Eletromagnetismo — 7600021

Quarta lista. Solução das questões 3 e 9

14/06/2022

3. Suponha que o potencial $V(\theta)$ na superfície de uma esfera seja especificado, e que não haja carga dentro ou fora da esfera. Mostre que a densidade de carga na esfera é dada por

$$\sigma(\theta) = \frac{\epsilon_0}{2R} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)^2 C_\ell P_\ell(\cos\theta),$$

onde

$$C_\ell = \int_0^\pi V_0(\theta) P_\ell(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta.$$

Para encontrar a densidade de cargas, precisamos dos campos elétricos imediatamente fora e dentro da superfície esférica. Isso porque a lei de Gauss mostra que

$$\sigma = \epsilon_0 E_r(r = R^+) - E_r(r = R^-),$$

onde E_r denota a componente radial do campo elétrico e $R^\pm$ indica as posições imediatamente fora $(+)$ ou dentro $(-)$ da esfera.

Para encontrar o campo, precisamos do potencial. Fora da esfera, o método da separação de variáveis mostra que o potencial é

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta),$$

já que a solução tem de ser finita em $r \to \infty$.

Em particular, na superfície $(r = R)$ da esfera,

$$V_0(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) \qquad (r \geq R).$$

Precisamos, agora, das constantes A_ℓ. Para encontrá-las, projetamos a igualdade acima sobre um polinômio genérico $P_m(x)$:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) V_0(\theta) \, dx = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_\ell}{r^{\ell+1}} \int_{-} 1^1 P_\ell(x) P_m(x) \, dx \, .$$

A integral à direita é nula exceto quando $m = \ell$, caso em que resulta $2/(2\ell+1)$. Segue que

$$A_\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^{1} P_\ell(x) V_0(\theta) \, dx \, ,$$

e

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} P_\ell(\cos\theta) \alpha_\ell \qquad (r \geq R),$$

com a notação

$$\alpha_\ell \equiv \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_m(x)V_0(\theta)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dentro da esfera, as soluções radiais admissíveis são proporcionais a r^ℓ, função que é bem comportada na origem. Análise semelhante à feita acima então mostra que

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\Big(\frac{r}{R}\Big)^{\ell} P_\ell(\cos\theta)\alpha_\ell \qquad (r \le R).$$

Estamos agora prontos para calcular os campos elétricos. Num ponto externo muito próximo à superfície, a componente radial do campo elétrico é $E_r = -\,\partial V/\partial r$, ou seja

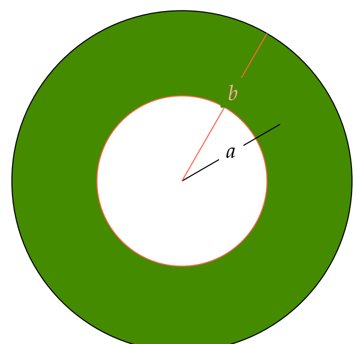
$$E(r,R^+) = \sum_{\ell=0}^{\infty} -(\ell+1)(2\ell+1)\frac{1}{R}P_\ell(\cos\theta)\alpha_\ell,$$

e, dentro da esfera,

$$E(r,R^-) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell(2\ell+1)\frac{1}{R}P_\ell(\cos\theta)\alpha_\ell.$$

Basta agora subtrair os dois campos elétricos para ver que

$$\sigma(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell+1)^2}{R}P_\ell(\cos\theta)\alpha_\ell.$$



9. Uma esfera condutora descarregada com raio a é envolvida por uma casca esférica isolante de constante dielétrica ϵ_r cujo raio externo é b. Esse conjunto é agora colocado num campo elétrico que, de outra forma, seria uniforme, com valor $\vec{E}_0$. Encontre o campo elétrico no isolante.

A constante dielétrica é definida pela relação $\epsilon_r = 1 + \chi_e$, onde χ_e é a susceptibilidade elétrica. Dentro da região da figura, a polarização é, portanto,

$$P = \chi_e E = (\epsilon_r - 1)E \qquad (a \le r \le b).$$

Fora da região verde ($r > b$), o potencial tem a forma

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\Big(\frac{A_\ell}{r^{\ell+1}} + B_\ell r^\ell\Big)P_\ell(\cos\theta).$$

Ainda não podemos excluir os termos proporcionais a B_ℓ porque o campo elétrico uniforme faz com que o potencial no infinito não seja zero.

Mais especificamente, para $r \gg b$, a contribuição das esferas se torna insignificante, e o potencial assume a forma $V(x,y,z) = -E_0 z$, já que $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}V$ deve valer $E_0\hat{z}$. Em coordenadas esféricas

$$V(r,\theta) = -E_0 r\cos(\theta) \qquad (r \gg b).$$

Essa igualdade pode ser escrita na forma equivalente

$$V(r,\theta) = -E_0 r P_1(\cos\theta) \qquad (r \gg b),$$

o que mostra que o único coeficiente B_ℓ na série que define o potencial fora da esfera é $B_1 = -E_0$, de forma que

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) - E_0 r\cos\theta \qquad (r \geq b).$$

Na região verde da figura ($b \geq r \geq a$), o potencial é dado pela expressão

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Big(\frac{C_\ell}{r^{\ell+1}} + D_\ell r^\ell\Big) P_\ell(\cos\theta) \qquad (b \geq r \geq a).$$

Uma vez que a região não compreende origem ou infinito, não podemos impor que os coeficientes C_ℓ ou D_ℓ sejam nulos. Entretanto, na superfície da esfera condutora ($r = a$), o potencial é constante, $V(a,\theta) = V_0$. Assim,

$$V(a,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Big(\frac{C_\ell}{a^{\ell+1}} + D_\ell a^\ell\Big) P_\ell(\cos\theta)$$

tem de ser independente de θ. Significa que, para $\ell > 0$ o fator multiplicando cada P_ℓ na soma à direita tem de ser zero, ou seja

$$\frac{C_\ell}{a^{\ell+1}} + D_\ell a^\ell = 0 \qquad (\ell = 1, 2, \ldots).$$

Para $\ell = 0$, isso não é necessário, visto que $P_0(\cos\theta)$ já é independente de θ. Para $\ell > 0$, temos que

$$C_\ell = -D_\ell a^{(2\ell+1)} \qquad (\ell = 1, 2, \ldots),$$

e o potencial assume a forma

$$V(r,\theta) = \frac{C_0}{r} + D_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} D_\ell r^\ell \left(1 - \Big(\frac{a}{r}\Big)^{(2\ell+1)}\right) P_\ell(\cos\theta) \qquad (b \geq r \geq a).$$

Temos assim duas equações para o potencial, uma válida para $r \geq b$ e a outra para $b \geq r \geq a$. Em particular, ambas descrevem o potencial na superfície externa da região verde ($r = b$). Isso significa que

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_\ell}{b^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) - E_0 b\cos\theta = \frac{C_0}{b} + D_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} D_\ell b^\ell \left(1 - \Big(\frac{a}{b}\Big)^{(2\ell+1)}\right) P_\ell(\cos\theta).$$

Os termos proporcionais a $P_\ell(\cos\theta$ nos dois lados dessa equação devem ser iguais. Isso relaciona cada coeficientes D_ℓ com um A_ℓ ($\ell = 0, 1, \ldots$).

Por outro lado, o gradiente do potencial na região verde é o negativo do campo elétrico naquela região. Podemos portanto computar o campo elétrico e, dele, obter a polarização $P(r,\theta) = (\epsilon_r - 1)E(r,\theta)$. A partir daí, podemos obter a densidade de carga na superfície em $r = b$, que determina a diferença entre os campos elétricos imediatamente fora e imediatamente dentro do dielétrico. Resultam outras equações que relacionam cada coeficiente D_ℓ e com um A_ℓ. Temos, em outras palavras, duas equações para cada par de incógnitas D_ℓ e A_ℓ. Resolvidos esses sistemas, encontram-se todos os coeficientes, o que determina o potencial e a polarização dentro da região verde.