FÍSICA I - AULA 24

- Como mudar de referencial
- Lei de Newton em um referencial qualquer
- Exemplos : * aceleração constante
  * queda livre
  * força centrífuga

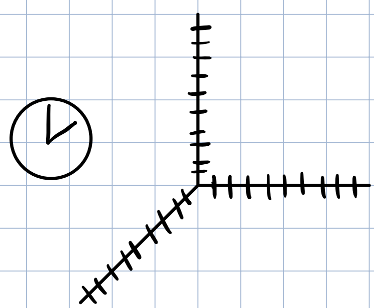
1. Como mudar de referencial

Como sabemos, as leis da física assumem a forma mais simples nos chamados referenciais inerciais. Vamos agora ver como lidar com uma mudança de referencial qualquer.

Primeiramente: como definir um referencial? Precisamos de

(1) réguas para medir distâncias
(2) um relógio para medir o tempo

} definidos em termos de fenômenos físicos (ex: período e comprimento de onda da luz emitida por átomos)



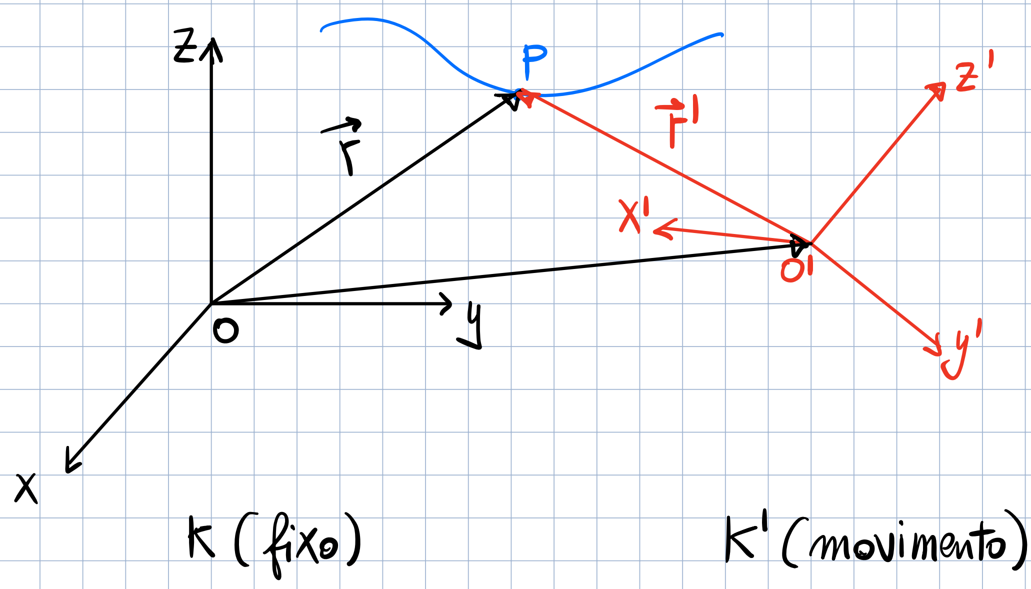
Nossa definição contém uma hipótese implícita: o estado de movimento do referencial não afeta a unidade de tempo nem de comprimento. Sendo uma hipótese, está sujeita a verificação experimental. De fato, a hipótese é válida apenas para velocidades $v \ll c$ (na relatividade restrita as coisas serão diferentes, veja Física II e IV).

Como conectar posição, velocidade e aceleração de uma partícula em dois referenciais diferentes?

Consideramos os referenciais K (parado) e K' (em movimento).

O movimento mais geral de K' será uma combinação de

- translação da origem
- rotação dos eixos



Da geometria:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}'}$$

Explicitamente:

$$\begin{cases} \vec{r} = x\,\hat{e}_x + y\,\hat{e}_y + z\,\hat{e}_z \\ \vec{OO'} = x_{O'}\,\hat{e}_x + y_{O'}\,\hat{e}_y + z_{O'}\,\hat{e}_z \\ \vec{r}' = x'\,\hat{e}_{x'} + y'\,\hat{e}_{y'} + z'\,\hat{e}_{z'} \end{cases}$$

Com $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ fixos.

A translação de O' é dada por $x_{O'}(t), y_{O'}(t), z_{O'}(t)$

A rotação dos eixos é dada por $\dot{\hat{e}}_{i'} = \vec{\omega} \times \hat{e}_{i'}$ (porque o módulo não muda, Aula 23)

Note que, em geral, $\vec{\omega}$ não é constante.

Para calcular a velocidade derivamos a relação geométrica acima:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}\,'$$

$$\downarrow d/dt$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \frac{d}{dt}\left(x'\hat{e}_{x'} + y'\hat{e}_{y'} + z'\hat{e}_{z'}\right)$$

$$= \vec{v}_{O'} + \underbrace{\left(\dot{x}'\hat{e}_{x'} + \dot{y}'\hat{e}_{y'} + \dot{z}'\hat{e}_{z'}\right)}_{\equiv\ \vec{v}\,'} + \underbrace{\left(x'\dot{\hat{e}}_{x'} + y'\dot{\hat{e}}_{y'} + z'\dot{\hat{e}}_{z'}\right)}_{=\ \vec{\omega}\times\left(x'\hat{e}_{x'} + y'\hat{e}_{y'} + z'\hat{e}_{z'}\right)\ =\ \vec{\omega}\times\vec{r}\,'}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \overbrace{\vec{v}\,' + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'}^{\dot{\vec{r}}\,'}}$$

movimento de P respeito a O

movimento de O' respeito a O

movimento de P respeito a O'

rotação dos eixos de K'

Derivando mais uma vez obtemos a aceleração:

(notação: para deixar a derivação mais compacta, escrevemos

$$\vec{r}\,' = \sum_{i=1}^{3} x'_i\,\hat{e}_{i'} \quad \text{etc}$$
)

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}\,' + \vec{\omega}\times\vec{r}\,' \Rightarrow \sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i\,\hat{e}_i = \sum_{i=1}^{3}\left(\dot{x}_{O',i}\,\hat{e}_i + \dot{x}'_i\,\hat{e}_{i'}\right) + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$

d/dt

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i \hat{e}_i}_{\vec{a}} = \sum_{i=1}^{3} \Big(\underbrace{\ddot{x}_{0'i} \hat{e}_i}_{\vec{a}_{0'}} + \underbrace{\ddot{x}_i' \hat{e}_{i'}}_{\vec{a}'} + \underbrace{\dot{x}_i' \dot{\hat{e}}_{i'}}_{\vec{\omega}\times\vec{v}'} \Big) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \underbrace{\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'}_{\vec{\omega}\times(\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}')}$$

$$\Downarrow$$

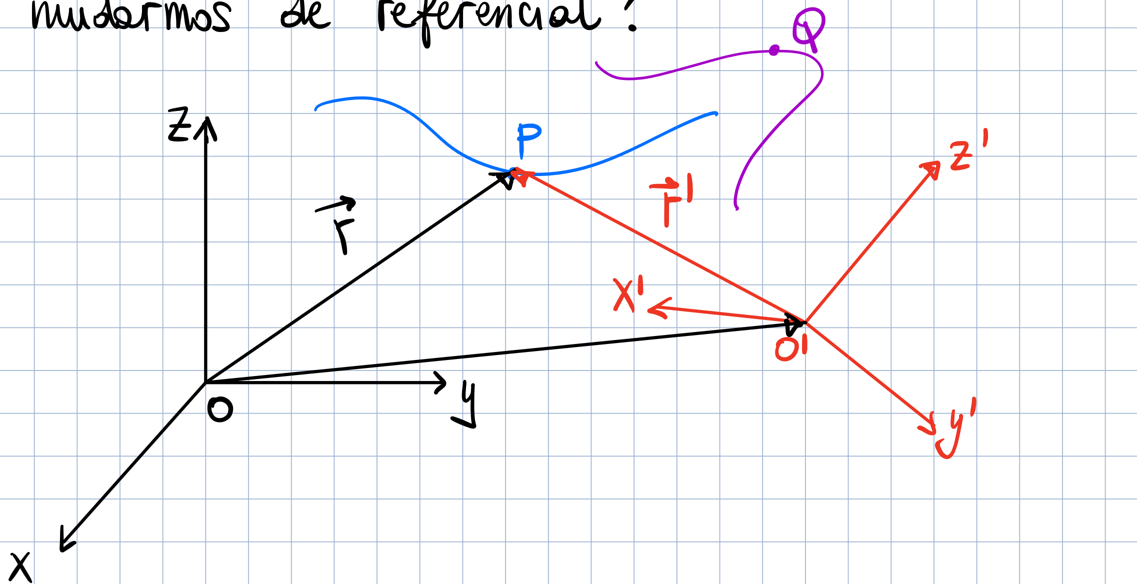
$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \vec{a}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'}$$

aceleração centrífuga

aceleração de Coriolis

2. A lei de Newton em um referencial qualquer

As forças vistas até agora (gravitação, elástica, contato) dependem todas da distância entre os corpos. Como muda essa distância ao mudarmos de referencial?



K (fixo) K' (movimento)

$$\vec{r}_P - \vec{r}_Q = (\vec{00'} + \vec{r}_P') - (\vec{00'} + \vec{r}_Q') = \vec{r}_P' - \vec{r}_Q'$$

$\Rightarrow$ a distância não muda

$\Rightarrow$ as forças não podem mudar: $\vec{F}' = \vec{F}$

Podemos portanto afirmar que a segunda lei de Newton é a mesma em qualquer referencial? NÃO

No exemplo de K e K' considerados acima:

$$(K) \quad \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\downarrow$$

$$(K') \quad \vec{F}' = m\left(\vec{a}_{O'} + \vec{a}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'\right)$$

$$\Downarrow$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{in}$$

$$\vec{F}_{in} = -m\left(\vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Centrífuga}} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{Coriolis}}\right)$$

Força inercial

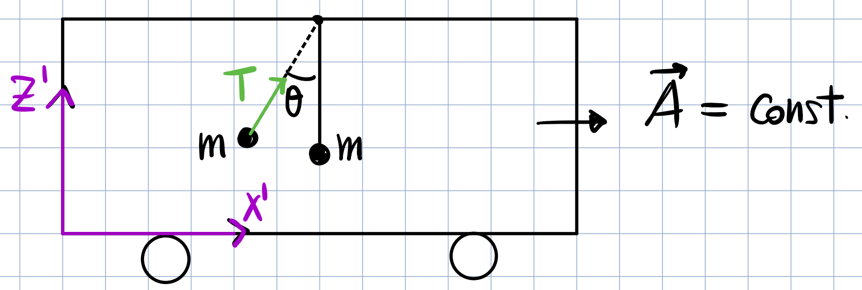
- Quando $\vec{a}_{O'} = 0 = \vec{\omega}$, $\vec{F}_{in} = 0$ e a 2ª lei de Newton assume a mesma forma em K e K' $\Rightarrow$ neste caso, K & K' são INERCIAIS

- Quando $\vec{a}_{O'} \neq 0$ e/ou $\vec{\omega} \neq 0$, $\vec{F}_{in} \neq 0$ e novas forças (devidas ao movimento do referencial!) aparecem $\rightarrow$ K' NÃO É INERCIAL

3. Exemplo 1: referencial não rodante com aceleração constante

No caso $\vec{\omega}=0$ e $\vec{a}_{O'} = \text{const.}$ temos $\vec{F}_{in} = -m\,\vec{a}_{O'}$

Consideramos o caso específico de um pêndulo num carrinho em movimento uniformemente acelerado:



Qual a posição de repouso do pêndulo?

Eq. Newton em K':

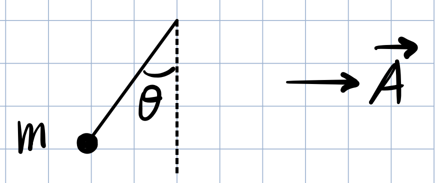
$$z': \quad m\ddot{z}' = -mg + T\cos\theta$$

$$x': \quad m\ddot{x}' = -mA + T\sin\theta$$

Pedindo $\ddot{z}' = 0 = \ddot{x}' \Longrightarrow \begin{cases} T\cos\theta = mg \\ T\sin\theta = +mA \end{cases}$

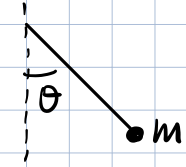
$$\Downarrow$$

$$\operatorname{tg}\theta = +\frac{A}{g} \quad \Rightarrow$$ Como $A>0$, $g>0$, $\cos\theta>0$, precisamos de $\operatorname{sen}\theta>0$



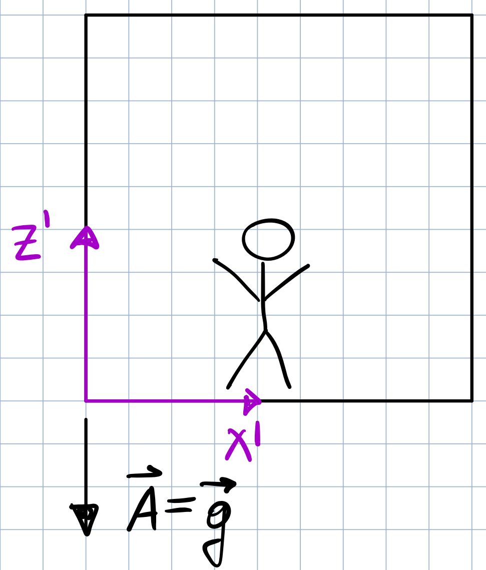
2. Se K' fosse inercial ($\vec{A}=0$) teríamos $\theta=0$ (equilíbrio na vertical, como em um referencial parado)

2) Invertendo a direção de $\vec{A}$, o ângulo viraria negativo e a posição de repouso seria "para a frente".



4. Exemplo 2: elevador em queda livre

O caso do elevador em queda livre corresponde ao caso em que o referencial solidal com o elevador tem aceleração $\vec{g}$:



Eq. de Newton em K'

$$\underbrace{m\ddot{z}'}_{=0} = -mg + mA = -mg + mg$$

AUSÊNCIA DE FORÇA

$\Downarrow$

Corpo flutua!

Podemos aqui reparar um ponto importantíssimo: para ser precisos, seria preciso escrever

$$m_I \ddot{z}' = m_G g - m_I g$$

com $\begin{cases} m_I = \text{massa inercial (aquela que aparece em } m\vec{a}) \\ m_G = \text{massa gravitacional (que aparece com } \vec{g}) \end{cases}$

A priori, nada demanda $m_I = m_G$. A igualdade é porém um fato experimental muito bem estabelecido.

Consequência: forças inerciais conseguem compensar (localmente) forças gravitacionais. Viceversa, na ausência de gravidade, uma força inercial consegue "simulá-la"

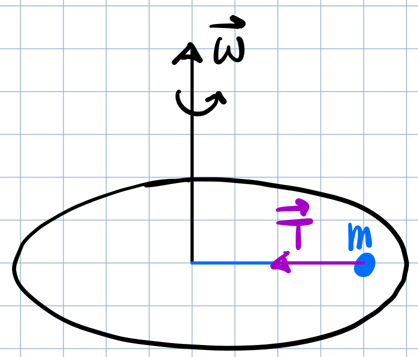
$\Rightarrow$ forças gravitacionais são equivalentes (localmente) a forças inerciais (PR. EQUIVALÊNCIA)

Desse fato pode-se deduzir a relatividade geral de Einstein

5. Força centrífuga

Vamos agora explicar porque o termo $-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ é chamado de aceleração centrífuga.

Caso simples: disco em rotação, corpo m parado no ref. em rotação



Movimento descrito num ref. inercial "externo"

Eq. movimento em coordenadas polares:

$$\vec{r} = x\,\hat{e}_x + y\,\hat{e}_y = r\cos\theta\,\hat{e}_x + r\sin\theta\,\hat{e}_y = r\,\hat{e}_r$$

$$\text{com} \quad \hat{e}_r = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \; ; \; \hat{e}_\theta = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\hat{e}}_r = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\,\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\dot{\hat{e}}_\theta$$

$$= \ddot{r}\,\hat{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta - r\,\dot{\theta}^2\,\hat{e}_r$$

$$= (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + (2\,\dot{r}\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\hat{e}_\theta$$

Mas $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$ por causa do vínculo

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{r}} = r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta & \Rightarrow v = r\,\dot{\theta} \\ \ddot{\vec{r}} = -r\,\dot{\theta}^2\,\hat{e}_r + r\,\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta & = -\frac{v^2}{r}\,\hat{e}_r + r\,\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta \end{cases}$$

Eq. de movimento:

$$\left.\begin{cases} \hat{e}_r: & -\frac{v^2}{r} = -\frac{T}{m} & \Rightarrow v^2 = \frac{Tr}{m} = r^2\omega^2 \\ \hat{e}_\theta: & r\,\ddot{\theta} = 0 & \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \end{cases}\right\} \omega^2 = \frac{T}{mr}$$

Movimento descrito no referencial no qual o disco está parado:

$$m\vec{a}\,' = \vec{F}_{in} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

Como o corpo está parado: $\vec{a}\,' = 0$

$$\Rightarrow \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = \underbrace{\vec{F}_{in}}_{\to\, -T\,\hat{e}_r}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ -\omega^2 y \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\omega^2 r\,\hat{e}_r$$

Logo :

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{in} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = -T\,\hat{e}_r + \underbrace{m\omega^2 r\,\hat{e}_r}$$

aponta para fora na direção radial
$\Rightarrow$ centrífuga

$$\Rightarrow \quad \vec{0} = (-T + m\,\omega^2 r)\,\hat{e}_r \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{T}{mr}$$

mesmo resultado já obtido!