



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia Mecânica*

*PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I*

*Aula #18*

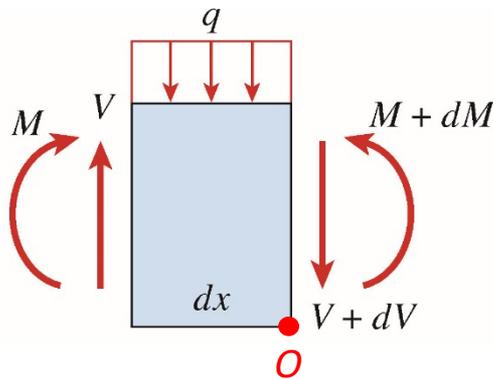
*Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins*

*14/06/22*



## 4.4 Relações entre cargas, forças cortantes e momentos fletores

### a) Carga distribuída



$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow \cancel{V} - qdx - (\cancel{V} + dV) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dx} = -q$$

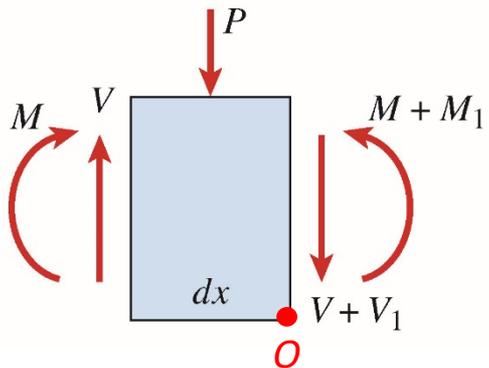
$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow \cancel{-M} - qdx \frac{dx}{2} - Vdx + \cancel{M} + dM = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dx} = V$$



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

b) Carga concentrada:



$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow \cancel{V} - P - (\cancel{V} + V_1) = 0$$

$$\Rightarrow V_1 = -P$$

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow \cancel{M} - P \frac{dx}{2} - V dx + (\cancel{M} + M_1) = 0$$

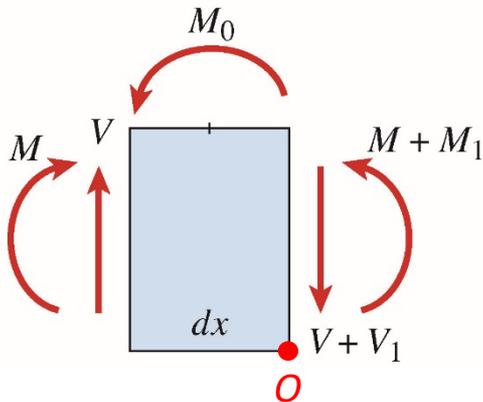
$$\Rightarrow M_1 = P \frac{dx}{2} + V dx$$

$$dx \rightarrow 0 \Rightarrow M_1 = 0$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

c) *Momento:*



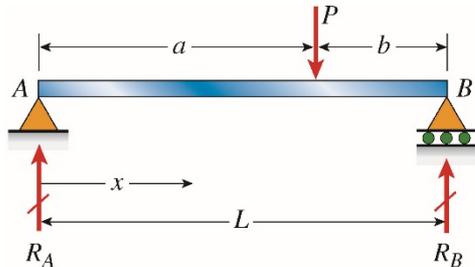
$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow \cancel{V} - (\cancel{V} + V_1) = 0$$
$$\Rightarrow V_1 = 0$$

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow \cancel{-M} + M_0 - Vdx + \cancel{M} + M_1 = 0$$
$$\Rightarrow M_1 = -M_0 + Vdx$$

$$dx \rightarrow 0 \Rightarrow M_1 = -M_0$$

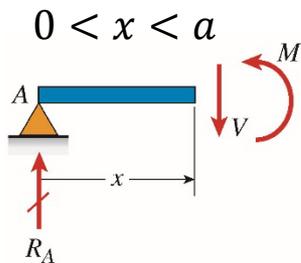


### 4.5 Diagramas de força cortante e momento fletor



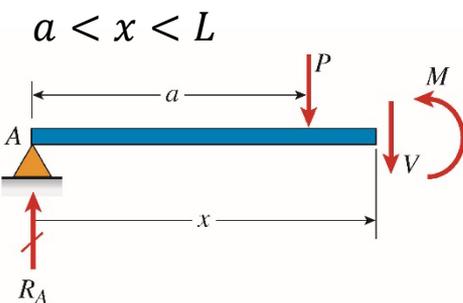
$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow R_A + R_B - P = 0$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -R_A L + Pb = 0 \Rightarrow R_A = \frac{Pb}{L} \Rightarrow R_B = \frac{Pa}{L}$$



$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow V = R_A = \frac{Pb}{L}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M - Vx = 0 \Rightarrow M = \frac{Pbx}{L}$$

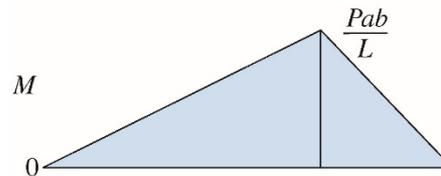
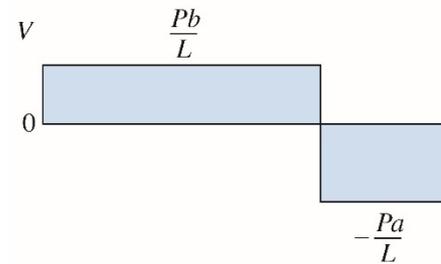
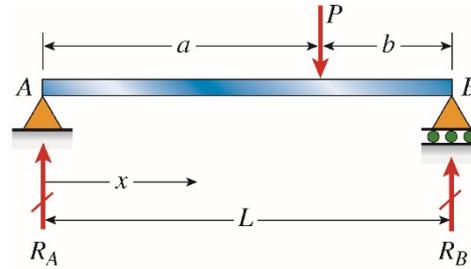


$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow V = R_A - P \Rightarrow V = -\frac{Pa}{L}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M - Vx - Pa = 0 \Rightarrow M = \frac{Pa}{L}(L - x)$$

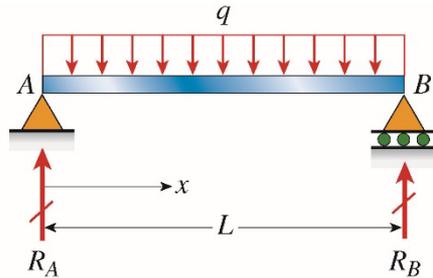


**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

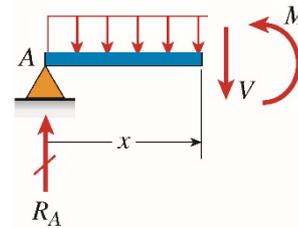




**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

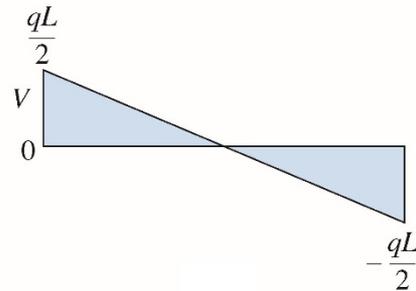


$$R_A = R_B = \frac{qL}{2}$$



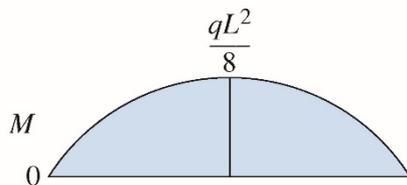
$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow V = R_A - qx$$

$$\Rightarrow V = \frac{qL}{2} - qx$$



$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M - Vx - qx \frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

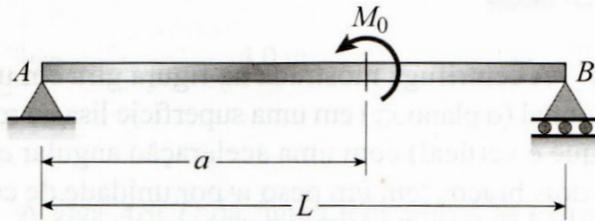




**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**4.5-2** Uma viga simples  $AB$  está submetida a um momento  $M_0$  no sentido anti-horário atuando a uma distância  $a$  do apoio esquerdo (veja a figura).

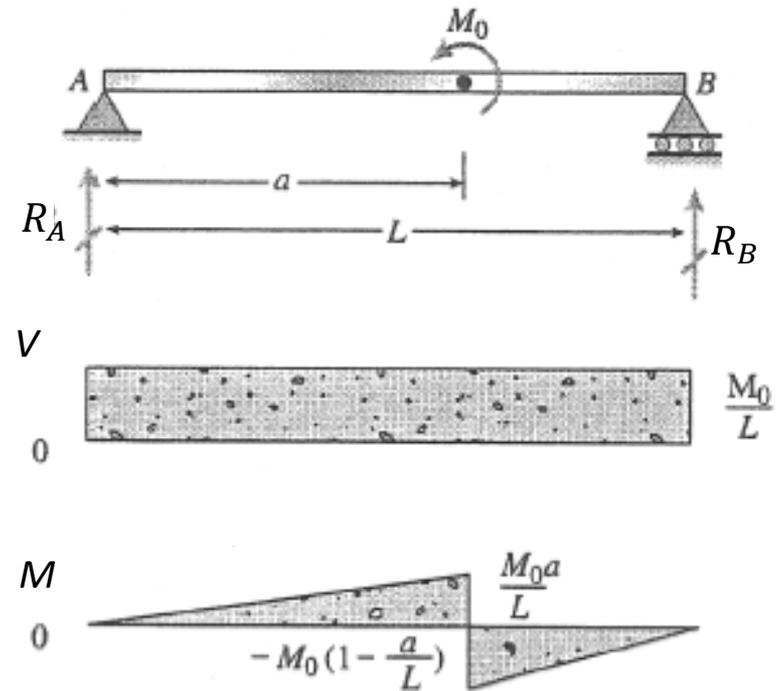
Desenhe os diagramas de momento fletor e de força cortante para essa viga.



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = 0$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -R_A L + M_0 = 0$$

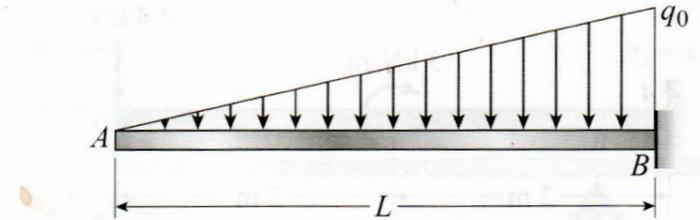
$$\Rightarrow R_A = \frac{M_0}{L} \Rightarrow R_B = -\frac{M_0}{L}$$





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

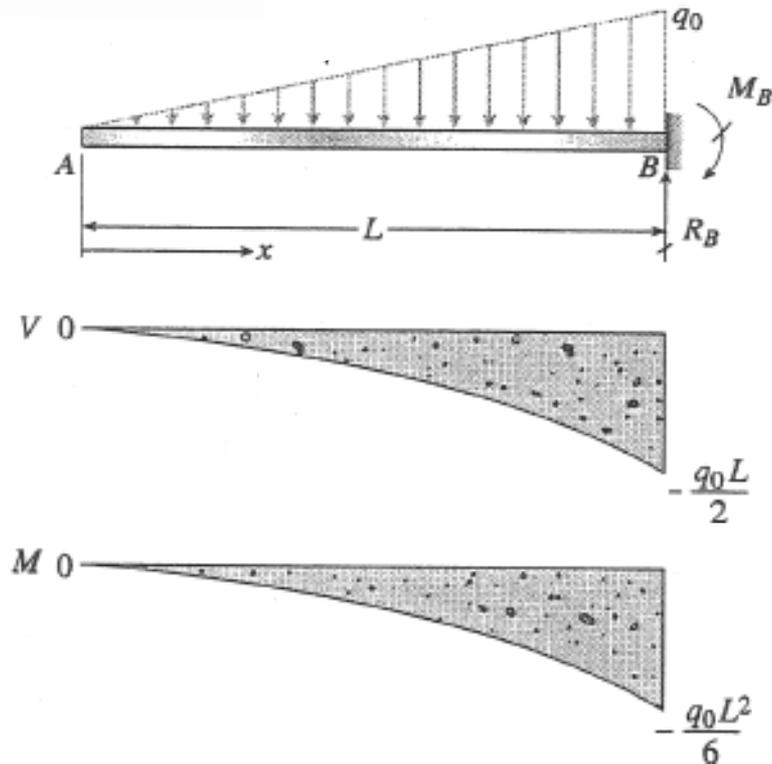
**4.5-10** Desenhe os diagramas de momento fletor e de força cortante para a viga  $AB$ , com uma extremidade engastada e a outra livre, submetida a um carregamento linearmente variável de intensidade máxima  $q_0$  (veja a figura).



$$q(x) = q_0 \frac{x}{L}$$

$$V(x) = -q_0 \frac{x^2}{2L}$$

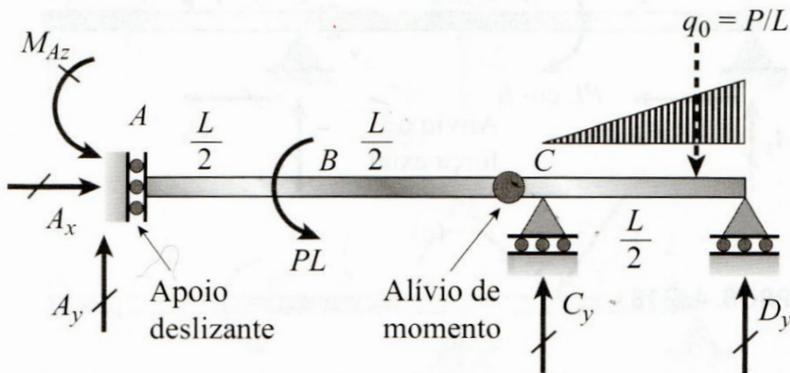
$$M(x) = -q_0 \frac{x^3}{6L}$$



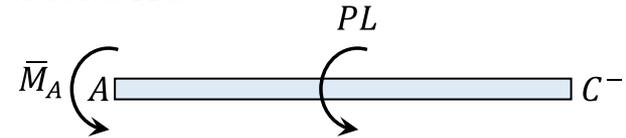


**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**4.5.24** As vigas  $ABC$  e  $CD$  são sustentadas em  $A$ ,  $C$  e  $D$  e unidas por uma articulação (ou *alívio de momento*) logo à esquerda de  $C$ . O apoio em  $A$  é um apoio deslizante (logo, a reação é  $A_y = 0$  para o carregamento ilustrado abaixo). Encontre todas as reações de apoio, depois trace os diagramas de momento ( $M$ ) e de força cortante ( $V$ ). Identifique os valores críticos de  $V$  e  $M$  e também a *distância* dos pontos em que  $V$  e/ou  $M$  são zero.

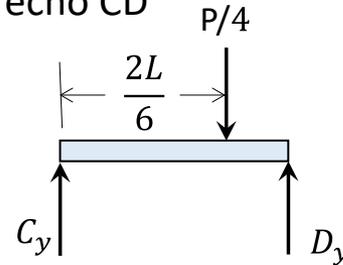


Trecho  $AC^-$



$$\Sigma M_{C^-} = 0 \Rightarrow \bar{M}_A = -PL$$

Trecho CD



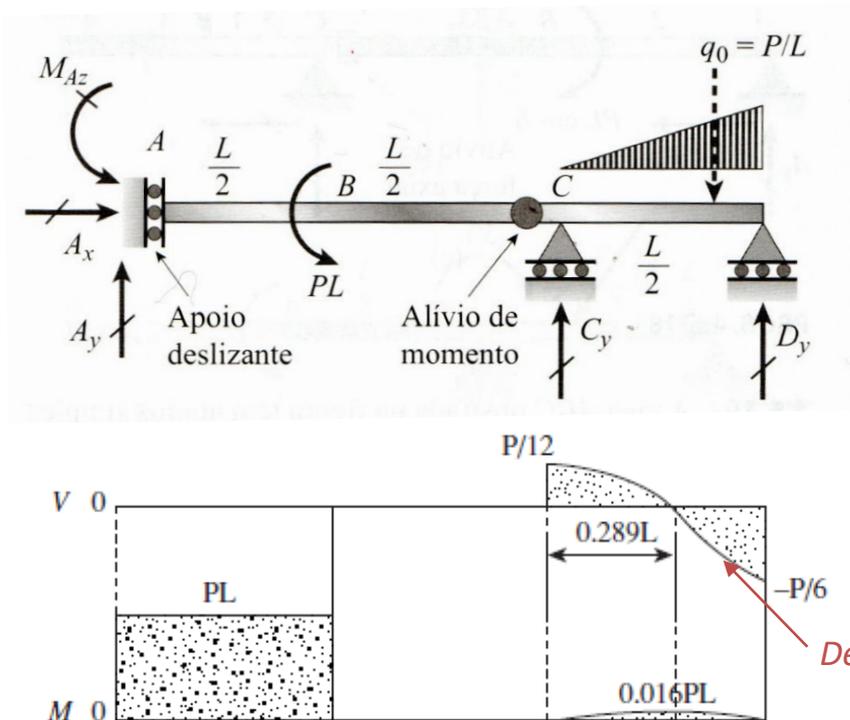
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow C_y + D_y = \frac{P}{4}$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow D_y \frac{L}{2} - \frac{P}{4} \frac{2L}{6} = 0$$

$$\Rightarrow D_y = \frac{P}{6} \Rightarrow C_y = \frac{P}{12}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia Mecânica



Trecho CD

$$q(x) = q_0 2 \frac{x}{L} = 2P \frac{x}{L^2}$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{P}{12} - P \left( \frac{x}{L} \right)^2$$

$$\Rightarrow M(x) = \frac{Px}{12} - \frac{Px^3}{3L^2}$$

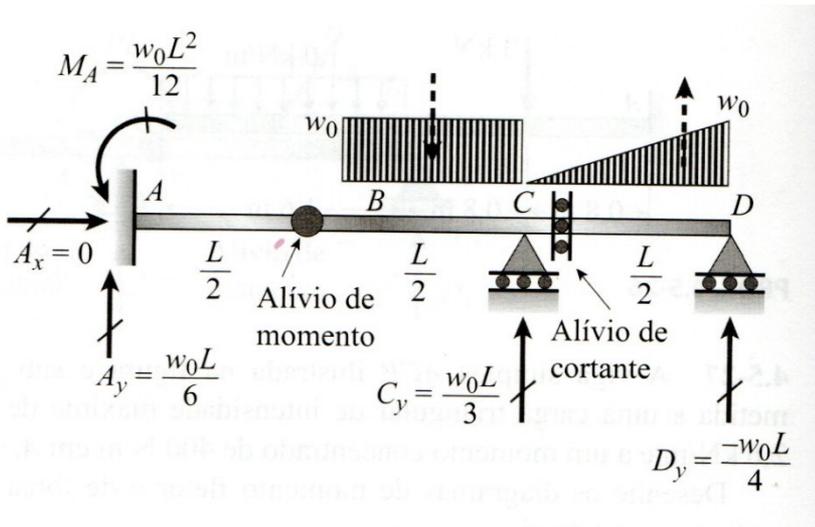
*Deveria ser uma curva do 2º grau*



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**4.5-34** A viga composta a seguir tem um *alívio de momento* logo à esquerda de *B* e um *alívio de cortante* logo à direita de *C*. As reações foram calculadas em *A*, *C* e *D* e são exibidas na figura.

Primeiro, confirme as expressões de reação usando a estática e, então, trace os diagramas de momento (*M*) e de força cortante (*V*). *Identifique* todos os valores críticos de *V* e *M* e também a *distância* dos pontos em que *V* e/ou *M* é zero.



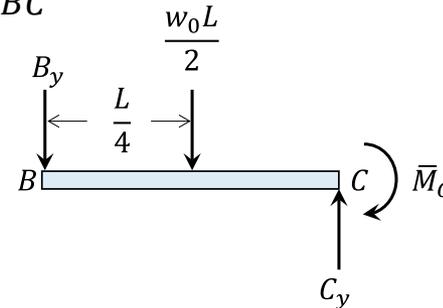
Trecho AB



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \bar{M}_A + B_y \frac{L}{2} = 0$$

Trecho BC

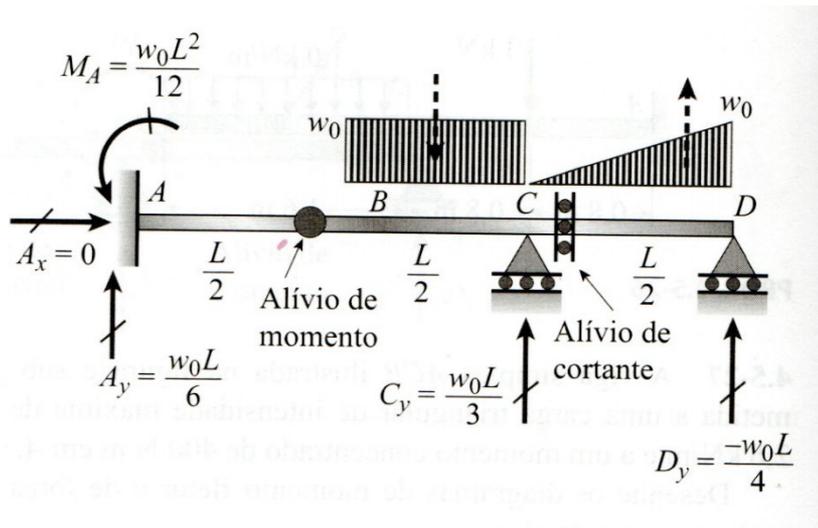


$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow C_y - B_y = \frac{w_0 L}{2}$$

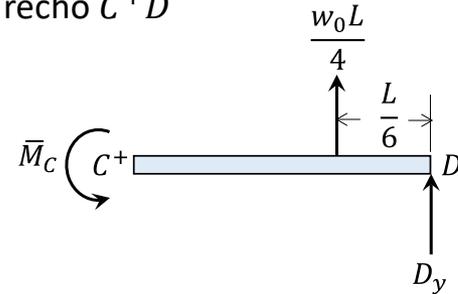
$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -\frac{w_0 L}{2} \frac{L}{4} - \bar{M}_C + C_y \frac{L}{2} = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia Mecânica



Trecho  $C^+D$



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow D_y = -\frac{w_0L}{4}$$

$$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow \bar{M}_C - \frac{w_0L}{4} \frac{L}{6} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{M}_C = \frac{w_0L^2}{24} \Rightarrow C_y = \frac{w_0L}{3}$$

$$\Rightarrow B_y = -\frac{w_0L}{6} \Rightarrow \bar{M}_A = \frac{w_0L^2}{12}$$

$$\Rightarrow A_y = \frac{w_0L}{6}$$





***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

***Referência:***

Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Capítulo 4.