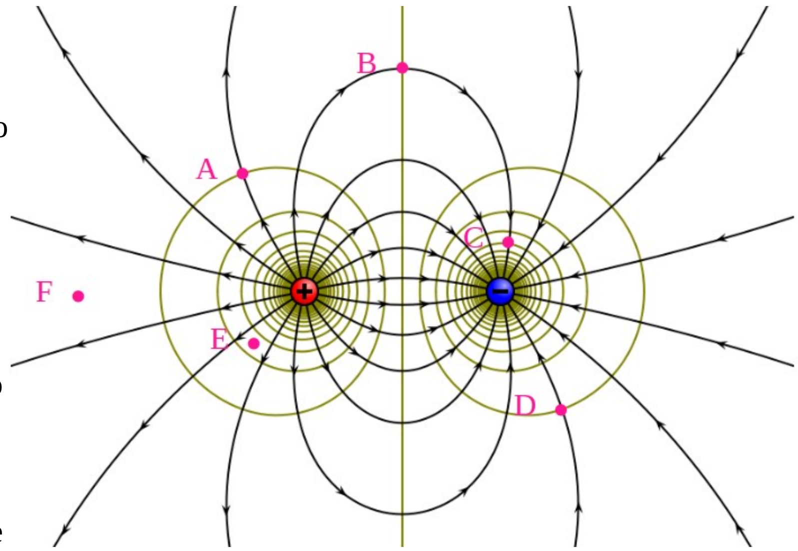
Física 3 IQ 2022 Prova 2 parte A (presencial), Prof. José R. B. Oliveira (IFUSP)

Nome Legível/Assinatura/Número USP:

1) A figura ao lado ilustra as linhas de campo e equipotenciais de um dipolo elétrico. Alguns pontos no plano do dipolo estão identificados com letras (de A até F).



a) Liste os pontos em ordem crescente de potencial elétrico.
b) Suponha que uma carga elétrica de teste $q>0$ muito pequena seja trazida do infinito até o ponto B, mantendo-se fixas as cargas elétricas do dipolo. Qual é o trabalho realizado pela força devida ao campo elétrico do dipolo sobre a carga q neste processo?
c) Se a carga q é levada do ponto B ao ponto C, a energia potencial elétrica do sistema (formado pelo dipolo mais a carga q) aumenta ou diminui?
d) O trabalho realizado pela força elétrica do dipolo sobre a carga q nesse processo é positivo ou negativo?
e) Em qual dos pontos listados a densidade de energia eletromagnética é maior?
Não esquece de explicar cada item.

Resp.:

a) Com referência ao infinito o potencial de uma carga puntiforme é kQ/r. O ponto B está no plano de potencial zero (por simetria, nesse plano os pontos estão equidistantes das duas cargas, iguais em magnitude mas de sinal oposto). Seguindo a linha de campo de B em direção à carga negativa, primeiro é cruzada a equipotencial de D e depois de C, que é portanto a mais negativa. No sentido oposto, o potencial cresce. A equipotencial de F é cruzada antes da de A (F está além da equipotencial que passa por A, mas antes da equipotencial de B, enquanto a de E está depois de A. Assim: em ordem crescente de potencial $C<D<B<F<A<E$.

b) O Trabalho é zero porque $V(B)=0$. A integral de linha do campo elétrico do infinito até B é nula seguindo a equipotencial do plano médio que passa por B, porque as linhas de campo são perpendiculares ao deslocamento. Como o campo eletrostático é conservativo, essa integral independe do caminho.

c) Diminui porque o potencial diminui de B até C: $V(B) = 0$ e $V(C)<0$, portanto a energia potencial elétrica da carga q (qV) no campo do dipolo, diminui. Visto de outro modo, a integral de linha da força de Lorentz sobre a carga q é positiva, portanto o trabalho interno do sistema é positivo, e sua energia potencial diminui.

d) De B até C a integral de linha do campo elétrico (seguindo pelo caminho da linha de campo) é positiva (o campo está sempre na direção do deslocamento), portanto o trabalho realizado pela força elétrica $\vec{F}=q\vec{E}$ (força de Lorentz para B=0) é positivo pois q é positiva.

e) No ponto C, onde a densidade de linhas de campo é maior, portanto a magnitude do campo elétrico é maior, sendo a densidade de energia eletrostática proporcional ao quadrado da magnitude do campo elétrico: $\rho_E=\frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2$.

2)Um campo vetorial é expresso, em coordenadas cartesianas, por:

$$\vec{F}(x\,,y\,,z)=y^2\,\hat{i}+x^2\,\hat{j}+z^2\,\hat{k}$$

a) Determine a expressão para o rotacional desse campo em coordenadas cartesianas.
b) Esse campo é conservativo ou não? Por quê?
c) Em que região do espaço o rotacional desse campo é nulo? Qual é a forma dessa região?
d) O valor da integral de linha desse campo em um caminho fechado no plano *xz* é positivo, negativo, ou nulo? Explique.

Resp.:

a) $\text{rot}\,\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\hat{i}(0-0)+\hat{j}(0-0)+\hat{k}(2x-2y)=2(x-y)\hat{k}$

b) Não conservativo, porque o rotacional não é nulo em toda parte.

c) O rotacional desse campo é nulo quando $x-y=0$, isto é $x=y$ (qualquer que seja *z*). Em 3 dimensões isto corresponde a um plano determinado pela reta do eixo *z* e pela reta inclinada de 45^0 com relação ao eixo *x*, no plano *xy*.

d) Pelo teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{F}\,.\,d\vec{l}=\int_{S(C)}(\vec{\nabla}\times\vec{F}).\hat{n}\,dS$$

Como o rotacional de F tem a direção do eixo *z*, e a normal ao plano *xz* tem a direção do eixo *y*, o produto escalar no integrando do membro direito é sempre nulo $(\hat{k}\,.\,\hat{j}=0)$ por uma superfície S qualquer no plano *xz*, portanto a integral é nula, e a integral de linha do membro esquerdo é sempre nula, qualquer que seja a curva fechada no plano *xz*.

3) O potencial eletrostático em uma certa região do espaço é dado por:

$$V(x,y,z)=a\left(xy^2+\frac{1}{3}z^3\right)$$, onde a é uma constante.

a) Como é a expressão do campo elétrico nessa região?
b) Como é a expressão da distribuição de carga elétrica que produziria esse campo?
c) Esse campo seria conservativo? Explique.

Resp.:

a) $\vec{E}=-\vec{\nabla}V=-\left[\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right]=-ay^2\hat{i}-2axy\,\hat{j}-az^2\hat{k}$

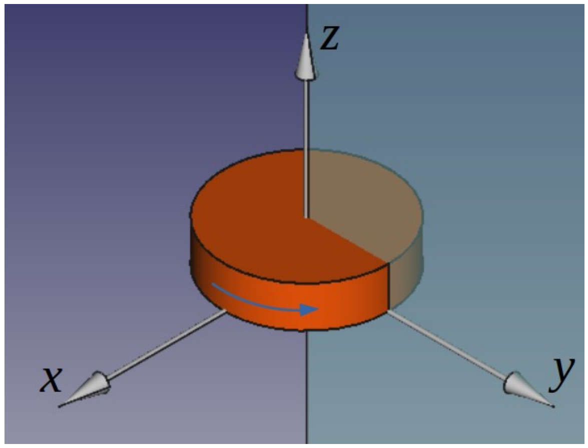
b) $\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0-2ax-2az=-2a(x+z)$$

$$\rho=-2a\,\varepsilon_0(x+z)$$

c) Como o campo é deduzido de uma função potencial (que é uma função de ponto, independente de caminho) ele é necessariamente conservativo.

4) Um disco uniformemente carregado de raio *R* e espessura *h*, centrado na origem, gira em torno do próprio eixo com velocidade angular constante ω. A carga total do disco é *Q*.



a) Qual é a expressão para a densidade de corrente ($\vec{J}(r,\theta,z)$) no interior deste disco, em coordenadas cilíndricas?
b) Qual é a corrente que atravessa o semi-plano *yz* com *y*>0?

Resp.:

a) $\vec{J}(r,\theta,\phi)=\rho\vec{v}(r,\theta,\phi)=\frac{Q}{\pi R^2 h} r\,\omega\,\hat{\theta}$, pois $\rho=\frac{Q}{\pi R^2 h}$, e $\vec{v}=r\,\omega\,\hat{\theta}$

b) $I=\int_S \vec{J}.\hat{n}\,dS=\int_0^R dr\int_0^h dz[\vec{J}(r,\frac{\pi}{2},z).(-\hat{i})]=\int_0^R dr\int_0^h dz\frac{Q}{\pi R^2 h} r\,\omega=\frac{R^2}{2}h\frac{Q}{\pi R^2 h}\omega=Q\frac{\omega}{2\pi}$,

pois no plano *yz*, a normal da superfície é $\hat{n}=-\hat{i}$, assim como $\hat{\theta}=-\hat{i}$, pois $\theta=\frac{\pi}{2}$.