Seções Cônicas

Marcone C. Pereira

Escola de Artes, Ciências e Humanidades
Universidade de São Paulo

Cônica

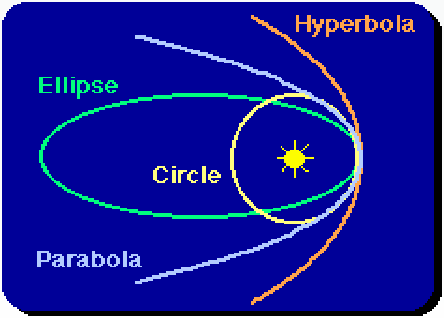
Uma *seção cônica* é uma curva do plano descrita por uma *equação quadrática* nas variáveis x e y da forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

em que a, b, c, d, e e f são números reais com a, b e c não simultaneamente nulos.

Seções Cônicas

Uma seção cônica também pode ser obtida da intersecção de um cone circular com um plano. As cônicas mais importantes são *elipses*, *hipérboles* e *parábolas*. As outras que incluem um único ponto e um par de retas, são chamadas *cônicas degeneradas*.



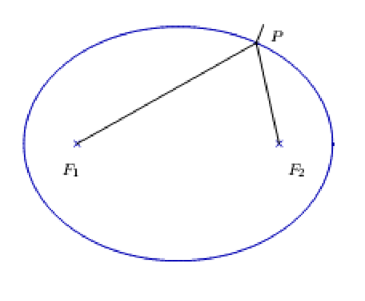
Elipse

Uma *elipse* é o conjunto dos pontos P do plano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 do plano é sempre constante. Mais precisamente, dados dois pontos do plano F_1 e F_2 com $\mathrm{dist}(F_1, F_2) = 2c$ e uma constante $a \in \mathbb{R}$, chamamos de elipse o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\mathrm{dist}(F_1, P) + \mathrm{dist}(F_2, P) = 2a,$$

em que $a > c$.

Elipse



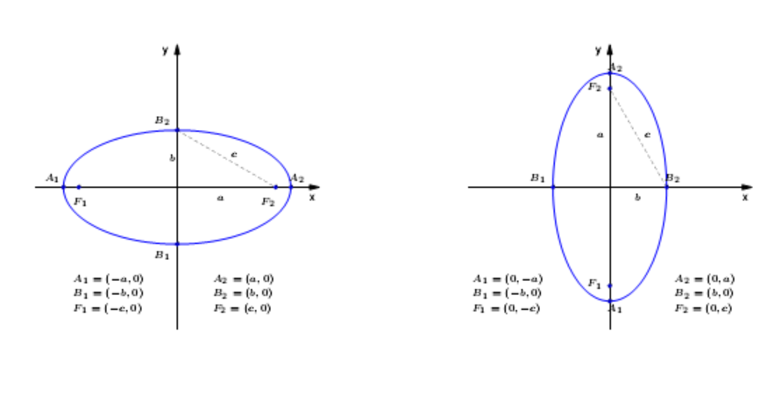
Podemos desenhar uma elipse se fixarmos as extremidades de um barbante de comprimento $2a$ nos focos e esticarmos o barbante com uma caneta. Movimentando-se a caneta com o barbante esticado, desenha-se a elipse.

Elipse

Teorema

1. A equação de uma elipse cujos focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ é:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
em que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.
2. A equação de uma elipse cujos focos são $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ é:
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$
em que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

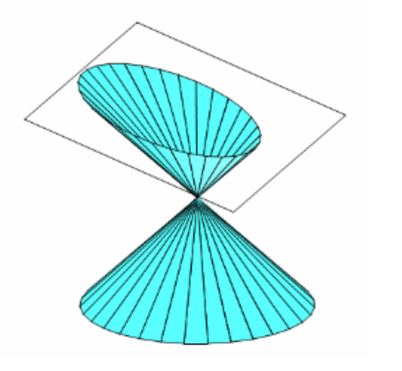
Elipse



Os segmentos A_1A_2 e B_1B_2 são chamados *eixos* da elipse. O número $e = \frac{c}{a}$ chama-se *excentricidade* da elipse. Note que um círculo é uma elipse de excentricidade nula.

Elipse

Elipse obtida seccionando-se um cone com um plano.



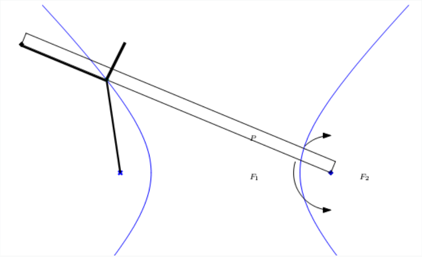
Hipérbole

Uma *hipérbole* é o conjunto dos pontos P do plano tais que o módulo da diferença entre as distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 do plano é sempre constante. Mais precisamente, dados dois pontos do plano F_1 e F_2 com $\mathrm{dist}(F_1, F_2) = 2c$ e uma constante $a \in \mathbb{R}$, chamamos de hipérbole o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$| \,\mathrm{dist}(F_1, P) - \mathrm{dist}(F_2, P)\, | = 2a,$$

em que $a < c$.

Hipérbole



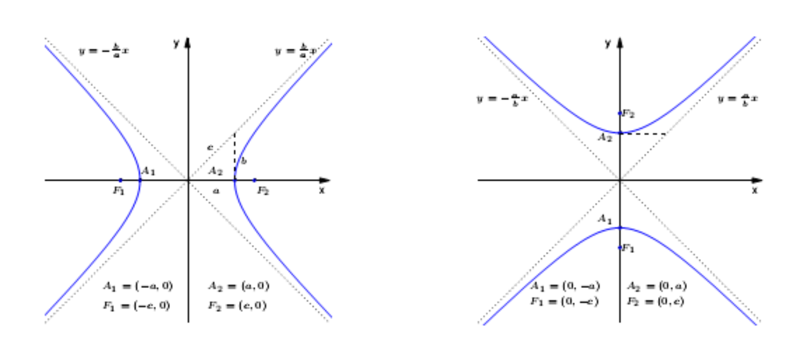
Para desenharmos um ramo de uma hipérbole, fixamos uma das extremidades de uma régua num dos focos, fixamos uma extremidade de um barbante, de comprimento igual ao comprimento da régua menos $2a$, na outra extremidade da régua e a outra extremidade do barbante no outro foco. Esticamos o barbante com uma caneta de forma que ela fique encostada na régua. Girando-se a régua em torno do foco no qual ela foi fixada, desenha-se um ramo da hipérbole.

Hipérbole

Teorema

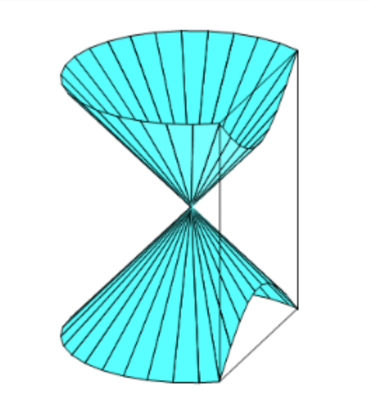
1. A equação de uma hipérbole cujos focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ é:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
em que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.
2. A equação de uma hipérbole cujos focos são $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ é:
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$
em que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Hipérbole



Os pontos A_1 e A_2 são chamados *vértices* da hipérbole. O número $e = \frac{c}{a}$ chama-se *excentricidade* da hipérbole.

Hipérbole obtida seccionando-se um cone com um plano.

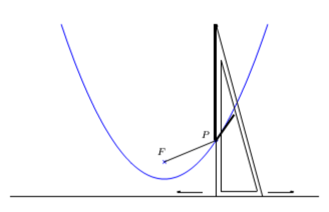


Parábola

Uma *parábola* é o conjunto dos pontos P do plano eqüidistantes de uma reta r, chamada *diretriz*, e um ponto F, chamado *foco*, não pertencente a r. Mais precisamente, a parábola é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\mathrm{dist}(\mathrm{P}, \mathrm{F}) = \mathrm{dist}(\mathrm{P}, \mathrm{r}).$$

Parábola

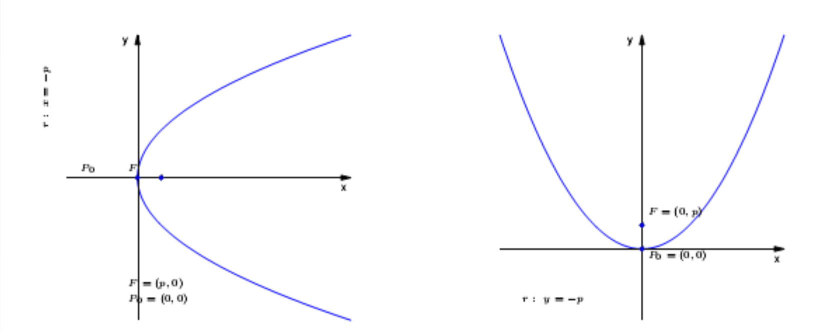


Colocamos um esquadro com um lado cateto enconstado na reta diretriz, fixamos uma extremidade de um barbante, de comprimento igual ao lado cateto do esquadro perpendicular à reta diretriz, no foco, e a outra extremidade na ponta do esquadro oposta ao lado que está encostado na reta. Esticamos o barbante com uma caneta de forma que ela fique encostada no lado do esquadro perpendicular à reta diretriz. Deslizando-se o esquadro na reta diretriz, desenha-se uma parte da parábola.

Teorema

1. A equação de uma parábola com foco $F = (p, 0)$ e reta diretriz $r : x = -p$ é
$$y^2 = 4px.$$
2. A equação de uma parábola com foco $F = (0, p)$ e reta diretriz $r : y = -p$ é
$$x^2 = 4py.$$

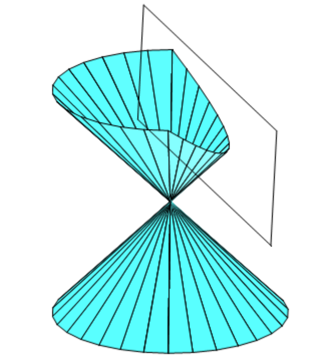
Parábola



O ponto P_0 é o ponto da parábola mais próximo da reta diretriz e é chamado de *vértice* da parábola.

Parábola

A parábola obtida seccionando-se um cone por um plano paralelo a uma reta *diretriz* do cone.



Teorema

Considere a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (S)$$

em que a, b, c, d, e e $f \in \mathbb{R}$ com a, b e c não simultaneamente nulos. Então existe um sistema de coordenadas ortogonal x', y' em que a equação (S) tem a forma

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

em que λ_1 e λ_2 são autovalores de

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

Mais ainda,

$$X = PX'$$

em que $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e P é uma matriz ortogonal.