



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #22

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

01/07/2022



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 5.8-1 The shear stresses τ in a rectangular beam are given by Eq. (5-39):

$$\tau = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

in which V is the shear force, I is the moment of inertia of the cross-sectional area, h is the height of the beam, and y_1 is the distance from the neutral axis to the point where the shear stress is being determined (Fig. 5-30).

By integrating over the cross-sectional area, show that the resultant of the shear stresses is equal to the shear force V .



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

Integrando as tensões de cisalhamento na seção transversal, encontramos:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau dA = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) b dy = \frac{6Vb}{bh^3} \left(\frac{h^2 y}{4} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-h/2}^{h/2}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau dA = \frac{6V}{h^3} \left(\frac{h^3}{4} - \frac{h^3}{12} \right) = \frac{6V}{h^3} \left(\frac{h^3}{6} \right) = V$$

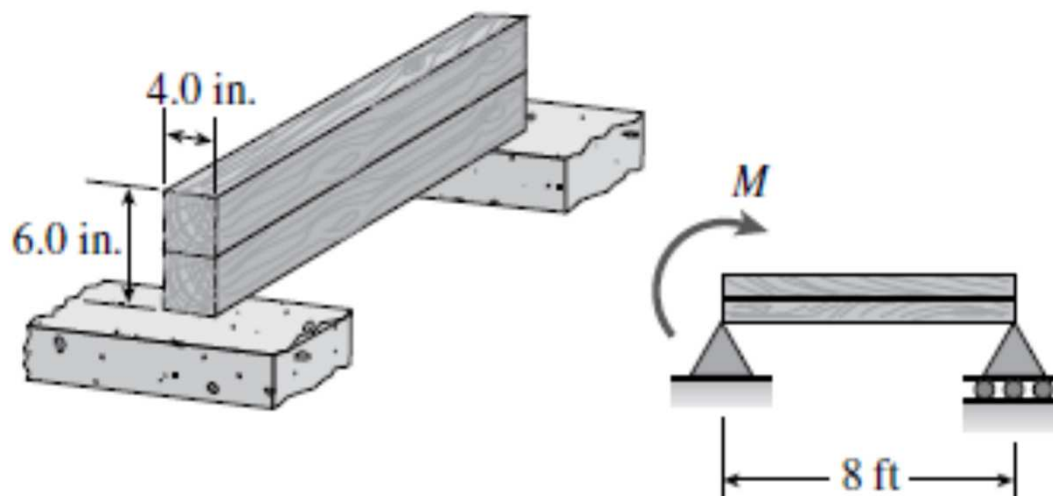
...o que demonstra que a distribuição de tensões cisalhantes é estaticamente equivalente a uma força transversal de magnitude V .



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 5.8-3 Two wood beams, each of rectangular cross section (3.0 in. $\times$ 4.0 in., actual dimensions) are glued together to form a solid beam of dimensions 6.0 in. $\times$ 4.0 in. (see figure). The beam is simply supported with a span of 8 ft.

What is the maximum moment $M_{\max}$ that may be applied at the left support if the allowable shear stress in the glued joint is 200 psi? (Include the effects of the beam's own weight, assuming that the wood weighs 35 lb/ft³.)

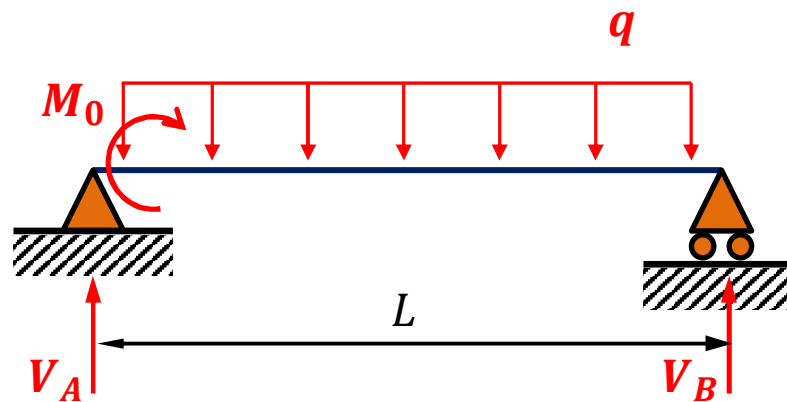




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

O modelo de cálculo é:



$$V_B L = \frac{qL^2}{2} + M_0 \quad \Leftrightarrow \quad V_B = \frac{qL}{2} + \frac{M_0}{L}$$

$$V_A L = \frac{qL^2}{2} - M_0 \quad \Leftrightarrow \quad V_A = \frac{qL}{2} - \frac{M_0}{L}$$

$$q = \gamma A = 35 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3} \frac{1 \text{ft}^3}{(12 \text{in})^3} 24 \text{in}^2$$

$$q = 0,48611 \frac{\text{lbf}}{\text{in}}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A força cortante máxima ocorre no apoio B e a máxima tensão cisalhante na união colada vale:

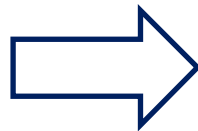
$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{3}{2} \frac{V_{m\acute{a}x}}{A} = \frac{3}{2bh} \left(\frac{qL}{2} + \frac{M_0}{L} \right) \leq \tau_{adm}$$

Logo:

$$M_0 \leq \frac{2bhL\tau_{adm}}{3} - \frac{qL^2}{2}$$

Sendo:

$$\left[\begin{array}{l} b = 4 \text{ in} \\ h = 6 \text{ in} \\ L = 96 \text{ in} \\ \tau_{adm} = 200 \text{ psi} \\ q = 0,48611 \frac{\text{lbf}}{\text{in}} \end{array} \right.$$



$$M_0 \leq 304960 \text{ lbf.in} = 25413 \text{ lbf.ft}$$

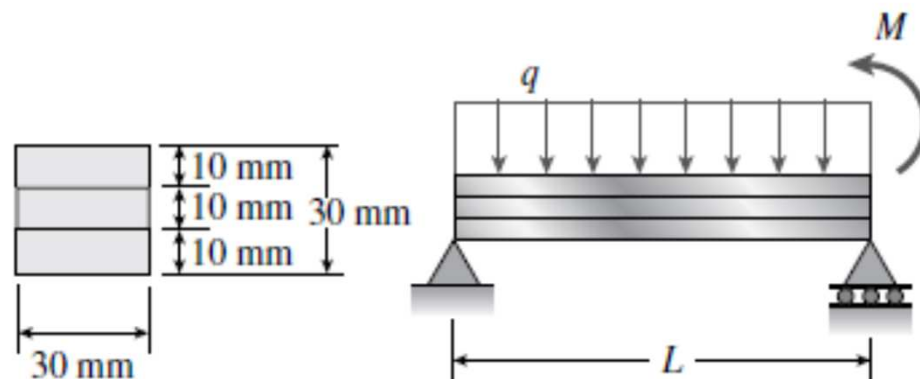


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 5.8-8 A laminated plastic beam of square cross section is built up by gluing together three strips, each $10 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$ in cross section (see figure). The beam has a total weight of 3.6 N and is simply supported with span length $L = 360 \text{ mm}$.

Considering the weight of the beam (q) calculate the maximum permissible CCW moment M that may be placed at the right support.

- (a) If the allowable shear stress in the glued joints is 0.3 MPa .
- (b) If the allowable bending stress in the plastic is 8 MPa .



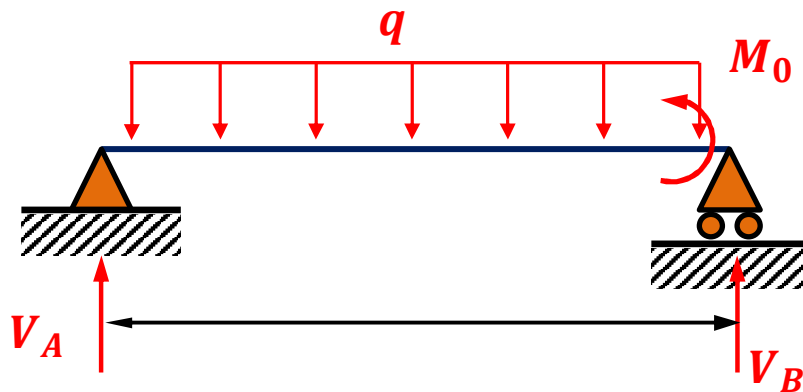


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

Aproveitando os resultados do problema anterior, podemos afirmar que a força cortante máxima ocorre no apoio situado à esquerda e vale:

$$V_{m\acute{a}x} = V_A = \frac{qL}{2} + \frac{M_0}{L}$$



$$M(x) = V_A x - \frac{qx^2}{2}$$

$$V(x) = V_A - qx$$

$$V(x) = 0 \Leftrightarrow V_A - qx = 0 \Leftrightarrow x_{cr} = \frac{V_A}{q} = \frac{L}{2} + \frac{M_0}{qL}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Avaliando o momento fletor em $x = x_{cr}$:

$$x = x_{cr}: \quad M(x_{cr}) = q \left(\frac{L}{2} + \frac{M_0}{qL} \right)^2 - \frac{q}{2} \left(\frac{L}{2} + \frac{M_0}{qL} \right)^2 = \frac{q}{2} \left(\frac{L}{2} + \frac{M_0}{qL} \right)^2$$

Avaliando se o momento fletor em $x = x_{cr}$ é igual ou superior ao valor de M_0 :

$$\begin{aligned} M(x_{cr}) = \frac{q}{2} \left(\frac{L}{2} + \frac{M_0}{qL} \right)^2 \geq M_0 &\Leftrightarrow \frac{M_0^2}{2qL^2} + \frac{M_0}{2} + \frac{qL^2}{8} \geq M_0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_0^2 - M_0qL^2 + \frac{(qL^2)^2}{4} \geq 0 &\Leftrightarrow \left(M_0 - \frac{qL^2}{2} \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Como a desigualdade acima é sempre verdadeira, concluímos que:

$$M_{m\acute{a}x} = M(x_{cr}) = \frac{q}{2} \left(\frac{L}{2} + \frac{M_0}{qL} \right)^2$$

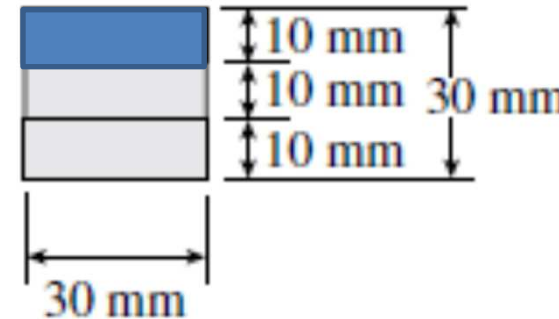


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Devemos ter:

$$a) \quad \tau_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x} Q}{bI} \leq \tau_{adm}$$

$$b) \quad \sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{I} y_{m\acute{a}x} \leq \sigma_{adm}$$



Onde:

$$Q = (300 \text{ mm}^2) \times 10 \text{ mm} = 3000 \text{ mm}^3$$

$$b = 30 \text{ mm}, \quad L = 360 \text{ mm}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(30 \text{ mm})^4}{12} = 67500 \text{ mm}^4$$

$$q = \frac{W}{L} = \frac{3,6 \text{ N}}{360 \text{ mm}} = 0,01 \text{ N/mm}$$

$$V_{m\acute{a}x} = \frac{qL}{2} + \frac{M_0}{L}$$

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{q}{2} \left(\frac{L}{2} + \frac{M_0}{qL} \right)^2$$

$$\tau_{adm} = 0,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{adm} = 8 \text{ MPa}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resultam:

$$\text{a) } M_0 \leq \frac{bIL\tau_{adm}}{Q} - \frac{qL^2}{2} = 72,25 \text{ Nm}$$

$$\text{b) } M_0 \leq qL \left(\sqrt{\frac{bh^2\sigma_{adm}}{3q}} \right) - \frac{qL^2}{2} = 9,01 \text{ Nm}$$

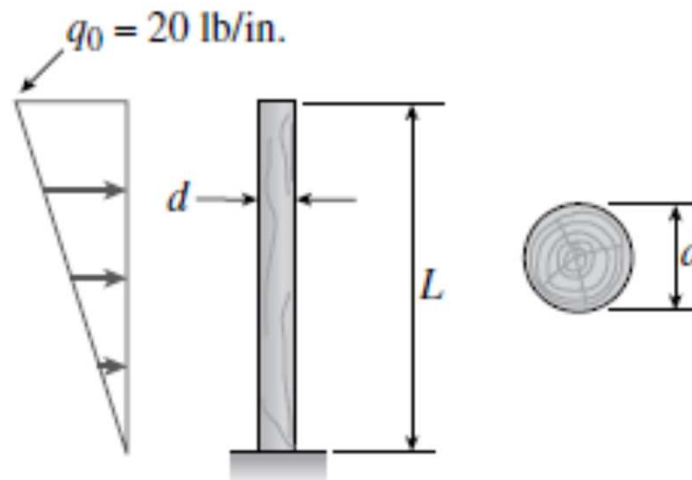


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 5.9-1 A wood pole of solid circular cross section (d = diameter) is subjected to a ~~horizontal force $P = 450$ lb~~ (see figure). The length of the pole is $L = 6$ ft, and the allowable stresses in the wood are 1900 psi in bending and 120 psi in shear.

Determine the minimum required diameter of the pole based upon (a) the allowable bending stress, and (b) the allowable shear stress.

triangular distributed load





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

A seção mais solicitada é aquela junto ao engastamento, onde atuam a máxima força cortante e o máximo momento fletor:

$$V_{m\acute{a}x} = \frac{q_0 L}{2} \quad M_{m\acute{a}x} = \left(\frac{q_0 L}{2} \right) \frac{2L}{3} = \frac{q_0 L^2}{3}$$

A máxima tensão normal devida à flexão vale:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{I} y_{m\acute{a}x} = \frac{q_0 L^2}{3} \frac{64}{\pi d^4} \frac{d}{2} = \frac{32}{3\pi} \frac{q_0 L^2}{d^3}$$

E a máxima tensão cisalhante nos planos longitudinais vale:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{4}{3} \frac{V_{m\acute{a}x}}{A} = \frac{4}{3} \frac{q_0 L}{2} \frac{4}{\pi d^2} = \frac{8}{3\pi} \frac{q_0 L}{d^2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Devemos ter:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{32}{3\pi} \frac{q_0 L^2}{d^3} \leq \sigma_{adm} \quad \Leftrightarrow \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{32}{3\pi} \frac{q_0 L^2}{\sigma_{adm}}}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{8}{3\pi} \frac{q_0 L}{d^2} \leq \tau_{adm} \quad \Leftrightarrow \quad d \geq \sqrt{\frac{8}{3\pi} \frac{q_0 L}{\tau_{adm}}}$$

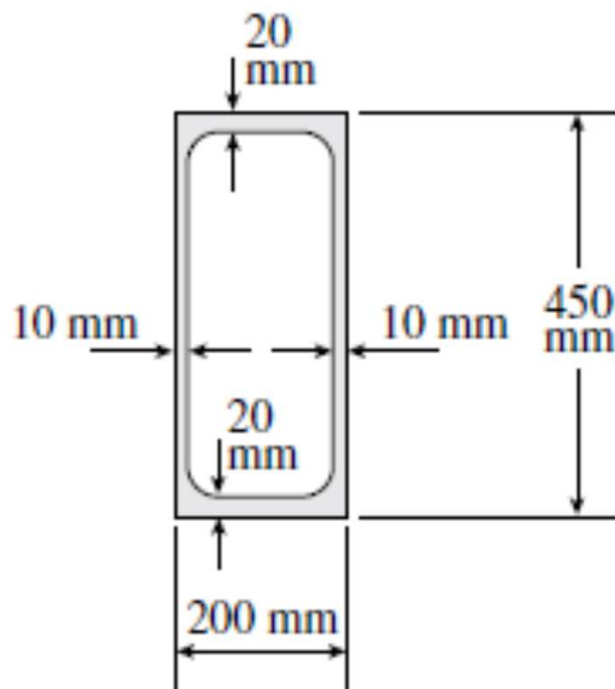
Numericamente:

$$\left[\begin{array}{l} d \geq \sqrt[3]{\frac{32}{3\pi} \frac{q_0 L^2}{\sigma_{adm}}} = \sqrt[3]{\frac{32}{3\pi} \times \frac{20 \times (72)^2}{1900}} \cong 5,7 \text{ in} \\ d \geq \sqrt{\frac{8}{3\pi} \frac{q_0 L}{\tau_{adm}}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi} \times \frac{20 \times 72}{120}} \cong 3,19 \text{ in} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad d_{m\acute{i}n} = 5,7 \text{ in}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 5.10-10 A hollow steel box beam has the rectangular cross section shown in the figure. Determine the maximum allowable shear force V that may act on the beam if the allowable shear stress is 36 Mpa.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução: Impondo que: $\tau_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x} Q_{m\acute{a}x}}{bI} = \tau_{adm}$

Obtemos: $V_{m\acute{a}x} = \frac{bI\tau_{adm}}{Q_{m\acute{a}x}}$

Onde:

$$b = 2 \times 10 \text{ mm} = 20 \text{ mm}$$

$$I = \frac{200 \times (450)^3}{12} - \frac{180 \times (410)^3}{12} = 4,84935 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$Q_{m\acute{a}x} = (200 \times 225) \times \frac{225}{2} - (180 \times 205) \times \frac{205}{2} = 1,28025 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{adm} = 36 \text{ MPa}$$

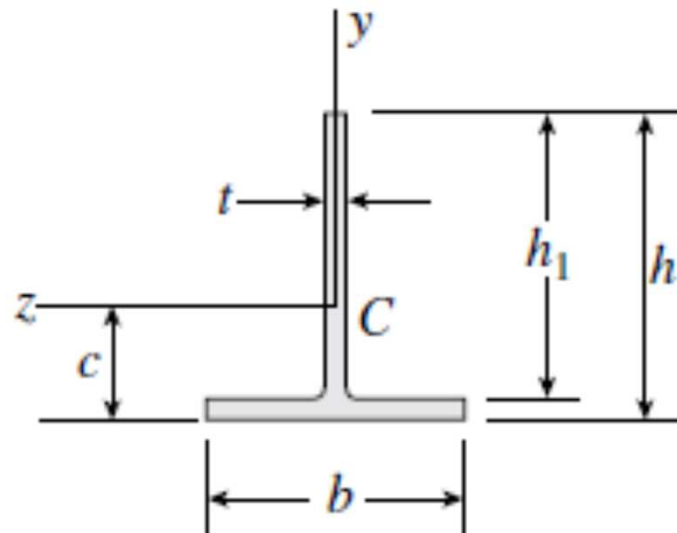
Logo: $V_{m\acute{a}x} = 272723 \text{ N} \cong 273 \text{ kN}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 5.10-12 The T-beam shown in the figure has cross-sectional dimensions as follows: $b = 220$ mm, $t = 15$ mm, $h = 300$ mm, and $h_1 = 275$ mm. The beam is subjected to a shear force $V = 60$ kN.

Determine the maximum shear stress $\tau_{\max}$ in the web of the beam.





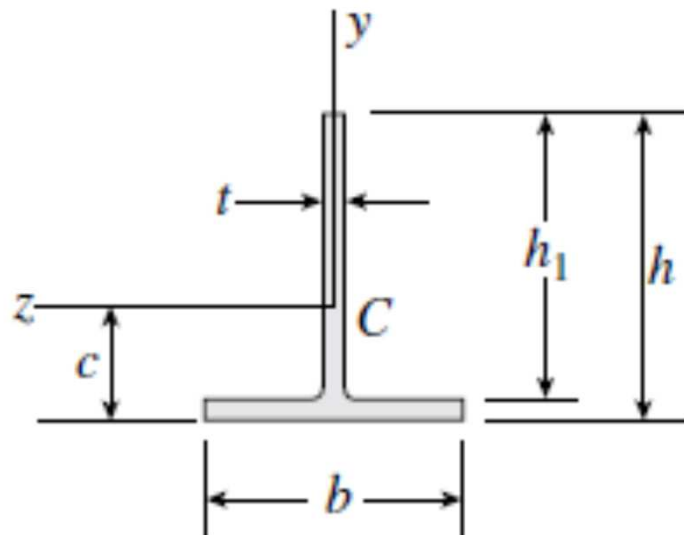
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

A máxima tensão cisalhante devida ao corte é dada pela fórmula de Jourawski:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x} Q_{m\acute{a}x}}{b I}$$

Posição do centroide:



$$Ac = b(h - h_1) \frac{(h - h_1)}{2} + t h_1 \left(h - \frac{h_1}{2} \right)$$

$$Ac = 220(25) \frac{(25)}{2} + 15 \times 275 \left(300 - \frac{275}{2} \right)$$

$$Ac = 739062,5 \text{ mm}^3$$

$$A = b(h - h_1) + t h_1 = 220 \times 25 + 15 \times 275$$

$$A = 9625 \text{ mm}^2$$

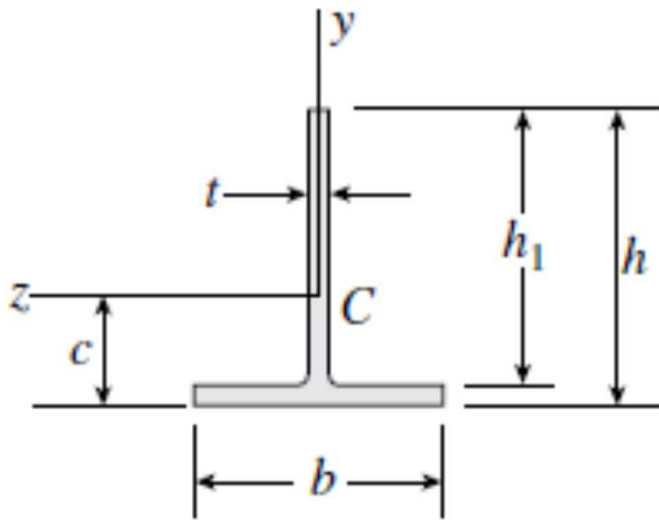


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo: $c = \frac{739062,5 \text{ mm}^3}{9625 \text{ mm}^2} \cong 76,786 \text{ mm}$

O 1º momento de área (em relação ao eixo neutro) da área que está acima do eixo neutro é:

$$Q_{\text{máx}} = t(h - c) \times \frac{(h - c)}{2} = \frac{t(h - c)^2}{2}$$



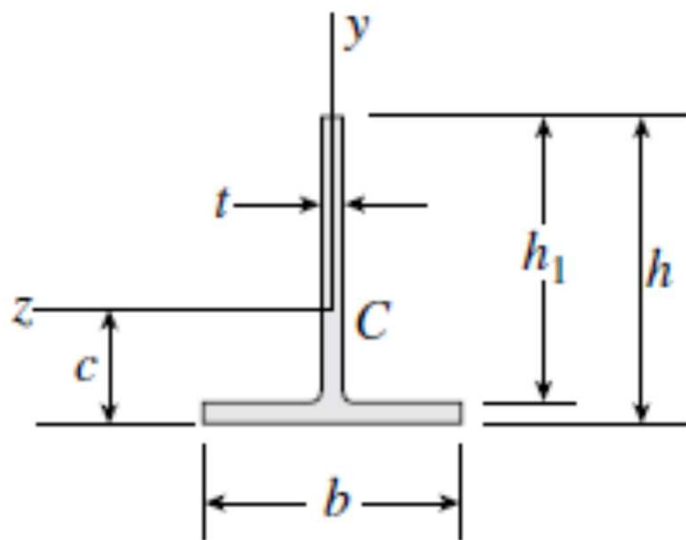
$$Q_{\text{máx}} = \frac{15(300 - 76,786)^2}{2} \cong 3,73685 \times 10^5 \text{ mm}^3$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

O momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo neutro é dado por:

$$I = I_z = \underbrace{\frac{b(h - h_1)^3}{12} + b(h - h_1) \left(c - \frac{(h - h_1)}{2} \right)^2}_{\text{(flange)}} + \underbrace{\frac{th_1^3}{12} + (th_1) \left(h - \frac{h_1}{2} - c \right)^2}_{\text{(alma)}}$$



$$I = I_z = 7,9318266 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

Finalmente:

$$"b" = t = 15 \text{ mm}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resulta para a máxima tensão cisalhante:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x} Q_{m\acute{a}x}}{tI} = \frac{60000 \times 3,73685 \times 10^5}{15 \times 7,9318266 \times 10^7} \cong 18,84 \text{ MPa}$$