

*Geometria Analítica*

**Produto Misto**

**Prof. Dr. Lucas Barboza Sarno da Silva**

# *Produto Misto*

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \\ \vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \\ \vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k} \end{array} \right.$$

Representação:  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$  ou  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

## Exercício

Calcular o produto misto dos vetores:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k} \\ \vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{w} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} \end{array} \right.$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Resposta: } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

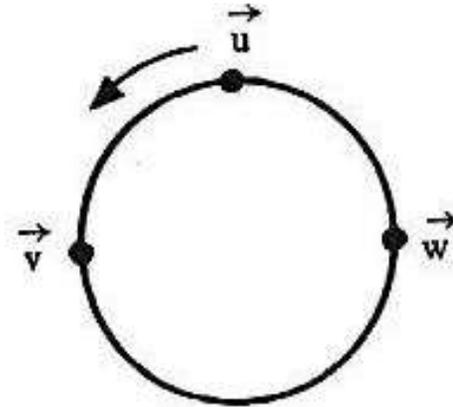
# *Propriedades do Produto Misto*

I)  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

- se um dos vetores é nulo
- se dois deles são colineares
- se os três são coplanares

II) O produto misto independe da ordem circular dos vetores, isto é:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$$



Entretanto, o produto misto muda de sinal quando se trocam as posições de dois vetores consecutivos, isto é:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$$

$$\text{III) } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{r}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$$

$$\text{IV) } (\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w}) = (\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}) = (\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

## Exemplos

1) Verificar se são coplanares os seguintes vetores:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = (3, -1, 4) \\ \vec{v} = (1, 0, -1) \\ \vec{w} = (2, -1, 0) \end{array} \right.$$

## Exemplos

2) Qual deve ser o valor de  $m$  para que os vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  sejam coplanares?

$$\vec{a} = (m, 2, -1)$$

$$\vec{b} = (1, -1, 3)$$

$$\vec{c} = (0, -2, 4)$$

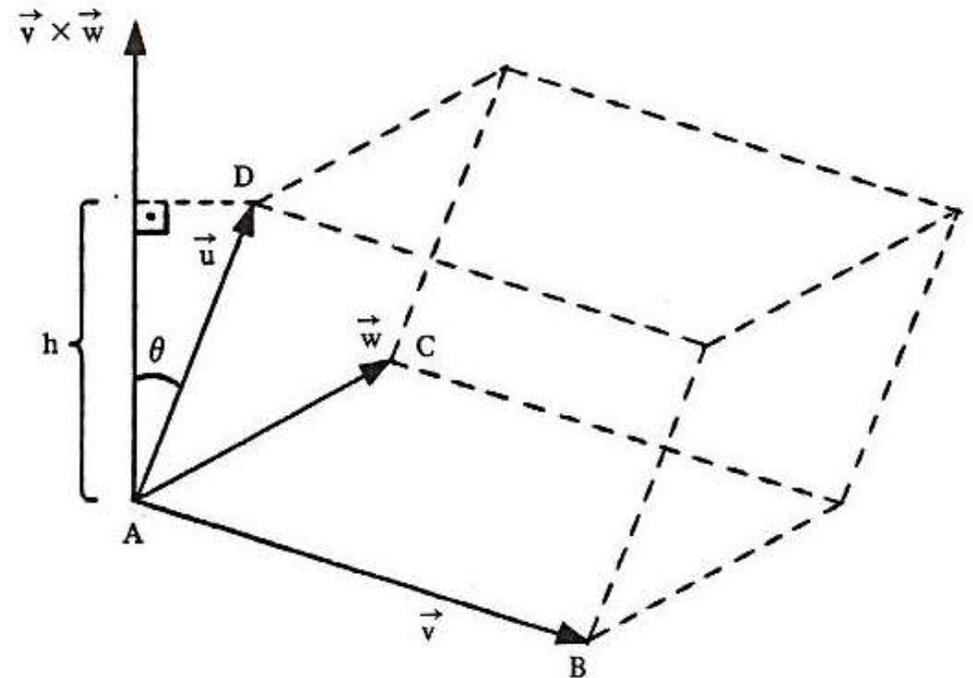
## *Exemplos*

3) Verificar se  $A(1, 2, 4)$ ,  $B(-1, 0, -2)$ ,  $C(0, 2, 2)$  e  $D(-2, 1, -3)$  estão no mesmo plano.

# *Interpretação geométrica do módulo do Produto Misto*

Geometricamente, o módulo do produto misto  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$  é igual ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores  $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ .

$$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$



## Exemplos

1) Dados os vetores  $\vec{u} = (x, 5, 0)$ ,  $\vec{v} = (3, -2, 1)$  e  $\vec{w} = (1, 1, -1)$ , calcular o valor de  $x$  para que o volume do paralelepípedo determinado por  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  seja 24 u.v. (unidades de volume).