Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #19

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

21/06/2022

Agenda:

Capítulo 5: Tensões em Vigas (Tópicos Básicos)

1. Introdução (5.1)
2. Flexão pura e flexão não uniforme (5.2)
3. Curvatura de uma viga (5.3)
4. Deformações longitudinais em vigas (5.4)
5. Tensões normais em vigas (materiais elásticos lineares) (5.5)

1. Introdução

O capítulo 5 trata das tensões e deformações em vigas submetidas a esforços transversais no plano *xy*, considerado um plano de simetria da seção transversal, resultando em deflexão da viga no mesmo plano, denominado plano de flexão.

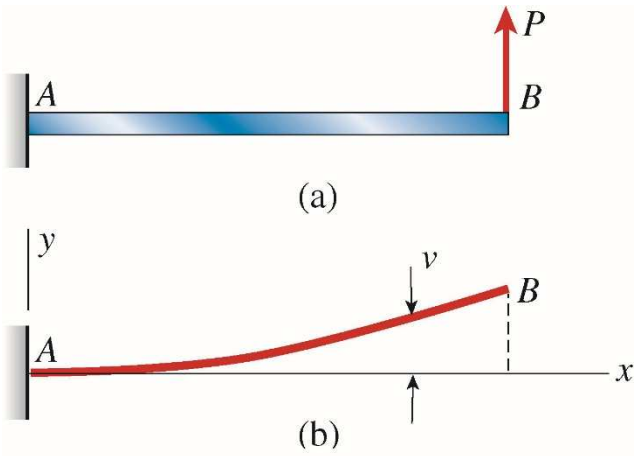


FIG. 5-1 Bending of a cantilever beam: (a) beam with load, and (b) deflection curve

A deflexão da viga em qualquer ponto ao longo de seu eixo é o deslocamento desse ponto, em relação à sua posição original, medido na direção *y*. Denotaremos esse deslocamento pela letra v.

2. Flexão pura e flexão não uniforme

Diz-se que uma viga está em flexão pura (ou flexão uniforme) quando o momento fletor ao longo da viga é constante, como ilustrado na figura abaixo:

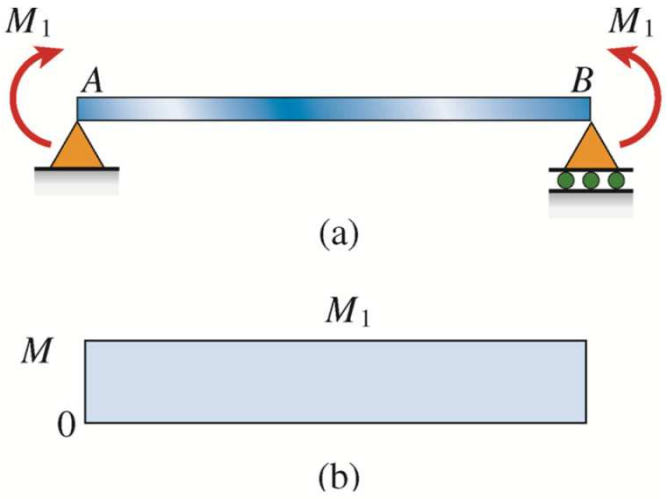


FIG. 5-2 Simple beam in pure bending ($M = M_1$)

Lembrando a relação entre força cortante e momento fletor dada por:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

Concluímos que, no caso em que há flexão pura:

$$V(x) = 0$$

Note ainda que, para o carregamento indicado na figura, não há reações de apoio em A, nem em B.

Outro exemplo em que há flexão pura está ilustrado na figura 5.3 (viga engastada-livre, submetida a um momento M_2 na extremidade livre):

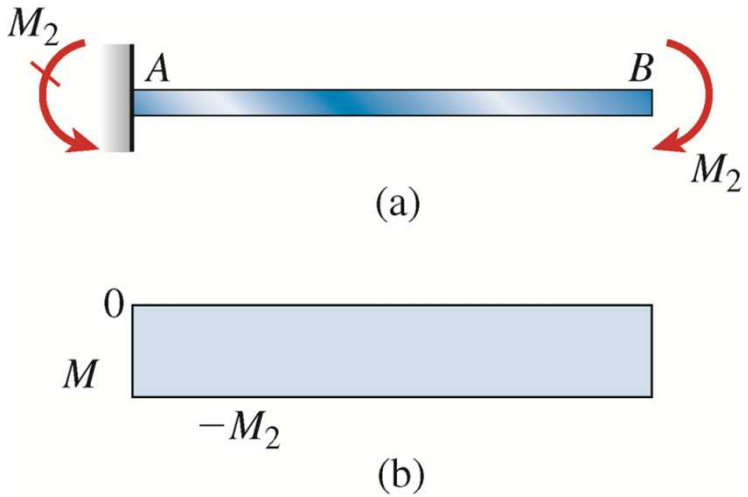


FIG. 5-3 Cantilever beam in pure bending ($M = -M_2$)

Como no caso anterior, não há forças cortantes ao longo da viga:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = 0$$

... e a única reação de apoio será um momento de magnitude igual ao momento M_2 aplicado na extremidade livre, mas com sentido oposto.

Um 3º exemplo em que podemos verificar a existência de flexão pura é o caso da viga biapoiada submetida a carregamentos concentrados equidistantes dos apoios A e B: é possível verificar prontamente que na região central da viga temos momentos fletores que não variam (dados pelo produto Pa) e, consequentemente, $V(x) = 0$, na região central.

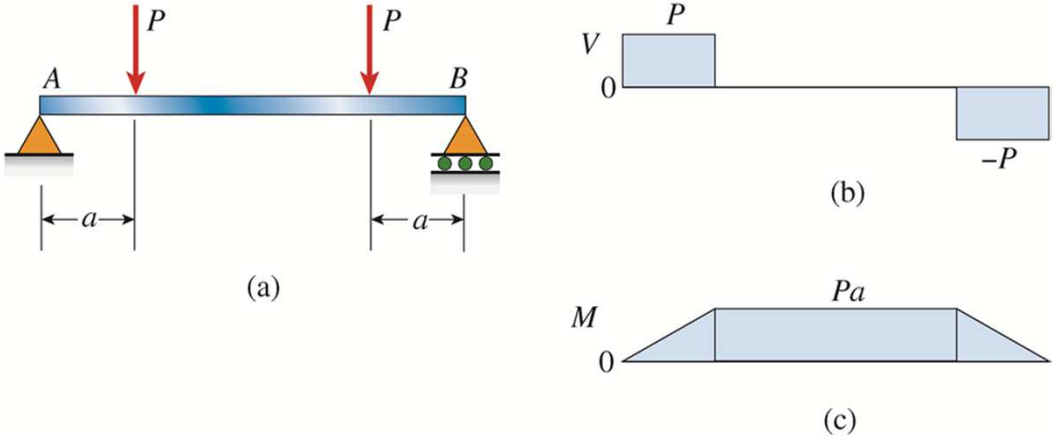


FIG. 5-4 Simple beam with central region in pure bending and end regions in nonuniform bending

Observe, contudo, que nas extremidades da viga, temos a presença de forças cortantes e momentos fletores variáveis, o que caracteriza a flexão não-uniforme.

3. Curvatura de uma viga

Quando cargas são aplicadas a uma viga, seu eixo longitudinal é deformado em uma curva (que será plana, nesses casos). As tensões e deformações resultantes estão diretamente relacionadas à curvatura da curva de deflexão.

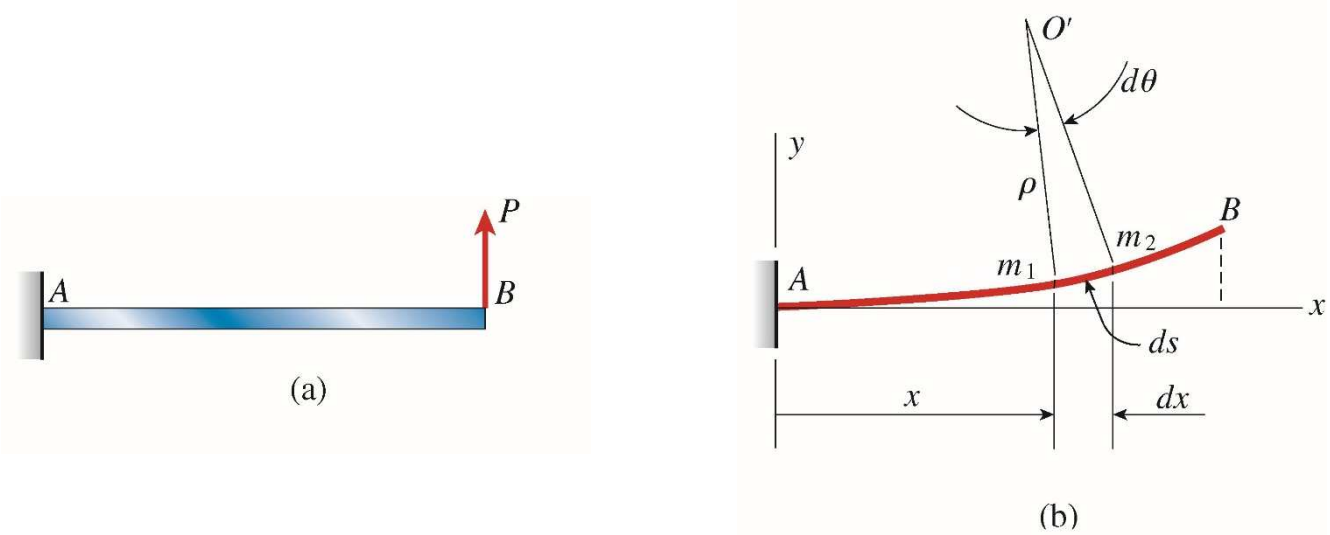
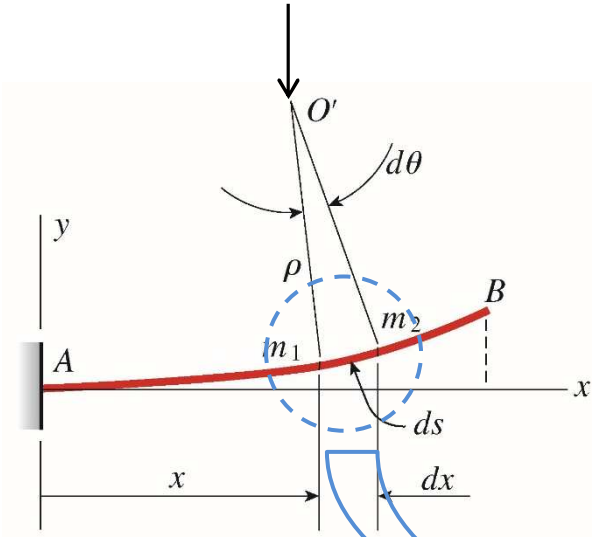


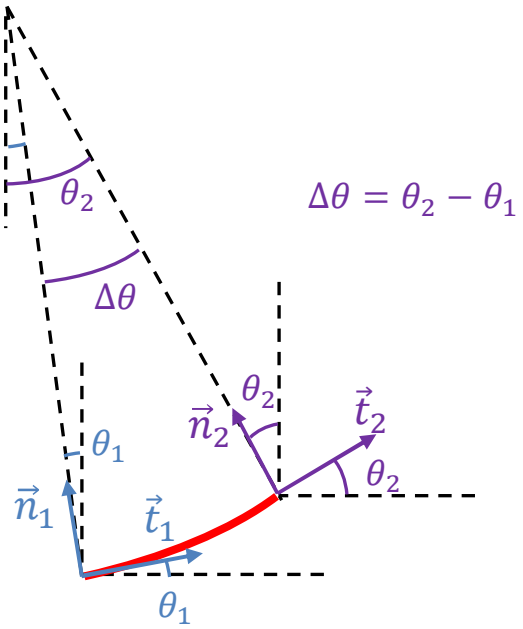
FIG. 5-5 Curvature of a bent beam: (a) beam with load, and (b) deflection curve

Determinação da expressão (exata) da curvatura em um ponto de uma curva plana

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$$

O': Centro de curvatura

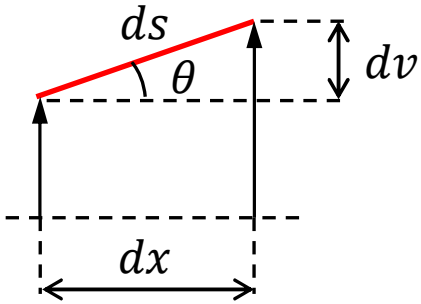




Podemos escrever: $\kappa = \dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{d\theta}{dx}.\dfrac{dx}{ds}$

Mas, no limite para $\Delta s \to 0$: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dv)^2$

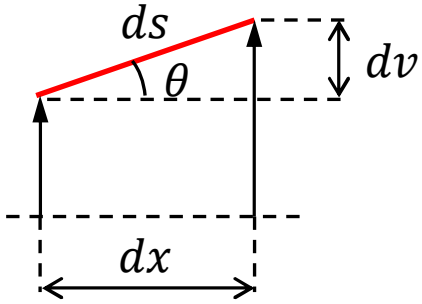
$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = 1 + (v'(x))^2$$



$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (v'(x))^2}$$

Logo: $$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (v'(x))^2}}$$

Por outro lado: $\tan(\theta) = \frac{dv}{dx}$



Logo: $\frac{d}{dx}(\tan(\theta)) = v''(x)$

$$\frac{d(\tan(\theta))}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} = v''(x)$$

Mas: $\frac{d(\tan(\theta))}{d\theta} = sec^2\theta = \frac{1}{cos^2\theta}$ E: $cos\theta = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+(v'(x))^2}}$

Logo: $\frac{d\theta}{dx} = cos^2\theta . v''(x) = \frac{v''(x)}{1+(v'(x))^2}$

Finalmente:

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx}.\frac{dx}{ds} = \frac{v''(x)}{1+(v'(x))^2}.\frac{1}{\sqrt{1+(v'(x))^2}}$$

$$\kappa = \frac{v''(x)}{[1+(v'(x))^2]^{3/2}}$$

Expressão exata, porém <u>não linear</u> para a curvatura (válida tanto para pequenos quanto para grandes deslocamentos)

Porém, se tivermos condições de linearidade geométrica (pequenos deslocamentos e pequenas rotações):

$$v'(x) = \tan(\theta) \cong \theta \ll 1$$

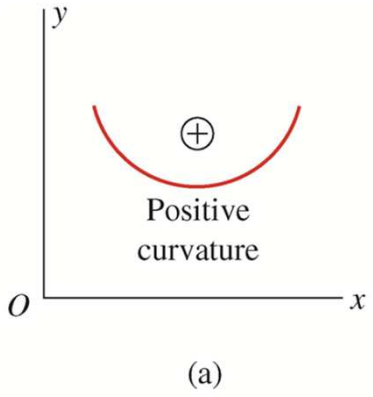
$$\kappa = \frac{v''(x)}{[1 + (v'(x))^2]^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad \kappa \cong v''(x)$$

Expressão aproximada (linearizada) da curvatura
(válida apenas em condições de L.G.)

Convenção de sinais para a curvatura:

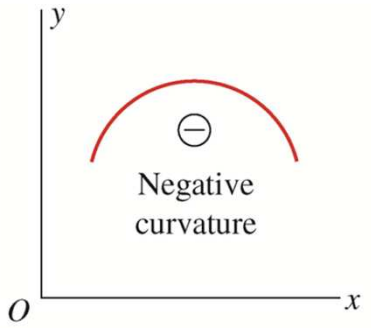
Lembrando que, por definição: $\kappa = \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$

Então:



(a)

$\kappa > 0$



(b)

$\kappa < 0$

4. Deformações longitudinais em vigas

Hipóteses:

- O eixo central da viga na configuração inicial (não deformada) é reto;
- O plano *xy* é um plano de simetria da viga e de suas seções transversais;
- A viga está submetida à flexão uniforme e o plano de simetria *xy* é o plano de flexão da viga;
- Existem condições de linearidade geométrica.

Nestas condições, "*...as seções transversais, planas e ortogonais ao eixo central da viga antes da deformação, continuarão planas e ortogonais ao eixo central da viga na configuração deformada*" (Hipótese de Euler-Bernoulli).

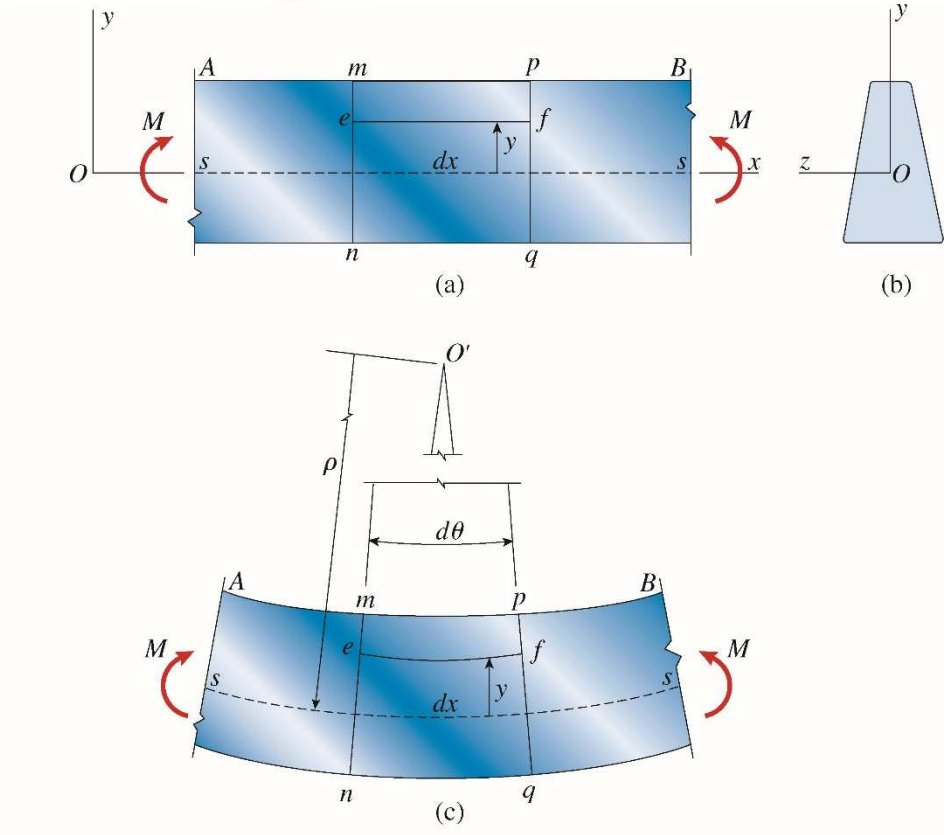


FIG. 5-7 Deformations of a beam in pure bending: (a) side view of beam, (b) cross section of beam, and (c) deformed beam

O alongamento da fibra *ef* é dado por:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L_f - L_0}{L_0}$$

Onde:

$$L_0 = dx = \rho d\theta$$

$$L_f = (\rho - y)d\theta$$

Logo:

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta}$$

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y$$

5. Tensões normais em vigas (materiais elásticos lineares)

Considerando que o material da viga tenha comportamento elástico linear, e que as demais tensões normais (σ_y e σ_z) sejam desprezíveis face às tensões normais σ_x, teremos:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

Mas, considerando válida a relação deduzida no item anterior (mesmo para os casos de flexão não uniforme), teremos:

$$\varepsilon_x = -\kappa y$$

De onde resulta a seguinte distribuição de tensões na seção transversal:

$$\sigma_x = -E\kappa y$$

A relação anterior mostra que a tensão σ_x varia linearmente com a distância y do ponto (onde a tensão atua) até a linha neutra, como mostra a figura abaixo:

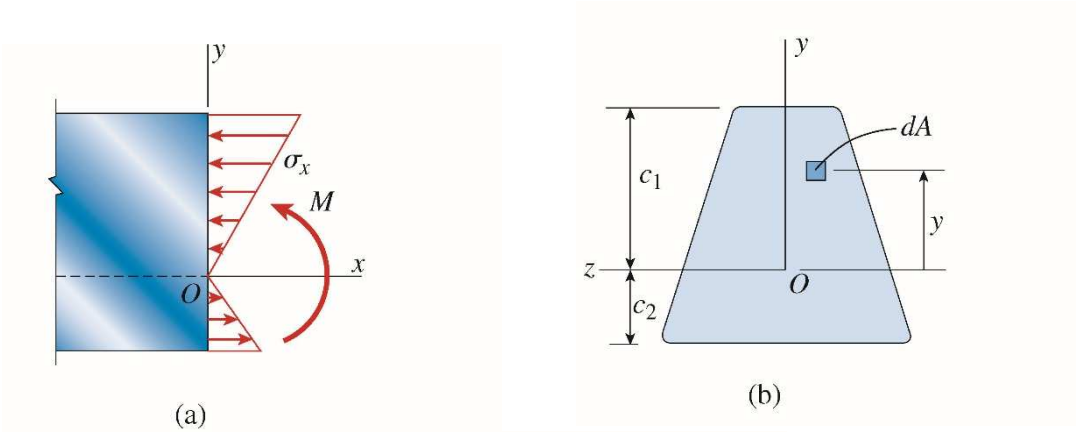


FIG. 5-9 Normal stresses in a beam of linearly elastic material: (a) side view of beam showing distribution of normal stresses, and (b) cross section of beam showing the z axis as the neutral axis of the cross section

Resta saber:

1. Onde se encontra a linha neutra?
2. Como a curvatura local está relacionada com o momento fletor na seção?

1. Considerando que sobre as seções transversais da viga não atuem forças normais, teremos (considerando uma seção transversal genérica):

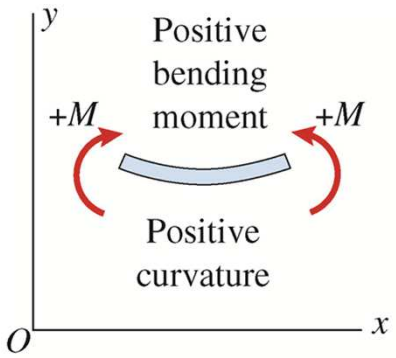
$$N = \iint_A \sigma_x dA = -\iint_A E\kappa y dA = -E\kappa \iint_A y dA = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \iint_A y dA = 0$$

Logo, a linha neutra deve passar, obrigatoriamente, pelo centroide da seção transversal.

2. Impondo que o momento das forças distribuídas na área (ou seja, das tensões σ_x) seja estaticamente equivalente ao momento fletor na seção transversal, virá:

$$M = -\iint_A \sigma_x y dA = -\iint_A (-E\kappa y) y dA = E\kappa \iint_A y^2 dA \quad \Leftrightarrow \quad M = EI_z\kappa$$

$$M = EI_z\kappa$$



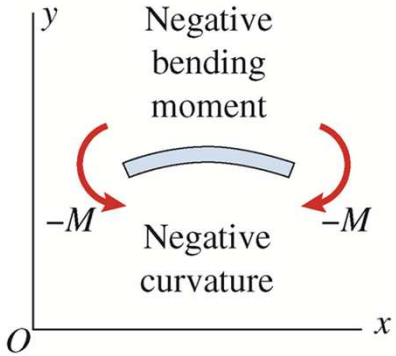


FIG. 5-10 Relationships between signs of bending moments and signs of curvatures

Combinando as fórmulas anteriores:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= -E\kappa y \\ M &= EI_z\kappa\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \sigma_x = -\frac{M}{I_z}y$$

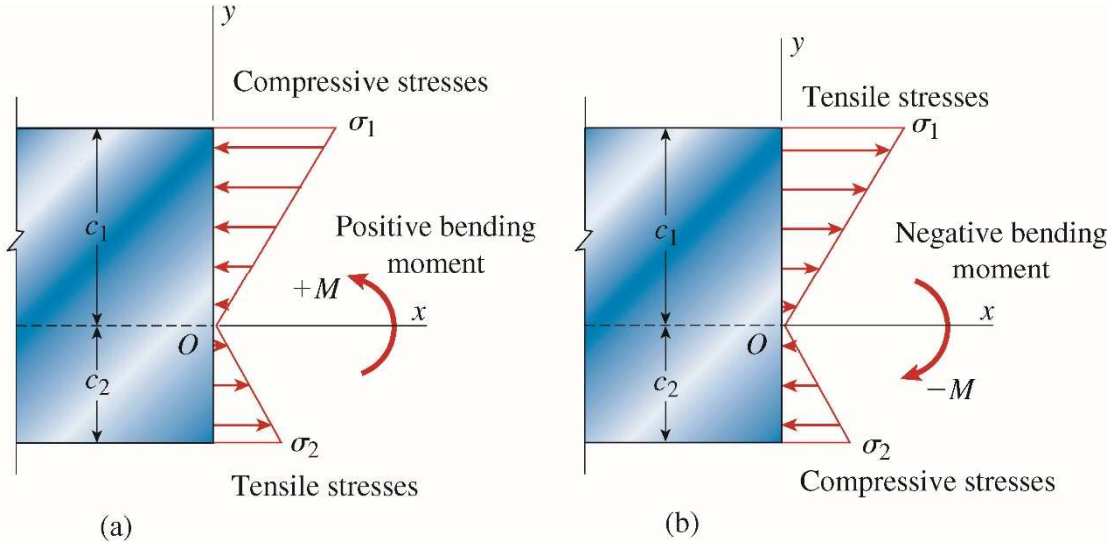


FIG. 5-11 Relationships between signs of bending moments and directions of normal stresses: (a) positive bending moment, and (b) negative bending moment

Observações finais:

1. Pode-se verificar facilmente que todas as relações obtidas são dimensionalmente corretas, como:

$$\sigma_x = -E\kappa y \quad \Rightarrow \quad [\sigma_x] = [E][\kappa][y] = \frac{N}{m^2}.\frac{1}{m}.m = \frac{N}{m^2}$$

$$\sigma_x = -\frac{M}{I_z}y \quad \Rightarrow \quad [\sigma_x] = \frac{[M]}{[I_z]}[y] = \frac{N.m}{m^4}.m = \frac{N}{m^2}$$

2. Dentro das condições de validade do Princípio da Superposição, podemos determinar o estado tensional nos pontos de uma seção submetida a flexo-tração (ou flexo-compressão) como:

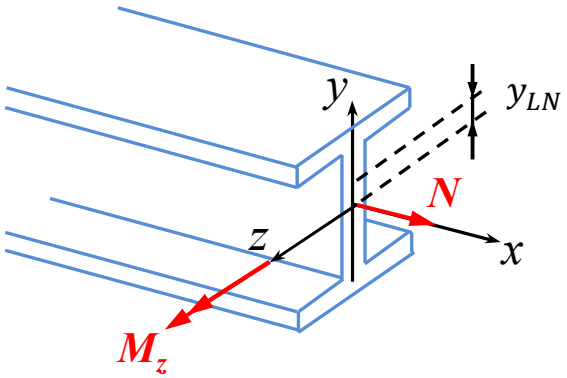
$$\left.\begin{aligned}\sigma_{x1} &= \frac{N}{A}\\ \sigma_{x2} &= -\frac{M}{I_z}y\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = \sigma_{x1} + \sigma_{x2} = \frac{N}{A} - \frac{M}{I_z}y$$

Nesse caso, a linha neutra não passa mais pelo centroide (em virtude da ação da força normal) mas pode ser determinada facilmente impondo que $\sigma_x = 0$:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M}{I_z} y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_{LN} = \frac{I_z}{A} . \frac{N}{M}$$

Sendo a distância y_{LN} medida a partir do eixo z, onde está situado o centroide.

No caso em que, por exemplo, $N > 0$ e $M = M_z > 0$, teremos $y_{LN} > 0$.



Referências:

[1] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.5.