadas no slide anterior são aplicáveis a todas as vigas de rigidez flexional constante submetidas a carregamentos uniformemente distribuídos: as condições de contorno é que vão indicar os valores das quatro constantes de integração em cada caso (exemplos possíveis: viga engastada-livre, viga biapoada, viga biengastada, etc.). No caso em tela, como temos uma viga biapoada, as duas condições de contorno essenciais são:



$$v(0) = 0 \Leftrightarrow C_4 = 0$$

$$v(L) = 0 \Leftrightarrow C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} + C_3 L = \frac{qL^4}{24}$$

E as duas condições de contorno naturais são:

$$M(0) = EIv''(0) = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0$$

$$M(L) = EIv''(L) = 0 \Leftrightarrow C_1 L + C_2 = \frac{qL^2}{2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resolvendo o sistema linear, obtemos:

$$C_1 = \frac{qL}{2} \quad C_2 = C_4 = 0 \quad C_3 = -\frac{qL^3}{24}$$

$$v(x) = \frac{q}{EI} \left(-\frac{x^4}{24} + \frac{x^3 L}{12} - \frac{x L^3}{24} \right)$$

$$v'(x) = \frac{q}{EI} \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2 L}{4} - \frac{L^3}{24} \right)$$

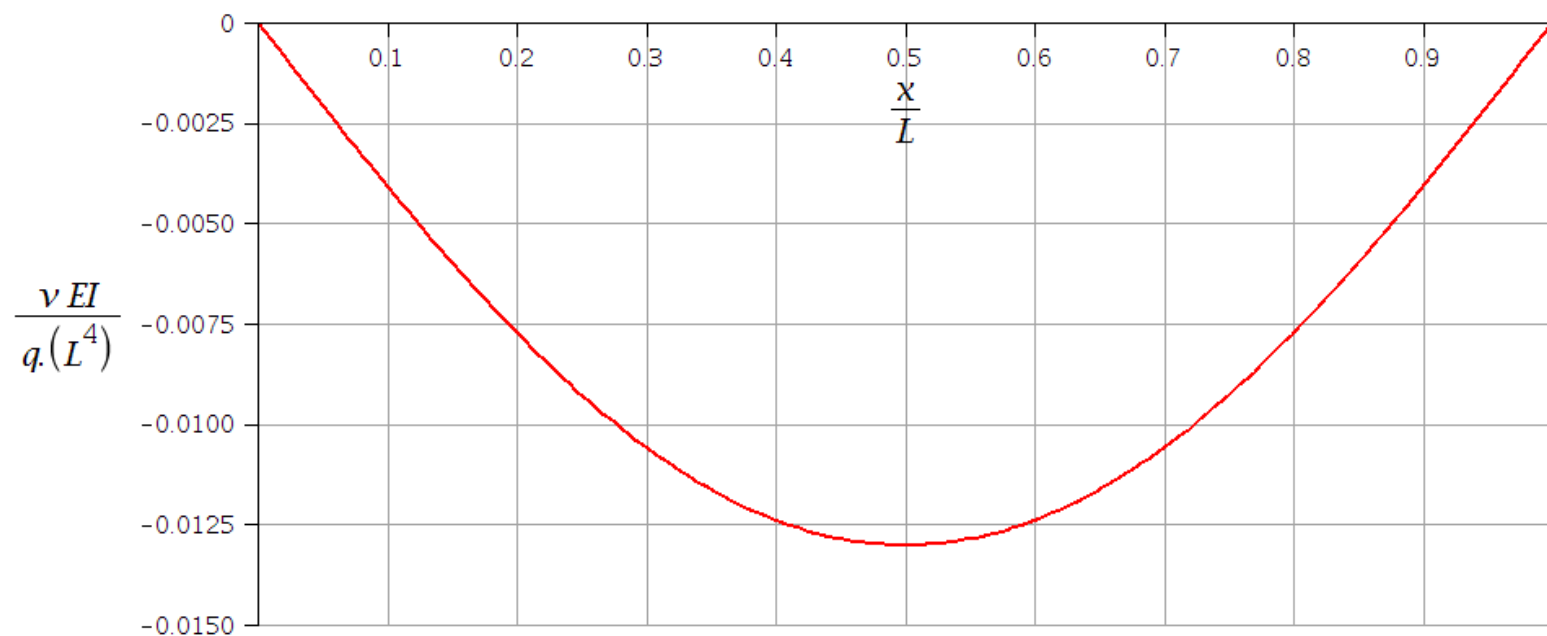
$$M(x) = EI v''(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qLx}{2}$$

$$V(x) = EI v'''(x) = -qx + \frac{qL}{2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Linha elástica:



$$|v|_{\text{máx}} = \left| v\left(\frac{L}{2}\right) \right| = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$$

$$|\theta|_{\text{máx}} = |v'(0)| = |v'(L)| = \frac{1}{24} \frac{qL^3}{EI}$$



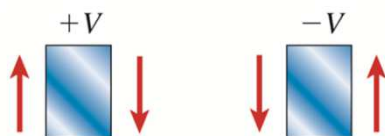
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observações:

Das relações obtidas nos slides #33 e #35, podemos verificar que:

$$V(x) = EIv'''(x) = -qx + C_1 \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} V(0) &= C_1 = \frac{qL}{2} \\ V(L) &= -qL + C_1 = -\frac{qL}{2} \end{aligned}$$

Logo, a constante C_1 corresponde à força cortante na extremidade A e, como $V(0) = qL/2 > 0$, isto mostra que, pela convenção de sinais, ela tende a girar o elemento no sentido horário:

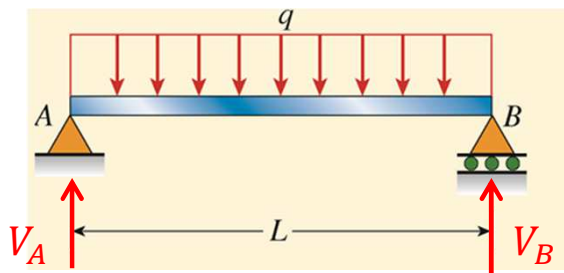


Da mesma forma, como a força cortante na extremidade B resultou $V(L) = -qL/2 < 0$, isto significa que, pela convenção de sinais, ela tende a girar o elemento no sentido anti-horário (veja a convenção de sinais acima).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Desta forma, o D.C.L. da viga fica dado por:



$$V_A = V_B = \frac{qL}{2}$$

Percebe-se, assim, que a 2ª C.C. natural apresentada no slide #34 pode ser rescrita na forma (já considerando o resultado anterior que indica que $C_2 = 0$):

$$V_A L = \frac{qL^2}{2}$$

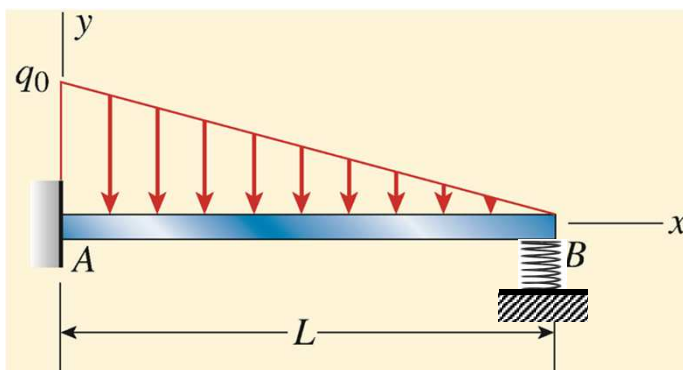
...que nada mais é que a equação de equilíbrio de momentos tomando B como pólo. Desta forma, como comentado anteriormente, a solução do problema pela integração da E.D.O. de 4ª ordem já garante o equilíbrio de forças e momentos da estrutura, não havendo a necessidade de impor tais condições. Na verdade, a imposição de C.C.'s e equações de equilíbrio simultaneamente pode levar, em alguns casos, a um sistema de equações possível e indeterminado (no caso de haver alguma dependência linear entre as equações propostas).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para pensar em casa...

Ex.5):



Dados: $q_0, L, EI, k = \beta EI/L^3$

Obter:

$v(x)$ para $\forall \beta \in R^+$

$v(x), |v_{m\acute{a}x}|, |\theta_{m\acute{a}x}|$ para $\beta \rightarrow 0$

$v(x), |v_{m\acute{a}x}|, |\theta_{m\acute{a}x}|$ para $\beta \rightarrow \infty$

$v(x), |v_{m\acute{a}x}|, |\theta_{m\acute{a}x}|$ para $\beta = 0,5$.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

[1] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.9 (seções 9.1 a 9.5).