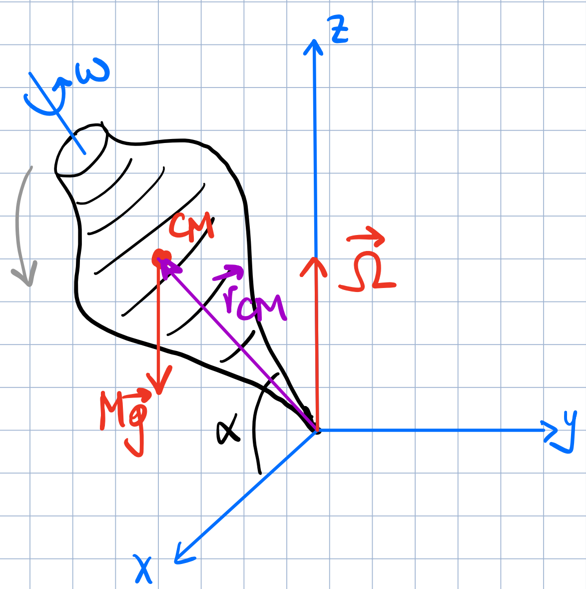
FÍSICA I - AULA 23 (2022-1)

Dinâmica do corpo rígido (3)

1. Giroscópio

Um giroscópio é constituido por um disco ou roda em rotação (volante). Tipicamente, a rotação é tão rápida para garantir que a en. cinética do volante é muito maior do que a en. potencial. O corpo em rotação possui um ponto fixo (mantido fixo com um sistema de vínculos apropriado).

Um exemplo prático é dado por um pião:



O eixo de rotação é um eixo principal de inércia

$$\Rightarrow \vec{L} = I\vec{\omega} \quad \text{com } |\vec{\omega}| = \text{const}$$

O torque atuando é dado por

$$\vec{T} = \vec{r}_{CM} \times M\vec{g} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

O movimento mais geral do giroscópio é muito complicado. Por enquanto vamos considerar apenas o movimento de

<u>PRECESSÃO UNIFORME</u>

Como $\vec{r}_{CM} \parallel \vec{\omega}$, o torque é $\perp$ ao momento angular $\vec{L}$, de forma que podemos concluir que o módulo de $\vec{L}$ <u>não varia</u> no tempo:

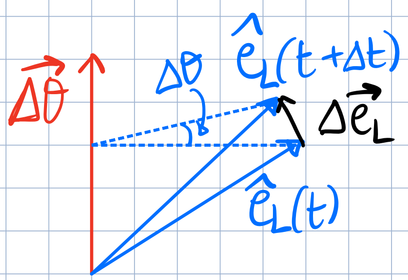
$$0 = \vec{L} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{L}^2 \Rightarrow \boxed{\vec{L}^2 = \text{const}}$$

Neste caso específico no qual o módulo não muda, podemos escrever

$$\vec{L} = L\,\hat{e}_L \implies \frac{d\vec{L}}{dt} = L\,\frac{d\hat{e}_L}{dt}$$

e, para calcular $\frac{d\hat{e}_L}{dt}$, usamos a figura seguinte:

($\vec{\Omega}$ = nova velocidade angular que "justifica" o movimento de $\vec{L}$)



$$\Delta\vec{e}_L = \vec{\Delta\theta} \times \hat{e}_L$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot{\hat{e}}_L = \vec{\Omega} \times \hat{e}_L}$$

$$\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{\Omega} \times \vec{L}}$$

$\vec{\Omega}$ = Velocidade angular de PRECESSÃO

Podemos calcular $\vec{\Omega}$ uma vez que r_{CM}, M, I, ω são conhecidos:

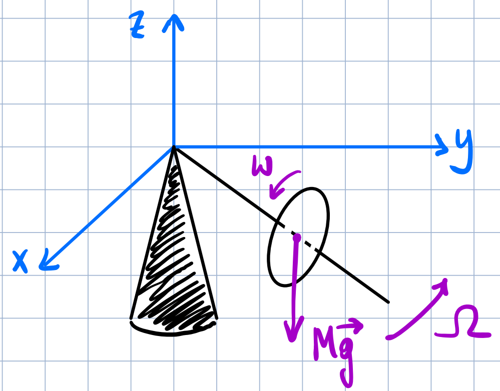
$$\tau = r_{CM} M g \cos\alpha = \left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right| = \Omega L \cos\alpha = \Omega I \omega \cos\alpha$$

$$\implies \boxed{\Omega = \frac{r_{CM} M g}{I\omega}}$$

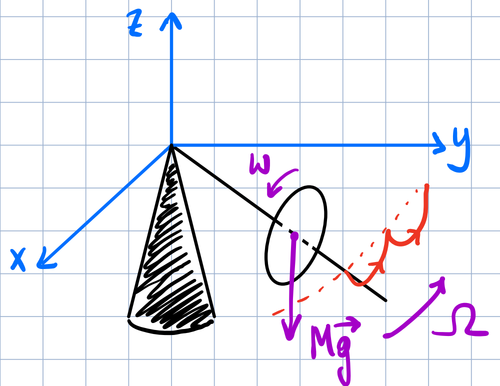
2. Nutação

Até agora não nos preocupamos com a dinâmica que gera $\vec{\Omega}$. De fato, se começarmos de uma condição inicial $\vec{\Omega}=0$, as coisas ficam bem mais complicadas.

Vamos discutir <u>qualitativamente</u> o que acontece (a tratação quantitativa é muito complicada) no caso $\alpha = 0$:

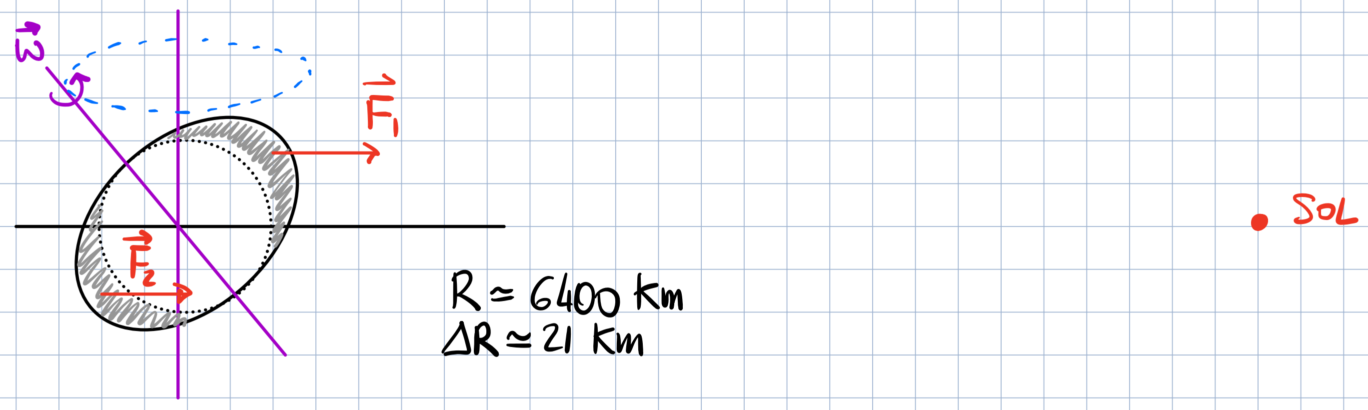


- Para obter a precessão ao lado precisamos de energia $\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}I'\Omega^2$
- No momento inicial $\vec{\Omega}=0$: o sistema não tem a energia suficiente para o movimento de precessão $\Rightarrow$ o giroscópio entra em queda sob a ação do peso, liberando en. potencial;
- A queda leva ao aparecimento de uma componente de $\vec{L}$ ao longo de $-\hat{e}_z$. Mas o torque não tem componente ao longo dessa direção, logo um momento angular igual e oposto deve aparecer na direção $+\hat{e}_z$, produzido pela precessão;
- O movimento total produzido é de NUTAÇÃO :



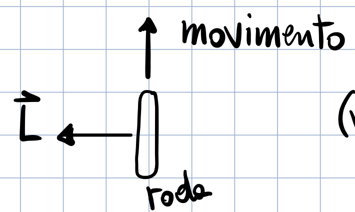
3. Um exemplo interessante de precessão: precessão dos equinócios

A Terra não é uma esfera perfeita e o eixo de rotação é inclinado respeito ao plano da órbita:



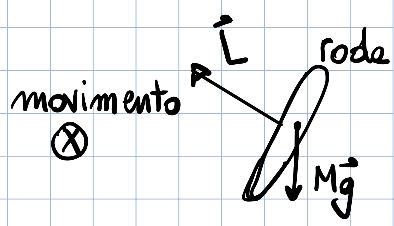
$F_1 > F_2$ gera um torque perpendicular a $\vec{\omega}$ $\Rightarrow$ precessão do eixo da Terra de período $\simeq 26000$ anos

4. Curvas de bicicleta sem mãos



(vista de cima)

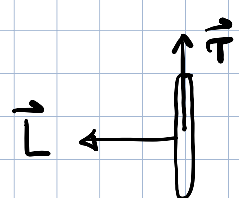
Jogando o peso para direita:



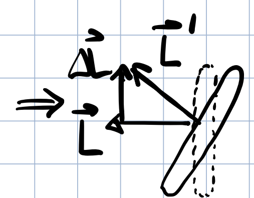
(vista de lado)

gera um torque na mesma direção e sentido do movimento

Voltando à vista de cima:



$\Delta\vec{L} = \vec{\tau}\,\Delta t \Rightarrow$



a roda dianteira gira para a direita

5. Estática do corpo rígido

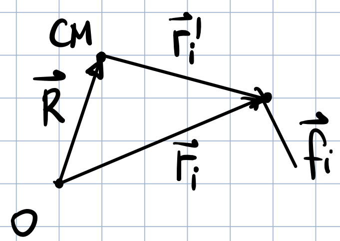
As equações fundamentais da dinâmica são

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ext)}_{tot} \quad , \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{(ext)}_{tot}$$

No caso estático não apenas $\vec{F}^{(ext)}_{tot} = 0 = \vec{\tau}^{(ext)}_{tot}$, mas também pedimos $\vec{P} = 0 = \vec{L}$ (nenhum movimento).

Propriedade interessante: se $\vec{F}^{(ext)}_{tot} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}^{(ext)}_{tot}$ não depende da origem escolhida

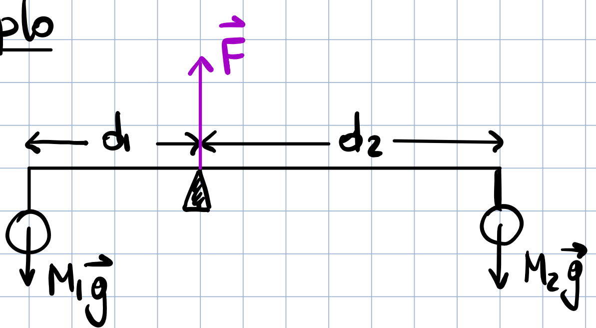
prova:



$$\vec{\tau}_O^{(ext)} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \sum_i (\vec{R} + \vec{r}_i{}') \times \vec{f}_i$$

$$\overset{!}{=} \vec{R} \times \underbrace{\sum_i \vec{f}_i}_{\vec{F}^{(ext)}_{tot} = 0} + \sum_i \vec{r}_i{}' \times \vec{f}_i = \vec{\tau}^{(ext)}_{CM}$$

Exemplo



$$F^{(ext)}_{tot} = (M_1 + M_2)g - F \overset{!}{=} 0$$

$$\tau^{(ext)}_{TOT} = M_2 d_2 g - M_1 d_1 g \overset{!}{=} 0$$

calculado em relação ao ponto de apoio

$$\Rightarrow \begin{cases} F = (M_1 + M_2) g \\ \dfrac{M_1}{M_2} = \dfrac{d_2}{d_1} \end{cases}$$

Vamos supor que $M_2 = 2M_1$. Onde deve estar o apoio e quanto vale F?

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{d_2}{d_1} \Rightarrow \quad d_1 = 2d_2 \quad \text{dá a posição do apoio}$$

$$F = 3M_1 g \quad \text{dá a força externa}$$