

# Aula de hoje

---

- ▶ **Tópicos**
  - ▶ Definição de Esperança Matemática
  - ▶ Propriedades da Esperança
  - ▶ Exercícios

# Esperança Matemática

---

- ▶ Definição 1: Dada a variável aleatória  $X$  discreta, com função de probabilidade  $P(X=x)$ , a esperança matemática de  $X$  é dada por:

$$E(X) = \sum_{\text{todos } x} xP(X = x)$$

# Esperança Matemática

---

- ▶ Definição II: Dada a variável aleatória  $X$  discreta, com função de probabilidade  $P(X=x)$ , a variância de  $X$  é dada por:

$$Var(X) = \sum_{\text{todos } x} (x - E(X))^2 P(X = x)$$

# Esperança Matemática

---

- ▶ Definição III: Dada a variável aleatória  $X$  discreta, com função de probabilidade  $P(X=x)$ , a esperança matemática da função  $h(X)$  é dada por:

$$E(h(X)) = \sum_{\text{todos } x} h(x)P(X = x)$$

# Esperança Matemática

---

▶ Algumas propriedades da Esperança:

1. Se  $h(X) = aX$ , onde  $a$  é uma constante qualquer então:  $E(aX) = aE(X)$

$$\text{Dem : } E(aX) = \sum_{\text{todos } x} axP(X = x)$$

$$= a \sum_{\text{todos } x} xP(X = x)$$

$$= aE(X)$$

# Esperança Matemática

---

▶ Algumas propriedades da Esperança:

2. Se  $h(X) = X + b$ , onde  $b$  é uma constante qualquer então:  $E(h(X)) = E(X) + b$

$$\text{Dem : } E(X + b) = \sum_{\text{todos } x} (x + b)P(X = x)$$

$$= \sum_{\text{todos } x} xP(X = x) + b \sum_{\text{todos } x} P(X = x)$$

$$= E(X) + b$$

# Esperança Matemática

---

▶ Algumas propriedades da Esperança:

3. Se  $h(X) = aX$ , onde  $a$  é uma constante qualquer  
então:  $\text{Var}(h(X)) = a^2 \text{Var}(X)$

4. Se  $h(X) = X + b$ , onde  $b$  é uma constante qualquer  
então:  $\text{Var}(h(X)) = \text{Var}(X)$

# Exercício 1

---

- ▶ Suponha que o tempo necessário para atendimento de clientes em uma central de atendimento telefônico siga uma distribuição normal de média de 8 minutos e desvio padrão de 2 minutos.
  
- a) Qual é a probabilidade de que um atendimento dure menos de 5 minutos?
- b) E mais do que 9,5 minutos?
- c) E entre 7 e 10 minutos?
- d) 75% das chamadas telefônicas requerem pelo menos quanto tempo de atendimento?



# Exercício 1

---

- ▶ Sendo
- ▶  $X$ : tempo necessário para atendimento de clientes em uma central de atendimento telefônico
- ▶  $X \sim N(8, 2^2)$
- ▶ a) Qual é a probabilidade de que um atendimento dure menos de 5 minutos?
- ▶  $Z = (X - 8) / 2$

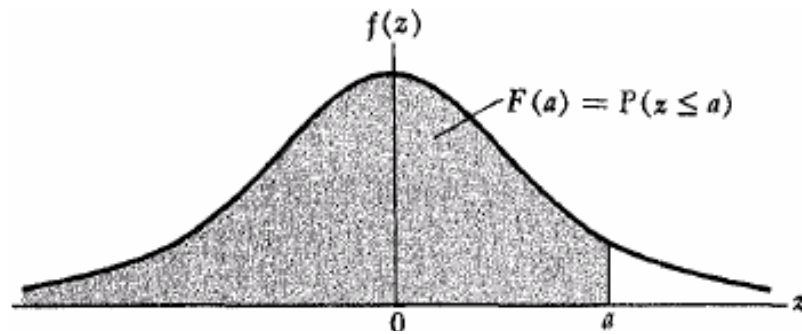
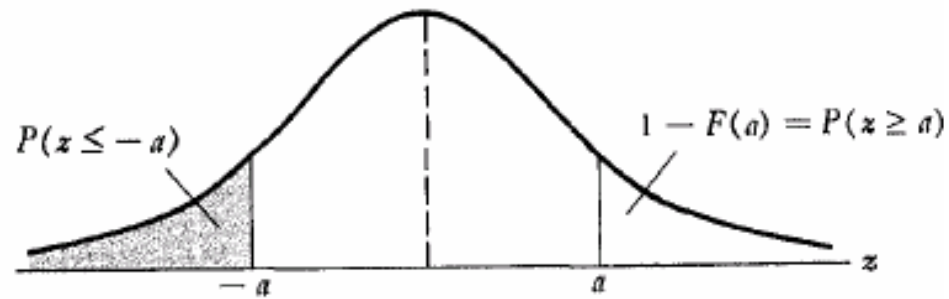
$$P(X < 5) = P\left(Z < \frac{5 - 8}{2}\right) = P(Z < -1,5) = P(Z > 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) =$$

$$= 1 - 0,9332 = 0,0668$$

Portanto, a probabilidade de que um atendimento dure menos de 5 minutos é 6,68%.

# Exercício 1

---



NORMAL DISTRIBUTION TABLE

Entries represent the area under the standardized normal distribution from  $-\infty$  to  $z$ ,  $\Pr(Z < z)$   
 The value of  $z$  to the first decimal is given in the left column. The second decimal place is given in the top row.

$z$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Values of $z$ for selected values of $\Pr(Z < z)$							
$z$	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576
$\Pr(Z < z)$	0.800	0.850	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995

# Exercício 1

---

- ▶ *b) E mais do que 9,5 minutos?*

$$P(X > 9,5) = P\left(Z > \frac{9,5 - 8}{2}\right) = P(Z > 0,75) = 1 - P(Z \leq 0,75) = 1 - 0,7734 = 0,2266$$

Portanto, a probabilidade de que um atendimento dure mais do que 9,5 minutos é 22,66%.

- ▶ *c) E entre 7 e 10 minutos?*

$$\begin{aligned} P(7 < X < 10) &= P\left(\frac{7 - 8}{2} < Z < \frac{10 - 8}{2}\right) = P(-0,5 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -0,5) = \\ &= P(Z < 1) - P(Z > 0,5) = P(Z < 1) - [1 - P(Z \leq 0,5)] = 0,8413 - (1 - 0,6915) = 0,5328 \end{aligned}$$

- ▶ Portanto, a probabilidade de que um atendimento dure entre 7 e 10 minutos é 53,28%.

# Exercício 1

---

- ▶ d) 75% das chamadas telefônicas requerem pelo menos quanto tempo de atendimento?

- ▶ 
$$P(X > x) = 0,75 \Rightarrow P\left(Z > \frac{x-8}{2}\right) = 0,75$$

- ▶ x é tal que 
$$A\left(-\frac{(x-8)}{2}\right) = 0,75$$

- ▶ Então,

$$-\frac{x-8}{2} = 0,67 \Rightarrow x = 8 - 0,67 * 2 \cong 6,7$$

- ▶ Portanto, 75% das chamadas telefônicas requerem pelo menos 6,7 minutos de atendimento.