O princípio da Mínima ação

Vimos, ao longo do curso de Física I, que o movimento de um corpo (em um referencial inercial) é regido pelas leis de Newton. Aqui, apresentaremos uma formulação alternativa (e mais geral) para o movimento de corpos. Em seguida, reobteremos as leis de Newton. Tal princípio é o "princípio da Mínima ação".

Seja um sistema descrito pelas coordenadas generalizadas $q \equiv (q_1, \ldots, q_N)$, $\dot{q} \equiv \frac{dq}{dt} \equiv (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \ldots, \dot{q}_N)$ e pelo tempo t. (Em muitos casos q identifica-se com as posições e $\dot{q}$ com as velocidades). Considere que o sistema (por simplicidade) seja composto por uma única partícula (embora o que será apresentado é geral, os cálculos ficarão mais simples), de forma que a partícula ocupa as posições $q_1 = q_1(t_1)$ e $q_2 = q_2(t_2)$ entre os instantes t_1 e t_2, respectivamente.

O princípio da Mínima ação estabelece que a integral abaixo (denominada ação)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) \; dt \qquad (*)$$

é mínima. Em outras palavras, o movimento real da partícula, entre os instantes t_1 e t_2 em que a mesma ocupa as posições q_1 e q_2, é aquele em que a ação é a menor possível.

A função $L(q, \dot{q}, t)$ é chamada de Lagrangiana do sistema e é definida por

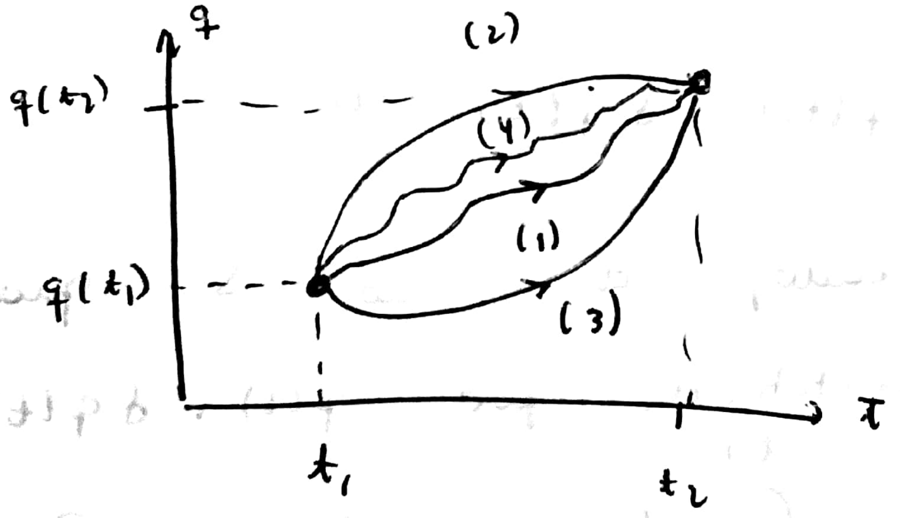
$$L(q, \dot{q}, t) = \underbrace{T}_{\text{energia cinética}} - \underbrace{V}_{\text{energia potencial da partícula}}.$$

Alguns comentários: ⇒ Veremos mais adiante que o estudo mecânico de + sistemas mais complicados (com graus de liberdade complicados, ou mais partículas) será muito mais convenientemente estudado a partir do formalismo Lagrangeano.

⇒ A Lagrangeana de um sistema está relacionada com a energia cinética e potencial da partícula (ou do sistema), mas não é a energia total do mesmo.

⇒ Precisamos encontrar agora a função $q(t)$ em que a ação é mínima (ou estacionária em alguns casos).

Em outras palavras, dada a figura abaixo para $\underline{\underline{4}}$ "trajetórias diferentes".



O princípio da mínima ação (real) estabelece que o movimento da partícula será aquele em que (*) é mínima. Ou seja, dados os pontos "iniciais" e "final" $q(t_1)$ e $q(t_2)$, a trajetória do sistema [exemplificados por (1), (2), (3) ou (4) na figura acima] será aquela que minimiza a ação.

Se $q(t)$ é a função em que S é mínima, S aumentará se substituirmos

$q(t)$ por $q(t) + \delta q(t)$,

onde $\delta q(t)$ é uma função pequena durante o intervalo de tempo entre t_1 e t_2. Uma vez que $q_1 = q(t_1)$ e $q_2 = q(t_2)$ para todas as trajetórias,

segue que

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0.$$

Por outro lado, a ação S quando $q(t)$ é substituída por $q(t) + \delta q(t)$ vale | torna-se

$$\int_{t_1}^{t_2} L\,[q + \delta q,\ \dot{q} + \delta \dot{q},\ t]\ dt,$$

de forma que a mudança na ação S é dada por

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q,\ \dot{q}+\delta\dot{q},\ t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\ dt. \qquad (*1)$$

A condição necessária para S (eq. (*1)) ser mínima é que a diferença entre as integrais acima seja nula.

Uma vez que δq é pequeno, podemos expandir $L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t)$ em série de Taylor em 1ª ordem e obtemos:

$$L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t) \sim L(q,\dot{q},t) + \delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \delta\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}},$$

e então (* 1) torna-se

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \delta\dot{q}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right]dt,$$

de forma que o princípio da mínima ação equivale à

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \delta\dot{q}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right]dt = 0$$

Uma vez que $\delta\dot{q} = \delta\frac{dq}{dt}$ podemos integrar o 2º termo por partes e então:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta\dot{q}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\,dt = \delta q\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\delta q\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)dt$$

Uma vez que $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ segue

que $\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1}^{t_2} = 0$ e então:

$$-\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right] \delta q \, dt = 0$$

o caso mais geral para

A equação acima, sobretudo para sistemas com muitos graus de liberdade, é aquele em que o integrando se anula:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \qquad (*3)$$

ou ainda para um sistema com vários graus de liberdade:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad \underbrace{(i = 1, 2, \dots,)}_{\text{graus de liberdade}}$$

(*3) é denominada Equação de Euler-Lagrange e descreve o movimento de um sistema qualquer.

Vamos mostrar agora que os nossos conhecimentos sobre o movimento dos corpos estão incluídos/são descritos pela eq. de Euler-Lagrange.

Lembrando que $L(q,\dot{q},t) = T - V$ e

para uma partícula $L(q,\dot{q},t) = \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{q}\right) = m\underbrace{\frac{d\dot{q}}{dt}}_{\text{"aceleração da partícula"}}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial}{\partial q}\left[\underbrace{\frac{m\dot{q}^2}{2}}_{0} - V(q)\right] = \frac{\partial V(q)}{\partial q}$$

pois estamos tomando uma derivada parcial,

de forma que

$\frac{\partial V(q)}{\partial q}$ identifica-se com a força $(-f(q))$

e então: $m\frac{d\dot{q}}{dt} = + f(q)$ (2ª Lei de Newton).

Ou seja, se a trajetória da partícula é aquela em que a acção é mínima (ou estacionária), a trajetoria da partícula satisfaz a 2ª lei de Newton.

Princípio da relatividade de Galileu e referenciais inerciais

O formalismo que apresentamos também nos permite extrair conclusões interessantes sobre o conceito de referencial inercial.
As equações do movimento ou em alguns casos, as leis de movimento, podem ser diferentes, dependendo do sistema de referência. Um sistema arbitrário de referência, podendo ser inhomogêneo e anisotrópico, poderia resultar em sistemas físicos (equações de movimento) diferentes dependendo da posição e orientação das partículas.

Em particular, um sistema inercial de referência, é aquele em que é espacialmente homogêneo, isotrópico e temporalmente homogêneo. Em particular, num referencial inercial, uma partícula livre em repouso permanecerá sempre em repouso. Isto não será (talvez não seja em geral) o caso se tivéssemos uma partícula livre num referencial não inercial.

Dados os comentários acima, a Lagrangeana de uma partícula movendo-se livremente num espaço homogêneo e isotrópico é dada por

$$L = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad (*5).$$

(caso o "espaço" fosse anisotrópico, haveria uma dependência diferente entre os termos v_x^2, v_y^2 e v_z^2).

Além disso, o fato do espaço e tempo serem homogêneos, implica que a Lagrangeana da partícula livre não depende de $\vec{r}$ e t. Portanto L é descrita conforme (*5)

Dada as equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_x}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_z}\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_y}\right) = 0$$

temos que

$$v_x \, , \; v_y \, , \; v_z \; \text{são cte} \, ! \Rightarrow \begin{array}{l} v_x = cte \\ v_y = cte' \\ v_z = cte'' . \end{array}$$

ou $\vec{v} = cte$

Ou seja, dado um sistema ~~sec~~ referencial inercial, qualquer partícula livre (que não está sujeita à nenhuma força) move-se com velocidade constante, tanto na direção, quanto em módulo!

Tal resultado é conhecido como a lei da inércia, ou 1ª lei de Newton!

Outro aspecto importante é o fato de dois ou quaisquer referenciais inerciais serem equivalentes. Em outras palavras, quaisquer referenciais inerciais movendo-se em linha reta com velocidade constante em relação ao outro, são equivalentes e as leis de movimento serão as mesmas. Isto constitui o princípio da relatividade de Galileu. O fato de existir infinitos referenciais (inerciais) equivalentes mostra que não há um referencial absoluto.

Dados dois referenciais inerciais S e S', sendo que o segundo move-se com velocidade $\vec{V}$ em relação ao primeiro, suas coordenadas relacionam-se por

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V} t$$

$$t = t'.$$

As relações acima são as transformações de galileu!

Observações:

Os comentários acima ilustram que a 1ª lei de Newton não vale para quaisquer referenciais. e , os referenciais onde ela vale são os referenciais inerciais, em que, na ausência de forças (partícula livre), o corpo deve estar em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

A 1ª lei de Newton contém uma definição qualitativa de força, como "aquele que muda o estado de movimento de um corpo".

Vamos retornar à equação

$$\underbrace{m \frac{d\dot{q}}{dt}}_{\text{produto da massa pela "aceleração"}} = + \underbrace{f(q)}_{\text{força resultante sobre a partícula}}$$

Embora tenhamos considerado, por simplicidade, uma energia potencial dependente apenas da posição, a força atuando sobre a partícula pode depender da velocidade, do tempo ou simplesmente ser constante. Nas próximas aulas, iremos estudar cada um desses casos. De uma forma geral então, temos

$$\underbrace{m \vec{a}}_{\text{produto da massa pela aceleração}} = \underbrace{\vec{F}_{res}}_{\text{força resultante atuando sobre a partícula}}$$

Conceitos Básicos

1) Vínculos.

· São limitações às possíveis posições e velocidades das partículas de um sistema mecânico, restringindo a priori seu movimento. Os vínculos são ~~d~~limitações de ordem cinemática impostas ao sistema mecânico.

/ Diz-se que um vínculo é holônomo quando pode ser expresso por uma equação da forma

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, t) = 0,$$

onde $\xi_1, \ldots, \xi_M$ são coordenadas usadas p/ descrever a configuração. Isto é, podemos descrever os vínculos por uma relação exclusivamente funcional das coordenadas e do tempo de maneira explícita. Vínculos ~~que~~ que não podem ser assim representados ~~são~~ ditos ñ holônomos. Por ex., a imposição de que as moléculas do gás permaneçam no interior de um recipiente é descrita por desigualdade ñ caracteriza um vínculo ñ holônomo.

Princípio de d'Alembert / Desl. virtuais

Os deslocamentos infinitesimais de cada partícula que levam de uma configuração possível a outra configuração possível infinitesimalmente próxima no mesmo instante de tempo t são chamados de deslocamentos virtuais.

Dado um sistema de N partículas, os deslocamentos virtuais $\delta\vec{r}_i$, $(i=1, \ldots, N)$ são deslocamentos das posições $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$ realizados instantaneamente com a propried// de não violarem os vínculos. Portanto, os deslocamentos virtuais

1) Ocorrem num instante de t fixo
2) ñ violam os vínculos.

Ex: Uma partícula está restrita a uma superfície móvel. Seja $f(\vec{r}, t) = 0$ a equação da superfície. Um deslocamento virtual deve ser consistente com o vínculo, isto é, $\vec{r}$ e o ponto deslocado $\vec{r} + \delta\vec{r}$ devem pertencer à mesma superfície no MESMO instante de tempo t.

Portanto: $f(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) = 0 \Rightarrow f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t) = 0$

$$= f(x,y,z,t) + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0$$

$$= f(\vec{r}, t) + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}\right)(\delta x\,\hat{x} + \delta y\,\hat{y} + \delta z\,\hat{z})}_{\vec{\nabla} f \cdot \delta\vec{r}} = 0$$

Mas $f(\vec{r}, t) = 0$ (eq. superfície). Então:

$$\boxed{\vec{\nabla} f \cdot \delta\vec{r} = 0}$$

//

Como $\vec{\nabla} f \perp$ superfície no instante de tempo t, o desl. virtual é tangente à sup. neste instante.

A motivação p/ se introduzir o deslocamento virtual (1)
se deve ao fato de que se a superfície no
qual o movimento da partícula for idealmente lisa,
a força de contato entre a partícula e a
superfície ñ possui componente tangencial, mas apenas normal
a superfície. Dessa forma, o trabalho realizado
pela força de vínculo em virtude do deslocamento
virtual da partícula é nulo, mesmo que a superfície
esteja em movimento.

Na maioria dos problemas relevantes em Física,
o trabalho virtual total das forças de vínculo
se anula e isto justifica a dedução apresentada a
seguir. Um exemplo que ilustra isto são duas partículas
unidas por uma haste rígida e sejam $\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$ as forças
de vínculo sobre as partículas. Neste caso, o trabalho virtual
das forças de vínculo é $\delta W_v = \vec{f}_2 (\delta \vec{r}_2 - \delta \vec{r}_1)$. Sendo $\delta \vec{r} = \delta \vec{r}_2 - \delta \vec{r}_1$
vemos que $\vec{f}$ e $\delta \vec{r}$ são colineares. Dado o vínculo $r^2 - \ell^2 = 0$, existe um escalar que
$\vec{f}_2 =$
e
portanto
$\delta W_v =$

Considere um sistema de N partículas. Da 2ª lei
de Newton, temos:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \qquad i = 1, \dots, N$$

onde $\vec{F}_i$ é a força total ou resultante sobre a i-ésima
partícula.

a força total $\vec{F}_i$ admite a decomposição

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$$

$\vec{f}_i$: força de vínculo

$\vec{F}_i^{(a)}$: força aplicada

Vamos enunciar o princípio dos deslocamentos
virtuais inicialmente, p/ um sistema de partículas em
equilíbrio e em seguida enunciaremos p/ o sistema
de partículas em movimento

No caso estático, $\vec{F}_i = 0$, quais quer que sejam os deslocamentos virtuais $\delta\vec{r}_i$ e [illegible] também

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 = \sum_i (F_i^{(a)} + f_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

$$= \sum_i F_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i + \cancel{\sum_i f_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0}$$

pois em geral o trabalho virtual total realizado por uma força de vínculo em mtos casos é nulo (estamos nos limitando à estes casos)

Assim: $\sum_i F_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$

No caso de um sistema de N partículas em movimento, podemos escrever uma relação similar reescrevendo a 2ª Lei de Newton sob a forma $\vec{F}_i - \dot{\vec{P}}_i = \vec{0}$ p/ cada i partícula. Assim:

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{P}}_i) = \vec{0} \quad e \quad \sum_i (F_i^{(a)} + f_i - \dot{\vec{P}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

$$= \underbrace{\sum_i (\dot{\vec{P}}_i - \vec{F}_i^{(a)}) \cdot \delta\vec{r}_i = 0}$$ pois $\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ (conforme expl. anteriormente)

Esse resultado é conhecido como o princípio de d'Alembert

O princípio de d'Alembert ainda exige trabalhar com mais coordenadas do que o necessário, pois $\bar{n}$ apenas as posições $\vec{r}_i$ não são independentes, mas também os deslocamentos virtuais $\delta\vec{r}_i$.

Em sistemas holônomos é possível introduzir um (7)
certo número n de variáveis independentes, denotadas ~~[illegible]~~ por $q_1, \ldots, q_n$ e denominadas coordenadas generalizadas.

Elas devem satisfazer as seguintes condições:

1) Cada vetor posição de cada partícula é determinado univocamente em cada instante pelos valores dos $q's$

2) Os vínculos são identicamente satisfeitos se expressos em termos dos $q's$.

No caso de um sistema mecânico constituído por N partículas submetidas aos p vínculos holônomos.

$$f_1(r_1, \ldots, r_N, t) = 0$$

$$\vdots \qquad (\#2)$$

$$f_p(r_1, \ldots, r_N, t) = 0$$

de forma que das $3N$ coordenadas (x_1, y_1, z_1) $(x_N, y_N$
apenas $n = 3N - p$ podem ser tomadas como independentes entre si, e portanto o sistema possui n graus de liberdade. É possível introduzir n coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$ em termos das quais

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_N, t). \qquad i = 1, \ldots, N$$

Das coordenadas generalizadas, os deslocamentos virtuais $\delta\vec{r}_i$ podem ser expressos em termos dos deslocamentos virtuais independentes δq_K ~~tal q~~ através da relação.

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{K=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_K}\delta q_K$$, já que o tempo deve permanecer fixo.

Por outro lado,

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \quad (*1)$$

O trabalho virtual das forças aplicadas torna-se

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) \delta q_k \equiv \sum_{k=1}^{n} \underbrace{Q_k \, \delta q_k}$$

força generalizada
(ñ tem dimensão de força
mas o $Q_k \delta q_k$ tem
dimensão trabalho

a outra quantid. $\sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i$ é dada por.

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} m_i \dot{\vec{v}}_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) \delta q_k \quad (*)$$

Reescrevendo (*) da seguinte forma: (mostraremos adiante que a expressão * será expressa em termos da energia cinética

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) - \underbrace{m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)} \right\}$$

onde $\underbrace{\qquad}$ é escrita tbm por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_k}\left[\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\right)\dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t}\vec{r}_i\right] = \frac{\partial}{\partial q_k}\vec{v}_i$$

Além disso, $\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ (vem do *1)

~~Assim~~ temos

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{v}}_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) \right\}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)\right\}$$

Assim
$$\sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{K=1}^{N} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_K} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m v_i^2 \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial q_K} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m v_i^2 \right) \Big\} \delta q_K$$

Se T e as componentes Q_K da força generalizada forem expressas exclusivamente em termos dos q's e $\dot{q}$'s, por meio das relações (*7), temos:

Como $T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$ denota a energia cinética do sistema, temos

$$\sum_{K=1}^{n} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_K} T \right\} - \frac{\partial T}{\partial q_K} \Big\} \delta q_K = \sum_{K=1}^{n} Q_K \, \delta q_K$$

ou

$$\sum_{K=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_K} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_K} - Q_K \right\} \delta q_K = 0$$

$$K = 1, \ldots, n$$

Como os δqs são mutuamente independentes e arbitrários, esta última igualdade só pode ser satisfeita se o coeficiente de cada δq_K for zero. Inferimos, assim, as n equações:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_K} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_K} = Q_K$$

Quando as forças $\vec{F}_i$ derivam de um potencial escalar $V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t)$. Neste caso,

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \hat{z} \right) \quad e$$

as forças generalizadas são dadas por

$$Q_K = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_K} = -\sum_{i=1}^{N} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_K} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i} \right) \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_K} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i} \right) \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_K} \right) \right\}$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial q_K}$$ (regra da cadeia da diferenciação)

Assim:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_K}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_K} - \frac{\partial V}{\partial q_K} = 0$$

~~Se~~ Dado que $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_K} = 0$, a eq. acima é dada por

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_K}(T-V)\right] - \frac{\partial}{\partial q_K}(T-V) = 0$$

onde $L = T - V$ é denominada Lagrangiana.

As rel. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_K} = 0$ constituem um sistema de n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que determina univocamente os $q_K(t)$ desde que sejam dadas as $2n$ condições iniciais $q_1(t_0) \ldots q_n(t_0)$ e $\dot{q}_1(t_0) \ldots \dot{q}_n(t_0)$ num dado instante inicial t_0

É importante mencionar que as eq. de Lagrange constituem um meio + econômico de escrevermos as eq.s de movimento, pois envolvem um número mínimo de coordenadas, além de eliminar qualquer referência às forças de vínculo, uma vez que V refere-se apenas às forças aplicadas)

Além disso, como T e V ~~são~~ escalares, elas tbm introduzem simplificações, diferentemente de $\vec{F}$ que é uma grandeza vetorial.

Potenciais generalizados

Quando as forças generalizadas resultam de uma função $U(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$ por meio das expressões

P

$$Q_K = -\frac{\partial U}{\partial q_K} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_K}\right), \qquad (*).$$

então a equação

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_K}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_K} = Q_K$$

ainda implicam na definição de Lagrangeana

$$L = T - V$$

e portanto as mesmas equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_K}(T-V)\right) - \frac{\partial}{\partial q_K}(T-U) = 0.$$

onde U é denominado potencial generalizado ou potencial dependente das velocidades.

A classe de forças que a equação $(*)$ abrange é mais ampla que as forças conservativas, sendo a força conservativa um caso particular da relação $(*)$.

Por exemplo, a força eletromagnética sobre uma carga em movimento admite um potencial generalizado.

Invariância das equações de Lagrange

Mostraremos a seguir que uma transformação geral de coordenadas $(q_1, \dots, q_n) \longrightarrow (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ para $k=1,\dots,n$ deixa as equações de Lagrange invariantes.

Considere então que cada um dos q_i's possa ser relacionado com Q_i's por meio de uma função g_i genérica. Mais especificamente temos a seguinte relação (geral) entre q_i e Q_i:

$$q_k = g_k(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, t)$$
$$k = 1, 2, \dots, n$$

Diferenciando a relação acima com relação ao tempo (já que temos a derivada $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$) temos

$$\dot{q}_k = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial q_k}{\partial Q_l} \dot{Q}_l + \frac{\partial q_k}{\partial t},$$

onde para qualquer k e l, $\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_l} = \frac{\partial q_k}{\partial Q_l}$

Como $\frac{\partial q_k}{\partial \dot{Q}_l} = 0$

(pois q_k não depende explicitamente de $\dot{Q}_l$)

a nova Lagrangeana $\bar{L}(Q, \dot{Q}, t) \equiv$ 7

$L(q(Q,t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t)$ será dada por

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \cdot \cancelto{0}{\frac{\partial q_k}{\partial \dot{Q}_i}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \cdot \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \right)$$

Como na eq. de Lagrange aparece $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i}\right)$

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\right)\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \cancelto{\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_i} =}{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\right)} \right.$$

Dessa forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\left(\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_i}\right) \right]$$

Procedendo de forma análoga para $\frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_i}$, temos

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_i} = \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \left(\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_i} \right) \right]$$

e portanto $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_i} \right) = 0$ (8)

implica que

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \right] \left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \right) + \cancel{ \sum_{k=1}^{n} \left[+ \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \left(\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \left(\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_i} \right) \right] } = 0$$

Como $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0$, para cada

$k = 1, \dots, n$ temos então

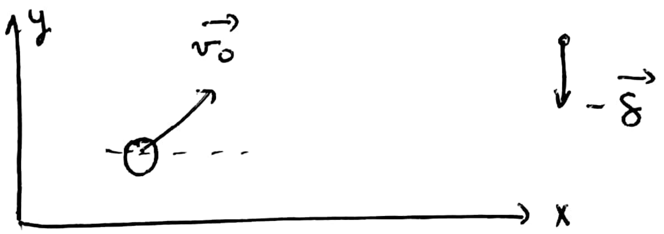
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_i} \right) = 0 ,$$

o que demonstra a equivalência entre L e $\bar{L}$.

Aplicações das equações de Lagrange

1) Movimento de Projéteis:

Encontre as equações de Lagrange para o movimento de um projétil movendo-se sob a ação da força gravitacional



$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$V = + mgy \quad (\text{onde } V(0) = 0)$$

↑ referencial no solo

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

Equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$m\ddot{x} = 0$$

$$\dot{x} = cte.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

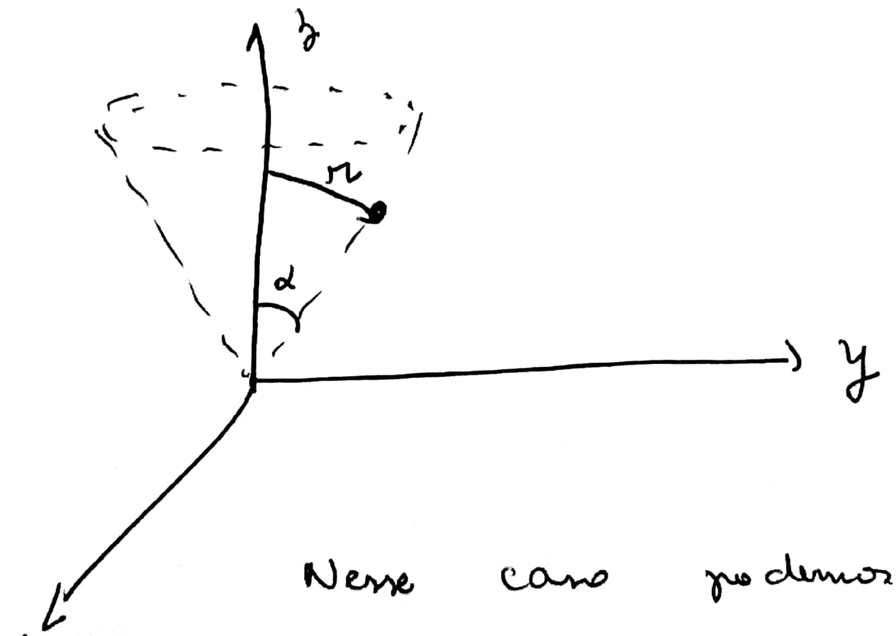
$$m\ddot{y} + mg = 0 \Rightarrow \ddot{y} = -g.$$

$$u(y) - u(0) = -\int_0^y \vec{F}' \cdot d\vec{l}' = -\int_0^y -mg\,dy' = mgy$$

Equações de Lagrange acima estão em consistência com o que estudamos em cursos anteriores (formalismo newtoniano) 10

Para problemas mais complexos, o uso do formalismo newtoniano é mais complicado (se possível) , como ficará mais evidente nos próximos exemplos.

2) Movimento de uma partícula de massa $\underline{\underline{m}}$ presa na superfície de um cone de inclinação $\underline{\underline{\alpha}}$. A partícula é sujeita a força gravitacional



Nesse caso podemos usar o sistema de coordenadas cilíndricas como coordenadas generalizadas, lembrando que $\underline{\underline{r}}$ e $\underline{\underline{z}}$ estão vinculados (não são independentes), mas sim relacionados por

$$z = r \cot\alpha,$$ onde $\underline{\underline{\alpha}}$ é fixo.

(11)

$$\begin{cases} y = r\cos\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ x = r \operatorname{sen}\theta \\ z = r\cot\alpha \end{cases}$$

Nesse caso a energia cinética é dada por

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \cot^2\alpha)$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 (1 + \cot^2\alpha) + r^2\dot{\theta}^2\right]$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \operatorname{cosec}^2\alpha + r^2\dot{\theta}^2\right]$$

$$U = mgz \quad (\text{novamente } U(0) = 0)$$

$$= mgr\cot\alpha$$

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \operatorname{cosec}^2\alpha + r^2\dot{\theta}^2\right] - mgr\cot\alpha$$

As equações de Lagrange são então dadas por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \qquad (12)$$

$$m \ddot r \operatorname{cosec}^2 \alpha - m r \dot\theta^2 + mg \cot \alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m r^2 \dot\theta\right) = 0 \implies m r^2 \dot\theta = \text{constante} \qquad (2)$$

Em outras palavras, neste segundo caso, como $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m r^2 \dot\theta = \text{cte}$.

Mas $m r^2 \dot\theta$ corresponde ao momento angular deste sistema, consistente com o fato do momento angular ser conservado no caso de uma força central $(U = mgr \cot \alpha)$.

A equação de movimento (1) ainda pode ser

$$\ddot r - r \dot\theta^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + g \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 0,$$

que é uma equação apenas na coordenada r já que $l = m r^2 \dot\theta = \text{cte}$.

Portanto $$\ddot r - \frac{l^2}{m^2 r^3} \operatorname{sen}^2 \alpha + g \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 0.$$

Como uma última análise, podemos analisar a estabilidade da órbita circular, bem como calcularmos a frequência associada à pequenos deslocamentos.

13

Neste caso $F(r) = -mg\cot\alpha$

de forma que $F'(\bar{r}) = 0$ e portanto $F(\bar{r}) < 0$, ou seja, a órbita circular é estável.

Caso considerarmos uma pequena perturbação $\xi = r - \bar{r} << 1$ temos que a equação de movimento anterior é dada por

$$\ddot{\xi} - \frac{\ell^2}{m^2}\operatorname{sen}^2\alpha \frac{1}{(\bar{r}+\xi)^3} + g \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 0.$$

Como $\dfrac{1}{\bar{r}^3\left(1+\frac{\xi}{\bar{r}}\right)^3} \approx \dfrac{1}{\bar{r}^3}\left(1 - 3\dfrac{\xi}{\bar{r}}\right)$, onde (*)

$\bar{r}$ está relacionado com o mínimo do potencial efetivo $V_{eff} = \dfrac{\ell^2}{2mr^2} + mgr\cot\alpha$

temos

$$\left(\frac{dV_{eff}}{dr}\right)\Bigg|_{r=\bar{r}} = 0 \Rightarrow -\frac{\ell^2}{m\bar{r}^3} + mg\cot\alpha = 0 \text{ e}$$

$$\ell^2 = (m^2 g \cdot \cot\alpha)\,\bar{r}^3 \quad (**)$$

Propriedades de simetrias e leis de conservação

Diferentes relações bem como as leis de conservação que conhecemos (bem como generalizações) podem ser obtidas por meio do formalismo Lagrangeano.

Começamos por constantes de movimento

Trata-se de grandezas físicas conservadas, isto é, que não mudam de valor durante a evolução dinâmica do sistema.

Matematicamente, uma constante de movimento é uma função das coordenadas e velocidades generalizadas e (possivelmente do tempo) que permanece constante durante o movimento do sistema; de forma que:

Se $\frac{df}{dt} = 0$ ou $f(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) =$ constante

Em termos da Lagrangeana $(L(q, \dot{q}, t))$, veremos mais adiante como obter constantes de movimento.

Para uma lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ de um sistema com n graus de liberdade, a quantidade $p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ é denominada de momento conjugado à coordenada q_k.

Relacionando os conceitos acima, se a lagrangiana não contém uma determinada coordenada q_k (embora contenha $\dot{q}_k$) a referida coordenada é dita cíclica, ~~pois~~ de forma que o momento conjugado à uma coordenada cíclica é constante de movimento.

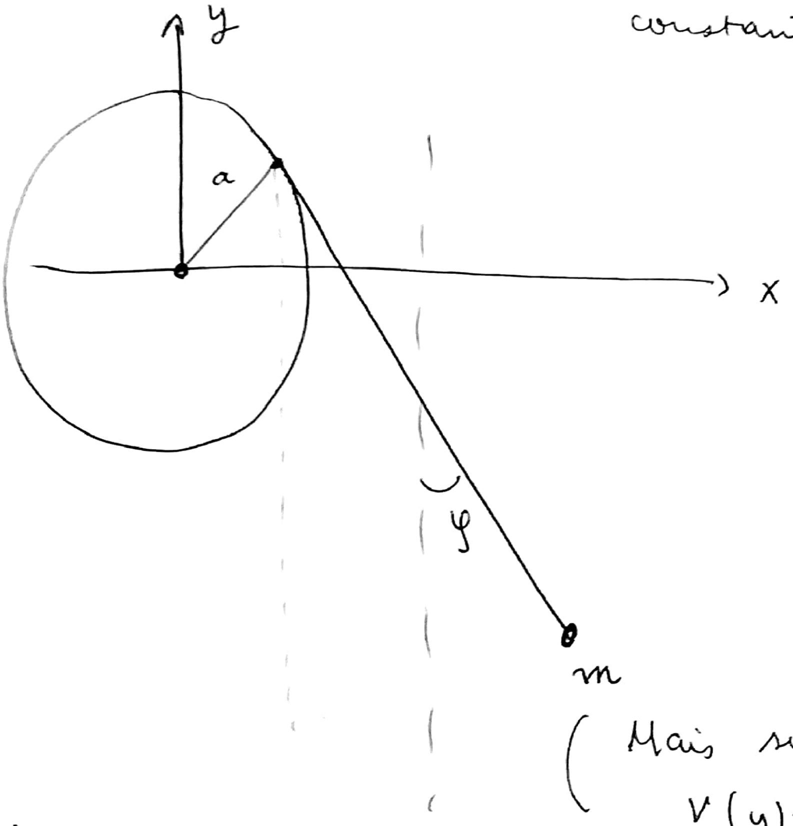
Isto porque neste caso $\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right) = 0$ (não depende de q_k) e então

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \equiv P_k = cte.$$

(caso da força central estudada anterior

para $\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \Rightarrow P_\theta = cte = mr^2\dot{\theta}$

Aplicação 4 $\Rightarrow$ Pêndulo simples de comprimento l desliza sobre um anel girando com velocidade constante ω.



(18-5)

(Mais simples adotarmos $V(y) = mgy$ e trabalhar com as coordenadas)

Coordenadas

$$\begin{cases} x = l \operatorname{sen} \varphi + a \cos \omega t \\ y = -l \cos \varphi + a \operatorname{sen} \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = l \dot{\varphi} \cos \varphi - \omega a \operatorname{sen} \omega t \\ \dot{y} = l \dot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi + \omega a \cos \omega t \end{cases}$$

Nesse caso a energia cinética é dada por

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\varphi}^2 + \omega^2 a^2 + 2 l a \dot{\varphi} \omega \operatorname{sen}(\varphi - \omega t))$$

A energia potencial é dada por

$$V = mgy = mg(-l \cos \varphi + a \operatorname{sen} \omega t)$$

A lagrangeana é então dada por $\quad (18.5')$

$$L = \frac{1}{2} m \left(\ell^2 \dot{\varphi}^2 + \omega^2 a^2 + 2 \ell a \dot{\varphi} \omega \,\mathrm{sen}(\varphi - \omega t) \right)$$
$$+ \, m g \left(\ell \cos \varphi - a \,\mathrm{sen}\, \omega t \right),$$

cuja a equação de movimento é dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m \ell^2 \ddot{\varphi} + \frac{d}{dt}\left(m \ell \omega a \,\mathrm{sen}(\varphi - \omega t) \right)$$
$$= m \ell^2 \ddot{\varphi} + a m \ell \omega \cos(\varphi - \omega t)(\dot{\varphi} - \omega)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = + m \ell \dot{\varphi} \omega a \cos(\varphi - \omega t) - m g \ell \,\mathrm{sen}\, \varphi$$

e portanto

$$m \ell^2 \ddot{\varphi} + a m \ell \omega \cos(\varphi - \omega t) \left(\dot{\varphi} - \omega - \dot{\varphi} \right) + m g \ell \,\mathrm{sen}\, \varphi = 0$$

$$m \ell^2 \ddot{\varphi} - m \ell \omega^2 a \cos(\varphi - \omega t) + m g \ell \,\mathrm{sen}\, \varphi = 0$$

ou ainda

$$\ddot{\varphi} - \frac{\omega^2}{\ell} a \cos(\varphi - \omega t) + \frac{g}{\ell} \,\mathrm{sen}\, \varphi = 0$$

Usando o formalismo lagrangeano podemos estabelecer / mostrar que se a lagrangeana for invariante por uma translação rígida arbitrária, então o momento linear total (vetor) será conservado.

Para mostrarmos isto, se deslocarmos os $\vec{r_i}$'s por uma quantidade infinitesimal fixa $\delta\vec{a_i}$, teremos que

$$\vec{r_i}' = \vec{r_i} + \delta\vec{a_i}.$$

Vamos mostrar isto para a componente $\underline{\underline{x}}$ (para as demais componentes o cálculo será análogo)

$$x_i \longrightarrow x_i + \delta x_i$$

Tal deslocamento infinitesimal resulta na na seguinte variação

$$\delta L_i = L_i(x_i + \delta x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) - L_i(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t)$$

$$= \left(\frac{\partial L_i}{\partial x_i}\right) \cdot \delta x_i$$

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right) \delta x_i$$

Uma vez que $\delta x_i = \epsilon$ (fixo).

$$\delta L = \epsilon \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L_i}{\partial x_i} \right).$$

Usando para cada componente $\underline{\underline{i}}$, sua equação de Lagrange tem

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L_i}{\partial x_i} = 0$$

e então

$$\delta L = \epsilon \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{x}_i} \right).$$

(uma vez que $\frac{\partial L_i}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i$

Usando as coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i$$ de forma que

$$\delta L = \epsilon \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}(m\dot{x}_i) = \epsilon \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} P_{x_i}}_{P_x}$$

Como L é invariante por translação $\underline{\underline{\text{fixa}}}$ de $\epsilon \Longrightarrow \delta L = 0.$

Portanto $\frac{d}{dt} P_x = 0 \implies$

$$P_x = \sum_{i=1}^{N} P_{x_i} = \text{cte.}$$

Se a translação for para as demais componentes também

$$P_y = cte$$

$$P_z = cte$$

e portanto $\vec{P} = cte.$

Conservação da energia

Antes de mostrarmos as condições nas quais a energia será conservada vamos reescrever a energia cinética de forma conveniente em termos das coordenadas generalizadas. Neste caso,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{r}_\alpha^2 \quad \text{onde}$$

$$r_\alpha = r_\alpha (q_j, t) \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

graus de liberdade

$$\dot{r}_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial r_\alpha}{\partial t}.$$

Da expressão acima $\dot{r}_\alpha^2$ é dado por

$$\dot{r}_\alpha^2 = \sum_{j,k}^{n} \left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial q_j} \right) \left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial q_j} \right) \left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial t} \right) +$$

$$+\left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial t}\right)^2, \quad \text{de forma que}$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j,k}^{n} m_\alpha\left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial q_j}\right)\left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\,\dot{q}_k +$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} m_\alpha\left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial q_j}\right)\left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1} m_\alpha\left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial t}\right)^2$$

Um caso particular, mas importante, é aquele a relação entre as coordenadas cartesianas e generalizadas não dependem explicitamente do tempo. Neste caso

$$T=\sum_{j,k}^{n}\overbrace{\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{m_\alpha}{2}\left[\left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial q_j}\right)\left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial q_k}\right)\right]}^{a_{jK}}\dot{q}_j\,\dot{q}_k$$

$$=\sum_{j,k}^{n} a_{jk}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k\,,$$

onde $a_{jK}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial q_j}\right)\left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial q_k}\right)$

Neste caso, tomando a derivada com relação a $\dot{q}_\ell$ temos:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\ell}\right)=\sum_{j=1}^{n} a_{j\ell}\,\dot{q}_j+\sum_{K=1}^{n} a_{\ell K}\,\dot{q}_k$$

$$\sum_{\ell}\dot{q}_\ell\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\ell}\right)=\sum_{j,\ell} a_{j\ell}\,\dot{q}_\ell\,\dot{q}_j+\sum_{K,\ell} a_{\ell K}\,\dot{q}_\ell\,\dot{q}_k$$

$$=2T$$ (pois os índices são mudos)

Considere a derivada da lagrangeana com relaç ao tempo ↳ $L = L(q, \dot{q}, t)$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \ddot{q}_j + \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Se $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ (a Lagrangeana nõ depende explicitamente do tempo).

e usando as equações de lagrange

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

na equaç acima, temos

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \ddot{q}_j + \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \dot{q}_j$$

$$= \sum_j \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right).$$

Portanto $$\frac{d}{dt}\left[L - \sum_j \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right] = 0.$$

Portanto a quantidade

$$L - \sum_j \dot{q}_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \underline{\underline{cte}}$$

e tal constante será chamada de $-H$.

Portanto, se L não depende explicitamente do tempo, a quantidade $H = \sum_j \dot{q}_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - L$ é uma constante de movimento. (24)

Outro caso importante é aquele em que a energia potencial não depende do tempo (explicitamente) nem das velocidades generalizadas. Neste caso

$u = u(r_\alpha(q_j))$ de forma que $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$

Portanto $\sum_j \dot{q}_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_j \dot{q}_j \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = 2T.$

Assim

$$H = 2T - (T - V) = T + V,$$

onde $T+V$ é a energia total do sistema

Portanto, extraímos as seguintes conclusões.

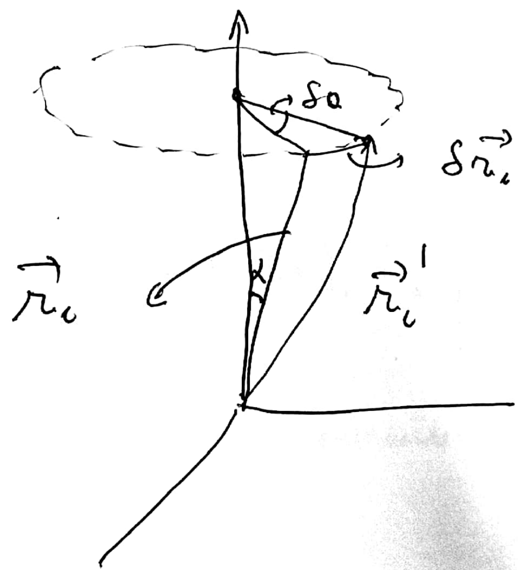
1) se L não depende explicitamente do tempo, a quantidade H (chamada de Hamiltoniano)

é constante de movimento (2P)

2. Se V não depende do tempo nem das velocidades generalizadas, então H é a energia do sistema e portanto uma constante de movimento.

Invariância por rotações e conservação do momento angular. 26

Consideremos agora uma transformação infinitesimal caracterizada por uma rotação em torno de um eixo fixo. Se a rotação for rígida, todos os vetores do sistema serão "rotacionados" por um mesmo ângulo $\delta\theta$ (infinitesimal), conforme ilustrado na figura abaixo a relação entre $\delta\vec{r_i}$ e $\delta\theta$



Nesse caso $|\delta r_i| = r_i \,\text{sen}\,\alpha \,\delta\theta$

de forma que $\delta\vec{r_i} = \delta\vec{\theta} \times \vec{r_i}$.

Já a velocidade sofre a mesma rotação (infinitesimal), de forma que $\delta\vec{v_i} = \delta\vec{\theta} \times \vec{v_i}$.

Desta forma, uma rotação rígida de $\delta\vec{\theta}$ em todo o sistema resultará na seguinte expressão p/ a Lagrangeana

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} L(\vec{r_i}', \vec{v_i}', t) - L(\vec{r_i}, \vec{v_i}, t)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r_i}}\right) \cdot \delta\vec{r_i} + \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v_i}}\right) \delta\vec{v_i}$$

Expressando os $\delta\vec{r_i}$'s e $\delta\vec{v_i}$'s de acordo com $\delta\vec{r_i} = \delta\vec{\theta} \times \vec{r_i}$ e $\delta\vec{v_i} = \delta\vec{\theta} \times \vec{v_i}$, temos

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r_i}}\right)(\delta\vec{\theta} \times \vec{r_i}) + \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v_i}}\right)(\delta\vec{\theta} \times \vec{v_i})$$

Seja $L = L(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \dots, \vec{r_N}, \vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_N}, t)$

Para cada componente de $\vec{r_i}$, com componentes $(x_i, y_i$ ou $z_i)$

temos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_{xi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_{xi}} = m v_{xi} \quad e \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = \dot{P}_{xi}$$

Assim: $$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{P_i}}(\delta\vec{\theta} \times \vec{r_i}) + \vec{P_i}(\delta\vec{\theta} \times \vec{v_i})$$

Usando a propriedade $\vec{A}(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{C}\times\vec{A})$ 28

a express para δL torna-se

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N}\left[\delta\vec{\theta}\,(\vec{r_i}\times\dot{\vec{P_i}}) + \delta\vec{\theta}\,(\vec{v_i}\times\vec{P_i})\right]$$

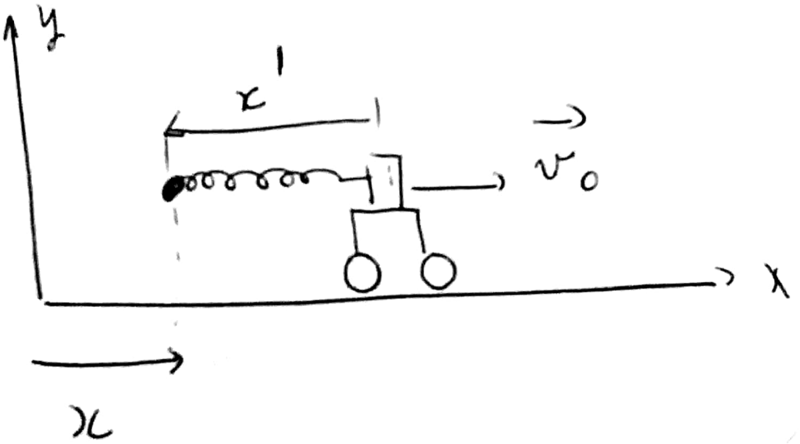
$$= \delta\vec{\theta}\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}(\vec{r_i}\times\vec{P_i})$$

Portanto, se $\delta L = 0$, implicando na invariância por rotação, a quantidade, o vetor momento angular total será conservada!

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{r_i}\times\vec{P_i}) = cte.$$

Aplicação. Carro sem massa + massa - mola

Um carrinho sem massa é acoplado a uma massa m com uma mola de constante K. O sistema (carrinho) move-se com velocidade constante. Dado que a massa m encontra-se inicialmente na origem encontre $L(x, \dot{x}, t)$ e $L(x', \dot{x}', t)$.



No referencial do solo a Lagrangiana $L = T - V$ é dada por

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{K}{2} (x - v_0 t)^2 ,$$

o que é consistente com a equação de movimento

$$m \ddot{x} = -K (x - v_0 t)$$

Para acharmos H e a energia total devemos lembrar que $\mathcal{H} = p_x \cdot \dot{x} - L$ (aula anterior) onde $p_x = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\dot{x}$

<u>Portanto</u>

$$\mathcal{H} = p_x \cdot \frac{p_x}{m} - \left(\frac{p_x^2}{2m}\right) + \frac{K}{2}(x - v_0 t)^2$$

$$= \frac{p_x^2}{2M} + \frac{K}{2}(x - v_0 t)^2$$

Como L depende explicitamente do tempo

H não será constante de movimento.

De fato, temos que $\frac{dH}{dt}$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{p_x}{m} \cdot \dot{p}_x + \frac{2K}{2}(x - v_0 t)(\dot{x} - v_0)$$

mas uma vez que

$$m\ddot{x} = -K(x - v_0 t)$$

ou

$$\dot{p}_x = -K(x - v_0 t)$$

temos que

$$\frac{dH}{dt} = \dot{x}\left[-K(x - v_0 t) + K(x - v_0 t)\right]$$

$$- K v_0 (x - v_0 t)$$

e então

$$\frac{dH}{dt} = -v_0 K (x - v_0 t) \neq 0.$$

Portanto H não é constante de movimento.

Mas neste caso, H é a energia total

pois

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{K}{2} (x - v_0 t)$$

e como $\dot{x} = \frac{p_x}{m}$

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{K}{2} (x - v_0 t),$$ que

é a mesma expressão para H obtida

anteriormente.

Vamos agora formular / calcular a lagrangeana e Hamiltoniana em termos da variável x'.

$$L(x', \dot{x}') = \frac{m \dot{x}'^2}{2} + m \dot{x}' v_0 + \frac{m v_0^2}{2} - \frac{K x'^2}{2}$$

Repetindo os passos anteriores, temos

$$p_{\dot{x}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'}\right) = m \dot{x}' + m v_0$$ e

$$H = p_x' \cdot \dot{x}' - L$$

$$= \frac{1}{2m} (p_x' - m v_0)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{K}{2} x'^2$$

Como L não depende explicitamente do tempo

$\frac{dH}{dt} = 0$ e H = cte de movimento.

Porém neste caso $E \neq H$ pois

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{k}{2} (x - v_0 t)^2$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{x}' + v_0)^2 + \frac{k}{2} x'^2$$

ou ainda usando a relação $\dot{x}' + v_0 = \frac{p_x'}{m}$

e reescrevemos-a como

$$E = \frac{p_x'^2}{2m} + \frac{k}{2} x'^2$$ que é diferente

de $H = \frac{1}{2m} (p_x' - m v_0)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{k}{2} x'^2$.