



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica*

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #21

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

28/06/2022



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

Capítulo 5: Tensões em Vigas (Tópicos Básicos)

1. Tensões de cisalhamento em vigas de S.T. retangular (5.8)
2. Tensões de cisalhamento em vigas de S.T. circular (5.9)
3. Tensões de cisalhamento em almas de vigas com flanges (5.10)

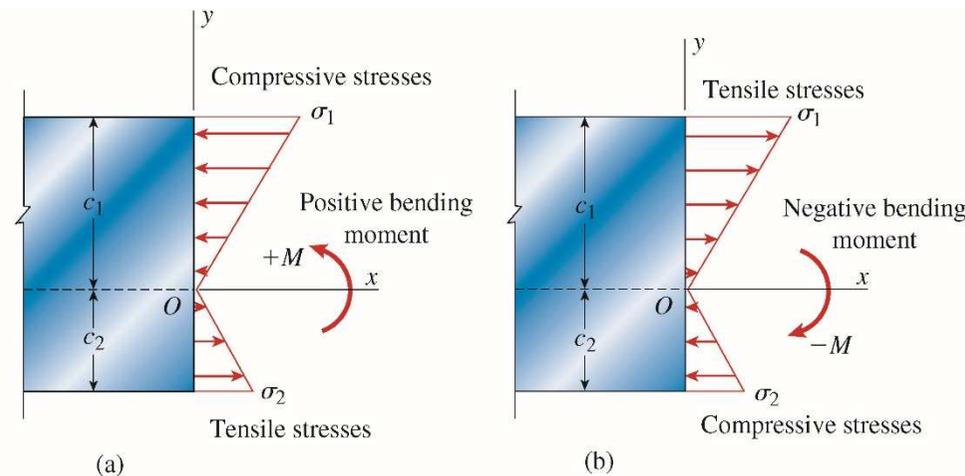


1. Tensões de cisalhamento em vigas de S.T. retangular (5.8)

Na última aula estudamos a distribuição de tensões normais em vigas submetidas à flexão, e verificamos que tal distribuição é dada por:

$$\sigma_x = -E\kappa y = -\frac{M}{I_z} y$$

FIG. 5-11 Relationships between signs of bending moments and directions of normal stresses: (a) positive bending moment, and (b) negative bending moment



Na aula de hoje determinaremos a distribuição de tensões cisalhantes devidas às forças cortantes para algumas seções transversais.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Quando uma viga é submetida à flexão pura, o único esforço solicitante nas seções transversais é o momento fletor (constante neste caso) e as únicas tensões agindo nas seções transversais são as tensões normais. Contudo, na maior parte dos carregamentos em vigas temos a flexão não uniforme, onde atuam tanto momentos fletores quanto forças cortantes nas seções transversais.

Da mesma forma que o momento fletor resultante está associado à integral dos momentos decorrentes das tensões normais nas seções transversais, a força cortante resultante está associada à integral das tensões de cisalhamento atuantes nas seções transversais.

Consideremos uma viga de seção transversal retangular cheia (base b e altura h), submetida a uma força cortante positiva de magnitude V , como ilustrado na figura a seguir.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Neste caso, é razoável admitir que as tensões cisalhantes τ agindo na seção transversal tenham a mesma direção e sentido da força cortante (ou seja, são paralelas aos lados verticais da seção). Também é razoável admitir que tais tensões são uniformemente distribuídas ao longo da largura da viga, ainda que possam variar ao longo da altura.

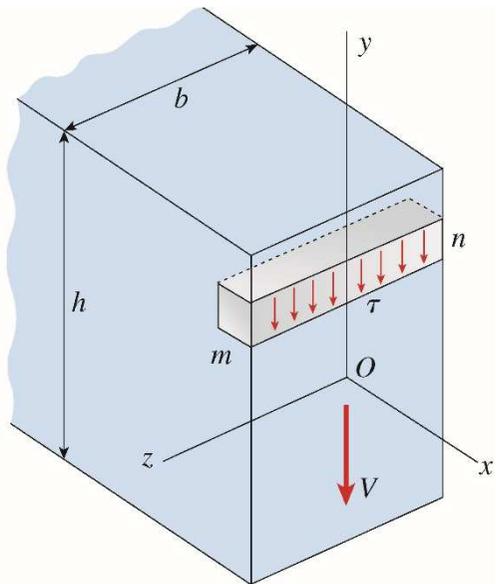
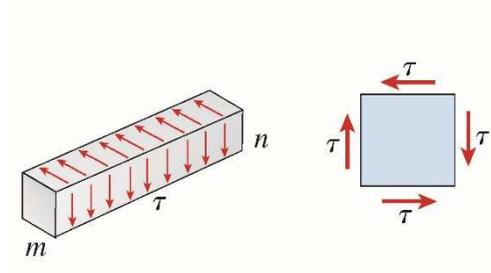


FIG. 5-26 Shear stresses in a beam of rectangular cross section

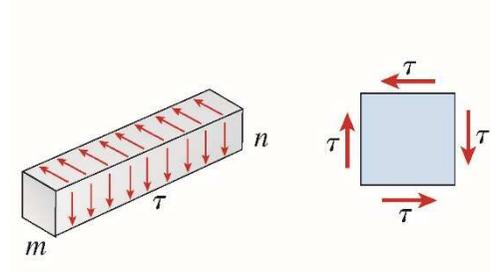
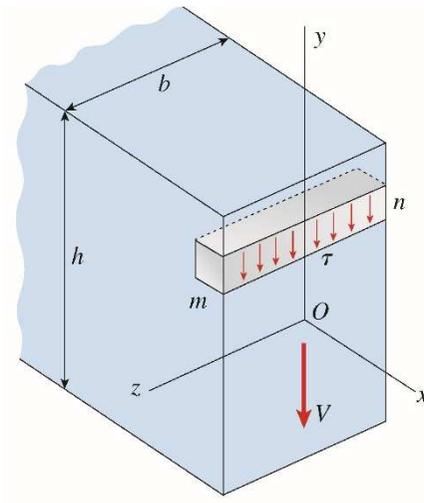


Com base nestas duas hipóteses, determinaremos a intensidade da tensão de cisalhamento em qualquer ponto da seção transversal.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para esta análise, isolemos um pequeno elemento mn da viga realizando cortes entre duas seções transversais adjacentes e dois planos horizontais. Das discussões anteriores sobre tensões de cisalhamento (vide Aula #03), sabemos que a existência de tensões cisalhantes nas faces verticais do elemento pedem a existência de tensões cisalhantes de mesma magnitude atuando nas faces horizontais, como indicado abaixo:



Em qualquer ponto da seção transversal, essas tensões de cisalhamento complementares são iguais em intensidade.

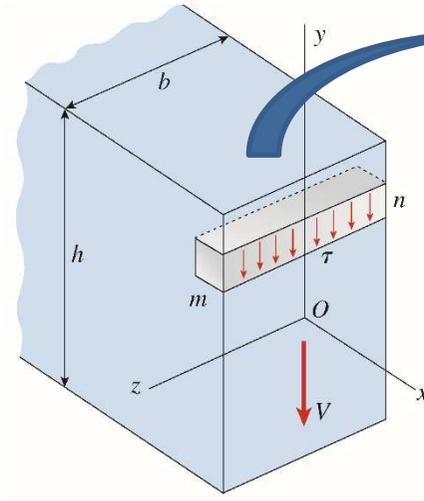
FIG. 5-26 Shear stresses in a beam of rectangular cross section



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Contudo, dado que não existem tensões de cisalhamento nos planos horizontais da face superior (onde $y = h/2$) e da face inferior (onde $y = -h/2$), tais condições de contorno obrigam que a distribuição das tensões cisalhantes na seção seja tal que:

$$\tau \Big|_{y=h/2} = \tau \Big|_{y=-h/2} = 0$$



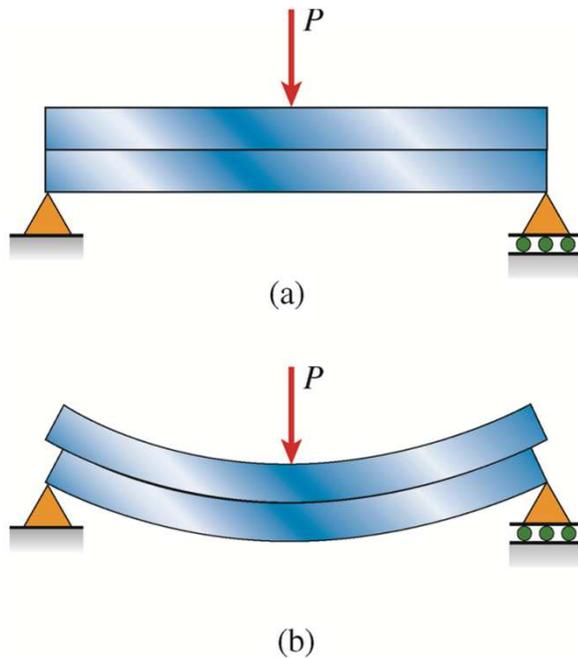
Note que tanto a face superior quanto a face inferior estão visivelmente descarregadas (sem tensões atuando na superfície).

FIG. 5-26 Shear stresses in a beam of rectangular cross section



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A figura abaixo ilustra um experimento simples que demonstra a existência das tensões de cisalhamento nos planos horizontais (à exceção do plano superior e inferior da viga):



Imagine duas vigas retangulares idênticas colocadas uma sobre a outra e consideremos que as forças de atrito na interface comum sejam desprezíveis.

Se a viga superior for submetida a uma força transversal P , o conjunto todo irá fletir mas haverá deslizamento na interface entre as vigas (o que não ocorre no caso de uma viga única, salvo se houver falha por cisalhamento).



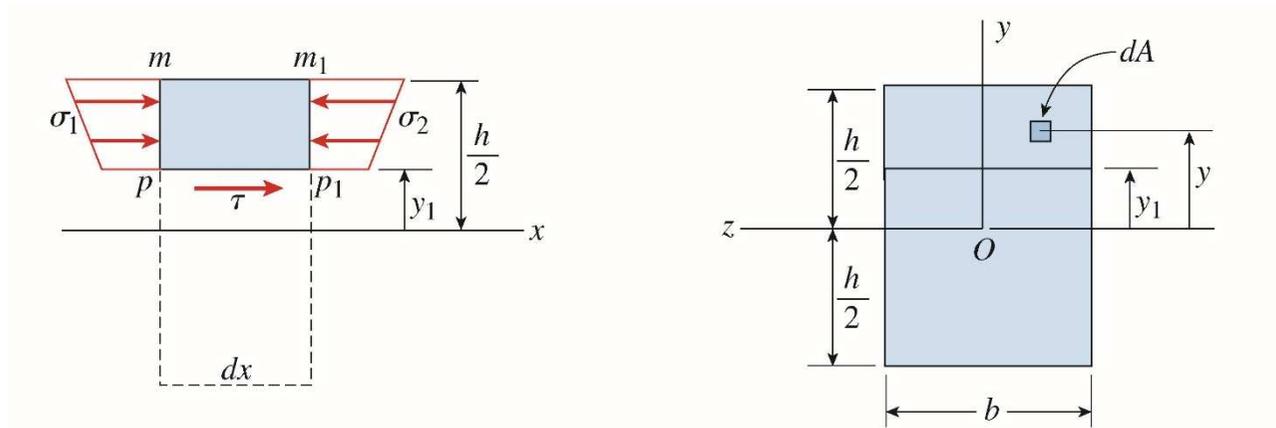
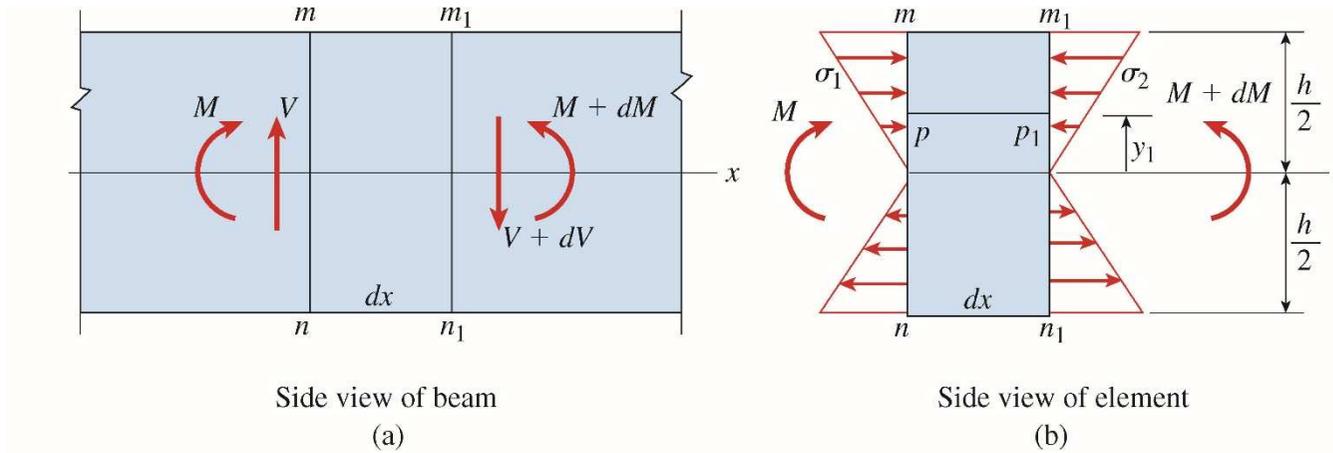
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

As figuras abaixo ilustram falhas por cisalhamento em vigas de madeira de seção retangular. Note que as falhas ocorrem praticamente na metade da altura da viga (onde irá ocorrer a máxima tensão de cisalhamento, como veremos).



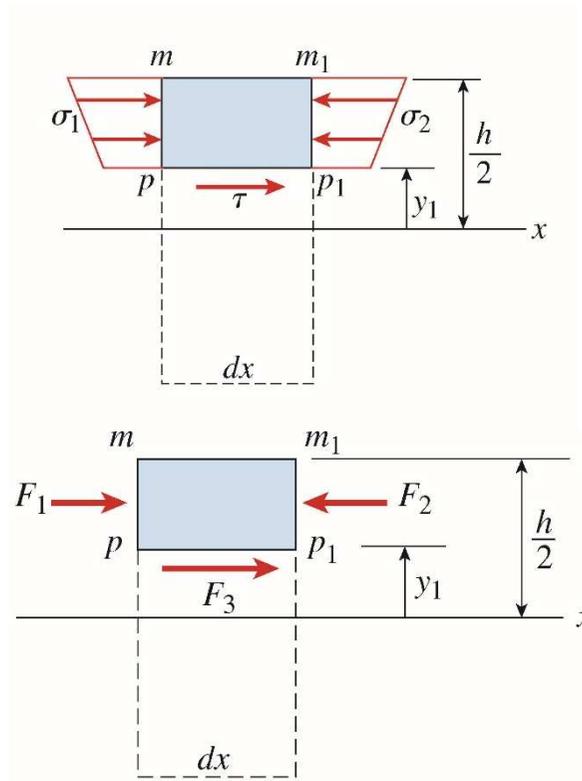


Dedução da fórmula de cisalhamento (fórmula de Jourawski)





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\sigma_1 = -\frac{M}{I_z} y$$

$$\sigma_2 = -\frac{(M + dM)}{I_z} y$$

Ignorando os sinais negativos nas distribuições de tensões nas faces à esquerda e à direita, determinamos os valores absolutos das forças F_1 e F_2 nas duas faces:

$$F_1 = \iint_{A_1} \sigma_1 dA = \iint_{A_1} \frac{M}{I_z} y dA = \frac{M}{I_z} \iint_{A_1} y dA = \frac{M Q_{z1}}{I_z}$$

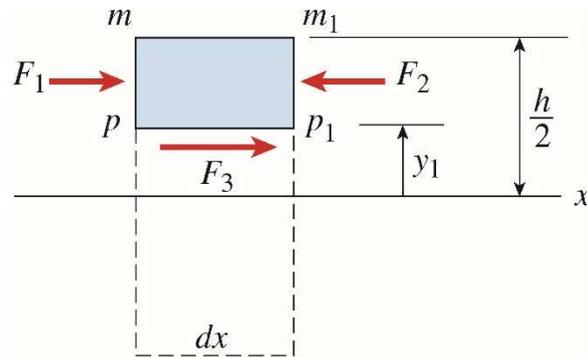
$$F_2 = \iint_{A_1} \sigma_2 dA = \iint_{A_1} \frac{(M + dM)}{I_z} y dA = \frac{(M + dM)}{I_z} \iint_{A_1} y dA = \frac{(M + dM) Q_{z1}}{I_z}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observações:

1. Note que o domínio de integração corresponde à área A_1 da seção transversal delimitada pela face superior (onde $y = h/2$) e pela linha horizontal onde é feito o corte (onde $y = y_1$);
2. Consequentemente, o 1º momento de área (Q_{z1}) indicado nas fórmulas corresponde ao momento de área deste domínio de integração (e não de toda a área da seção transversal);
3. Note, contudo, que o momento de inércia (I_z) indicado nas fórmulas corresponde ao momento de inércia de toda a seção transversal.



Impondo o equilíbrio de forças na direção longitudinal (eixo x) da viga, virá:

$$F_3 = F_2 - F_1 = \frac{(dM)Q_{z1}}{I_z}$$

Por outro lado, temos (neste caso):

$$F_3 = \tau(bdx)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo:

$$\tau(bdx) = \frac{(dM)Q_{z1}}{I_z} \Leftrightarrow \tau = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{Q_{z1}}{bI_z} \Leftrightarrow$$

$$\tau = \frac{VQ_{z1}}{bI_z}$$

Observações

1. Note que a fórmula de Jourawski é dimensionalmente correta:

$$[\tau] = \frac{[V][Q_{z1}]}{[b][I_z]} = \frac{N \cdot m^3}{m \cdot m^4} = \frac{N}{m^2} = Pa;$$

2. Note que a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à força cortante atuando na seção transversal e ao primeiro momento de área Q_{z1} ;

3. Note também que a tensão de cisalhamento é inversamente proporcional ao momento de inércia (de toda a seção transversal), I_z , e inversamente proporcional à largura da viga, b .



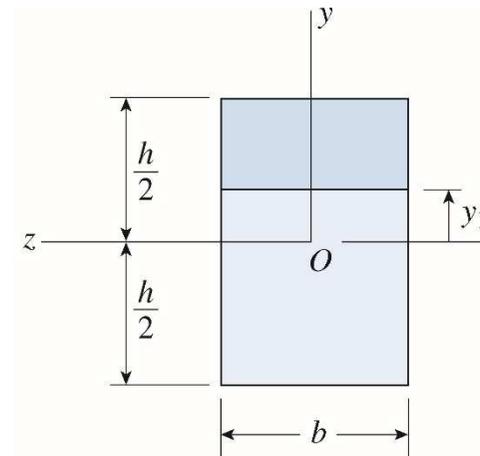
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Cálculo do 1º momento de área Q_{z1} para o caso da seção retangular:

$$Q_{z1} = \iint_{A_1} y dA = \int_{y_1}^{h/2} y(b dy) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

Ou, alternativamente:

$$Q_{z1} = A_1 \bar{y}_1 = b \left(\frac{h}{2} - y_1 \right) \left(\frac{h}{2} + y_1 \right) \frac{1}{2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$



(a)

Resultando:

$$\tau = \frac{V}{bI_z} \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \Leftrightarrow \tau = \frac{V}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad \left(-\frac{h}{2} \leq y_1 \leq \frac{h}{2} \right)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

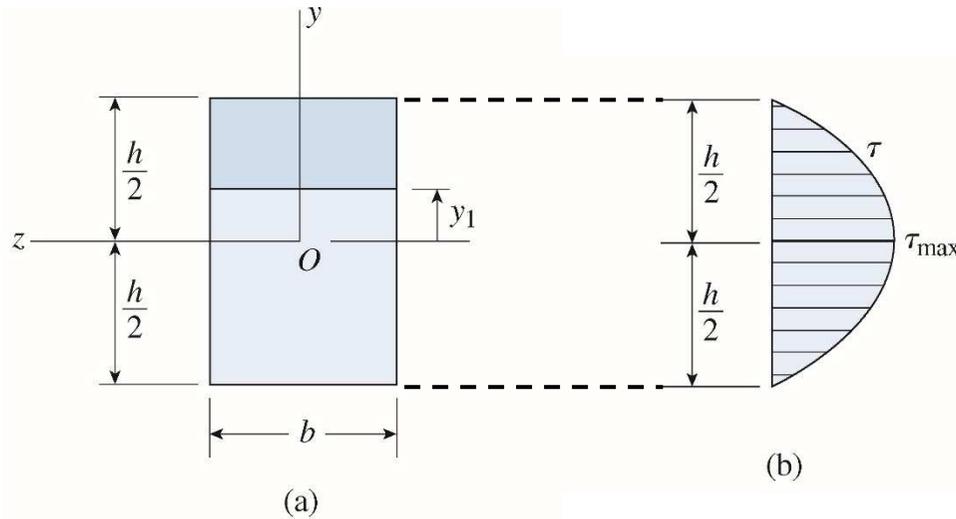


FIG. 5-30 Distribution of shear stresses in a beam of rectangular cross section: (a) cross section of beam, and (b) diagram showing the parabolic distribution of shear stresses over the height of the beam

$$\tau = \frac{V}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad \left(-\frac{h}{2} \leq y_1 \leq \frac{h}{2} \right)$$

Note que, consistentemente com o que foi discutido no slide #7:

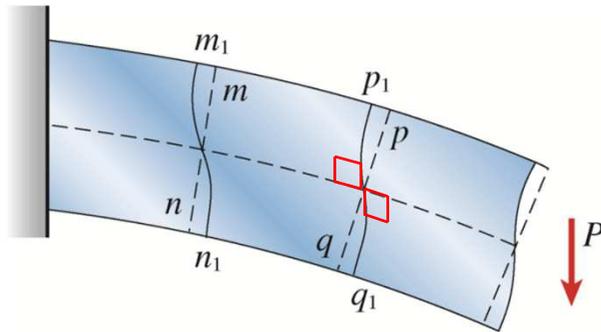
$$\tau \Big|_{y=h/2} = \tau \Big|_{y=-h/2} = 0$$

Note também que a máxima tensão cisalhante ocorre para $y_1 = 0$ (ou seja, na linha neutra) e vale, neste caso:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{Vh^2}{8I_z} = \frac{Vh^2}{8} \cdot \frac{12}{bh^3} = \frac{3}{2} \frac{V}{(bh)} = \frac{3V}{2A} = \frac{3}{2} \bar{\tau}$$



Efeito das distorções nas seções transversais



Como as tensões de cisalhamento variam de forma parabólica ao longo da altura da S.T. , e como as distorções são diretamente proporcionais às tensões cisalhantes ($\gamma = \tau/G$), segue que as distorções também variam da mesma forma: distorções nulas no topo e na base da viga, e distorção máxima em $y = 0$ (veja a figura ao lado).

FIG. 5-31 Warping of the cross sections of a beam due to shear strains

Investigações detalhadas utilizando métodos numéricos de análise mostram que as distorções das seções transversais devido às tensões de cisalhamento não afeta substancialmente as tensões longitudinais, mesmo quando a força cortante varia continuamente ao longo do comprimento da viga. Assim, em grande parte dos casos, é possível empregar a fórmula da flexão (ver slide #3) até mesmo na flexão não uniforme (apesar de a fórmula ter sido desenvolvida para a flexão uniforme).



2. Tensões de cisalhamento em vigas de S.T. circular (5.9)

Quando uma viga tem S.T. circular, não podemos mais admitir que as tensões de cisalhamento atuam paralelamente ao eixo y , uma vez que junto ao contorno não pode haver componente de τ na direção normal ao contorno (pois a superfície externa da viga está visivelmente descarregada).

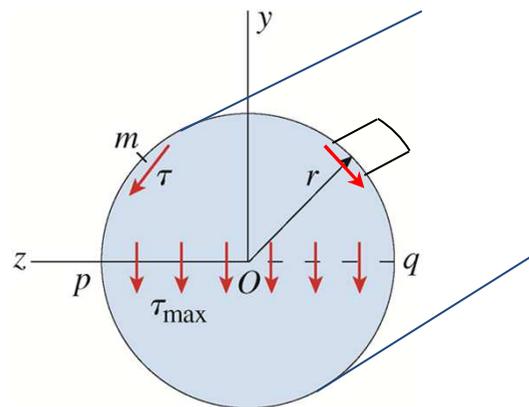


FIG. 5-34 Shear stresses acting on the cross section of a circular beam



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Apesar de não haver, neste caso, uma forma simples para determinar a distribuição de tensões cisalhantes em toda a seção transversal, podemos estimar as tensões cisalhantes na linha neutra, uma vez que aí as tensões junto ao contorno serão paralelas ao eixo y .

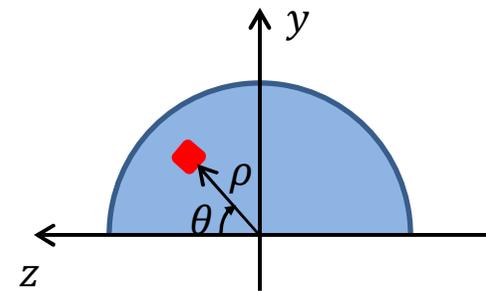
Admitindo que nesta cota ($y = 0$) todas as tensões cisalhantes sejam também paralelas ao eixo y e tenham a mesma magnitude, podemos empregar a fórmula de Jourawski, dado que ela foi deduzida com base nessas mesmas hipóteses:

$$\tau = \frac{VQ_{z1}}{bI_z}$$

Neste caso:

$$Q_{z1} = \iint_{A_1} y dA = \int_0^r \int_0^\pi \rho^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\rho = \frac{2r^3}{3}$$

$$b = 2r, \quad I_z = \frac{I_p}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi r^4}{2} \right) = \frac{\pi r^4}{4}$$



$$y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta$$

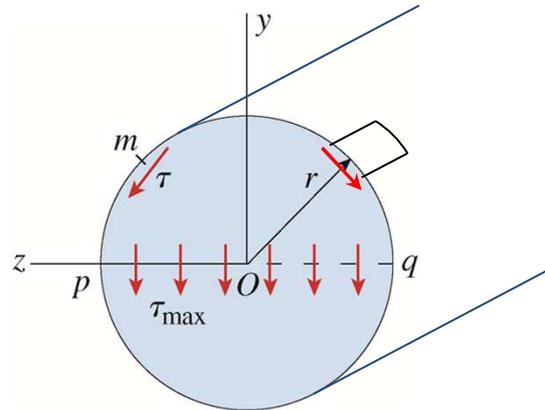
$$dA = \rho d\theta d\rho$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resultando:

$$\tau = \tau_{\text{máx}} = \frac{V}{2r} \cdot \frac{2r^3}{3} \cdot \frac{4}{\pi r^4} = \frac{4}{3} \frac{V}{\pi r^2} = \frac{4V}{3A} = \frac{4}{3} \bar{\tau}$$





Tensões de cisalhamento em S.T.'s circulares vazadas

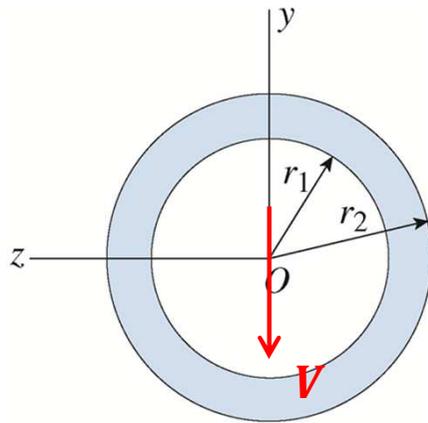


FIG. 5-35 Hollow circular cross section

Aplicando o mesmo raciocínio para uma seção circular vazada teremos:

$$\tau = \frac{VQ_{z1}}{bI_z}$$

Neste caso:

$$Q_{z1} = \iint_{A_1} y dA = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\pi} \rho^2 \sin\theta d\theta d\rho = \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{3}$$

$$b = 2(r_2 - r_1), \quad I_z = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi}{4}(r_2^4 - r_1^4)$$

Resultando:
$$\tau = \tau_{m\acute{a}x} = \frac{4V}{3A} \left(\frac{r_2^2 + r_2r_1 + r_1^2}{r_2^2 + r_1^2} \right) \quad \text{Onde: } A = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$



3. Tensões de cisalhamento em almas de vigas com flanges (5.10)

A fórmula de Jourawski também pode ser empregada com bons resultados para a determinação da distribuição de tensões em vigas com flanges, como a ilustrada abaixo:

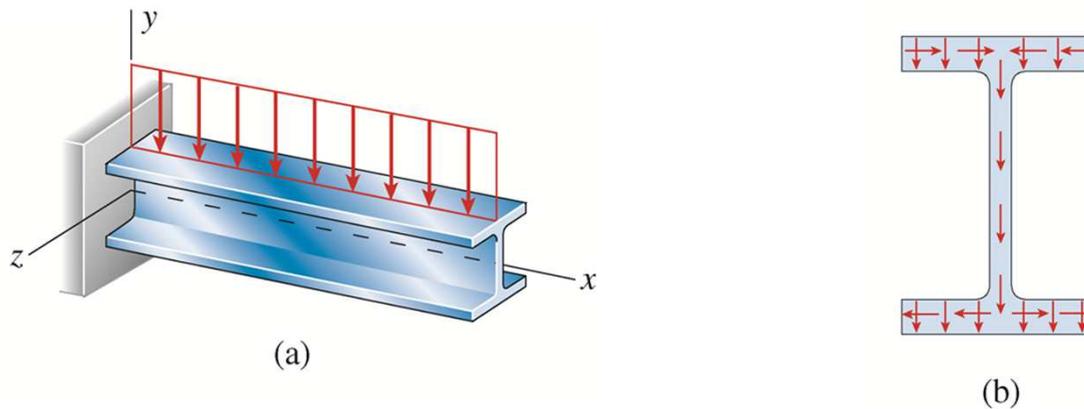
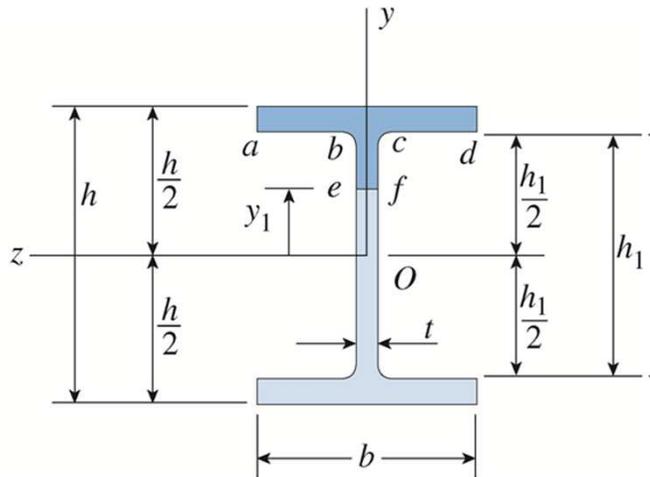


FIG. 5-37 (a) Beam of wide-flange shape, and (b) directions of the shear stresses acting on a cross section



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Sejam dados:

b = largura dos flanges;

h = altura total do perfil;

$h_w = h_1$ = altura livre da alma;

$t_w = t$ = espessura da alma;

$t_f = \frac{(h-h_1)}{2}$ = espessura dos flanges.

Pela fórmula de Jourawski: $\tau = \frac{VQ_{z1}}{bI_z}$

Para determinar as tensões cisalhantes na alma, temos:

$$Q_{z1} = \iint_{A_1} y dA = \frac{bt_f(h+h_1)}{4} + t\left(\frac{h_1}{2} - y_1\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{h_1}{2} + y_1\right)$$

$$Q_{z1} = \frac{b}{8}(h^2 - h_1^2) + \frac{t}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2\right) \quad \left(0 \leq y_1 \leq \frac{h_1}{2}\right)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A largura " b " onde atuam as tensões cisalhantes (no corte) será a espessura da alma:

$$"b" = t$$

E a inércia de toda a seção com relação ao eixo principal z será:

$$I_z = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b-t)h_1^3}{12}$$

Resultando:

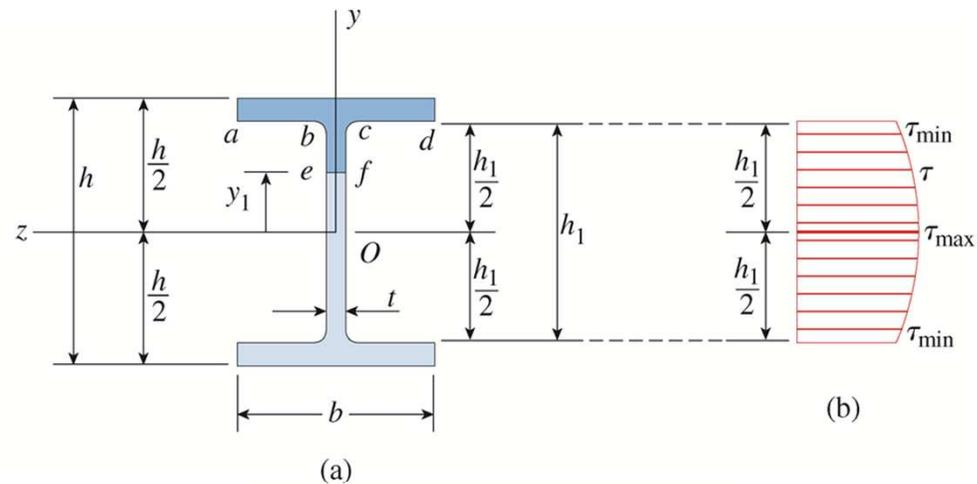


FIG. 5-38 Shear stresses in the web of a wide-flange beam. (a) Cross section of beam, and (b) distribution of vertical shear stresses in the web



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

[1] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.5.