

DIELÉTRICOS

Polarização

ATÉ AQUI, DISCUTIMOS AS LEIS DA ELETROSTÁTICA no vácuo e em condutores. Existe na natureza uma outra grande classe de materiais, a dos que conduzem mal a eletricidade. Esses maus condutores são conhecidos como *dielétricos*. Os dielétricos são constituídos por íons ou moléculas que se deformam, mudam de posição ou se deformam sob a ação de um campo elétrico externo e assim adquirem momentos de dipolo. Como já vimos, um momento de dipolo gera um potencial eletrostático. Conseqüentemente, o campo elétrico no interior do dielétrico é a soma do campo externo com o campo dipolar. Este último se opõe ao campo externo. Dentro do dielétrico, o campo tende a ser mais fraco que no vácuo.

Os condutores, no interior dos quais o campo é nulo, podem ser vistos como casos extremos. Nos dielétricos, embora possa ser bem menos intenso do que no vácuo, o campo não chega zero e precisa ser calculado. Para isso, é conveniente tratar o material como se fosse um contínuo, ainda que ele seja constituído por partículas discretas.

Na prática, em lugar de examinar molécula por molécula, vamos examinar um pequeno bloco do material. Esse pedaço deve ser muito pequeno em relação ao tamanho do dielétrico, mas seu volume $\Delta\tau$ deve ser grande o suficiente para conter muitas partículas. Somamos então os momentos de dipolo dentro do bloco e vamos denotar $\Delta\vec{p}$ o resultado. A *polarização* do material no interior do bloco é então definida como

$$\vec{P} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta\tau}. \quad (1)$$

O momento de dipolo tem dimensão de carga vezes distância. A dimensão da polarização é carga dividida por distância ao quadrado, ou seja, dimensão de densidade superficial de carga.

Potencial gerado por um dielétrico polarizado.

Um dipolo com momento \vec{p} posicionado na origem gera o potencial

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}. \quad (2)$$

no ponto \vec{r} .

Se o dipolo estiver no ponto \vec{r}' , o potencial em \vec{r} será

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}'}{r'^2}, \quad (3)$$

onde $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}'$.

Se um dielétrico como o da figura 1 tiver polarização $P(\vec{r}')$, cada pequeno volume $d\tau'$ no seu interior terá momento de dipolo $P(\vec{r}')d\tau'$ e dará uma contribuição como a da Eq. (3) para o potencial no ponto \vec{r} . Somadas as contribuições de todos os volumes elementares, resulta a seguinte expressão para o potencial no ponto \vec{r} :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\hat{\lambda}}{\lambda^2} \cdot \vec{P}(\vec{r}') d\tau'. \quad (4)$$

A figura 1 mostra a geometria, para um dado elemento de volume $d\tau'$.

Simplificaremos o lado direito da Eq. (4) por meio de duas passagens. Primeiro, notaremos que

$$\frac{\hat{\lambda}}{\lambda^2} = \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (5)$$

onde $\vec{\nabla}'$ denota o gradiente em relação à coordenada \vec{r}' (que está escondida no lado esquerdo da igualdade, dentro de $\vec{\lambda} = \vec{r} - \vec{r}'$).

A Eq. (5) permite reescrever a Eq. (4) na forma

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot \vec{P}(\vec{r}') d\tau'. \quad (6)$$

Vamos à segunda passagem, agora. O produto escalar dentro do integrando à direita na Eq. (6) nos convida a escrever a seguinte identidade vetorial:

$$\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \vec{P}(\vec{r}')\right) = \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot \vec{P}(\vec{r}') + \frac{1}{\lambda} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}'), \quad (7)$$

que pode ser rearranjada para explicitar o termo que aparece no integrando da Eq. (6):

$$\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot \vec{P}(\vec{r}') = \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \vec{P}(\vec{r}')\right) - \frac{1}{\lambda} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}'). \quad (8)$$

Vamos Substituir, então, o lado direito da Eq. (7) no integrando da Eq. (6). O resultado é

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \vec{P}(\vec{r}')\right) d\tau' - \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\lambda} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}') d\tau' \right) \quad (9)$$

O teorema de Gauss permite reescrever a primeira integral no lado direito como a integral de superfície do fluxo da razão $P(\vec{r}')/\lambda$. Resultam assim duas integrais em que o fator $1/\lambda$ aparece multiplicando os integrandos:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_S \frac{1}{\lambda} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n} d\tau' - \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\lambda} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}') d\tau' \right) \quad (10)$$

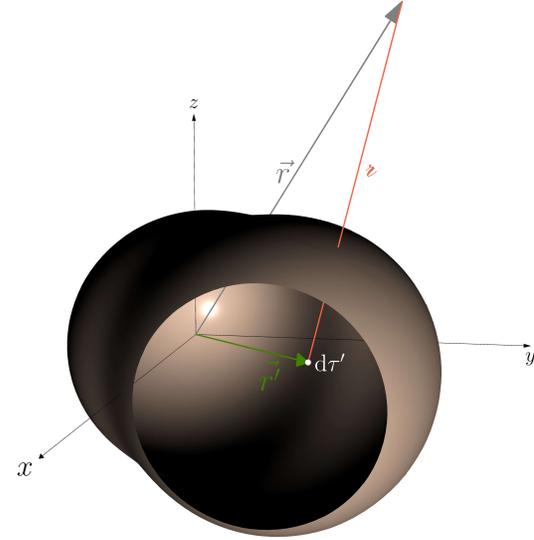


Figura 1: Contribuição para o potencial no ponto \vec{r} de um pequeno volume polarizado $d\tau'$ no interior de um dielétrico. O sólido foi cortado para mostrar o volume elementar e os vetores \vec{r}' (posição do pequeno volume) e \vec{r} (posição do ponto onde se deseja calcular o potencial).

A primeira integral à direita parece o potencial de uma distribuição superficial de cargas, e a segunda parece o de uma distribuição volumétrica. Para ressaltar essa semelhança, definiremos uma *densidade superficial de cargas ligadas*

$$\sigma_b(\vec{r}') \equiv \vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n} \quad (11)$$

e uma *densidade volumétrica de cargas ligadas*

$$\rho_b(\vec{r}') \equiv -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}'). \quad (12)$$

Com essas definições, a Eq. (10) adquire uma forma mais simpática:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_S \frac{\sigma_b(\vec{r}')}{r} d\tau' + \int_V \frac{\rho_b(\vec{r}')}{r} d\tau' \right). \quad (13)$$

Tanto a densidade superficial σ_b como a volumétrica ρ_b têm interpretação física. O índice b vem do inglês *bound* e indica que as cargas são *ligadas*, ou seja, estão presas à geometria. A figura 2 ajuda a entender a primeira. Nela aparecem os dipolos individuais que dão origem à polarização do material. Com os dipolos orientados, a carga positiva de cada um os eles é neutralizada pela carga negativa do dipolo imediatamente à frente. Há duas exceções, porém: nem a carga positiva dos dipolos na região superior nem a carga negativa dos que estão na região inferior são neutralizadas.

Resulta, dessa forma, uma carga superficial positiva na região superior e uma negativa na inferior. Essa carga superficial tem densidade σ_b : ela é positiva quando a polarização se alinha paralelamente à normal à superfície e negativa quando \vec{P} e \hat{n} têm sentidos opostos. No equador da esfera mostrada em corte na figura, a polarização é perpendicular à normal, e não há carga superficial porque os dipolos são paralelos à superfície.

Não há densidade volumétrica na situação da figura 2, porque a polarização é uniforme. A divergência na polarização ocorre quando dipolos se orientam, ao menos aproximadamente, em geometria radial. A figura 3 mostra um exemplo simples. Os dipolos ali representados se afastam radialmente a partir de um ponto central. Como se vê, essa organização resulta em um acúmulo de cargas negativas na região central.

Matematicamente, esse arranjo corresponde a uma polarização com divergente positivo, e a Eq. (12) define uma densidade volumétrica positiva. Se, ao contrário, os dipolos convergissem para o ponto central, o acúmulo de cargas e a densidade volumétrica seriam positivos, porque o divergente da polarização seria menor do que zero.

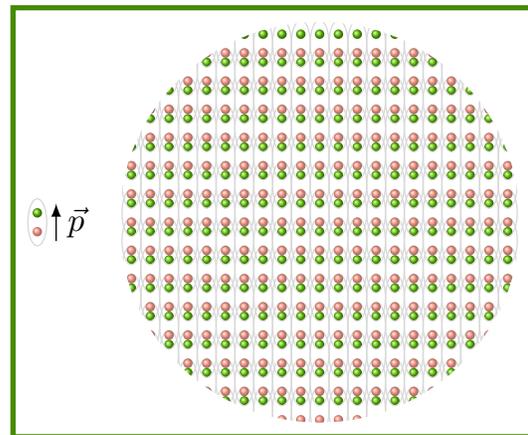


Figura 2: Cargas na superfície de um dielétrico polarizado. A polarização provém de um número muito grande de dipolos orientados na direção \hat{z} .

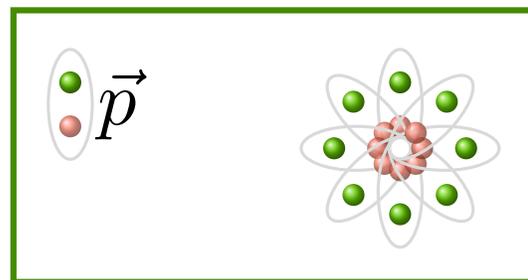


Figura 3: Divergência na polarização, no interior de um material com polarização radial. Para simplificar, a figura mostra apenas um pequeno conjunto de dipolos.

Exemplo: esfera uniformemente polarizada.

Vale a pena tratar matematicamente a situação retratada na figura 2. Suponhamos que ela descreva uma esfera de raio R com polarização uniforme $\vec{P} = P\hat{z}$, isto é, que a esfera seja constituída por um material já fabricado com essa polarização. Dizemos que a polarização está *congelada* na esfera. A polarização dá origem a cargas de polarização e a um campo elétrico. Queremos encontrar as densidades de carga e calcular o potencial resultante.

Já vimos que, como a polarização é uniforme, densidade volumétrica de carga é nula. Há, porém, densidade superficial, que precisamos calcular. Da Eq. (11), vemos que

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{r}, \quad (14)$$

onde \hat{r} é o versor radial em coordenadas esféricas, que é normal à superfície da esfera.

Como $\vec{P} = P\hat{z}$, o produto escalar $\vec{P} \cdot \hat{r} = P \cos(\theta)$, e concluímos que o problema é igual ao de uma esfera com carga superficial

$$\sigma_b = P \cos(\theta). \quad (15)$$

Esse problema é quase idêntico que resolvemos pelo método de separação de variáveis (ver notas de aula sobre separação de variáveis). Lá, o potencial era dado, $V = V_0 \cos(\theta)$; aqui, é dada a densidade de cargas, mas os dois se resolvem pelo mesmo procedimento.

O vetor de deslocamento

O campo elétrico dentro de um dielétrico recebe contribuições das cargas livres e das cargas ligadas, devidas à polarização. Para facilitar a referência, convém chamar de σ_f e ρ_f as densidades superficial e volumétrica de cargas livres.

Nessa notação, a densidade volumétrica de cargas no material é

$$\rho(\vec{r}) = \rho_f(\vec{r}) + \rho_b(\vec{r}), \quad (16)$$

e a equação de Poisson assume a forma

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \rho_f(\vec{r}) + \rho_b(\vec{r}). \quad (17)$$

A Eq. (12) nos leva a escrever o último termo à direita como um divergente:

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \rho_f(\vec{r}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}), \quad (18)$$

e os dois divergentes nessa igualdade podem ser combinados num só:

$$\vec{\nabla} \cdot \epsilon_0 \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) = \rho_f(\vec{r}) \quad (19)$$

A soma vetorial no lado esquerdo da Eq. (19) é um vetor com a dimensão de P , isto é, dimensão de densidade de carga. Ele é conhecido como *vetor deslocamento* e denotado \vec{D} :

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (20)$$

O vetor deslocamento obedece a uma equação de Poisson modificada:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f. \quad (21)$$

Em termos mais simples, o vetor deslocamento obedece a uma lei de Gauss em que apenas as cargas livres contribuem. Na forma integral, essa lei assume a forma

$$\int_{\mathcal{A}} \vec{D} \cdot \hat{n} dA = q_f \quad (22)$$

onde q_f é a carga livre dentro da superfície \mathcal{A} .

Isso parece indicar que \vec{D} é o “campo elétrico das cargas livres”, isto é, que quem sabe resolver um problema no vácuo sabe também resolver o problema com a mesma geometria em meios dielétricos: basta considerar as cargas livres e ignorar as de polarização para determinar \vec{D} .

Essa receita simples funciona em problemas com simetria plana, cilíndrica ou esférica, que admitem solução via lei de Gauss. Se a geometria for irregular, porém, a prescrição se torna inválida, porque o vetor deslocamento carece de uma propriedade básica do campo eletrostático: seu rotacional não é zero. De fato, da Eq. (20) vemos que

$$\vec{\nabla} \times D = \epsilon_0 \vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \vec{P}. \quad (23)$$

O primeiro termo à direita na Eq. (23) é nulo, mas o segundo pode perfeitamente ser diferente de zero. Consequentemente, não se pode definir um potencial para o vetor deslocamento e nem se podem invocar expressões matemáticas para o vetor \vec{D} a partir de expressões análogas para \vec{E} .

Variações de \vec{D} e \vec{E} através de uma superfície.

Quando se passa de um dielétrico para o vácuo ou de um dielétrico para outro, o campo elétrico e o vetor deslocamento tendem a mudar. A figura 4 é uma ilustração. Nela estão retratados dois dielétricos, separados por uma superfície plana. Nem sempre a interface separando dois materiais é assim, mas vista bem de perto qualquer superfície é muito bem descrita por um plano, como acontece com a superfície da Terra.

Dada a interface, podemos imaginar uma superfície cilíndrica muito mais larga do que alta que a atravesse, como indicado pelo retângulo

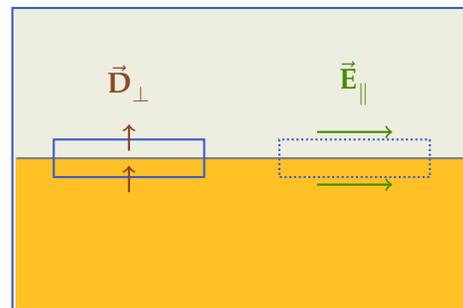


Figura 4: Variações de campos através de uma interface. As regiões **dourada** e **marfim** representa dois dielétricos. As setas **verticais** representam as componentes normais à superfície que separa os dois meios do vetor deslocamento. As setas **horizontais** representam as componentes paralelas do campo elétrico.

à esquerda. Em seguida, podemos aplicar a lei de Gauss ao vetor deslocamento. Uma vez que o diâmetro do cilindro é muito maior do que a altura, o fluxo do vetor deslocamento através das paredes laterais pode ser desconsiderado. O fluxo através da tampa superior do cilindro é $D_{1\perp}A$, onde $D_{1\perp}$ é a componente do vetor deslocamento perpendicular à superfície no dielétrico superior e A é a área do tampo. O fluxo através da tampa inferior é $-D_{2\perp}A$, onde $D_{2\perp}$ é a componente perpendicular no dielétrico inferior. Como, em geral, não há cargas livres na superfície, o fluxo deve ser igual a zero, segundo a Eq. (22). Concluimos que

$$D_{1\perp} = D_{2\perp}. \quad (24)$$

Em resumo, a componente normal do vetor deslocamento é preservada quando se atravessa uma superfície. Já a componente paralela à superfície costuma mudar.

O oposto acontece com o campo elétrico. O circuito pontilhado no lado direito da figura tem dois lados relativamente longos paralelos à superfície e dois muito menores perpendiculares a ela. Metade do circuito está no dielétrico de cima; a outra metade, imersa no dielétrico de baixo. Se calcularmos a integral $\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ ao longo do circuito, no sentido antihorário, obteremos $E_{2\parallel}\ell - E_{1\parallel}\ell$, onde $E_{1\parallel}$ é a componente paralela à superfície no dielétrico de cima, $E_{2\parallel}$ a componente paralela no dielétrico de baixo e ℓ é o tamanho dos lados horizontais. Os lados verticais são pequenos demais para serem levados em conta.

Uma vez que o rotacional do campo elétrico é zero, a integral ao redor do circuito deve ser nula. Segue que

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel}. \quad (25)$$

Em resumo, tanto a componente perpendicular do vetor deslocamento como a componente paralela do campo elétrico são mantidas. Sobre as outras componentes (a paralela do deslocamento e a normal do campo elétrico) nada se pode dizer. A relação (24) vale desde que inexistam cargas livres na superfície. A Eq. (25) vale sempre em condições eletrostáticas.

Materiais lineares

No problema que acabamos de resolver, havia polarização congelada, isto é, mesmo sem aplicação de campo elétrico externo. Na prática, situações como essa são raras. Na maioria dos materiais, a polarização desaparece na ausência de campo elétrico, porque a polarização cresce linearmente com o campo:

$$P = \chi_e \epsilon_0 E. \quad (26)$$

O fator ϵ_0 no lado direito foi introduzido para tornar o outro fator, χ_e , adimensional. Este último fator é conhecido como *susceptibilidade elétrica*. A susceptibilidade é muito pequena em gases, mas pode tornar-se superior à unidade em líquidos ou sólidos. A da água à temperatura ambiente, por exemplo, é 79. O livro texto traz uma tabela com vários outros exemplos.

Dada a Eq. (26), o vetor deslocamento (20) pode ser escrito na forma

$$\vec{D} = (1 + \chi_e)\epsilon_0\vec{E}. \quad (27)$$

O fator de \vec{E} é chamado de *permissividade* do material:

$$\epsilon = (1 + \chi_e)\epsilon_0. \quad (28)$$

No vácuo, não há polarização, e $\chi_e = 0$. Nessas condições, a Eq. (28) nos diz que $\epsilon = \epsilon_0$. Por isso, ϵ_0 é conhecido como *permissividade do vácuo*. O fator de proporcionalidade na Eq. (28) é

$$\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e. \quad (29)$$

De todos essas definições, a mais usados na prática é o nome de ϵ_r : *constante dielétrica*. Nos materiais lineares (e somente nos materiais lineares), temos que

$$D = \epsilon E. \quad (30)$$

Nos demais, temos de nos contentar com a Eq. (20).

Esfera condutora envolvida por casca esférica

A figura 5 mostra uma esfera condutora, de raio a , envolvida por uma casca esférica dielétrica, com raio externo b . A constante dielétrica do meio é ϵ_r . Queremos encontrar o campo elétrico dentro do material quando o conjunto é posicionado num campo elétrico inicialmente uniforme \vec{E}_0 .

Como a esfera é simétrica, podemos escolher o eixo z na direção do campo externo \vec{E}_0 . Muito longe da esfera, o campo das cargas nela induzidas tenderá a zero. Dito de outra forma, para grandes distâncias o campo voltará a ser $\vec{E}_0 = E_0\hat{z}$.

Para resolver esse problema, temos de recorrer ao método da separação das variáveis. Para isso precisaremos do potencial. O primeiro passo é definir o ponto onde o potencial se anula. Aqui, temos uma situação especial, porque o campo elétrico torna o potencial grande (em módulo) tanto em $z \rightarrow \infty$ como em $z \rightarrow -\infty$.

Felizmente, a simetria do problema nos ajuda. O plano horizontal $z = 0$, que passa pelo centro da esfera é simétrico em relação aos

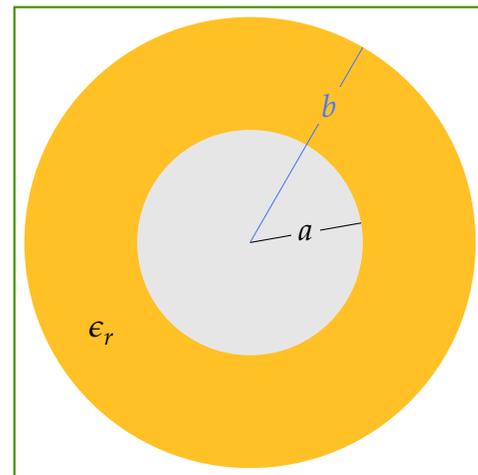


Figura 5: Casca dielétrica em torno de esfera condutor.

limites $z \rightarrow \pm\infty$. Podemos, portanto, escolher um ponto sobre o plano $z = 0$ e muito distante da origem como referência para o potencial. Uma vez que o campo elétrico é o negativo do gradiente do potencial, essa escolha significa que $V(\vec{\mathbf{R}}) = -Ez$ ou, em coordenadas esféricas

$$V(r \rightarrow \infty, \theta) = -E_0 r \cos(\theta). \quad (31)$$

A separação de variáveis permite escrever o potencial fora do dielétrico na forma

$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (r \geq b). \quad (32)$$

Se o potencial se anulasse para $r \rightarrow \infty$, todos os coeficientes A_{ℓ} deveriam ser nulos no lado direito da Eq. (32). No caso, em lugar de tender a zero, o potencial obedece à Eq. (31), cujo lado direito é proporcional a $rP_1(\cos \theta)$. Isso mostra que o coeficiente A_1 é $-E_0$, enquanto todos os demais A_{ℓ} ($\ell \neq 1$) são nulos. A expressão para o potencial fora do dielétrico se reduz a

$$V(r, \theta) = -E_0 r P_1(\cos \theta) + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (r \geq b). \quad (33)$$

e os coeficientes B_{ℓ} ainda precisam ser determinados.

No interior do dielétrico, o potencial tem forma análoga à da Eq. (32):

$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(C_{\ell} r^{\ell} + \frac{F_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (a \leq r \leq b), \quad (34)$$

com coeficientes F_{ℓ} no segundo termo entre parênteses para não confundir com o vetor deslocamento $\vec{\mathbf{D}}$ ou com o campo elétrico $\vec{\mathbf{E}}$.

Nenhum dos coeficientes pode ser eliminado, de início, porque a região nem se estende até o infinito nem inclui a origem. Entretanto, como a esfera é condutora, o potencial na sua superfície é uma constante V_0 :

$$V_0 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(C_{\ell} a^{\ell} + \frac{F_{\ell}}{a^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta). \quad (35)$$

O único polinômio de Legendre independente de θ é P_0 . Para cada um dos demais, o coeficiente que multiplica $P_{\ell}(\cos \theta)$ tem de ser zero, isto é,

$$C_{\ell} a^{\ell} + \frac{F_{\ell}}{a^{\ell+1}} = 0 \quad (\ell = 1, 2, \dots), \quad (36)$$

ou seja

$$F_{\ell} = -C_{\ell} a^{2\ell+1} \quad (\ell = 1, 2, \dots). \quad (37)$$

Com isso e com $r = a$, a Eq. (35) fica reduzida a

$$V_0 = C_0 + F_0 \quad (38)$$

A substituição das Eqs. (37) e (38) na Eq. (34) resulta na expressão

$$V(r, \theta) = V_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} C_{\ell} r^{\ell} \left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^{2\ell+1}\right) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (a \leq r \leq b). \quad (39)$$

Temos agora duas equações para o potencial na superfície $r = b$ do dielétrico, a Eq. (33), com $r = b$, e a Eq. (39), com $r = b$. Igualamos os lados direitos das duas para obter a expressão

$$-E_0 b P_1(\cos \theta) + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{b^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) = V_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} C_{\ell} b^{\ell} \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2\ell+1}\right) P_{\ell}(\cos \theta). \quad (40)$$

Uma vez que os polinômios de Legendre são ortogonais, os termos proporcionais a $P_{\ell}(\cos \theta)$ ($\ell = 0, 1, \dots$) de cada lado devem ser iguais. Para $\ell = 0$, isso significa que

$$B_0 = V_0 b. \quad (41)$$

Para $\ell = 1$, a Eq. (40) mostra que

$$B_1 - E_0 b^3 = C_1 (b^3 - a^3); \quad (42)$$

e, para $\ell = 2, 3, \dots$, que

$$B_{\ell} = C_{\ell} (b^{2\ell+1} - a^{2\ell+1}). \quad (43)$$

Por enquanto, somente encontramos B_0 , na Eq. (41). Para determinar os demais coeficientes B_{ℓ} ($\ell = 1, 2, \dots$), precisamos encontrar outra relação entre eles e os coeficientes C_{ℓ} ($\ell = 1, 2, \dots$). Isso pede atenção ao vetor deslocamento em $r = b$. De acordo com a Eq. (24), as componentes normais do vetor deslocamento devem ser iguais dentro e fora do dielétrico¹. Fora do dielétrico, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = -\epsilon_0 \partial V / \partial r$, e segue da Eq. (33) que

$$D_r(r = b, \theta) = \epsilon_0 \left(E_0 P_1(\cos \theta) + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\ell + 1) B_{\ell}}{b^{\ell+2}} P_{\ell}(\cos \theta) \right). \quad (44)$$

No interior do dielétrico, o vetor deslocamento é $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$, e segue da Eq. (39) que

$$D_r(r = b, \theta) = -\epsilon_0 \epsilon_r \sum_{\ell=1}^{\infty} C_{\ell} \frac{\ell b^{2\ell+1} + (\ell + 1) a^{2\ell+1}}{b^{\ell+2}} P_{\ell}(\cos \theta). \quad (45)$$

¹ As componentes tangenciais do campo elétrico dentro e fora do dielétrico também são iguais, conforme indicado pela Eq. (25). Essa relação é menos interessante, porém, porque a componente tangencial do campo elétrico é proporcional a $\partial V / \partial \theta$, e diferenciar os polinômios de Legendre em relação a θ é bem mais difícil do que derivar r^{ℓ} ou $1/r^{\ell+1}$ em relação a r .

Assim como fizemos na Eq. (40), devemos agora igualar os coeficientes dos $P_\ell(\cos\theta)$ nos lados direitos das Eqs. (44) e (45). Cancelado o fator comum ϵ_0 , o resultado pode ser decomposto em duas equações:

$$E_0 b^3 + 2B_1 = -\epsilon_r C_1 (b^3 + 2a^3), \quad (46)$$

proveniente da parcela com $\ell = 1$, e

$$B_\ell b^{\ell+2} = -\epsilon_r C_\ell \left(\frac{\ell}{\ell+1} b^{2\ell+1} + a^{2\ell+1} \right) \quad (\ell = 2, 3, \dots), \quad (47)$$

proveniente dos demais parcelas.

Junto com a Eq. (42), a Eq. (46) constitui um sistema de duas equações com as incógnitas C_1 e B_1 . Resolvido o sistema, encontramos que

$$B_1 = \epsilon_r E_0 b^3 \frac{\epsilon_r - 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 (2\epsilon_r + 1)}{\epsilon_r + 2 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 (\epsilon_r - 1)} \quad (48)$$

e

$$C_1 = -E_0 \frac{3}{\epsilon_r + 2 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 (\epsilon_r - 1)}. \quad (49)$$

Para $\ell \geq 2$, o sistema de equações a ser resolvido é outro. Em contraste com as Eqs (42) e (46), que incluem termos proporcionais ao campo externo, o sistema das Eqs. (43) and (47) é homogêneo, isto é, as equações são formadas exclusivamente por termos proporcionais a C_ℓ ou a D_ℓ . Daí vemos que a solução é

$$C_\ell = D_\ell = 0 \quad (\ell = 2, 3, \dots). \quad (50)$$

Daí segue que apenas os termos com $\ell = 1$ contribuem para o campo elétrico. O termo com $\ell = 0$ é constante e somente contribui para o potencial. O campo elétrico dentro do dielétrico

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_r \hat{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{E}}_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (51)$$

onde

$$E_r(r, \theta) = -C_1 \left(1 + 2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right) \cos(\theta) \quad (b \geq r \geq a); \quad (52)$$

e

$$E_\theta(r, \theta) = C_1 \left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right) \sin(\theta) \quad (b \geq r \geq a). \quad (53)$$

É instrutivo ver essas expressões em coordenadas cartesianas. Para isso, basta lembrar que, no plano $x = 0$,

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin(\theta) \hat{\mathbf{y}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{z}} \quad (54)$$

e

$$\hat{\theta} = \cos(\theta)\hat{y} - \sin(\theta)\hat{z}. \quad (55)$$

Substituímos, então, os lados direitos dessas duas igualdades pelos versores na Eq. (51). Resulta que $\vec{E} = E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$, onde

$$E_z = -C_1 - C_1 \left(\frac{r_a}{r}\right)^3 (3\cos^2\theta - 1) \quad (56)$$

e

$$E_y = -3C_1 \left(\frac{r_a}{r}\right)^3 \sin(\theta)\cos(\theta). \quad (57)$$

O primeiro termo à direita na Eq. (56) é constante, independente de r ou θ . Essa parcela provém do campo externo, que se torna menor dentro do material porque o dielétrico se polariza. O fator de redução² é $-C_1$. Na ausência de dielétrico, a constante ϵ_r seria unitária; não haveria redução e a primeira parcela seria E_0 — o campo externo.

Tanto na Eq. (56) como na (57), somente a constante C_1 depende da intensidade do campo elétrico externo E_0 e da constante dielétrica ϵ_r . Por isso, a direção do campo elétrico em pontos no interior do material é função somente da razão entre os raios a e b ; a figura 6 mostra as linhas de campo.

O campo externo empurra cargas positivas para o hemisfério superior da esfera condutora e negativas para o hemisfério inferior. Das cargas positivas na parte superior nascem linhas de campo que atravessam o dielétrico em direção à região superior da superfície do dielétrico; nas negativas, morrem linhas provenientes da região inferior da superfície. O campo elétrico devido às cargas na superfície do condutor tem sentido descendente, oposto ao sentido do campo externo. Os dois campos se cancelam num cinturão em torno da esfera condutora no plano que passa pelo seu equador. Esse cinturão aparece como vazios na distribuição das linhas de campo nessa região, à esquerda e à direita da esfera condutora. Fora dessa região, o campo é aproximadamente uniforme.

A polarização do dielétrico simplesmente reduz o campo no interior do material. As curvas azuis na figura também descrevem as linhas de polarização, visto que a polarização é proporcional ao campo elétrico. Assim, no final de cada linha há uma carga de polarização positiva e, no início de cada linha, uma negativa. No topo da esfera condutora, por exemplo, aparecem cargas de polarização negativas que parcialmente neutralizam o efeito das cargas livres positivas ali acumuladas

² A Eq. (49) mostra que $-C_1$ é sempre positivo e menor ou igual a E_0 .

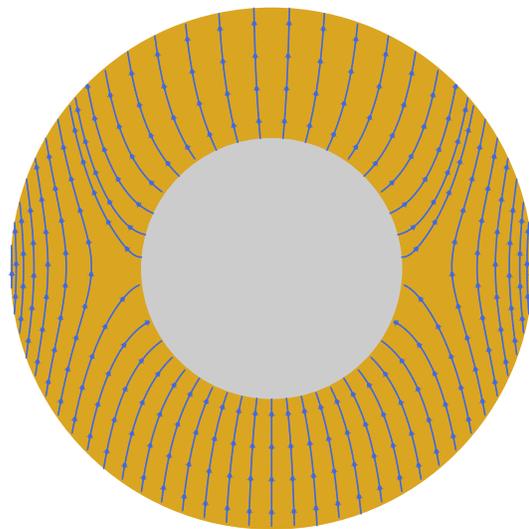


Figura 6: Campo elétrico no interior do dielétrico da figura 4.

pelo campo externo. Em suma, as linhas de campo no interior do material têm o mesmo formato que teriam se não houvesse dielétrico em torno da esfera.