

Lista 1

1 Exercício 1

- (i) Encontre a solução geral das equações diferenciais de primeira ordem (não precisa encontrar o valor das constantes)

$$y'' + 5y' + 4y = 0 \quad (1)$$

e

$$y'' + 5y' + 4y = 2 \quad (2)$$

- (ii)

$$y'' - 4y = 10 \quad (3)$$

2 Exercício 2

Obtenha a solução da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno $u(0,y) = 0$ e $u(a,y) = 0$ para $0 < y < b$, $u(x,b) = 0$ e $u(x,0) = h(x)$ para $0 \leq x \leq a$

3 Exercício 3

Obtenha a solução da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno $u(0,y) = 0$ e $u(a,y) = f(y)$ para $0 < y < b$, $u(x,b) = 0$ e $u(x,0) = h(x)$ para $0 \leq x \leq a$

4 Exercício 4

Resolva as equações (4,5) utilizando a solução por série de potência

- (i)

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \quad (4)$$

- (ii)

$$x^2 y'' - 3xy' + (4x + 4)y = 0 \quad (5)$$

Obs: Sua solução é única!

5 Exercício 5

Obtenha a serie de Fourier de senos que representa a função $f(x) = e^x$ no intervalo $(0, \pi)$

6 Exercício 6

Obtenha a serie de Fourier de cossenos que representa a função $f(x) = e^x$ no intervalo $(0, \pi)$

7 Exercício 7

Obtenha a serie de fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -5 < x < 0 \\ 3 & \text{para } 0 < x < 5 \end{cases} \quad (6)$$

8 Exercício 8

Uma corda de comprimento L vibra presa nas extremidades $x = 0$ e $x = L$. O movimento é descrito pela equação da onda $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$. Supondo que a solução seja da forma $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(n\pi x/L)$. Determine os coeficientes $b_n(t)$ considerando as condições iniciais $u(0, x) = f(x)$ e $\partial_u(0, x)/\partial_t = g(x)$.

9 Exercício 9

Encontre as soluções das seguintes equações de calor

1.

$$u_t = u_{xx} \quad (7)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (8)$$

$$u(x, 0) = x(1 - x) \quad (9)$$

2.

$$u_t = 3u_{xx} \quad (10)$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 \quad (11)$$

$$u(x, 0) = x^2(3/2 - x) \quad (12)$$

10 Exercício 10

Dada a função

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , 0 < t < T/4 \\ -7/8 & , T/4 < t < T/2 \\ 7/8 & , T/2 \leq t < 3T/4 \\ -1 & , 3T/4 \leq t < T \end{cases} \quad (13)$$

Determine os coeficientes a_n e b_n da serie de Fourier

11 Exercício 11

A serie de Fourier de $\delta(x)$ no intervalo de $-\pi < x < \pi$ é dada por

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) \quad (14)$$

Mostre que

$$\int \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (15)$$

12 Exercício 12

Encontre a solução da equação de Klein-Gordon em 1D

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - \mu^2 u \quad (16)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (17)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad (18)$$